

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA PARA PROBLEMAS DE ESTADO
PLANO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

ENIO CARLOS DO AMARAL

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
OUTUBRO – 2004**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA PARA PROBLEMAS DE ESTADO
PLANO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

ENIO CARLOS DO AMARAL

“Tese apresentada ao Centro de Ciências e
Tecnologia da Universidade Estadual do
Norte Fluminense, como parte das
exigências para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Civil”

Orientadora: Professora Vânia José Karam

Co-orientador: Professor Gines Arturo Santos Falcon

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
OUTUBRO – 2004**

Dedico esta conquista aos meus pais, Nilza Carlos e Romualdo Amaral, que sempre me apoiaram em tudo, Também a meus irmãos Ângela, Rose Mere e Eloi, pela amizade verdadeira. A minha esposa Maria, pelo amor e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Sem o imprescindível apoio e colaboração de várias pessoas e entidades este trabalho não poderia ser realizado. A estas pessoas, dedico toda minha gratidão.

A professora e amiga Vânia José Karam , pela dedicação na orientação deste trabalho.

Ao professor e amigo Gines Arturo Santos Falcon, pela orientação e amizade.

Aos professores de Pós-Graduação do LECIV, pelo apoio e pelo embasamento teórico, transmitido no decorrer do curso.

Aos meus colegas do curso: Marcos, Mario, Vítor, Rodrigo, Francisco, Leandro Gustavo e Ricardo, pelo companheirismo e troca de conhecimentos.

Aos funcionários do Centro de Ciências e Tecnologia, em especial aos funcionários do LECIV pelo apoio e incentivo.

À FAPERJ pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar um método que permita, mediante o emprego de técnicas de otimização de forma e utilizando o método dos elementos de contorno, reduzir a concentração de tensões em problemas de estado plano. Procura-se, de modo iterativo, a forma ótima do contorno, no qual resulta uma distribuição de tensões o mais próximo possível da ideal. Na medida em que o procedimento tende a uniformizar a distribuição de tensões no contorno, o mesmo acarreta uma maior economia de material.

Com esta finalidade, é definido um modelo que integra técnicas de modelagem do projeto ótimo, implantação de códigos computacionais para definição automática de dados para análise estrutural via método dos elementos de contorno, implementação de técnicas de análise de sensibilidade e implementação das rotinas que fazem as interfaces entre o analisador estrutural, o módulo de análise de sensibilidade e o otimizador.

São apresentadas as expressões utilizadas para análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos de contorno e, em seguida, são descritas as técnicas do processo de otimização pelo método de pontos interiores. A análise de sensibilidade é feita utilizando o método das diferenças finitas e são usadas curvas B-splines para definir a aproximação do contorno. Alguns exemplos numéricos são apresentados para mostrar a validade da metodologia proposta.

ABSTRACT

The objective of the present work is to present a method that allows, by employing shape optimization techniques, the reduction of stress concentration in plane elastic problems. The optimum shape of the boundary is looked for in iterative way and this results in a stress distribution very next to the ideal. The procedure tends to uniformize the stress distribution at the boundary and, in addition, it generally leads to material savings.

With this purpose, a model is defined that integrates techniques of modeling the optimum design, implementation of computational codes for automatic definition of data for structural analysis via the boundary element method, implementation of techniques of sensitivity analysis and implementation of routines that make the interfaces between the structural analyzer, the sensitivity analysis module and the optimizer.

Expressions used to analyze two-dimensional problems by the boundary element method are presented and, in following, the techniques of the optimization process by the interior point method are described. The sensibility analysis is carried out using the finite difference method and B-spline curves are employed in order to define the contour approximation. Some numerical examples are presented to show the validity of the proposed methodology.

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 2

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Painel sob a ação de forças | 11 |
| Figura 2.2 – Regiões $\Omega \cup \Gamma$ e $\Omega^* \cup \Gamma^*$ | 15 |
| Figura 2.3 – Ponto ξ no contorno | 20 |
| Figura 2.4 – Contorno Γ discretizado em elementos de contorno | 23 |
| Figura 2.5 – Sistema local de coordenadas tangente a um ponto do contorno | 29 |

Capítulo 3

| | |
|--|----|
| Figura 3.1 – Fluxograma geral para o processo iterativo de otimização de forma | 36 |
| Figura 3.2 – Região Viável | 39 |
| Figura 3.3 – Contorno suavizado por curvas B - Spline | 45 |

Capítulo 4

| | |
|---|----|
| Figura 4.1 – Chapa com furo centrado | 49 |
| Figura 4.2 – Geometria e condições de contorno de um quadrante da chapa | 49 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.3 – Discretização do contorno da chapa | 50 |
| Figura 4.4 – Variação da função objetivo na chapa | 51 |
| Figura 4.5 – Variação das tensões de von Mises ao longo do contorno da chapa | 52 |
| Figura 4.6 – Painel com a forma alterada após o processo de otimização | 53 |
| Figura 4.7 – Filete em uma barra tracionada | 54 |
| Figura 4.8 – Geometria, condições de contorno e carregamento da parte hachurada da barra | 54 |
| Figura 4.9 – Discretização do contorno da barra | 55 |
| Figura 4.10 – Variação da função objetivo na barra | 56 |
| Figura 4.11 – Filete com redução da área após o processo de otimização | 56 |
| Figura 4.12 – Variação das tensões de von Mises ao longo do contorno da barra | 57 |
| Figura 4.13 – Geometria, condições de contorno e carregamento do pórtico plano | 58 |
| Figura 4.14 – Discretização do contorno do pórtico | 59 |
| Figura 4.15 – Variação da função objetivo no pórtico | 59 |
| Figura 4.16 – Variação das tensões de von Mises ao longo do contorno do pórtico | 60 |
| Figura 4.17 – Geometria final do pórtico | 61 |

LISTA DE TABELAS

Capítulo 4

| | |
|--|----|
| Tabela 4.1 – Direção de busca para os pontos de controle da chapa | 50 |
| Tabela 4.2 – Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle da chapa | 51 |
| Tabela 4.3 – Direção de busca para os pontos de controle da barra | 55 |
| Tabela 4.4 – Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle da barra | 55 |
| Tabela 4.5 – Direção de busca dos pontos de controle do pórtico | 59 |
| Tabela 4.6 – Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle do pórtico | 61 |

NOTAÇÕES USADAS NO TEXTO

Ω - Domínio

Γ_u - Parte do contorno onde há deslocamentos prescritos

Γ_p - Parte do contorno onde há forças prescritas

Γ - Contorno Total ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$)

x_j - Eixos coordenados

σ_{ij} - Componentes do tensor de tensões

u_i - Componentes do vetor de deslocamentos.

p_i - Componentes do vetor de forças de contorno

b_j - Componentes do vetor de forças de domínio

n_j - Co-senos diretores da normal apontando para fora do corpo

ε_{ij} - Componentes do tensor de deformações específicas de Cauchy

C_{ijkl} - Tensor isotrópico de quarta ordem de constantes elásticas

E - Módulo de elasticidade longitudinal

G - Módulo de elasticidade transversal

ν - Coeficiente de Poisson

u_{ij}^* - Componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental

p_{ij}^* - Componentes do tensor de forças de contorno da solução fundamental

ξ - Ponto fonte

x - Ponto campo

$r = r(\xi, x)$ = Distância entre os pontos ξ e x

$\bar{\sigma}$ - Tensão equivalente de von Mises

$v(s)$ - Curva parametrizada (vetor posição ao longo da curva)

r - Grau da curva B-Spline, que independe do número de pontos de controle

$B_{i,r}$ - Funções peso das curvas B-splines associados aos pontos de controle

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ - Variáveis de projeto

$F(x)$ - Função objetivo

$g(x)$ - Restrições de desigualdade

$h(x)$ - Restrições de igualdade

SUMÁRIO

Capítulo I - INTRODUÇÃO

| | |
|---|---|
| 1.1. Generalidades | 1 |
| 1.2. Estado da Arte | 1 |
| 1.2.1. Método dos Elementos de Contorno | 1 |
| 1.3. Análise Estrutural | 6 |
| 1.4. Objetivos | 8 |
| 1.5. Organização do trabalho | 9 |

Capítulo II - ANÁLISE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

| | |
|--|----|
| 2.1. Introdução | 10 |
| 2.2. Relações básicas da Elasticidade Linear para problemas bidimensionais | 10 |
| 2.3. Método dos Elementos de Contorno | 14 |
| 2.3.1. Obtenção da equação integral para pontos internos | 15 |
| 2.3.2. Solução fundamental | 18 |
| 2.3.3. Tensões em pontos internos | 19 |
| 2.3.4. Equação Integral para pontos do contorno | 20 |

| | |
|--------------------------------------|----|
| 2.3.5. Implementação numérica | 22 |
| 2.3.6. Tensões em pontos do contorno | 28 |

Capítulo III – PROJETO ÓTIMO

| | |
|---|----|
| 3.1. Introdução | 31 |
| 3.2. Otimização estrutural | 33 |
| 3.3. Programação matemática. | 40 |
| 3.3.1. Conceitos e definições | 40 |
| 3.3.2. Método de pontos interiores | 43 |
| 3.3.3. Modelagem geométrica do contorno | 43 |

Capítulo 4 – APLICAÇÕES

| | |
|-----------------------------------|----|
| 4.1. Introdução | 48 |
| 4.2. Exemplo 1- Chapa com furo | 48 |
| 4.3. Exemplo 2 – Barra com filete | 53 |
| 4.4. Exemplo 3 – Pórtico plano | 58 |

Capítulo 5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1. Introdução 62

5.2. Conclusões e Observações 62

5.3. Sugestões 63

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 65

Capítulo I

INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades

A otimização de forma ocupa, hoje, um papel de destaque entre os projetos estruturais. Um grande contingente de pesquisadores despendem grandes esforços na busca de técnicas de otimização mais eficazes. Estes métodos têm por objetivo modificar a forma do contorno de uma estrutura submetida a restrições prescritas, de forma que seja possível, dessa forma, reduzir os custos ou melhorar a funcionalidade de uma estrutura.

Os movimentos do contorno da estrutura são controlados por um grupo de parâmetros geométricos, gerados por variáveis de projeto, definidas para formulação de um modelo de projeto. O contorno, após a otimização, apresentará, contudo, forma irregular. Para contornar este problema, são freqüentemente utilizadas curvas B-Splines ou de Bézier, que proporcionam um contorno suave e contínuo à estrutura.

Para cálculo da função objetivo e das restrições, que geralmente são funções implícitas das variáveis de projeto, faz-se necessário o uso de um programa de análise estrutural. Neste trabalho, o Método dos Elementos de Contorno (MEC), foi utilizado para o cálculo das tensões e deslocamentos nas estruturas.

1.2. Estado da Arte

1.2.1. Método dos Elementos de Contorno

A partir de 1960, houve grandes avanços nos estudos dos conceitos de análise estrutural e de otimização, estimulando o estudo das técnicas de programação matemática, proporcionado pelo rápido desenvolvimento dos computadores. Com o passar dos anos, deu-se início ao estudo de algoritmos de otimização e de análise estrutural baseados no método dos elementos de contorno (MEC).

Yang (1990) apresentou uma formulação para obtenção da sensibilidade dos deslocamentos, através da diferenciação direta da equação integral básica de contorno. Uma identidade especial foi usada para remover todas as integrais singulares das equações de sensibilidade. As sensibilidades das tensões foram obtidas pela diferenciação da função de forma em cada elemento de contorno, como na análise por elementos finitos. Um procedimento modular para otimização de forma usada no contexto de elementos finitos foi empregada para os elementos de contorno. A flexibilidade do procedimento modular permitiu que fossem utilizadas as vantagens do método dos elementos de contorno. Uma chapa bidimensional infinita com um furo elíptico e um filete bidimensional foram otimizados para demonstrar o uso do procedimento.

Choi e Kwak (1998) apresentaram o desenvolvimento de uma formulação direta da equação integral de contorno como método geral para análise de sensibilidade de forma, com aplicações para problemas de elasticidade plana, usando o conceito da derivada material e o método de variável adjunta. Um estudo completo é feito para descrever a variação do contorno, incluindo a componente tangencial do campo de velocidade. Dois exemplos são considerados para ilustrar a implementação numérica da fórmula de sensibilidade para o funcional de tensão. O primeiro problema considerado foi o problema do filete, no qual a precisão da sensibilidade é comparada usando elementos de contorno linear e quadrático. O segundo problema consistiu em encontrar a forma ótima do contorno interno de um anel elástico submetido à compressão diametral, onde o efeito do uso de diferentes funções características é estudado.

Sandgren e Wu (1988) apresentaram aplicações do método dos elementos de contorno para otimização de forma em estruturas bidimensionais e tridimensionais. Os deslocamentos e tensões foram calculados, usando o método dos elementos de contorno. O subestruturamento foi usado para isolar a parcela da estrutura que sofre mudança de geometria. O correspondente problema de programação não linear é resolvido pelo método do gradiente reduzido generalizado. Curvas e superfícies B-spline são introduzidas para descrever a forma do projeto. Os pontos de controle dessas curvas ou superfícies são selecionados como variáveis de projeto. O objetivo do projeto foi minimizar a espessura ou picos de tensão do componente estrutural estudado, determinando a forma ótima, sujeito a restrições de geometria e de tensão. O método foi aplicado com sucesso na otimização estrutural de forma para problemas de elasticidade bidimensionais e tridimensionais. Eles apresentaram como aplicação um gancho sujeito a restrições de geometria e tensões. O objetivo do projeto foi minimizar a área da seção transversal do gancho, com a finalidade de se obter a seção ótima. O problema foi analisado pelo método de análise de subestruturamento com o método dos elementos de contorno.

Tafreshi e Fenner (1991) comentaram sobre diferentes métodos para representação da forma de estruturas, tais como o uso de modelos de elementos finitos em nós do contorno, que tem aproximação simples e requer a geração de malha durante o processo de otimização. Contudo este método aumenta o número de variáveis de projeto, e a descontinuidade entre os nós do contorno gera projetos inapropriados e malhas inadequadas durante o processo de otimização. Outro método apresentado, foi o uso de polinômios para representar o contorno. Este reduz o número de variáveis de projeto, contudo, pode gerar formas oscilatórias para contornos mais complexos, quando polinômios de ordem superiores forem usados. Outra aproximação é o uso de spline ou funções de splines combinadas, que reduzem as dificuldades das formas de contorno oscilatórias com polinômios de ordem superior. Por fim, descrevem uma

aproximação geral para projetos de forma ótima de estruturas, fazendo uso generalizado das formas ótimas de contorno, definidas da spline cúbica hermitiana, que é um flexível e compacto método para definir geometrias do contorno, usando um número pequeno de variáveis e as restrições geométricas adicionais que são geralmente necessárias para evitar projetos impraticáveis são automaticamente consideradas.

Tafreshi e Fenner (1993) utilizaram uma diferenciação direta da equação integral de contorno com respeito às variáveis de projeto geométricas para calcular sensibilidade de forma. Isto permitiu a união de uma técnica de otimização e um analisador de tensão elástica de elementos de contorno, formando um algoritmo de projeto de forma ótima bidimensional. O uso de funções spline cúbicas hermitianas para representar formas do contorno oferece vantagens no processo de remalhamento automático e na adaptação de uma grande variedade de curvas. Este processo também reduziu a necessidade de restrições de otimização para evitar projetos impraticáveis durante o processo de otimização.

Yamazaki, Sakamoto e Kitano (1994) mostraram a formulação detalhada de uma técnica prática de cálculo de sensibilidade de projeto para deslocamentos e tensões, em corpos tridimensionais, baseada no método de diferenciação direta das equações integrais de contorno discretas. A técnica de cálculo de sensibilidade é aplicada para determinar a forma ótima do peso mínimo, sujeito a restrições de tensão, onde um subproblema aproximado foi construído repetidamente e resolvido seqüencialmente através de um método de programação matemática (O método do pivô complementar (Bazaraa e Shetty, 1973)). A técnica de otimização de forma sugerida foi aplicada para determinar a forma ótima de uma cavidade em um cubo e uma barra conectada.

Tafreshi e Fenner (1995) apresentaram uma proposta geral de programa computacional para otimização de forma de estruturas bidimensionais com a finalidade de suavizar picos de tensões. O programa tem três partes principais: o

analisador de tensões, o analisador de sensibilidade de projeto e o otimizador. O analisador de tensões e o analisador de sensibilidade de projeto usam o método dos elementos de contorno com elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. A geração da malha inicial e sua regeneração no método dos elementos de contorno, durante o processo iterativo de otimização, é tanto direto quanto rápido. As splines cúbicas hermitianas são bem adequadas para a representação da forma do contorno, e geometrias complexas podem ser descritas de um modo muito compacto com um pequeno número de variáveis de projeto. Aplicações para otimização de forma de pórticos planos, de filetes em barras e furos em chapas foram apresentadas.

Tai e Fenner (1996b) apresentaram o desenvolvimento de um procedimento de otimização, usando o método das equações integrais de contorno para domínios bidimensionais elastostáticos lineares. Problemas de projeto de forma ótima foram tratados de maneira que as variáveis de projeto eram parâmetros geométricos. Um procedimento inteiramente analítico foi adotado para a análise de sensibilidade, onde a equação integral de contorno foi implicitamente diferenciada. A habilidade para avaliar as respostas de sensibilidade das derivadas em relação às variáveis de projeto, tais como as posições características, é conseguida através da definição de campos de velocidade de projeto apropriados para essas variáveis. As vantagens do método das equações integrais de contorno são ampliadas quando estendidas para análise de sensibilidade para essas categorias de problemas de projeto de forma. Uma abordagem de programação matemática com o método da penalidade foi usada para resolver o problema de otimização.

Phan , Mukherjee e Mayer (1998) apresentaram novas formulações para calcular tensões, bem como, suas sensibilidades em elasticidade linear bidimensional, pelo método dos elementos de contorno. Estas formulações são diretamente estabelecidas a partir da versão de elementos de contorno da equação integral de contorno hipersingular, na qual pode fornecer resultados

numéricos precisos e é muito eficiente com respeito à implementação numérica e ao custo computacional. Os coeficientes de sensibilidade de projeto calculados com a formulação acima são acoplados então a um método de programação matemática. Este algoritmo de programação quadrática sucessiva funciona para resolver problemas de otimização de forma.

Tai e Fenner (1996a) mostraram o desenvolvimento de um procedimento para otimização de estruturas contínuas bidimensionais elásticas lineares. Uma abordagem intuitiva é apresentada para tratar tais problemas topológicos por meio da qual o material é eliminado de dentro da estrutura (pela introdução de furos nas regiões de baixa tensão)através de uma seqüência de processos de otimização de forma. Uma técnica de programação matemática juntamente com o método dos elementos de contorno para análise de respostas de sensibilidade, permitiu o posicionamento ótimo destes furos e a otimização da forma estrutural total. A derivação analítica da formulação dos elementos de contorno foi explicada junto com o uso de campos de velocidade de projeto apropriados.

1.3. Análise Estrutural

Nos últimos anos, surgiram técnicas de análise estrutural mais genéricas e precisas, tais como o Método Matricial para análise de estruturas reticuladas, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), e técnicas de programação matemática. Essas técnicas proporcionaram rápido desenvolvimento às técnicas de otimização estrutural.

A análise matricial de estruturas reticuladas considera a discretização de uma estrutura em elementos lineares tipo barra, gerando um sistema de equações que resulta da aplicação das equações de equilíbrio aos nós da estrutura. As incógnitas são os deslocamentos nodais e seus valores são calculados a partir das forças atuantes nos nós e da matriz de rigidez da estrutura. A solução obtida neste sistema é exata. Esta técnica é bastante utilizada em análise de estruturas

metálicas e estruturas de edificação, onde a discretização dos pórticos é praticamente imediata a partir das vigas e colunas. Porém, para análise de estruturas contínuas com geometrias complexas, surge a necessidade de novas técnicas de análise estrutural, como o MEF e o MEC.

No Método dos Elementos Finitos (Bathe, 1982), consideram-se equações escritas com integrais em que o domínio de integração é o domínio da região a ser analisada. Este domínio é discretizado em vários elementos, chamados elementos finitos. Utiliza-se uma função de aproximação para as funções que devem ser integradas em cada elemento e os valores das funções envolvidas, em um ponto qualquer do elemento, são interpolados a partir dos valores nodais. As integrais nos elementos podem ser calculadas numericamente e forma-se, então, um sistema de equações algébricas que é resolvido para os valores nodais incógnitos. Valores de outras funções nos elementos podem ser calculados a partir dos valores obtidos na resolução do sistema de equações.

No Método dos Elementos de Contorno (Brebbia et al, 1984), consideram-se equações escritas com integrais em que o domínio de integração é o contorno da região a ser analisada. Este contorno é, então, discretizado em vários elementos, chamados elementos de contorno. Caso existam algumas integrais de domínio nessas equações, devem-se considerar células internas, mas apenas na parte do domínio em que isso se fizer necessário. Estes elementos e células devem ter um ou mais pontos nodais, sendo os valores das funções envolvidas interpolados, em cada elemento ou célula, a partir dos valores nodais. As integrais nos elementos e células podem ser calculadas numericamente, sendo que, no caso de integrais singulares, são necessários procedimentos especiais. Monta-se um sistema de equações algébricas que é resolvido para as incógnitas do problema. A partir dos valores conhecidos no contorno, podem ser calculados, também por meio de equações integrais discretizadas envolvendo integrais de contorno, os valores em qualquer ponto do domínio analisado. Neste método, utiliza-se uma solução fundamental para o problema e os resultados em pontos

internos, das funções obtidas por derivação, são bastante precisos, pois derivam-se os tensores da solução fundamental, a qual é exata.

Ambos os métodos vêm se mostrando eficientes em uma grande diversidade de problemas práticos, sendo a escolha de um ou de outro dependente da natureza do problema e também de outros fatores como capacidade de memória dos equipamentos utilizados e rapidez da análise.

Deve-se, entretanto, enfatizar que o Método dos Elementos de Contorno, em geral, possui certas vantagens, tais como: menor volume de dados de entrada, por não necessitar discretização do domínio; o fato de que, mesmo quando necessária a utilização de células internas para resolver integrais de domínio que eventualmente possam existir nas equações, estas não precisam ser consideradas em todo o domínio do problema; grande eficiência na resolução de problemas onde existe concentração de tensões e também nos casos de domínio infinito.

Sendo assim, o Método dos Elementos de Contorno tem sido desenvolvido para a análise de diversos tipos de problemas e, na área de Estruturas, sua importância é bastante significativa.

1.4. Objetivos

Este trabalho tem por finalidade o desenvolvimento de um ambiente computacional para otimização de forma de estruturas contínuas bidimensionais utilizando técnicas de programação não linear e o Método dos Elementos de Contorno para cálculo das respostas mecânicas da estrutura. Para isso, são realizados estudos e implementação de programas computacionais necessários, bem como a análise dos resultados numéricos gerados por estes programas.

A formulação e os critérios são destinados à solução de problemas que envolvam a minimização das concentrações de tensões no contorno do problema a ser analisado ou em algumas partes do contorno (minimização dos resíduos quadrados das tensões de von Mises). O corpo está submetido a vários estados de carga e utiliza-se o método de Ponto Interior proposto por Herkovits (1992) para otimizar os funcionais.

1.5. Organização do Trabalho

Com a finalidade de apresentar os assuntos abordados neste trabalho, este foi dividido em capítulos, como segue:

Capítulo 1. Consiste na introdução do assunto que será tratado.

Capítulo 2. Consiste na descrição da formulação do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas bidimensionais.

Capítulo 3. Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos de otimização estrutural, bem como alguns fundamentos de programação matemática utilizados neste trabalho.

Capítulo 4. Apresentam-se, neste, algumas aplicações em estruturas no estado plano de tensões com os resultados numéricos obtidos a partir do programa desenvolvido durante o processo de elaboração deste trabalho.

Capítulo 5. Este capítulo contém as conclusões do trabalho apresentado, bem como sugestões para a continuação do mesmo.

No decorrer do texto, será usada a notação cartesiana indicial, com os índices variando de 1 a 2 e a vírgula indicando derivada.

Capítulo II

ANÁLISE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as fórmulas básicas para a análise estrutural de problemas bidimensionais de estado plano de deformação e de tensão pelo método dos Elementos de Contorno. São apresentadas inicialmente as fórmulas básicas da elasticidade linear e as equações integrais que, após discretizadas, permitem montar o sistema de equações para obtenção dos deslocamentos e forças de superfície incógnitos. Expressões para cálculo das tensões no domínio e no contorno são também apresentadas. Os valores calculados das tensões no contorno serão utilizados durante o processo de otimização, para o cálculo das tensões equivalentes de von Mises, que são utilizadas na função objetivo do problema a ser otimizado. Estes valores de tensões serão atualizados em cada etapa do processo iterativo, assim como as coordenadas dos pontos da parte do contorno que será otimizada.

2.2. Relações básicas da Elasticidade Linear para problemas bidimensionais

Na figura 2.1, é esquematizado um painel situado no plano $x_1 - x_2$, sujeito à aplicação de forças de contorno e de domínio e também sujeito a deslocamentos prescritos no contorno, sendo:

Ω - Domínio

Γ_u - Parte do contorno (superfície) onde há deslocamentos prescritos

Γ_p - Parte do contorno onde há forças prescritas

Γ - Contorno Total ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$)

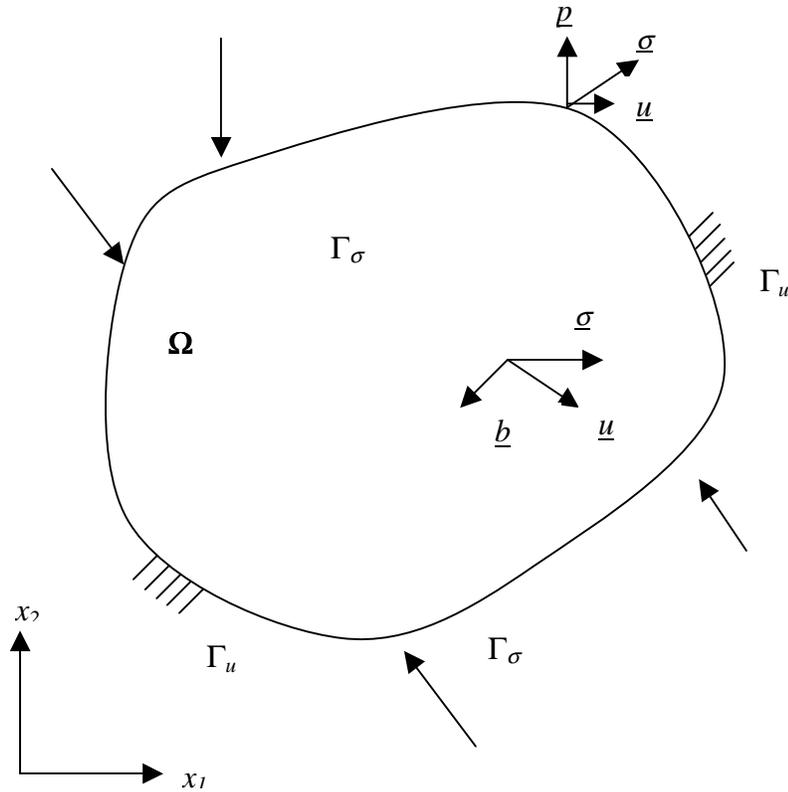


Figura 2.1 - Painel sob a ação de forças.

Em um ponto qualquer do domínio, atuam :

\underline{u} – deslocamentos

\underline{b} - forças de domínio

$\underline{\sigma}$ - tensões

Em um ponto qualquer do contorno, atuam:

\underline{u} - deslocamentos

\underline{p} - forças de contorno

$\underline{\sigma}$ - tensões

As equações de equilíbrio estático no interior Ω do problema são representadas por:

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

sendo:

σ_{ij} - Componentes do tensor de tensões

b_j - Componentes do vetor de forças de domínio

e as equações de equilíbrio estático no contorno Γ , por :

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.2)$$

onde:

p_i - Componentes do vetor de forças de contorno

n_j - co-senos diretores da normal apontando para fora do corpo

As equações de compatibilidade de deslocamentos são expressas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

onde:

ε_{ij} – Componentes do tensor de deformações específicas de Cauchy

u_i – Componentes do vetor de deslocamentos.

Para um material elástico isotrópico, onde não existem mudanças de temperatura, a lei de Hooke fornece as seguintes relações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

onde:

G – módulo de elasticidade transversal

ν - coeficiente de Poisson

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

com

E - módulo de elasticidade longitudinal

A equação (2.4) pode, ainda, ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.6)$$

sendo C_{ijkl} o tensor isotrópico de quarta ordem de constantes elásticas, expresso por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.7)$$

Estas fórmulas são válidas para problemas de estado plano de deformação e de estado plano de tensão, desde que, para este último, ν seja substituído por:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{(1+\nu)} \quad (2.8)$$

Substituindo a eq. (2.3) na eq. (2.4) e, em seguida, substituindo o resultado nas equações (2.1) e (2.2), são obtidas as equações de equilíbrio de Navier:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (2.9)$$

válidas para o domínio Ω , e também as equações para as forças de superfície no contorno:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = p_i \quad (2.10)$$

2. 3. Método dos Elementos de Contorno

Seja uma região $\Omega \cup \Gamma$ em estado de equilíbrio, sob a ação de cargas e deslocamentos prescritos. Tem-se, neste caso: σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , p_i e b_i .

Seja também uma região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ que contém a região $\Omega \cup \Gamma$ (ver figura (2.2)), também em equilíbrio. Neste caso, tem-se: σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* e b_i^* .

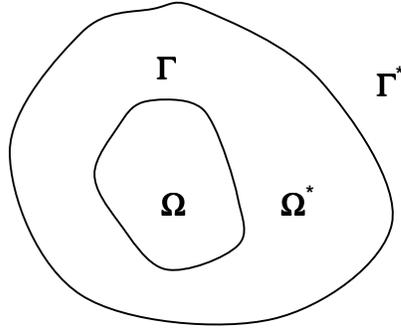


Figura 2.2 – Regiões $\Omega \cup \Gamma$ e $\Omega^* \cup \Gamma^*$

2.3.1. Obtenção da equação integral para pontos internos

Considerando as expressões:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.11)$$

$$\sigma^*_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon^*_{kl} \quad (2.12)$$

pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon^*_{ij} \quad (2.13)$$

ou, ainda,

$$\sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{kl} (C_{ijkl} \varepsilon^*_{ij}) \quad (2.14)$$

Como $C_{ijkl} = C_{klij}$, tem-se:

$$\sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{kl} (C_{ijkl} \varepsilon^*_{ij}) = \varepsilon_{kl} \sigma^*_{kl} \quad (2.15)$$

Considerando-se a equação acima e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (2.16)$$

Integrando por partes ambos os lados e usando o teorema da divergência, chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* u_i n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_i \sigma_{ij,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_i^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_i^* \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (2.17)$$

Logo:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (2.18)$$

Esta equação corresponde ao segundo teorema de Betti (Teorema da Reciprocidade).

Considerando que as componentes das forças de volume b_i^* correspondem a forças unitárias concentradas aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$ em cada uma das duas direções ortogonais definidas pelos vetores de componentes p_j , tem-se:

$$b_j^* = \delta(\xi, x) p_j \quad (2.19)$$

onde:

$$p_j = 1$$

$\delta(\xi, x)$ = função delta de Dirac

Tendo em vista que:

$$\delta(\xi, x) = 0 \quad \text{para } \xi \neq x \quad (2.20)$$

$$\delta(\xi, x) = \infty \quad \text{para } \xi = x \quad (2.21)$$

tem-se

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \quad (2.22)$$

Então:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) p_i = u_1(\xi) + u_2(\xi) + u_3(\xi) \quad \text{para } \xi \in \Omega. \quad (2.23)$$

Considerando cada carga concentrada atuando independentemente, os deslocamentos e forças de superfície podem ser escritos na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) p_i \quad (2.24)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) p_i$$

onde u_{ij}^* e p_{ij}^* representam o deslocamento e a força de superfície, respectivamente, na direção j do ponto x correspondentes a uma força unitária atuando na direção i aplicada no ponto ξ .

Alternativamente, pode-se escrever a equação (2.16) para representar cada componente de deslocamento em separado. Isto fornece duas equações da forma:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é conhecida como Identidade Somigliana para deslocamentos.

Esta equação foi obtida através da reciprocidade com a solução singular da equação de Navier satisfazendo a:

$$Gu_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \delta(\xi, x)p_j = 0 \quad (2.26)$$

As soluções desta equação são chamadas de soluções fundamentais.

2.3.2. Solução Fundamental

Existem soluções diferentes da equação (2.15) que podem ser igualmente empregadas. Estas soluções variam tanto em relação à região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ como também em relação às condições de contorno.

Só serão abordadas as soluções de Kelvin que correspondem ao espaço infinito, cujas componentes de deslocamentos são dadas por:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (2.27)$$

para estado plano de deformação e de forças de superfície, por:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\} \quad (2.28)$$

onde:

$$r = r(\xi, x) = (r_i r_i)^{1/2} = \text{distância entre os pontos } \xi \text{ e } x \quad (2.29)$$

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (2.30)$$

$$r_n = \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.31)$$

sendo:

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (2.32)$$

Para estado plano de tensão, deve-se substituir v por \bar{v} definido na equação (2.8).

Deve-se observar que, para $r=0$, u^*_{ij} e p^*_{ij} possuem singularidades com as ordens seguintes:

$$u^*_{ij} = 0 (\ln r)$$

$$p^*_{ij} = 0 (r^{-1})$$

2.3.3. Tensões em pontos internos

A equação (2.25) é uma representação contínua de deslocamentos em pontos do interior do corpo. Logo, as componentes de tensões internas podem ser determinadas se derivando-se esta equação em relação às coordenadas do ponto ξ para obter as deformações específicas e, então, substituir o resultado na equação (2.4). A expressão final é dada por:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u^*_{ijk}(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p^*_{ijk}(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*_{ijk}(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (2.33)$$

sendo

$$u_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \quad (2.34)$$

$$p_{ijk}^* = \frac{1}{2\pi(1-\nu)r^2} \{2r_{,n}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] +$$

$$+ 2\nu(n_{,i}r_{,j}r_{,k} + n_{,j}r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_{,k}r_{,i}r_{,j} + n_{,j}\delta_{ik} + n_{,i}\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_{,k}\delta_{ij}\} \quad (2.35)$$

Deve-se observar que já foi considerado que:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (2.36)$$

2.3.4. Equação Integral para pontos do contorno

A identidade Somigliana não pode ser empregada para obter os deslocamentos (ou tensões) enquanto não forem calculados os valores de deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno (forças de domínio são consideradas sempre conhecidas). Portanto, é necessário tirar o limite quando o ponto ξ vai para o contorno, como esquematizado na figura 2.3.

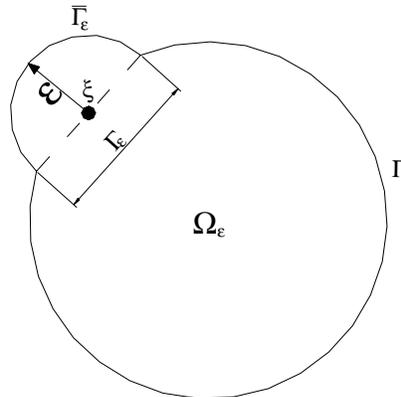


Figura 2.3 – Ponto ξ no contorno.

Neste caso, a equação integral para os deslocamentos no ponto ξ fica:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (2.37)$$

Pode-se estudar o limite de cada integral desta equação quando ε (ver figura 2.3) tende a 0.

A segunda integral de (2.37) pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (2.38)$$

onde a primeira integral à direita pode ser representada por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \quad (2.39)$$

A primeira integral à direita na equação (2.39) se anula devido à continuidade de $u_j(x)$ e a segunda integral à direita fornece:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\varepsilon, x) d\Gamma(x) \quad (2.40)$$

A segunda integral à direita na equação (2.38) deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfaz a condição de Hölder, isto é:

$$|u_j(x) - u_j(\xi)| \leq Br^\alpha \quad (2.41)$$

onde B e α são constantes positivas. As integrais restantes não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas. Assim, pode-se escrever, para um ponto ξ do contorno:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)d\Omega(x) \quad (2.42)$$

onde a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy e o coeficiente $C_{ij}(\xi)$ depende da geometria do contorno no ponto ξ . Para o caso de contorno suave, obtém-se:

$$C_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (2.43)$$

As integrais de domínio relacionadas com as forças $b_j(x)$ podem ser transformadas em integrais de contorno para diversos tipos de carga. Para um ponto ξ no interior, pode-se considerar a mesma equação integral (2.42), com $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$.

2.3.5. Implementação Numérica

Seja a equação integral (2.42) com $b_j=0$ por simplificação:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (2.44)$$

e as condições de contorno:

$$u_j = \bar{u}_j \text{ em } \Gamma_u$$

$$p_j = \bar{p}_j \text{ em } \Gamma_p \quad (2.45)$$

A fim de resolver este problema para as incógnitas $u_j(x)$ e $p_j(x)$, tem-se o procedimento numérico descrito a seguir.

Considera-se o contorno Γ dividido em L elementos, nos quais u_j e p_j são calculados por interpolação dos valores nodais. Neste trabalho, são utilizados elementos isoparamétricos lineares, como mostrado na figura 2.4.

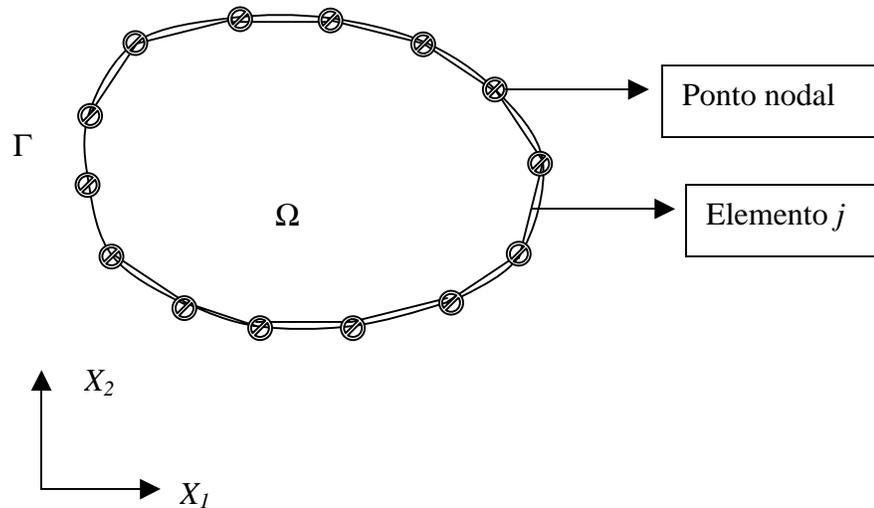


Figura 2.4 – Contorno Γ discretizado em elementos de contorno.

A equação (2.44) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal ξ de Γ , substituindo-se as integrais em Γ por somatórios de integrais em Γ_j , sendo Γ_j

o contorno de elemento j . Assim, obtém-se um sistema de N equações algébricas envolvendo N valores nodais de deslocamentos e N valores nodais de forças de superfície.

As condições de contorno (2.45) são impostas, prescrevendo-se, assim, N valores nodais. Desta forma, em cada direção nodal, prescreve-se o deslocamento ou a força de superfície.

Resolve-se o sistema para a obtenção dos N valores nodais incógnitos de deslocamentos e forças de superfície.

Os valores dos deslocamentos e das tensões em quaisquer pontos internos ξ são calculados utilizando-se as equações (2.25) e (2.33), respectivamente, também em forma discretizada, considerando-se os valores já calculados pela resolução do sistema de equações.

As coordenadas cartesianas $\underline{x}^{(j)}$ dos pontos do contorno do elemento j , ou seja, de Γ_j , são expressas em termos das funções de interpolação contidas na matriz \underline{M} e das coordenadas nodais $\underline{x}^{(m)}$ do elemento, na forma:

$$\underline{x}^{(j)} = \underline{M} \underline{x}^{(m)} \quad (2.46)$$

Analogamente, os deslocamentos e forças de superfície são aproximados em cada elemento, utilizando-se as funções de interpolação contidas em \underline{N} , na forma:

$$\underline{u}^{(j)} = \underline{N} \underline{u}^{(n)} \quad (2.47)$$

$$\underline{p}^{(j)} = \underline{N} \underline{p}^{(n)} \quad (2.48)$$

sendo $\underline{u}^{(n)}$ e $\underline{p}^{(n)}$ os vetores que contêm os deslocamentos e as forças de superfície nadas, respectivamente.

Admitindo que o contorno Γ é discretizado em L elementos de contorno Γ_j , a equação (2.44) pode ser escrita na seguinte forma discretizada:

$$\underline{C}(\xi_i) \underline{u}(\xi_i) + \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{p}^{(n)} \quad (2.49)$$

para um ponto nodal ξ_i .

As funções de interpolação são escritas, geralmente, em termos de uma coordenada adimensional η e, portanto, deve-se escrever $d\Gamma$ em relação a este sistema de coordenadas intrínseco como:

$$d\Gamma = |\underline{J}| d\eta$$

sendo $|\underline{J}|$ o jacobiano da transformação, expresso como:

$$|\underline{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (2.50)$$

As integrais regulares na equação (2.49) foram calculadas utilizando a quadratura de Gauss. As integrais singulares, que ocorrem quando $r=0$ para $\xi_i \in \Gamma_j$, foram calculadas empregando procedimentos especiais.

As integrais com singularidade logarítmica na segunda integral da equação (2.49) foram resolvidas analiticamente e as integrais com singularidade de ordem r^{-1} , que aparecem na primeira integral, foram calculadas juntamente com a

primeira parcela desta equação, com a consideração de movimentos de corpo rígido.

Para $\xi_j \notin \Gamma_j$, as integrais são calculadas por:

$$\int_{\Gamma_j} \underline{P}^* \underline{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \underline{P}^* \underline{N} |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{P}^* \underline{N})_k \quad (2.51)$$

$$\int_{\Gamma_j} \underline{U}^* \underline{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \underline{U}^* \underline{N} |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{U}^* \underline{N})_k \quad (2.52)$$

onde:

K - n^o total de pontos de integração

W_k - Fator de peso associado ao ponto de integração k .

Aplicando a equação (2.49) a todos os NN nós do contorno, obtém-se um sistema com $2NN$ equações,

$$(\underline{C} + \underline{\hat{H}}) \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (2.53)$$

onde os vetores \underline{u} e \underline{p} contêm os valores de deslocamentos e de forças de superfície, respectivamente, em todos os pontos nodais e a matriz quase diagonal \underline{c} pode ser incorporada à matriz $\underline{\hat{H}}$ para formar a matriz \underline{H} . Logo, fica:

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (2.54)$$

As submatrizes da diagonal de \underline{H} , que correspondem aos $\underline{c}(\xi_i)$ somados aos valores principais, são aqui calculados impondo-se a condição de que translações de corpo rígido correspondem a forças de superfície iguais a zero.

Adotando duas translações independentes, obtém-se:

$$\sum_{q=1}^{NN} \underline{H}_{pq} \underline{u}_q = \underline{0} \quad (2.55)$$

onde \underline{H}_{pq} representa submatrizes 2x2 de \underline{H} e $\underline{u}_q = \underline{I}$, com $q = 1, 2, \dots, NN$ e sendo \underline{I} a matriz identidade de ordem 2.

A equação (2.55) é válida apenas para corpos finitos. Esta equação permite o cálculo indireto das submatrizes da diagonal de \underline{H} , na forma:

$$\underline{H}_{\alpha\alpha} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^{NN} \underline{H}_{\alpha q} \quad \alpha = 1, 2, \dots, NN \quad (2.56)$$

Aplicando-se as condições de contorno, o sistema de equações (2.54) pode ser reordenado para a seguinte forma:

$$\underline{A} \underline{y} = \underline{f} \quad (2.57)$$

onde:

\underline{A} - matriz cheia e não simétrica, de ordem $2NN$

\underline{y} - vetor que contém os valores nodais incógnitos de deslocamentos e forças de superfície

\underline{f} - vetor que contém os valores prescritos

Deve-se salientar que, caso existam forças de domínio, as mesmas contribuirão apenas para o vetor \underline{f} , pois seus valores serão sempre conhecidos.

A matriz \underline{H} é singular para o caso de corpos finitos, pois, neste caso, $\underline{H} \underline{u} = \underline{0}$ para uma translação de corpo rígido e o sistema de equações admite soluções não triviais.

2.3.6. Tensões em pontos do contorno

Considerando os valores de p_1 e p_2 obtidos pela resolução do sistema de equações (2.57) e usando as equações de equilíbrio no contorno (2.2), forma-se um sistema com duas equações e três incógnitas (σ_{11} , σ_{12} , σ_{22}), escrito aqui na forma expandida:

$$p_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2$$

$$p_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \quad (2.58)$$

Seja agora um sistema local de coordenadas (\bar{x}_1 , \bar{x}_2) tangente ao contorno no ponto j (figura 2.5), onde se deseja calcular as tensões.

Pode-se escrever:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (2.59)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{11}$ é calculado neste trabalho em função dos deslocamentos interpolados ao longo do elemento.

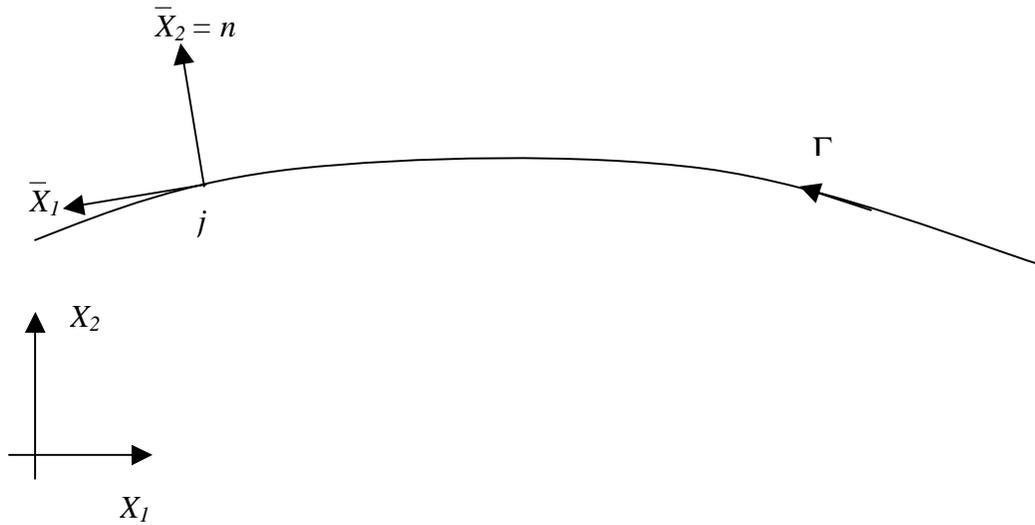


Figura 2.5 – Sistema local de coordenadas tangente a um ponto do contorno.

Usando as equações (2.58) e (2.59), pode-se calcular as tensões no contorno com referência ao sistema (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Logo, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1 \tag{2.60}$$

e, usando a equação (2.4), obtém-se, para estado plano de deformação:

$$\frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} = \bar{\varepsilon}_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{\varepsilon}_{kk} \tag{2.61}$$

ou, ainda,

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{1-\nu} \left[(1-2\nu) \frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} - \nu \bar{\varepsilon}_{11} \right] \tag{2.62}$$

Usando agora a equação (2.4) para $\bar{\sigma}_{11}$ e empregando $\bar{\varepsilon}_{22}$ calculado pela equação (2.62), chega-se a :

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu} (2G\bar{\varepsilon}_{11} + \nu\bar{\sigma}_{22}) \quad (2.63)$$

Para estado plano de tensão, deve-se substituir ν por $\bar{\nu}$ dado pela equação (2.8).

Capítulo III

PROJETO ÓTIMO

3.1. Introdução

A melhor definição para otimizar seria produzir algo com a melhor qualidade possível e com um custo mínimo. Atualmente, utilizamos o termo otimizar em vários segmentos da nossa sociedade. As técnicas de otimização não são utilizadas apenas na indústria, mas também no comércio, na agropecuária, na educação e em muitos outros segmentos.

Podemos afirmar que otimização é uma metodologia, que envolve a geração da melhor solução para um problema. Para que essa solução seja possível, é necessário definir um conjunto de critérios que delimitem este universo de prováveis soluções para o problema.

Em um modelo convencional, a experiência do projetista, que se vale da sua intuição, é fundamental para definir as configurações do sistema. Provavelmente, essa dependência do elemento humano pode conduzir a resultados insatisfatórios, em casos de sistemas mais complexos. A aplicação do modelo convencional deve se restringir a sistemas relativamente simples, que dependem de menos informações e experiência.

Atualmente, o projetista dispõe, para ajudá-lo nas tomadas de decisões, de técnicas de programação matemática. Estas ferramentas propiciam, ao projetista, aperfeiçoar ou criar produtos, obtendo resultados de maneira mais rápida e econômica.

Além disso, são utilizados métodos numéricos de análise estrutural, que consideram a estrutura discretizada em elementos e contendo pontos nodais, como é o caso do método dos elementos de contorno utilizado neste trabalho.

Na Otimização Estrutural, pode-se considerar que o projeto ótimo pode ser classificado em três classes de problemas, cada um com objetivos diferentes e metodologia própria, podendo, contudo, complementarem-se entre si, como segue:

Otimização Dimensional – Visa determinar as dimensões ótimas da estrutura. As variáveis de projeto são as dimensões do componente mecânico como, por exemplo, dimensão da área da seção transversal de barras ou espessuras de placas ou cascas.

Otimização de Forma – Procura-se a forma ótima de uma estrutura para um determinado propósito mecânico. Procura-se a localização ótima dos pontos que controlam a forma ou a geometria da estrutura no espaço. As variáveis de projeto são as coordenadas dos pontos nodais, escolhidos convenientemente, de forma a representar a geometria total da estrutura com um mínimo de variáveis de projeto.

As técnicas tradicionais para otimização de forma são baseadas em modelos de otimização que minimizam o peso estrutural com restrições, normalmente, em deslocamentos, tensões, frequências naturais, cargas de flambagem ou restrições tecnológicas. Os tratamentos mais comuns para otimização de forma fazem uso de procedimentos iterativos, baseados em algoritmos de programação matemática, que avaliam funções e restrições e suas respectivas derivadas.

Otimização Topológica - É a possibilidade de redistribuir ou até retirar material, determinando-se a localização de furos em determinadas partes de uma

estrutura. As variáveis de projeto são as relações entre elementos e pontos nodais da estrutura discretizada chamada de conectividade entre elementos.

As restrições consideradas em geral são de origem mecânica e ou geométrica. As restrições mecânicas são as respostas da estrutura às solicitações externas, tais como valores limites para tensões e deslocamentos. As restrições geométricas, por sua vez, são as relações de simetria ou de alinhamento entre elementos da estrutura impostas ao projeto.

3.2. Otimização estrutural

A otimização estrutural é uma técnica iterativa em que, a partir de uma configuração inicial do projeto, este é seguidamente modificado, buscando-se atingir uma configuração ideal ou aceitável para o sistema. O objetivo deste projeto é definir um sistema eficiente baseado na busca do mínimo custo, visando, contudo, não afetar sua qualidade, integridade e durabilidade. Uma representação em linguagem matemática que define a formulação de um modelo padrão de projeto ótimo segue o seguinte modelo genérico:

Minimizar $F(x)$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x^L \leq x \leq x^U \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo:

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ - variáveis de projeto

$F(x)$ - Função objetivo

$g(x)$ - Restrições de desigualdade

$h(x)$ - Restrições de igualdade

x^L - Limite inferior das variáveis de projeto

x^U - Limite superior das variáveis de projeto

Quando a finalidade do problema a ser estudado for maximizar uma dada função, esta deve ser multiplicada por -1 , para que o problema seja resolvido com os métodos de minimização conhecidos. Além disso, as restrições indicadas com sinal de maior ou igual ($g(x) \geq 0$) devem ser transformadas no tipo menor ou igual ($g(x) \leq 0$), multiplicando-se a inequação por -1 , devido ao padrão utilizado pelos algoritmos.

Apresenta-se, na figura 3.1, um esquema básico do processo iterativo, que consiste em:

- Definir uma forma inicial x^0 para estrutura, definindo pontos para o seu contorno.
- Realizar a análise estrutural, calculando as tensões, os deslocamentos, a função objetivo e as restrições
- Realizar o cálculo das derivadas da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto.
- Realizar o processo de otimização, utilizando o método do ponto interior

- Caso o projeto seja dado como ótimo, finda-se o processo; caso contrário, novas variáveis são impostas, conduzindo o projeto a uma nova geometria.

Para melhorar o processo de otimização, a cada nova definição da geometria, realiza-se um ajuste de curvas e reinicia-se a análise estrutural com a nova geometria.

Um modelo que pode ser usado para definir o processo de otimização é minimizar os picos de tensão em um projeto estrutural. Este processo pode evitar o aparecimento de trincas em estruturas, aumentando a vida útil das mesmas e até a ocorrência de acidentes que colocariam em risco a vida humana.

No processo de descrição de uma estrutura, empregamos grandezas que podem ser: mecânicas, estruturais, financeiras, etc. Algumas dessas grandezas são fixadas pelo projetista e outras podem variar durante o processo de otimização. Estas, por sua vez, são denominadas variáveis de projeto. Usualmente, esses parâmetros são representados pelo vetor de variáveis de projeto, x :

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nvar}]^t \quad (3.2)$$

onde $nvar$ é o número de variáveis de projeto.

A identificação das variáveis de projeto é uma etapa crucial no processo de otimização, pois é a etapa inicial da formulação do problema e na maioria dos casos é um processo que depende unicamente da experiência do projetista. Este por sua vez, com o objetivo de reduzir o custo computacional do processo de otimização, deve escolher o menor número possível de variáveis de projeto. No presente trabalho, as variáveis de projeto são definidas pelas coordenadas dos nós do contorno móvel da estrutura que se deseja otimizar.

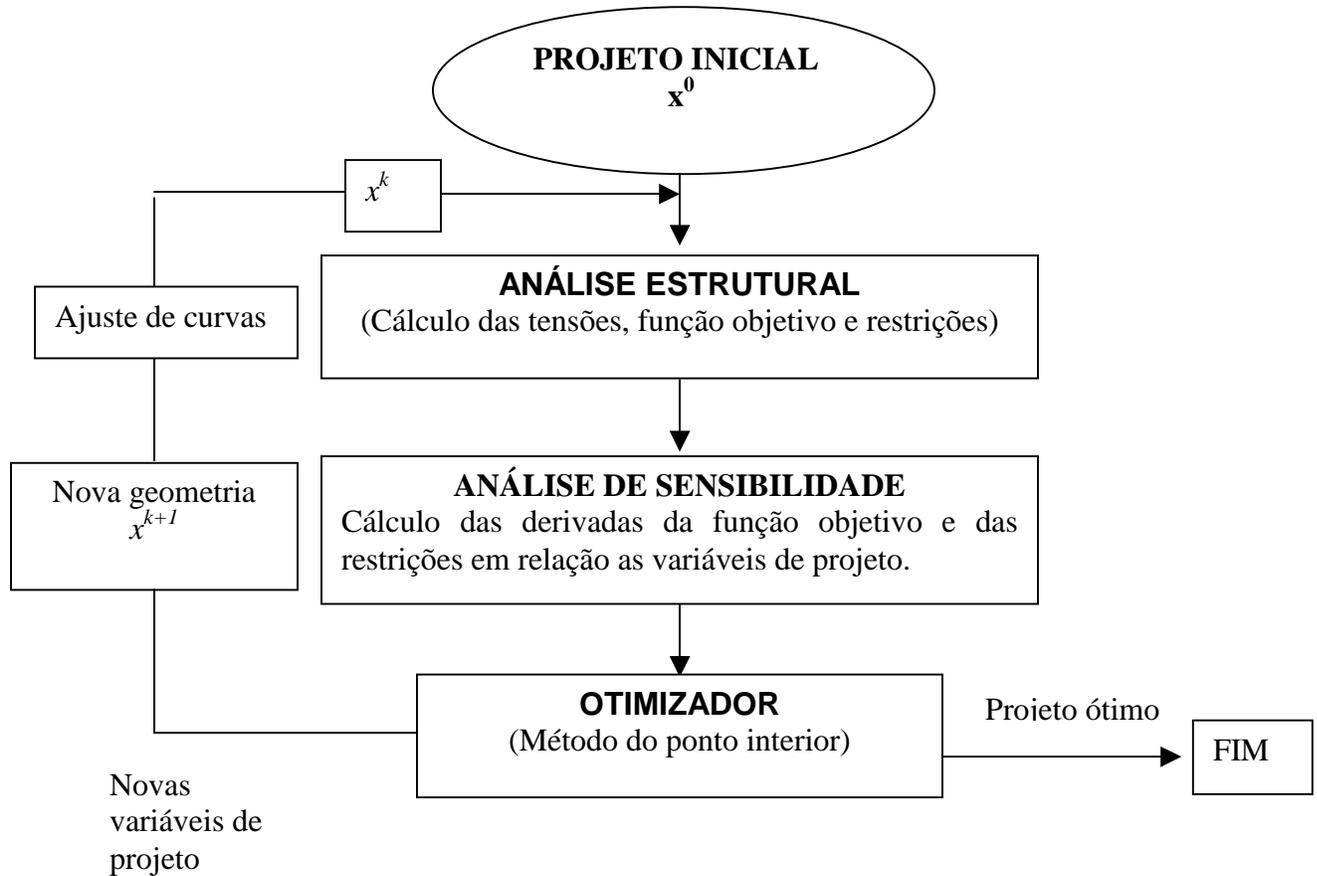


Figura 3.1 - Fluxograma geral para o processo iterativo de otimização de forma.

A função objetivo é a função que representa quantitativamente a qualidade do projeto. Esta pode avaliar o peso e o custo, as concentrações de tensões, entre outras características de uma determinada estrutura, a qual fornece uma base de comparação para a escolha entre a várias alternativas de um projeto aceitável ou viável. Esta é uma função escalar das variáveis de projeto, $F(x)$, cujo valor deverá ser minimizado ou maximizado. No presente trabalho, visa-se minimizar as concentrações de tensões e a função objetivo é definida pela seguinte fórmula:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i(x))^2 \quad (3.3)$$

que representa a função erro quadrático, onde:

$$r_i = \sigma_i - \bar{\sigma} \quad (3.4)$$

sendo $\bar{\sigma}_i$ a tensão média no contorno da estrutura, obtida com a seguinte fórmula:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_i^m \sigma_i}{m} \quad (3.5)$$

onde m é número total de tensões e σ_i é a tensão equivalente de von Mises em cada ponto nodal, obtida pela seguinte fórmula:

$$\sigma_i(x) = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)} \quad (3.5)$$

Restrições de projeto são as imposições de pré-requisitos ao problema para que o projeto produza respostas que atendam às exigências tecnológicas, de resistência dos materiais, normas técnicas, etc. Esses pré-requisitos são medidas de desempenho que o sistema deve satisfazer para a viabilidade do projeto.

As restrições são funções lineares ou não lineares das variáveis de projeto. Elas delimitam um espaço cujos limites são determinados por um conjunto de curvas. Este espaço delimitado é conhecido como região viável, representada pelo conjunto Ω . O espaço ou região viável também pode ser definido como a região do espaço de projeto onde nenhuma restrição é violada, sendo representada por:

$$\Omega = \{x / g(x) \leq 0, h(x) = 0, x^L \leq x \leq x^U\} \quad (3.6)$$

onde $g(x)$ é o vetor com as restrições de desigualdade; $h(x)$, o vetor das restrições de igualdade e x^L e x^U são os valores mínimos e máximos que restringem as variáveis de projeto, respectivamente.

Para o cálculo das restrições, optou-se pelas tensões equivalentes de von Mises (equação (3.4)), calculadas apenas no contorno que se deseja variar.

A figura 3.2 mostra o espaço compreendido entre as restrições, denominado região viável.

A Análise de Sensibilidade permite quantificar a sensibilidade das funções envolvidas no modelo de projeto ótimo à perturbação das variáveis de projeto. No processo iterativo de otimização, este cálculo fornece subsídios para a busca de soluções do projeto e configurações que satisfaçam as restrições prescritas com redução do objetivo. No projeto ótimo, são realizados os cálculos das sensibilidades da função objetivo e das restrições, em relação as variáveis de projeto. Para o cálculo dos gradientes da função objetivo e das restrições, podem-se empregar: métodos analíticos, métodos semi-analíticos ou métodos aproximados.

No método analítico utilizado no cálculo das sensibilidades, as derivadas das funções são calculadas matematicamente a partir das equações do modelo explicitamente conhecidas.

O método semi-analítico é um método híbrido e consiste na utilização de técnicas de derivação analítica numa etapa de cálculo da função estudada em conjunto com técnicas aproximadas.

Entre os métodos aproximados de cálculo das derivadas da função objetivo em relação às variáveis de projeto, o método das diferenças finitas é o mais utilizado devido a sua simplicidade e foi o método utilizado neste trabalho. No entanto, o custo computacional é elevado, já que é preciso realizar uma análise estrutural extra para cada variável de projeto a ser modificada. Embora não seja

um método muito eficiente, é viável para diversas aplicações como as aqui analisadas.

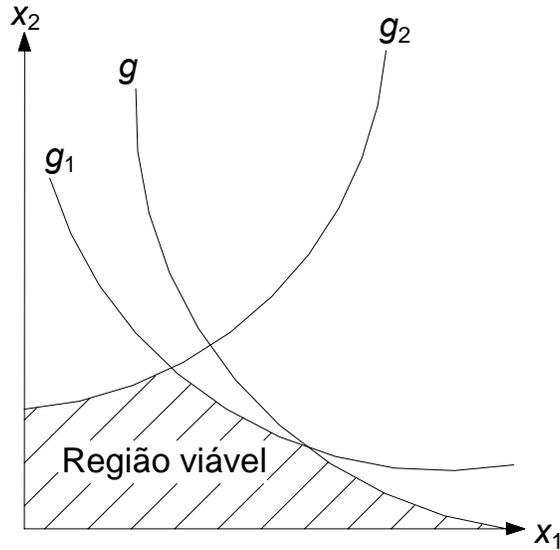


Figura 3.2 – Região viável.

Para o cálculo dos gradientes da função objetivo, utilizou-se a seguinte fórmula:

$$\text{grad}F = (F - \text{old}F) / \text{incrx} \quad (3.7)$$

onde $\text{old}F$ é o valor da função objetivo, F é o valor da função objetivo após uma pequena perturbação nas coordenadas do contorno móvel e Incrx é o valor da pequena perturbação acometida no contorno móvel.

Para o cálculo dos gradientes das restrições, utilizou-se a seguinte fórmula:

$$\text{grad}g = (g - \text{old}g) / \text{incrx} \quad (3.8)$$

onde $oldg$ é o valor da restrição definida pela tensão equivalente de von Mises no contorno móvel e g é o valor da nova restrição após uma pequena perturbação no valores das coordenadas do contorno móvel.

3.3. Programação Matemática

Os algoritmos de programação matemática, geralmente, são iterativos. Partindo-se de um ponto inicial x^0 , uma seqüência de pontos é gerada. Esta seqüência, por sua vez, se bem sucedida, convergirá para o ponto de mínimo (máximo) local x^* . A forma mais comum para este procedimento é dada por:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha \cdot d^k \quad (3.9)$$

onde x^{k+1} é a nova configuração após o cálculo da direção de busca d^k , x^k é a configuração corrente e α é o passo na direção d^k .

As etapas para o emprego da equação acima são as seguintes: determinação da direção de busca d (geralmente uma direção de decréscimo da função); avaliação do parâmetro escalar α , denominado de passo. O processo chamado de busca linear envolve a determinação da magnitude do passo na direção d .

3.3.1. Conceitos e Definições

Neste item, são apresentados alguns conceitos de Programação Linear (Luenberger, 1984) necessários para modelagem do processo de otimização.

Definição 1: Um ponto $x^* \in \Omega$ é um mínimo local de $F(x)$ em Ω se, e somente se, existir uma vizinhança $\Delta = \{x \in \Omega \mid \|x - x^*\| \leq \delta\}$ com $\delta > 0$, tal que $F(x) \geq F(x^*)$ para qualquer $x \in \Delta$. Se $F(x) > F(x^*)$, então, x^* é um mínimo local estrito.

Definição 2: Um ponto $x^* \in \Omega$ é um mínimo global de $F(x)$ em Ω se, e somente se, $F(x) \geq F(x^*)$ para qualquer $x \in \Omega$.

Definição 3: Um algoritmo iterativo é localmente convergente se, existir um $\delta > 0$, tal que um ponto inicial x^0 verifique $\|x^0 - x^*\| \leq \delta$, e é gerada uma seqüência de pontos convergentes para a solução do problema.

Definição 4: Um algoritmo iterativo é globalmente convergente se para qualquer x^0 , gera uma seqüência de pontos que convergem para a solução do problema.

Condições de otimalidade:

Teorema 1: Condições necessárias de primeira e segunda ordem. Se $x^* \in \Omega$ é um mínimo local de $F(x)$ em Ω , então, para qualquer direção viável $d \in R^n$, tem-se:

$$i) d^t \nabla F(x^*) \geq 0$$

$$ii) \text{ se } d^t \nabla F(x^*) = 0$$

Então

$$d^t \nabla^2 F(x^*) \geq 0$$

Teorema 2: Condições suficientes de otimalidade. Seja F uma função escalar duas vezes diferenciáveis em R^n e x^* tal que:

$$i) \nabla F(x^*) = 0$$

ii) $\nabla F(x^*)$ é positiva definida.

Então, x^* é um mínimo local estrito de F .

Teorema 3: Condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker. Seja x^* um ponto regular das restrições $g(x) \leq 0$ e um mínimo local de $F(x)$ em Ω . Então, existe um vetor $\lambda \in R^m$, tal que:

$$\nabla F(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0$$

$$G\lambda^* = 0$$

$$g(x^*) \leq 0$$

$$\lambda^* \geq 0$$

onde $G = \text{diag}[g_i(x)]$, matriz diagonal,

x^* = variável primal

λ são as variáveis duais associadas às restrições de desigualdade.

Teorema 4: Condições necessárias de segunda ordem. Seja x^* um ponto regular das restrições $g(x) \leq 0$ e mínimo local de $F(x)$ em Ω . Então, existe um vetor $\lambda^* \in R^m$ que verifica o teorema 3. A matriz Hessiana fica:

$$H(x^*, \lambda^*) = \nabla^2 F(x^*) + \lambda^* \nabla^2 g(x^*) \quad (3.10)$$

A matriz é semidefinida positiva no espaço tangente ($T = \{y: H^t(x)y = 0\}$).

Teorema 5: Condições suficientes de segunda ordem. Seja x^* tal que $g(x^*) \leq 0$. Então, existe um vetor $\lambda^* \geq 0 \in R^m$ tal que:

$$\nabla F(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0 \quad (3.11)$$

Então $H(x^*, \lambda^*)$ é positiva definida no espaço tangente. Portanto, x^* é um mínimo local estrito de $F(x)$ sobre Ω , sendo x^* a variável primal e λ^* a variável dual.

3.3.2. Método de Pontos Interiores

O algoritmo de pontos interiores irá sempre gerar uma seqüência de configurações interiores à região viável, satisfazendo sempre as restrições impostas.

A partir de um projeto inicial (x^0), define-se um ponto no espaço vetorial R^m . A partir deste ponto, o algoritmo gera uma seqüência de configurações. No limite, o ponto de acumulação satisfaz as condições de otimalidade de Karush Kuhn Tucker.

A configuração x^{k+1} é obtida calculando-se uma direção de busca d^k , na qual o ponto x^k pode se mover. Faz-se, então, uma busca linear nesta direção (d^k) e encontra-se um passo α , que define o quanto o ponto x^k vai se deslocar na direção d^k até o ponto x^{k+1} . Desta forma, o processo iterativo prosseguirá, até que sejam satisfeitos os critérios de convergência.

3.3.3. Modelagem Geométrica do Contorno

Um grande problema encontrado nas primeiras tentativas de modelagem geométrica era a perda de suavidade do contorno após um determinado número de iterações. Como as coordenadas do contorno eram tomadas como variáveis do projeto, eram necessárias grandes quantidades de pontos nodais para minimizar

este problema. Contudo, após determinado número de iterações, o problema repetia-se. Com o intuito de superar estas deficiências, diversas técnicas foram testadas para a suavização da fronteira do modelo de otimização, como o uso de polinômios. Apesar de reduzirem o problema, estas técnicas apresentam problemas como instabilidade numérica e distorções.

Entre os métodos utilizados para definição de curva podem-se citar os mais utilizados: método de interpolação cúbica, método de Hermite e o método de interpolação por Splines.

Com a introdução do uso das teorias de curvas paramétricas (splines), estes problemas foram contornados. As curvas paramétricas apresentam facilidade de manipulação e avaliação. Devido à forma como são representadas matematicamente, splines requerem poucos dados de entrada por causa do reduzido número de graus de liberdade e podem ser modificadas iterativamente.

As curvas B-splines têm a finalidade de representar suavemente uma curva que aproxima um dado conjunto de pontos, de modo que se origine uma curva com uma determinada forma. A partir de pontos p_1, p_2, \dots, p_n , pretende-se determinar a curva que interpola esses pontos.

O gráfico da figura 3.3. exprime o processo de suavização de um trecho do contorno que passa por três ou mais pontos.

Qualquer curva Spline de grau r , que interpola $n + 1$ pontos dados, pode ser representada da seguinte forma:

$$v(s) = \sum_{l=0}^n X_l B_{l,r} \quad (3.12)$$

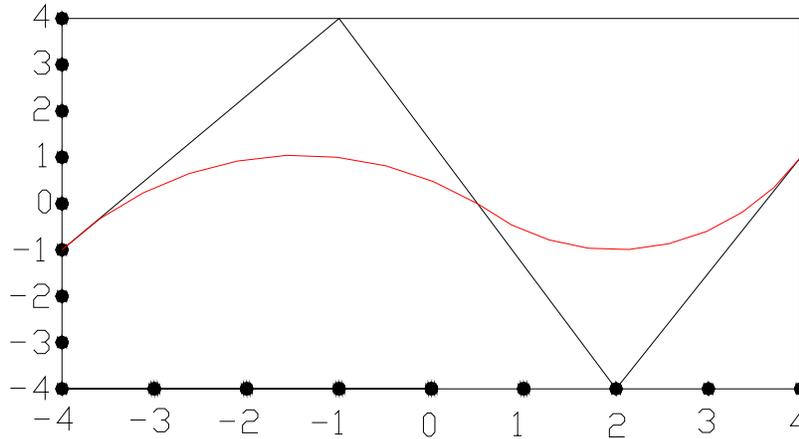


Figura 3.3 – Contorno suavizado por curvas B-Spline.

onde:

$u(s)$ - curva parametrizada (vetor posição ao longo da curva).

x_i - i -ésimo ponto de um conjunto de $n + 1$ pontos (denominados de pontos de controle).

r - grau (ordem) da B-Spline, que independe do número de pontos de controle.

$B_{i,r}$ - funções peso das B-splines associadas aos pontos de controle.

Tendo-se o número de pontos de controle ($n + 1$ pontos) e o grau da B-Spline (r), define-se inicialmente um conjunto de valores nodais t_l para a variável paramétrica s , do seguinte modo:

$$t_l = 0 \quad \text{se } l < r;$$

$$t_l = l - r + 1 \quad \text{se } r \leq l \leq n;$$

$$t_l = n - r + 2 \quad \text{se } l > n \quad (3.13)$$

com:

$$0 \leq l \leq n + r \quad (3.14)$$

Portanto, o intervalo do domínio da variável paramétrica s é:

$$0 \leq s \leq n - r + 2 \quad (3.15)$$

onde n é o número de vértices do polígono de controle.

A seguir, admitindo-se estes dados, podem-se calcular, recursivamente, as funções B-spline da seguinte maneira:

$$B_{l,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } t_l \leq s \leq t_{l+1}; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$B_{l,r}(s) = \frac{(s - t_l)B_{l,r-1}(s)}{t_{l+r-1} - t_l} + \frac{(t_{l+r} - s)B_{l+1,r-1}(s)}{t_{l+r} - t_{l+1}} \quad (3.17)$$

Desse modo, a definição de forma por B-Splines pode ser resumida em três passos:

Passo 1 : Determinação dos nós t_l (equações (3.12) e (3.13)).

Passo 2 : Determinação recursiva das funções-bases da B-Splines (equações (3.14), (3.15) e (3.16)).

Passo 3 : Determinação da curva parametrizada $v(s)$, vetor posição ao longo da curva (equação (3.17)).

As características das curvas B-Splines levaram à sua escolha para aproximação do contorno. Tais características são listadas a seguir:

- a) Necessidade de poucos parâmetros para a sua definição.
- b) O grau da B-Spline (r) independe do número de pontos de controle e as B-Splines cúbicas são fáceis de serem manipuladas, fornecem flexibilidade suficiente para uso em inúmeros problemas relacionados com modelagem de curvas e foram as adotadas neste trabalho.
- c) Uma curva Spline de grau r possui derivadas contínuas até a ordem $r-1$ nos pontos dados.
- d) As funções base B-Spline são calculadas recursivamente, facilitando o seu cálculo.
- e) A parametrização por B-Spline descreve “formas agradáveis” (contornos suaves), devido à sua continuidade entre os segmentos da curva, evitando singularidades na análise estrutural.
- f) Definindo-se o grau da B-Spline (r) e o número de pontos de controle da mesma, o vetor da curva torna-se uma função linear das coordenadas dos pontos de controle (equação (3.17))
- g) Apresenta controle local da forma da curva. isto é, alterada a posição de um dos pontos de controle, os segmentos de curva afastados deste ponto de controle não são alterados.

Capítulo IV

APLICAÇÕES

4.1. Introdução

Foram considerados três exemplos de problemas de estado plano de tensão para ilustrar a metodologia implementada.

O primeiro problema considerado foi o de encontrar a melhor forma para uma chapa com furo, submetida a carregamentos uniformes no contorno, de modo a minimizar os picos de tensão. Foi considerado um trecho móvel no contorno, onde se situam os pontos de controle.

O problema clássico do filete, estudado por muitos autores, é tratado aqui com o objetivo de encontrar a melhor forma para um trecho do contorno considerado móvel, minimizando os picos de tensão, através das alterações do seu contorno nesta região.

O terceiro exemplo que ilustra este trabalho é o problema de um pórtico plano, para o qual também se busca minimizar os picos de tensão variando-se a forma de um trecho do contorno.

4.2. Exemplo 1- Chapa com furo

Este exemplo consiste em uma chapa com um furo centrado, como mostrado na figura 4.1. Devido à simetria, optou-se por trabalhar apenas com um quarto da peça, como está representado na parte hachurada dessa figura. Os dados utilizados aqui são os mesmos apresentados por Dias *et al.* (1997). A geometria e as condições de contorno consideradas são mostradas na figura 4.2. Os demais dados do problema são $q = 2,5 \times 10^3 \text{ N/mm}$, $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$, ν

$= 0,3$ e $\bar{\sigma}_i = 16,00 \text{ N/mm}^2$. A parte chanfrada da chapa, que compreende os pontos de controle p1, p2, p3, p4, p5 e p6, representa o contorno móvel do problema, a ser otimizado. Na tabela 4.1 está representada a direção de busca utilizada no método do ponto interior para os pontos de controle do contorno em questão. A malha de elementos de contorno consiste em 53 nós e 48 elementos, como mostra a figura 4.3.

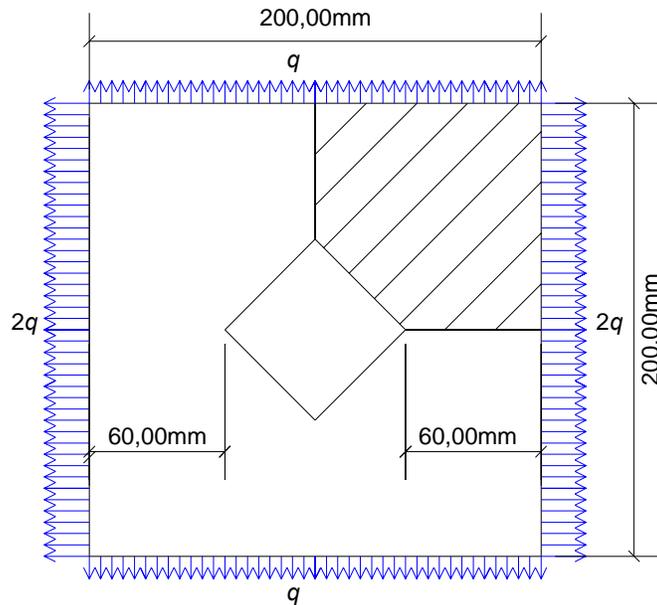


Figura 4.1- Chapa com furo centrado.

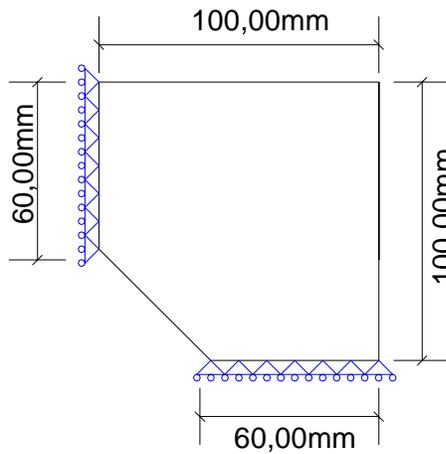


Figura 4.2- Geometria e condições de contorno de um quadrante da chapa.

Tabela 4.1- Direção de busca para os pontos de controle.

| Pontos | p1 | p2 | p3 | p4 | p5 | p6 |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Direção (x;y) | (0,0;1,0) | (0,0;1,0) | (0,5;1,0) | (1,0;1,0) | (1,0;0,5) | (0,0;0,0) |

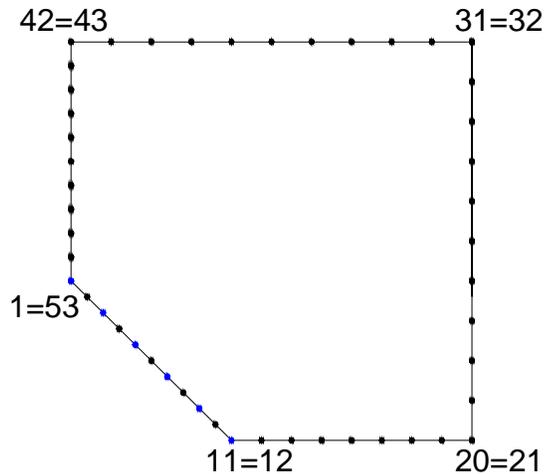


Figura 4.3- Discretização do contorno da chapa.

As coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle estão listadas na tabela 4.2. e a variação da função objetivo, esta dada pela fórmula (3.3), com o número de iterações, é ilustrada na figura 4.4. A curva mostra grande variação nas iterações iniciais, verificando-se um processo mais lento nas iterações finais, devido ao fato das restrições ficarem ativas, levando a uma diminuição no tamanho do passo.

Neste exemplo, o algoritmo de otimização foi capaz de minimizar os picos de tensão e isto foi possível através da suavização do contorno móvel do painel, eliminando, assim, as concentrações de tensões, o que pode ser observado na figura 4.5, onde são apresentadas as curvas que representam as tensões de von Mises ao longo do contorno, antes e após a otimização. É possível observar que, no trecho que compreende o contorno móvel, correspondente aos nós de 1 a 11,

houve uma uniformização das tensões de von Mises, diminuindo também as concentrações de tensões no restante da estrutura, reduzindo as tensões máximas. A forma final da estrutura, obtida após 19 iterações, é mostrada na figura 4.6, onde se observa a suavização do contorno móvel da estrutura, aproximando-se do formato de um quarto de elipse. Os valores obtidos para as tensões estão em excelente concordância com os valores disponíveis em Herskovits *et al.* (1996).

Tabela 4.2 – Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle da chapa.

| Pontos | Coordenada inicial x (mm) | Coordenada final x (mm) | Coordenada inicial y (mm) | Coordenada final y (mm) |
|--------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| p1 | 0,00000 | 0,00000 | 40,0000 | 32,5005 |
| p2 | 8,00000 | 10,1721 | 32,0000 | 31,0310 |
| p3 | 16,0000 | 18,2533 | 24,0000 | 28,7793 |
| p4 | 24,0000 | 27,2685 | 16,0000 | 25,1219 |
| p5 | 32,0000 | 34,7518 | 16,0000 | 18,6670 |
| p6 | 40,0000 | 40,0000 | 0,00000 | 0,00000 |

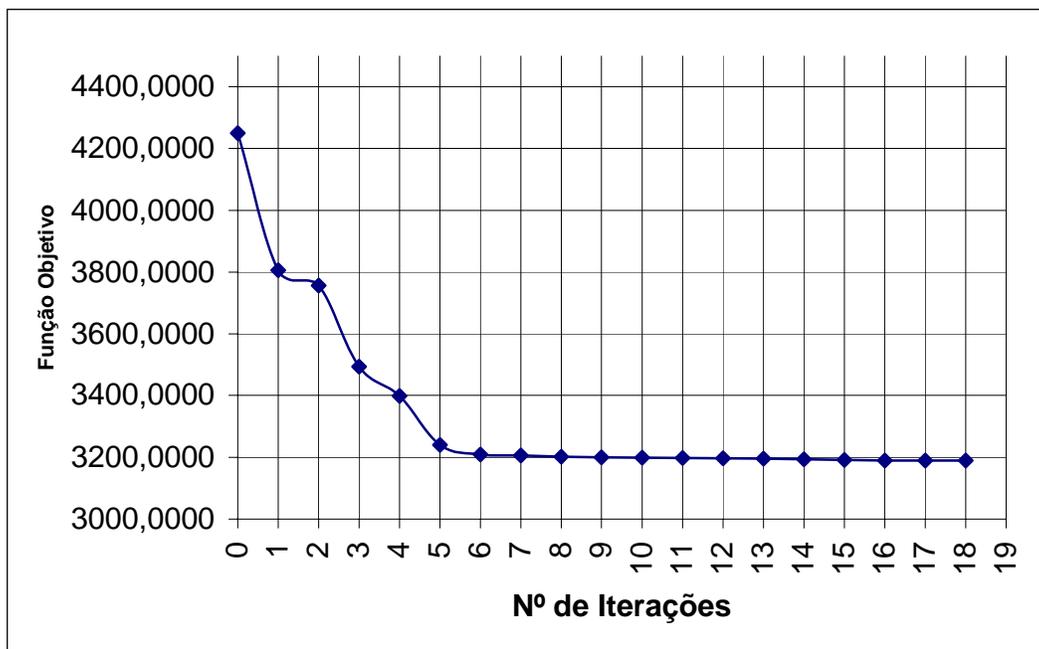
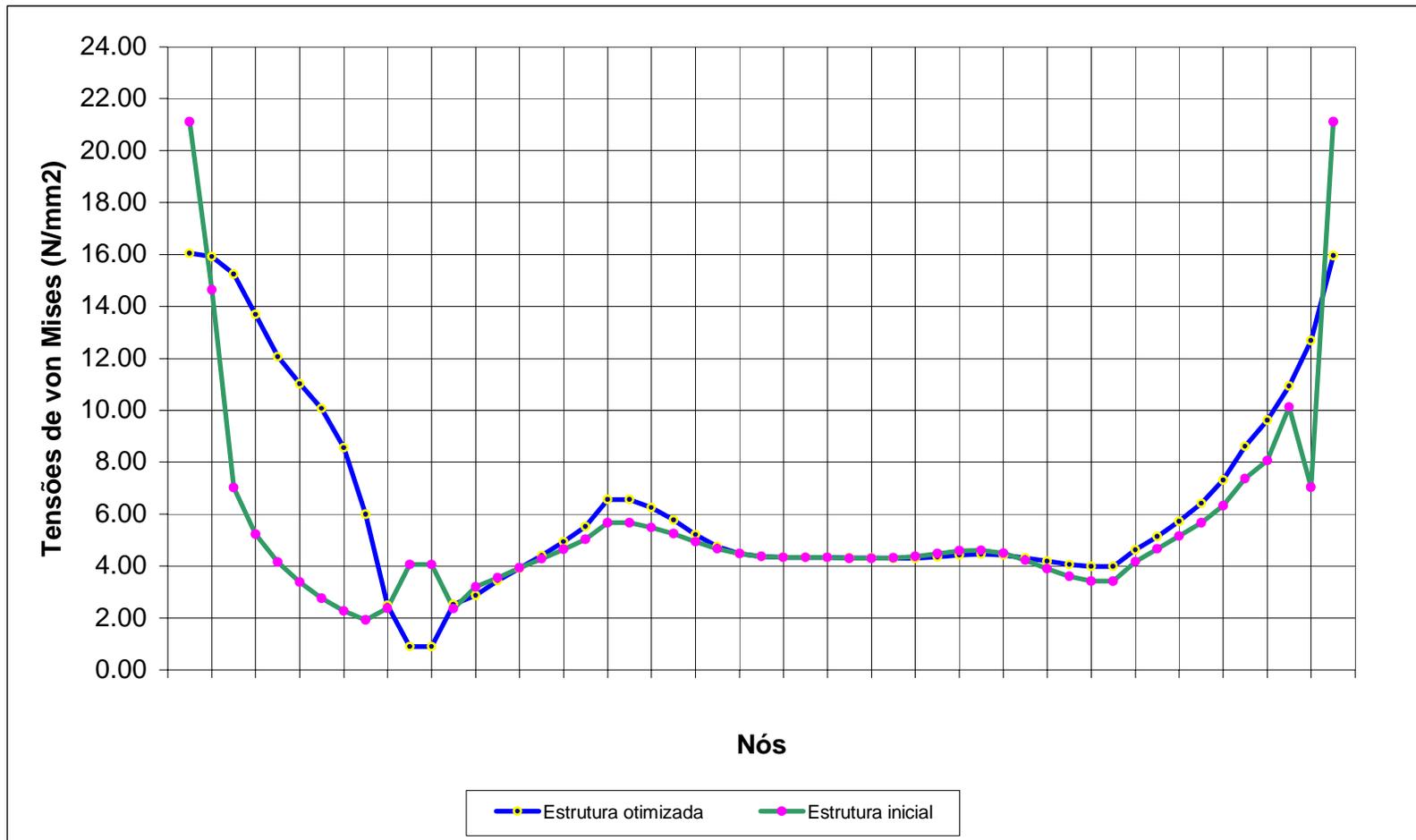


Figura 4.4- Variação da função objetivo na chapa.



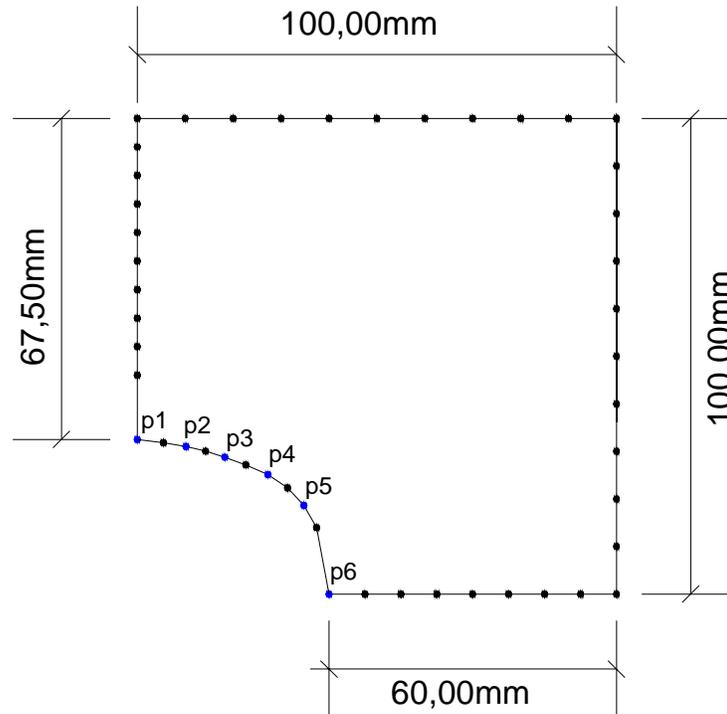


Figura 4.6- Painel com a forma alterada após o processo de otimização.

4.3. Exemplo 2- Barra com filete

Este exemplo consiste em otimizar a forma do filete em uma barra tracionada, representada na figura 4.7. Na figura 4.8, encontra-se uma representação da geometria, das condições de contorno e do carregamento considerados. Os demais dados são: $E = 226 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.293$, $\bar{\sigma}_i = 21,024 \text{ N/mm}^2$ e $q = 17,52 \text{ N/mm}$. A malha de elementos de contorno consiste de 100 nós e 94 elementos, como mostra a figura 4.9. A parte que compreende o contorno móvel da estrutura contém os pontos de controle p1, p2, p3, p4, p5 e p6. A direção para movimentação dos pontos do contorno móvel utilizados encontra-se na tabela 4.3. Os dados apresentados aqui são também encontrados em Herscovits *et al.* (1996).

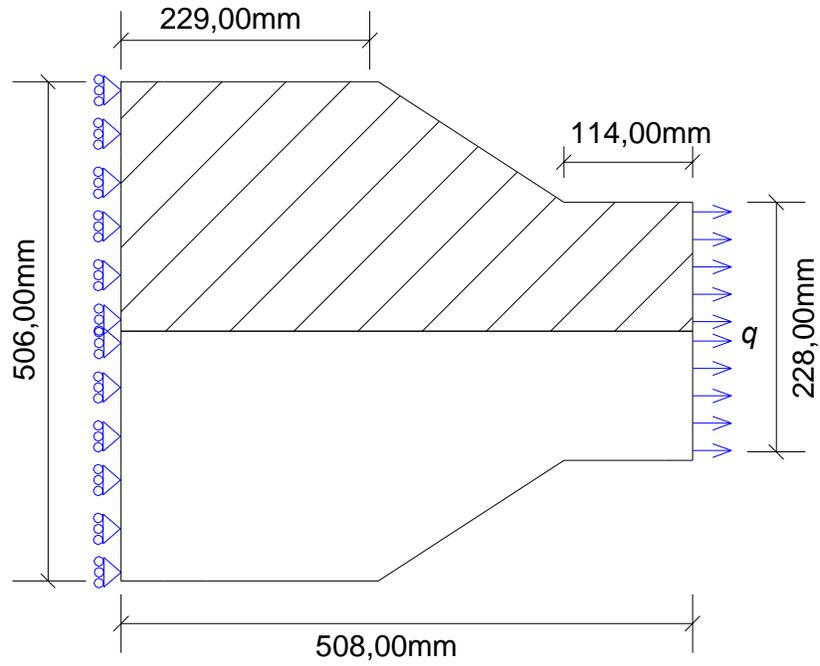


Figura 4.7- Filete em uma barra tracionada.

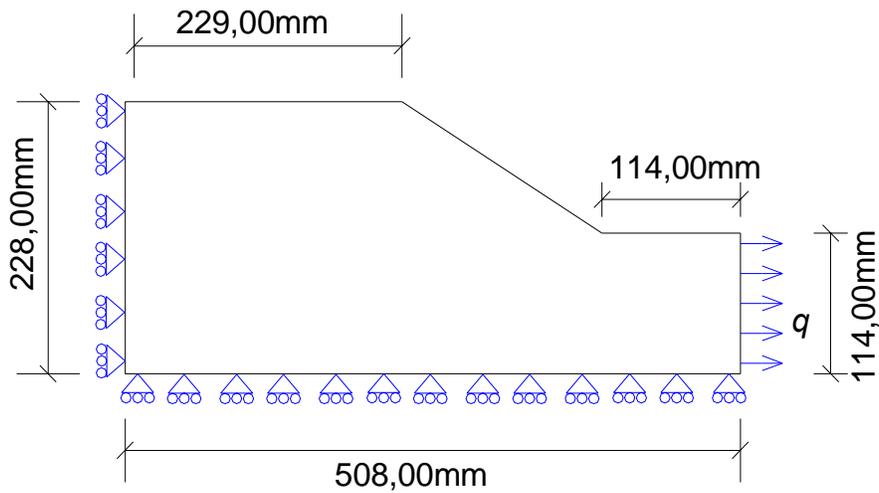


Figura 4.8- Geometria, condições de contorno e carregamento da parte hachurada da barra.

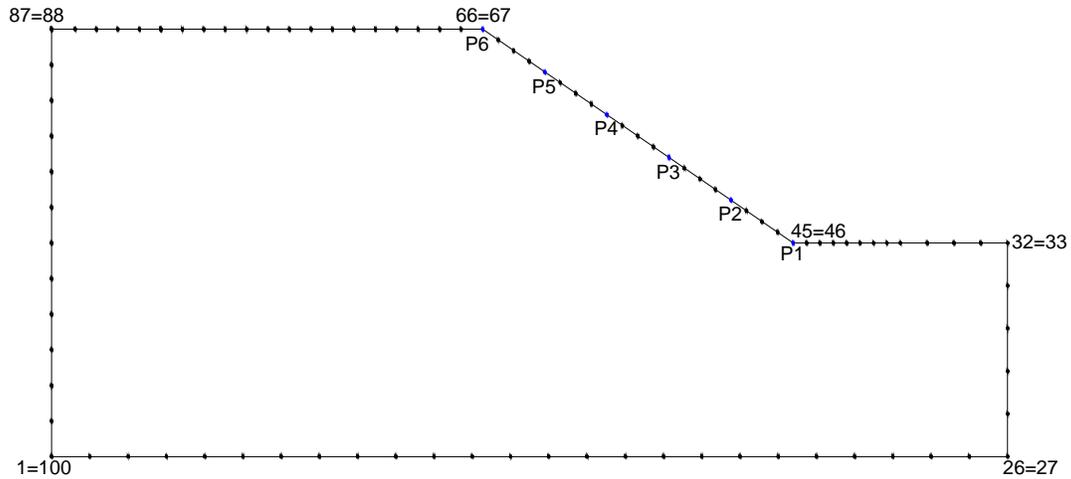


Figura 4.9- Discretização do contorno da barra.

Tabela 4.3- Direção de busca para os pontos de controle.

| Pontos | p1 | p2 | p3 | p4 | p5 | p6 |
|------------------|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| Direção (x,y) | (0,0;0,0) | (-1,0;-1,0) | (-1,0;-1,0) | (-1,0;-1,0) | (-1,0;-1,0) | (0,0;0,0) |

As coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle estão na tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle

| Pontos | Coordenada inicial x (mm) | Coordenada final x (mm) | Coordenada inicial y (mm) | Coordenada final y (mm) |
|--------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| p1 | 394,00 | 394,00 | 114,00 | 114,00 |
| p2 | 361,00 | 353,29 | 136,80 | 118,81 |
| p3 | 328,00 | 327,21 | 159,60 | 124,00 |
| p4 | 295,00 | 302,07 | 182,40 | 132,28 |
| p5 | 262,00 | 276,89 | 205,70 | 143,57 |
| p6 | 229,00 | 229,00 | 228,00 | 228,00 |

Pode-se constatar, observando-se a figura 4.10, que, com poucas iterações, as restrições ficaram ativas, levando logo a uma diminuição no tamanho do passo.

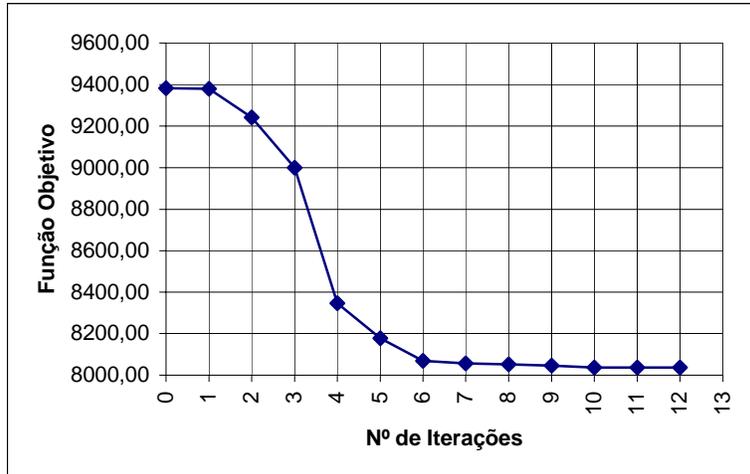


Figura 4.10- Variação da função objetivo na barra.

Na figura 4.11, observa-se a forma da estrutura após a realização do processo de otimização. Neste exemplo, observando a figura 4.12, verifica-se que o algoritmo de otimização uniformizou as tensões no trecho que engloba o contorno móvel, transformando um pico de tensão em um trecho quase horizontal no gráfico. Por fim, o maior pico de tensão, que era de aproximadamente 38,00 N, passou para aproximadamente 21,00 N. Todas estas observações comprovam, que o algoritmo realizou uma sensível melhora nas condições mecânicas da estrutura e os valores das tensões estão em excelente concordância com os valores disponíveis em Herscovits *et al* (1996).

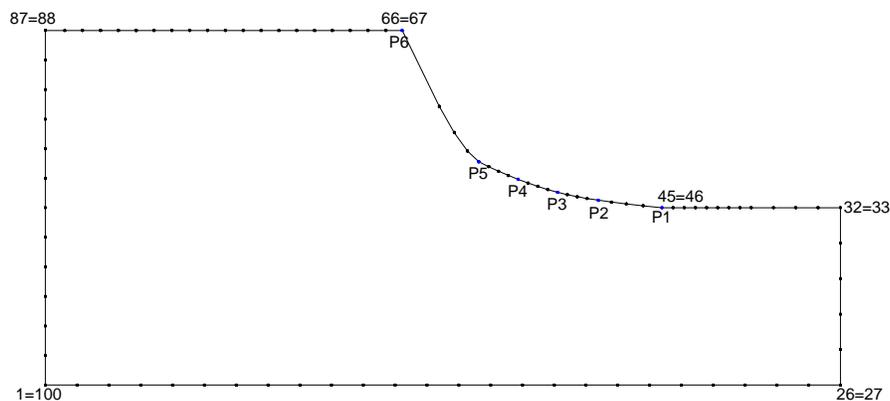


Figura 4.11- Filete com redução da área após o processo de otimização.

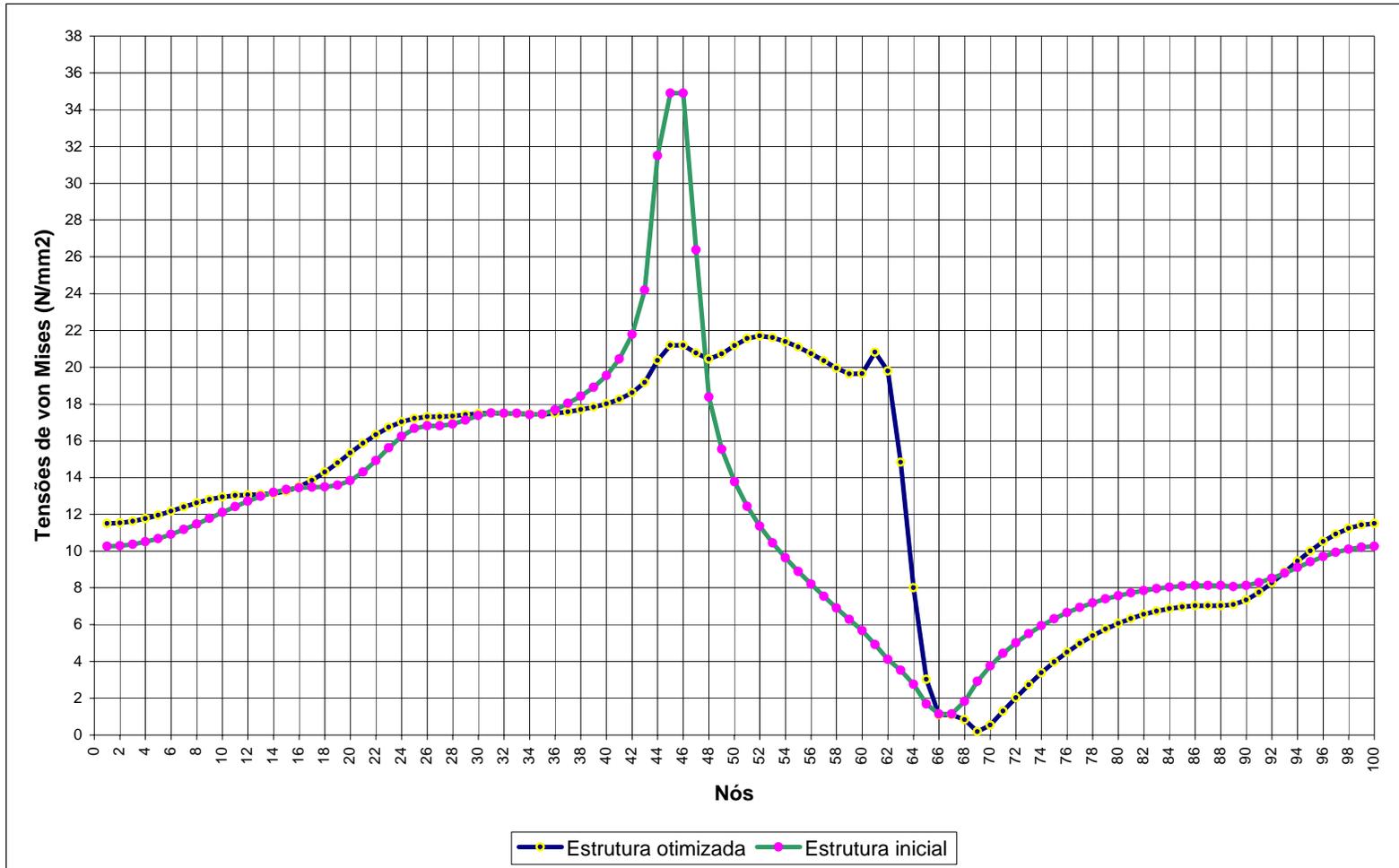


Figura 4.12- Variação das tensões de von Mises ao longo do contorno da barra

4.4. Exemplo 3- Pórtico plano

A figura 4.13 mostra a forma inicial de um pórtico plano, as condições de contorno e os carregamentos considerados. Os seguintes dados também foram utilizados: $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $q = 2 \text{ N/mm}$ e $\bar{\sigma}_i = 6,00 \text{ N/mm}^2$. Na figura 4.14, está representada a discretização do contorno da estrutura e, na tabela 4.5, encontra-se a direção de busca dos pontos de controle. A malha de elementos de contorno do pórtico plano consiste de 99 nós e 93 elementos.

Na figura 4.15, encontra-se o gráfico função objetivo versus número de iterações. Neste gráfico, pode-se notar que, com poucas iterações, as restrições ficaram ativas, levando, logo, a uma diminuição no tamanho do passo.

A figura 4.16 mostra o gráfico com as curvas que comparam as tensões para a configuração inicial com as tensões para a estrutura otimizada. Observa-se que houve grande redução dos picos de tensão e maior uniformidade na curva otimizada.

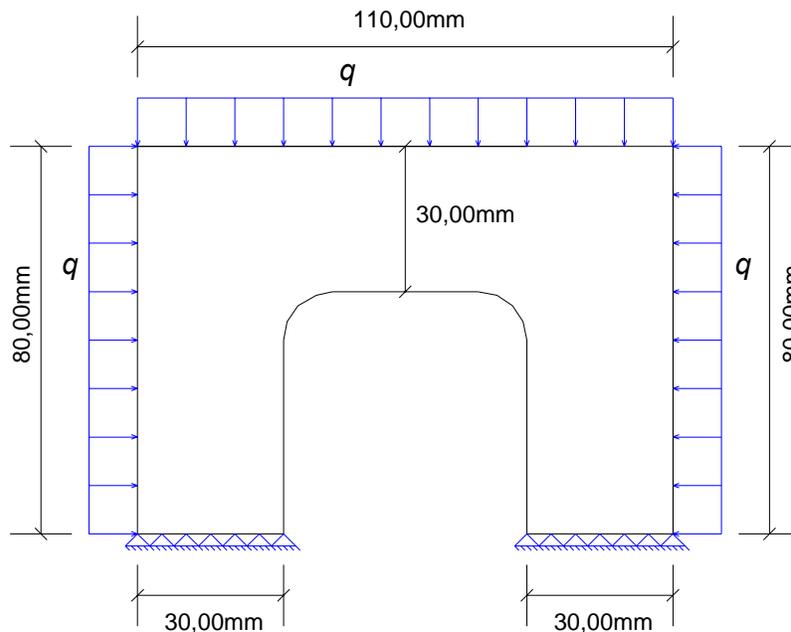


Figura 4.13- Geometria , condições de contorno e carregamento do pórtico.

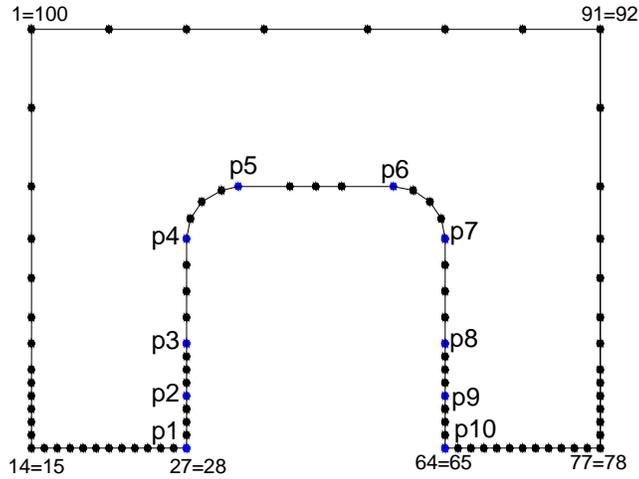


Figura 4.14- Discretização do contorno do pórtico.

Tabela 4.5- Direção de busca dos pontos de controle do pórtico.

| Pontos | Direção (x;y) | Pontos | Direção (x;y) |
|--------|---------------|--------|---------------|
| p1 | (-1,0;0,0) | p6 | (1,0; 1,0) |
| p2 | (-1,0;1,0) | p7 | (1,0; 1,0) |
| p3 | (-1,0; 1,0) | p8 | (1,0;1,0) |
| p4 | (-1,0; 1,0) | p9 | (1,0;1,0) |
| p5 | (-1,0; 1,0) | p10 | (1,0;0,0) |

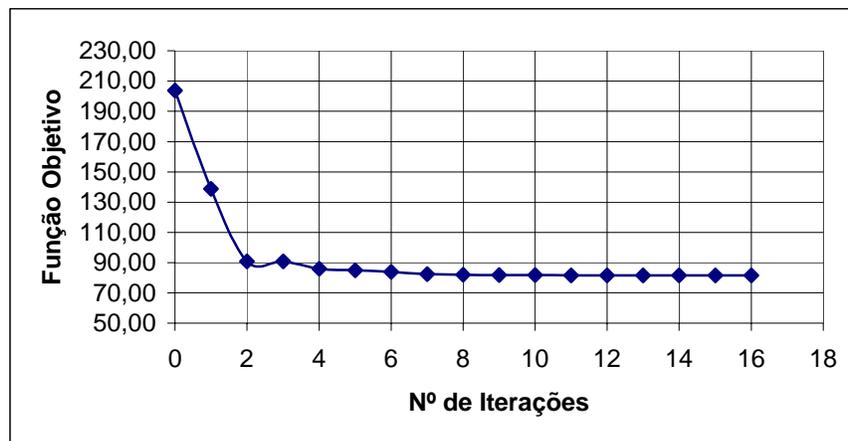


Figura 4.15- Variação da função objetivo no pórtico.

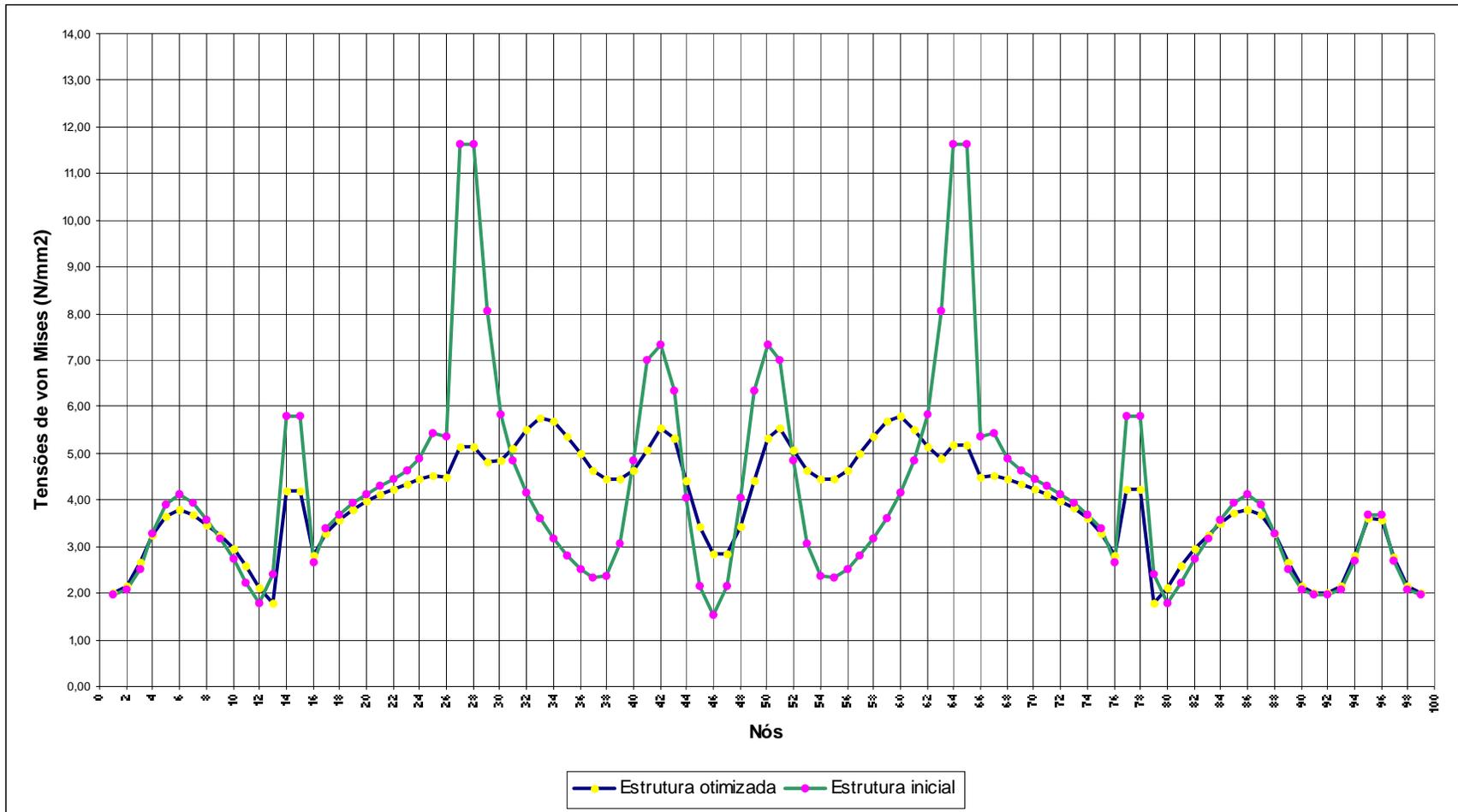


Figura 4.16- Variação das tensões de von Mises ao longo do contorno do pórtico

Na figura 4.17, encontra-se a geometria do pórtico plano após a otimização e, na tabela 4.6, é possível comparar as coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle.

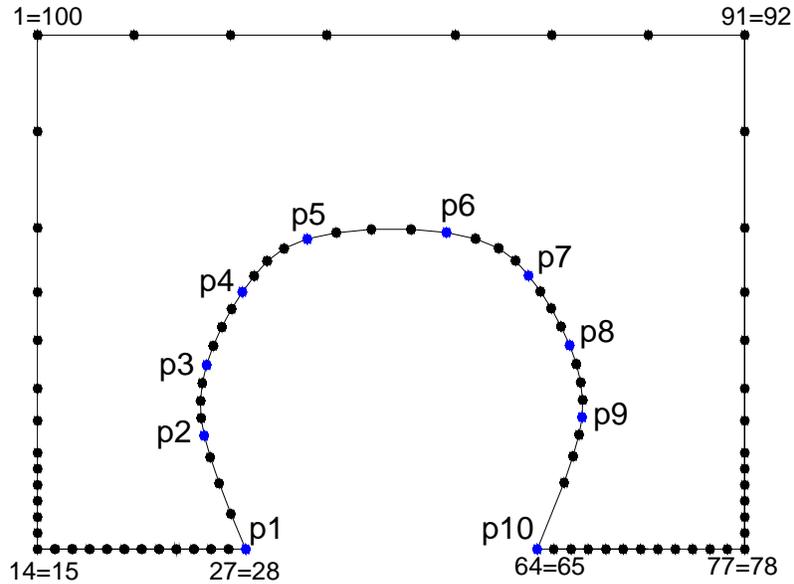


Figura 4.17- Geometria final do pórtico.

Tabela 4.6- Coordenadas iniciais e finais dos pontos de controle do pórtico.

| Pontos | Coordenada inicial x (mm) | Coordenada final x (mm) | Coordenada inicial y (mm) | Coordenada final y (mm) |
|--------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| p1 | 30,0000 | 32,8210 | 0,00000 | 0,00000 |
| p2 | 30,0000 | 25,9230 | 10,0000 | 17,6779 |
| p3 | 30,0000 | 26,2879 | 20,0000 | 28,6719 |
| p4 | 30,0000 | 31,8645 | 40,0000 | 40,0274 |
| p5 | 40,0000 | 41,9375 | 50,0000 | 48,2754 |
| p6 | 70,0000 | 63,5831 | 50,0000 | 49,2890 |
| p7 | 80,0000 | 76,3707 | 40,0000 | 42,5870 |
| p8 | 80,0000 | 82,7830 | 20,0000 | 31,7165 |
| p9 | 80,0000 | 84,7064 | 10,0000 | 20,5500 |
| p10 | 80,0000 | 77,7233 | 0,00000 | 0,00000 |

Capítulo V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1. Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões e observações a respeito da formulação apresentada, bem como de suas aplicações numéricas.

Por ser um assunto que compreende muitas aplicações, abre-se espaço para sugestões, tanto para a formulação, quanto para a implementação computacional.

5.2. Conclusões e Observações

Neste trabalho, foi apresentada uma aplicação do método dos elementos de contorno para otimização de forma em problemas de estado plano, minimizando os picos de tensão na estrutura.

Optou-se por exemplos clássicos da literatura para fins de comparação e verificou-se que o algoritmo realizou satisfatoriamente a uniformização das tensões na estrutura.

No método dos elementos de contorno, o volume de dados de entrada é, geralmente, menor que no método dos elementos finitos, pois a discretização é necessária apenas no contorno da estrutura, gerando também um sistema de equações menor. Apesar disto, este método possibilita o cálculo dos deslocamentos e das tensões em pontos do domínio da estrutura. Dessa maneira, é possível verificar se houve ou não uma uniformização das tensões também no domínio da mesma.

No presente trabalho, a função objetivo empregada visa a minimização dos picos de tensão, contudo, outras propriedades da estrutura podem ser minimizadas, como o peso, a área, o volume e outras.

O método das diferenças finitas, utilizado para cálculo das derivadas na análise das sensibilidades, mostrou-se eficaz, fazendo com que a convergência fosse obtida com um número relativamente pequeno de iterações.

Em vista dos resultados obtidos neste trabalho, é possível concluir que o método dos elementos de contorno, aliado aos algoritmos utilizados, como o método do ponto interior, constitui uma importante ferramenta no processo de otimização de estruturas bidimensionais.

5.3. Sugestões

Neste item, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Expansão da formulação para realização dos cálculos de otimização para mais de um contorno móvel.

Utilização do algoritmo de otimização para redução da área da estrutura.

Implementação de outros tipos de carga transversal, além da uniformemente distribuída aqui apresentada.

Utilização de outros tipos de curva, além das B-Splines, para definição do contorno móvel.

Derivação das equações integrais de deslocamentos para proceder a análise de sensibilidade utilizando diretamente essas equações derivadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bathe, Klaus-Jurgen, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982
2. Bazaraa, M. S., and Shetty, C. M., Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, Wiley, New York, , pp. 437-453, 1973
3. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984
4. Choi, J. H., Kwak, B. M. "Boundary Integral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering , pp. 1579-1595, 1988
5. Dias, G. P., Falcón G. S. e Norman, J. H.- "Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC", pp. 1- 18. Rio de Janeiro, Novembro de 1997
6. Herskovits, J. - "An Interior Point Technique for Nonlinear Optimization" Research Report No. 1808, INRIA, BP 105, 78153 Le Chesnay CEDEX, France, 1992
7. Herskovits, J., Dias, G. P., Mota Soares, C. M. "A Full-Stress Technique for Structural Shape Optimization", Appl. Math. And Comp. Sci., vol. 6, Nº 2, pp. 303-319, 1996

8. Luenberger, D.G., "Linear and Nonlinear programming", Adilson-Wesley Publishing. Co., Reading, MA., 1984
9. Phan, A., Mukherjee, S., Mayer, J. R. "Stresses Sensitivities and Shape Optimization in Two-Dimensional Linear Elasticity by the Boundary Contour Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering , pp. 1391-1407, 1998
10. Sandgren, E., Wu, S. "Sape Optmization Using The Boundary Element Method With Substructuring", International Journal for Numerical Methods in Engineering , pp. 1913-1924, 1988.
11. Tafreshi, A. M., Fenner, R. T. "Design Optimization Using The Boundary Element Method", Journal of Strain Analysis, pp. 231-241, 1991
12. Tafreshi, A. M., Fenner, R. T. "Design Sensitivity Analysis Using The Boundary Element Method", Journal of Strain Analysis, pp. 283-291, 1993
13. Tafreshi, A. M., Fenner, R. T. "General-Purpose Computer Program For Shape Optimization of Engineering Structures Using The Boundary Element Method", Computers & Structures, pp.713-720, 1995
14. Tai, K., Fenner, R. T. "Optimun Shape and Topology Design Using the Boundary Element Method", International Journal of Solids and Structures, pp. 2021-2040, 1996a
15. Tai, K., Fenner, R. T. "Optimun Shape Design and Positioning of Features Using the Boundary Integral Equation Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering , pp. 1985-2003, 1996b

16. Yamazaki, K., Sakamoto, J., Kitano M. "Tree-Dimensional Shape Optimization Using the Boundary Element Method", Kanazawa University, 1994
17. Yang, R. J. "Component Shape Optimization Using BEM", Computers & Structures, pp.561-568, 1990