

ESTIMATIVA DO NÚMERO MÍNIMO DE PEÇAS DE REPOSIÇÃO
REPARÁVEIS UTILIZANDO PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

MARCUS VINICIUS DA SILVA SALES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MAIO - 2011

ESTIMATIVA DO NÚMERO MÍNIMO DE PEÇAS DE REPOSIÇÃO REPARÁVEIS UTILIZANDO PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

MARCUS VINICIUS DA SILVA SALES

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia de produção”.

Orientador (a): Prof^a Gudelia Guilermina Morales de Arica

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MAIO - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do CCT / UENF

29/2011

Sales, Marcus Vinicius da Silva

Estimativa do número mínimo de peças de reposição reparáveis utilizando processos estocásticos / Marcus Vinicius da Silva Sales. – Campos dos Goytacazes, 2011.

xiii, 87 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia de Produção. Campos dos Goytacazes, 2011.

Orientador: Gudélia Guilemina Morales de Arica.

Área de concentração: Pesquisa operacional.

Bibliografia: f. 74-76.

1. Controle de estoque 2. Peças de reposição sobressalente 3. Aplicação de processos estocásticos I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia de Produção II. Título.

658.787

CDD

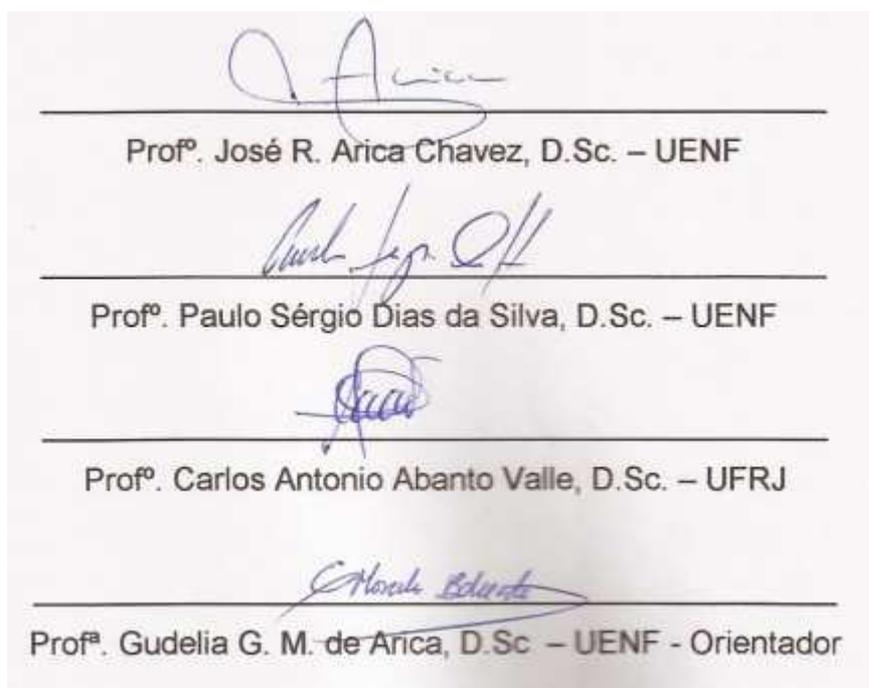
ESTIMATIVA DO NÚMERO MÍNIMO DE PEÇAS DE REPOSIÇÃO REPARÁVEIS UTILIZANDO PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

MARCUS VINICIUS DA SILVA SALES

"Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de mestre em Engenharia de Produção".

Aprovada em 20 de Maio de 2011.

Comissão Examinadora:



Dedicatória

Dedico esta dissertação a minha família, em especial a minha tia Maria das Graças Gonçalves da Silva (*In memoriam*) que, em vida, me motivava com toda a sua sabedoria e dedicação ao estudo e ao trabalho.

A todos, o meu eterno agradecimento.

Agradecimentos

A Deus, sobre todas as coisas.

Aos meus pais, José Antônio e Nilça, por serem formadores do meu caráter, e que sempre me incentivaram aos estudos. As minhas irmãs e meus sobrinhos, pela paciência e não paciência que tiveram comigo durante todo o meu estudo. Aos meus tios e primos, por compreenderem muitas das minhas faltas, sei que vocês sempre acreditaram em meu potencial.

A Prof^a. Gudelia Morales, minha orientadora do mestrado, pelos ensinamentos, disponibilidade e orientações para que eu pudesse concluir esta dissertação com o conhecimento maior do que quando iniciei. Ao Prof^o. Paulo Dias, meu orientador na graduação por me incentivar na formulação do tema aqui apresentado. Ao Prof^o. José Arica, pelos ensinamentos e por sempre estar de portas abertas para me receber e esclarecer minhas dúvidas. Aos professores do LEPROD/CCT, pelos ensinamentos e confiança depositada em mim. A Kátia Rosane e Rogério Castro, Secretária do LEPROD e Secretário Acadêmico, por sempre estarem dispostos a me ajudar orientando nos procedimentos a serem tomados durante o mestrado.

Ao grande amigo Fernando França, que desde o início do mestrado mostra-se como um exemplo de amizade; por ser meu “psicólogo” me escutando em momentos de dificuldade e me ajudando a solucioná-los. Aos amigos do mestrado, pelo companheirismo, pelas dicas, boas conversas e pelos bons momentos de descontração. André, a paciência é a sua virtude. A minha amiga Tamara, que desde a graduação deposita tanta confiança em mim. Aos meus amigos, Anderson, Felipe, Maycon e Paulo, por me apoiar durante este período, respeitando os meus momentos de estudo e sempre estando presentes quando eu precisava.

A **CAPES** (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), por financiar meus estudos, e sempre acreditar na potencialidade de seus alunos.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Tabela	xi
Resumo	xii
Abstract	xiii
Capítulo 1 - Introdução	14
Capítulo 2 - Estoques: Metodologias e Modelos	17
2.1 – Modelos simples para o cálculo dos estoques	17
2.2. Revisão de literatura sobre estoque de peças de reposição	23
Capítulo 3 - Conceitos Preliminares	29
3.1. Processos Estocásticos	29
3.2. Processos Markovianos.....	33
3.3. Cadeia de Markov.....	34
3.4. Equações de Chapman-Kolmogorov	36
3.5. Classes de estados em uma cadeia de Markov	38
3.6. Probabilidades de Estado Estável	41
3.7. Cadeias de Markov em Tempo Contínuo	43
3.8. Processo de Nascimento e Morte.....	47
3.9. Distribuição tipo Fase (PH).....	53
Capítulo 4 - Metodologia QBD e Aplicações.....	55
4.1. Processo de Quase Nascimento e Morte (QBD)	55
4.1.1. Representação de linhas de Produção.....	56
4.1.2. Parâmetros de Confiabilidade Usando um Processo QBD.....	63
4.1.3. Estimativa de peças de reposição reparáveis.....	66

Capítulo 5	71
Conclusões.....	71
5.1. Considerações Finais	71
5.2. Trabalhos futuros.....	72
Referências	74
ANEXO I – Diferença entre Distribuição e Processo de Poisson	77
ANEXO II – Exponencial de uma Matriz Quadrada.....	79
ANEXO III – Operações de Kronecker	80
ANEXO IV – Definições de Confiabilidade e Disponibilidade	84
APÊNDICE A.....	85

Lista de Símbolos

EOQ – *Economic Order Quantity* – Lote Econômico de Compras.

QBD process – Quasi-Birth- and-Death – Processo de Quase-Nascimento-e-Morte.

$M/M/1$ – Modelo de Fila com processo de chegada do tipo Poisson, tempo de serviço exponencial e apenas um servidor.

Distribuição PH – Distribuição tipo Fase.

Q – Matriz geradora infinitesimal formada por blocos tri-diagonais que indicam probabilidade de transição entre estados e subestados.

\otimes – Operação produto de kronecker.

\oplus – Operação soma de kronecker.

Lista de Figuras

Figura 1 – Cadeia estocástica de parâmetro discreto a): Fogliatti e Mattos (2007).	32
Figura 2 – Cadeia estocástica de parâmetro contínuo b): Fogliatti e Mattos (2007).	32
Figura 3 – Processo estocástico contínuo de parâmetro discreto c): Fogliatti e Mattos (2007).	32
Figura 4 – Processo estocástico contínuo de parâmetro contínuo do item d): Fogliatti e Mattos (2007).	33
Figura 5 – Diagrama de fluxo de uma cadeia de Markov de parâmetro contínuo: Fogliatte e Mattos (2007).	36
Figura 6 – Tela de entrada para os estados $2 \leq i, j \leq 10$ de uma Cadeia de Markov do exemplo na página 717 em Hillier e Lieberman (2006).	37
Figura 7 – Matriz de transição na 2ª etapa, $n=2$.	38
Figura 8 – Matriz de transição na 5ª etapa, $n=5$.	38
Figura 9 – Representação em diagrama de rede da matriz de transição P .	40
Figura 10 – Matriz de transição na 8ª etapa, apresentando as probabilidades de estado estável, calculadas para n etapas.	43
Figura 11 – Probabilidades de estado estável, calculadas por meio das equações de estado estável.	42
Figura 12 – Modelo básico do Processo nascimento e morte usando grafos: Fogliatti e Mattos (2007).	48
Figura 13 – Representação de um processo QBD: Fadiloglu e Yeralan (2002).	57
Figura 14 – Servidor com buffer limitado e parâmetros relevantes: Fadiloglu e Yeralan (2002).	58
Figura 15 – Diagrama de transição de Markov para o Modelo 1: Fadiloglu e Yeralan (2002).	58
Figura 16 – Servidor com avaria e reparo e seus parâmetros relevantes, adaptado de Fadiloglu e Yeralan (2002).	59

Figura 17 – Diagrama de transição de Markov do Modelo 2: Fadiloglu e Yeralan (2002).....	60
Figura 18 – Servidor com tempo de serviço Erlang-2, buffer limitado e parâmetros relevantes: Fadiloglu e Yeralan (2002).....	61
Figura 19 – Diagrama de transição de Markov do Modelo 3: Fadiloglu e Yeralan (2002).....	61
Figura 20 – Resultados obtidos com o código do algoritmo HUANG-LIANG-GUO, rodado no Scilab.....	69
Figura 21 – Gráfico para a distribuição de Poisson com λ diferentes.....	77
Figura 22 – Código que gera a matriz infinitesimal Q , do exemplo numérico, seção 4, em Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004).....	82
Figura 23 – Matriz Q do exemplo numérico, seção 4, em Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004), com as 11 primeiras e as 8 últimas colunas na tela do aplicativo Scilab 5.2.2.....	83
Figura 24 – Código implementado a partir do código do algoritmo de HUANG-LIANG-GUO.	86

Lista de Tabela

Tabela 1 - Classificação de Processos Estocásticos sob a natureza do Tempo e o Espaço de Estados diferenciados.....	30
Tabela 2 – Valores de confiabilidade para que um sistema permaneça em funcionamento analisado por diferentes valores de t	70

Resumo

Diferentes ferramentas auxiliam a tomada de decisão do número estimado de peças de reposição, garantindo a continuidade de um processo produtivo. As características dessas peças fazem necessário o uso de modelos que incorporem a aleatoriedade na definição confiável no tamanho dos estoques. Então foi estudado a ferramenta que modela esta tomada de decisão usando processos markovianos de tempo contínuo.

Para a representação desse tipo de problema foi necessário o estudo da extensão do processo de nascimento e morte, chamado processo de quase nascimento e morte, (QBD – *Quasi-Birth-and-Death process*). É por meio deste que se construiu um algoritmo capaz de estimar a quantidade de peças de reposição com uma confiabilidade especificada. Neste trabalho construiu-se um código para testar numericamente o algoritmo em ambiente Scilab 5.2.2 testado utilizando dados presentes na literatura com um desempenho numérico satisfatório.

Palavras-chave: Controle de Estoque, Peças de reposição sobressalente, Aplicação de Processos Estocásticos.

Abstract

Different tools help decision making in the estimated number of spare parts, ensuring continuity of a production process. The characteristics of these pieces are necessary to use models that incorporate randomness in the reliable definition of the size of inventories. So was studied with the tool that shapes this decision-making processes using continuous time Markov.

To represent this type of problem it was necessary to study the extension of the birth and death process, called quasi birth and death process (QBD process). It is through this that has built an algorithm to estimate the amount of spare parts with a specified reliability. In this work we constructed a numerical code to test the algorithm in an environment Scilab 5.2.2 tested using data from the literature with a satisfactory numerical performance.

Keywords: Inventory Control, Demand of Spare Parts, Application of Stochastic Processes.

Capítulo 1

Introdução

Os séculos XX e XXI caracterizam-se pelo crescimento econômico, pelo desenvolvimento tecnológico da informação e o aumento da participação deste na gestão de negócios. O desenvolvimento se deu graças à globalização dos mercados, que permite disponibilizar da informação em tempo real, as comunicações mais rápidas e a integração dos mercados. Assim sendo, sob auxílio destas tecnologias de informação e comunicação, a logística evoluiu garantindo às empresas acessibilidade aos mercados em diferentes locais no mundo de forma competitiva.

Atualmente, uma das formas que as empresas encontram para obter vantagens competitivas no mercado é por meio de uma gestão eficiente da cadeia de suprimentos. A relação do cliente-fornecedor está cada vez mais evidente neste meio garantindo assim grandes oportunidades de negócios, principalmente na redução de custos, (BALLOU, 2006).

Como parte da cadeia de suprimentos, a Logística é entendida como uma função empresarial que tem por objetivo atender o cliente em um nível de serviço especificado. Para isso são necessárias tomadas de decisão nos níveis estratégico, tático e operacional, nas três áreas que compõe a Logística: transportes; estoques e localização, (BALLOU, 2006). Tais tomadas de decisão influenciam diretamente nos custos gerais da empresa, no atendimento ao cliente, nos problemas operacionais e na lucratividade da companhia. Além disso, os estoques são de grande importância para avaliação da liquidez da empresa por parte de investidores e instituições

financeiras.

Porém, não é fácil tomar decisões adequadas, visto que, existem muitas flutuações dos produtos que tornam os problemas mais complexos de serem resolvidos. Sendo assim, os gestores de estoque sempre se deparam com problemas, que podem ser conflitantes: os estoques geram custos por armazenagem, empatam uma quantia significativa do capital, contudo, eles proporcionam certo nível de segurança nos ambientes onde a demanda é variada.

Com esta visão, um estudo sobre gestão de estoque, em particular sobre a gestão de peças de reposição (ou peças sobressalentes) é relevante. Pois normalmente a gestão desses itens é complexa, porque estes têm como características demandas baixas e irregulares, as respostas a pedidos de fornecimento para reposição podem tomar longos períodos de tempo (meses), e o custo de aquisição por unidade é alto. O que se percebe é que a tomada de decisão sobre peças sobressalentes é feita de forma intuitiva, isto é, pela experiência adquirida na prática e/ou apenas aplicando princípios gerais da administração de estoque.

Segundo Huiskonen (2001), o principal objetivo do gerenciamento de estoques de sobressalentes é conseguir um patamar satisfatório de nível de serviço (confiabilidade e disponibilidade) com o mínimo custo.

O presente trabalho é desenvolvido tomando como foco o tamanho do estoque de peças de reposição reparáveis. Utilizar a opção de reparação nestas peças é mais viável do que se fazer a substituição das mesmas, tanto por questões econômicas quanto por questões temporais e assim podem-se resgatar princípios ambientais. Abordagens para estimar o estoque destas peças de reposição é feita sobre a importante hipótese: uma peça ao ser reparada volta ao funcionamento tão boa quanto uma nova; isto faz com que o sistema operacional não fique comprometido. Então, ao se deparar com estas características percebe-se que existe uma ampla oportunidade de áreas a serem pesquisadas.

Como objetivos do trabalho, pretende-se identificar modelos que utilizam ferramentas estocásticas para a definição do tamanho do estoque de peças de reposição e; estimar o tamanho ótimo do estoque de peças de reposição reparáveis. Para estes propósitos serão direcionados os estudos em processos estocásticos, distribuição tipo Fase e o processo de quase nascimento e morte.

Focado nesta oportunidade é que se desenvolve o presente trabalho, trabalhar com peças de reposição e que sejam reparáveis. A seguir serão apresentados abordagens e modelos que solucionam tal problemática para a determinação destes itens. Os trabalhos relacionados no próximo capítulo abordam diferentes metodologias para a identificação da quantidade de peças de reposição, que ainda estão em estoque, o qual leve a fazer um novo pedido, para garantir que o sistema produtivo continue em funcionamento. Estas metodologias são necessárias para que o sistema não entre em colapso, o que permite abordar o problema de estoque em estudo como a determinação do estoque de peças de reposição para evitar um próximo estado de falha. O estado de falha é encontrado normalmente em trabalhos que envolvem a manutenção de equipamentos, onde as peças de reposição são fundamentais para dar continuidade ao funcionamento destes.

Este trabalho está estruturado em 5 capítulos. No Capítulo 2 inicia-se o estudo sobre os estoques, estendendo ao estoque de peças de reposição reparáveis, apresentando as metodologias utilizadas para o cálculo da estimativa das mesmas; No Capítulo 3 encontra-se o embasamento teórico desta dissertação; No Capítulo 4 são apresentadas aplicações do processo de Quase Nascimento e Morte (QBD) para sistemas produtivos, e no último capítulo são apresentadas as considerações finais da pesquisa.

Capítulo 2

Estoques: Metodologias e Modelos

O estoque tem um papel fundamental nos processos produtivos tanto para geração de produtos quanto para a venda deles. Corrêa *et al.* (2000) definem que os “estoques são acúmulos de recursos, materiais entre fases específicas de processos de transformação”.

Este capítulo tem por objetivo, no primeiro tópico, apresentar o modelo clássico para o controle de estoque, cálculo do EOQ (*Economic Order Quantity*), que é a estimativa da quantidade de material a ser comprado que minimiza os custos de investimentos de uma indústria. Adicionalmente, uma extensão deste modelo que considera pedidos de materiais novos e materiais obitados da recuperação de produtos que retornaram à indústria. No segundo tópico, apresenta-se uma revisão bibliográfica de metodologias aplicadas nos estoques de peças de reposição.

2.1 – Modelos simples para o cálculo dos estoques

A modelagem de estoques é uma ferramenta que se utiliza para determinar o nível de mercadoria que uma empresa deve manter para assegurar uma operação tranquila de seu processo produtivo. Um modelo de estoque ajuda na tomada de decisão da quantidade de materiais que é necessário, para um sistema produtivo, levando em consideração o equilíbrio entre o custo de capital devido ao armazenamento deste estoque com aquele ocasionado pela falta do mesmo, (TAHA, 2007). A complexidade do problema de estoque não permite o desenvolvimento de

um modelo geral que abranja todas as situações possíveis. É preciso fazer uma análise dos dados coletados e criar um modelo específico para o problema que está sendo levado em questão.

O fator primordial que afeta a determinação do nível de estoque é a natureza da demanda, que pode ser tanto determinística quanto probabilística. É mais comum, segundo Taha (2007), a utilização de demanda probabilística, porém em alguns casos a aproximação determinística pode ser aceitável.

Um tipo especial de mercadoria, considerado muito crítico para a maioria das empresas, são as peças de reposição, por exemplo, para compressores, os mancais; e para PCs Desktop, uma placa mãe ou HD. O controle de estoque dessas peças de acordo com Silva (2009), é necessário devido ao alto custo de cada item para o estoque, prazos longos de fornecimentos destes e a pouca frequência de demanda dos mesmos, conhecida como de baixo giro.

Para se modelar problemas que envolvam a determinação de estoques de peças de reposição e/ou estimativa de falhas, são utilizados os processos estocásticos e a teoria de filas. E a solução desses modelos pode usar várias ferramentas de cálculo, tais como, a programação linear ou a não-linear ou a dinâmica. No entanto, a escolha de qualquer que seja a ferramenta, dependerá da natureza da demanda para a resolução do modelo. Os critérios que norteiam o estudo dos modelos de estoque têm de responder a três questões básicas quais sejam: *quanto* pedir, *quando* fazer o pedido e *qual* o nível de serviço que se deseja oferecer.

De acordo com os interesses da empresa e obviamente da quantidade de informações que forem disponibilizadas pela mesma, maior será o apoio destas ferramentas no auxílio à estimativa média de capacidades e custos produtivos em cada etapa do processo estudado, (BRANCO e COELHO, 2006). De modo similar, quanto mais informações forem disponibilizadas a respeito da demanda, mais ajustados serão os resultados obtidos através dessas ferramentas, portanto uma decisão mais segura poderá ser tomada.

Para responder a estes questionamentos de quanto e quando pedir os materiais (insumos) se formula uma função de custos (total) de estoque, cuja variável será a quantidade a ser solicitada, e em seguida busca-se a minimização desta função:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Custo} \\ \text{total} \\ \text{de} \\ \text{estoque} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Custo} \\ \text{de} \\ \text{compra} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Custo} \\ \text{de} \\ \text{preparação} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Custo} \\ \text{de} \\ \text{estocagem} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Custo} \\ \text{de} \\ \text{falta} \end{array} \right) \quad (2.1-1)$$

onde,

Custo de compra - é o preço unitário de um item para o estoque;

Custo de preparação - representa os encargos fixos incorridos para que o pedido de compra seja emitido;

Custo de estocagem - representa o custo de manter a mercadoria em estoque;

Custo de falta - é a multa incorrida pela falta de unidades em estoque.

A demanda tem um papel importantíssimo no desenvolvimento dos modelos de estoque, conforme foi mencionado anteriormente, a demanda para um determinado item pode ser determinística ou probabilística e, dentro de qualquer categoria, a demanda pode variar ou não ao longo do tempo.

De acordo com Taha (2007), em situações práticas, o padrão de demanda em um modelo de estoque pode assumir um dos quatro tipos a seguir:

1. Determinístico e constante (estático) ao longo do tempo.
2. Determinístico e variável (dinâmico) ao longo do tempo.
3. Probabilístico e estacionário ao longo do tempo.
4. Probabilístico e não estacionário ao longo do tempo.

Dentre estes padrões considera-se a disponibilidade de dados da demanda futura que sejam representativos. Conhecer este parâmetro é essencial para a resolução de muitos modelos de estoque. O modelo mais conhecido e utilizado para fazer cálculo da quantidade de estoque é o EOQ - *Economic Order Quantity*, conhecido também como Lote Econômico de Compras. Este modelo calcula a quantidade a ser comprada de um insumo que vai minimizar os custos de estocagem e de aquisição que mantém um sistema produtivo em funcionamento, garantindo a satisfação do cliente.

Realizar este cálculo é importante para as empresas, pois a estimativa encontrada irá funcionar como apoio a tomada de decisão para os gestores na

cadeia de produção. A seguir é apresentado o desenvolvimento para o cálculo do EOQ.

Para alguns autores como Hiller & Lieberman (2006) e Taha (2007), o modelo de lote econômico de compra, EOQ mais simples, considera as seguintes hipóteses: demanda constante; reabastecimento instantâneo; e não aceita nenhuma falta do insumo. Assim se definem:

y – quantidade de pedido (em unidades);

d – taxa de demanda (unidades por unidade de tempo);

t_0 – comprimento do ciclo do pedido (em unidade de tempo), se calcula t_0 como

$$t_0 = \frac{y}{d};$$

K – custo de preparação associado com a emissão de um pedido (por pedido);

h – custo de estocagem (por unidade de estoque e por unidade de tempo);

Assim, considerando um nível de estoque igual ao valor médio do pedido, $\frac{y}{2}$, o custo total por unidade de tempo, TCU (*total cost per unit time*), será calculado pela seguinte função:

$$TCU(y) = \frac{K}{\left(\frac{y}{d}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right). \quad (2.1-2)$$

Então, para encontrar a quantidade ótima do pedido, y^* , se minimizar a função TCU em relação à y . Como a função TCU é contínua, para $y > 0$, e sendo diferenciável, só deve-se resolver a equação $\frac{\partial TCU}{\partial y} = 0$ para encontrar os pontos críticos, condição necessária da solução ótima. Sendo a função TCU convexa, a solução da equação anterior é um ponto de mínimo, pois neste caso a equação é uma condição suficiente. Assim, o tamanho ótimo do pedido, EOQ, é

$$y^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}. \quad (2.1-3)$$

Notar que este primeiro modelo de lote econômico trata somente da elaboração de produtos com materiais novos (virgens). Porém, nos últimos 30 anos,

por causa de fatores ambientais e esgotamento de recursos naturais, a tecnologia de produção se desenvolve e incorpora materiais, pós-consumo, a partir de componentes recuperados de produtos descartados da própria indústria. Descobrimo-se assim um nicho de negócios que satisfaz a legislação ambiental presente em alguns países. Dentro desta ideia, é preciso formular modelos que incluam taxas de recuperação de produtos (ao final da vida útil) e de taxas de recuperação de componentes, materiais necessários para nova produção. Estas novas abordagens só podem ser possíveis após a implantação de uma logística reversa nas indústrias manufatureiras, (ROGERS e TIBBEN-LEMBKE, 2001).

Sob hipóteses de recuperação de itens, no final de sua vida útil, encontra-se uma das extensões do cálculo do lote econômico ótimo. O modelo EOQ apresentado a seguir foi proposto por El Saadany e Jaber (2008), modelado para dois armazéns, um específico para a produção de novos e reparados e outro somente para as armazenagens de produtos recolhidos, em que os parâmetros são:

T - comprimento do intervalo de tempo da produção de itens novos e reparados (unidades de tempo), onde $T > 0$;

T_1 - comprimento do primeiro intervalo de tempo para produção (unidades de tempo), em que $T_1 < T$ e $T_1 > 0$;

n - número de lotes de produção com insumos novos durante um intervalo de duração T ;

m - número de lotes de produção com insumos reparados durante um intervalo de duração T ;

d - taxa de demanda (unidades por unidade de tempo);

h - custo de manutenção por unidade por unidade de tempo no 1º armazém;

u - custo de manutenção por unidade por unidade de tempo no 2º armazém;

α - taxa de eliminação de resíduos, onde $0 < \alpha < 1$;

β - taxa de itens coletados reparados, onde $\alpha + \beta = 1$ e $0 < \beta < 1$;

y - tamanho de lote para intervalo T , que inclui n lotes recém-fabricados e m lotes reparados;

r - custo de preparação para a reparação por lote;

s - custo de preparação para a produção de novos por lote;

A seguir é apresentada a função custo proposta por El Saadany e Jaber (2008).

$$K(y, m, n, \alpha) = \frac{K_2}{T} = \frac{d}{y}(mr + ns) + \frac{y}{2} \left[h \left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m} \right) + u\beta - u\beta^2 \frac{(m-1)}{m} \right], \quad (2.1-4)$$

onde, $K_2 = (mr + ns) + \frac{h}{2d} \left(\frac{\alpha^2 y^2}{n} + \frac{\beta^2 y^2}{m} \right) + \frac{u\beta y^2}{2d} \left(1 - \beta \frac{(m-1)}{m} \right)$, e $T = \frac{y}{d}$.

Notar que a função de custo da relação (2.1-4) tem uma configuração análoga da função de custo da relação (2.1-2). O primeiro termo está relacionado aos custos de preparação ou de pedido e o segundo termo está relacionado ao custo de manutenção do estoque médio. O custo de manutenção compreende o custo de armazenagem de materiais virgens mais o custo de armazenagem de produtos após consumo, fonte dos materiais recuperados.

Na relação (2.1-4) defini-se a função K que é convexa e diferenciável em relação à variável y , para cada valor de m , n , e α fixos, isto é, $\partial^2 K / \partial y^2 > 0$ para todo $y > 0$. Por esta razão, e para valores de m , n , e α fixados, esta relação tem um único mínimo:

$$y(m, n, \alpha) = \sqrt{\frac{2d(mr + ns)}{h \left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m} \right) + u\beta \left(1 - \beta + \frac{\beta}{m} \right)}}. \quad (2.1-5)$$

O desenvolvimento deste novo modelo está relacionado com a necessidade de resultados que incorporem a remanufatura, proposta inicialmente por (RICHTER, 1996). Como puderam ser observadas, as relações (2.1-4) e (2.1-5) foram adaptados por El Saadany e Jaber (2008) para estimar o EOQ utilizando itens que podem ser recuperados. É importante destacar que o modelo adaptado ajusta-se bem a quantidade de pedido ótimo, visto que, a função de custo se mantém ainda convexa e diferenciável assim como no modelo da relação (2.1-2).

Diante das características de peças de reposição: altos custos, pouca rotatividade e tempos longos de fornecimento, existe o caso de peças que podem ser reparadas na própria indústria as quais são chamadas de peças de reposição reparáveis. Pode-se observar que a possibilidade de reparação não está

considerada nas relações (2.1-2) e (2.1-4) que estima o lote econômico de estoque. Mesmo sendo muito eficiente para os itens comuns há uma necessidade maior de construir outros modelos para o estoque de tais peças de reposição.

2.2. Revisão de literatura sobre estoque de peças de reposição

A seguir apresenta-se uma revisão bibliográfica das abordagens feitas no tratamento de estoques de peças de reposição recuperáveis e não recuperáveis, de onde se afirma que ainda está em desenvolvimento um método geral para a determinação do tamanho dos mesmos.

Itens reparáveis formam parte das peças de reposição as quais são técnica e economicamente recuperáveis. Em caso de falha, a peça que causou a falha é substituída por uma de reserva e é enviada para um centro de reparo interno, sendo posteriormente, uma vez recuperada, disponibilizada em estoque. Já os itens não reparáveis (descartáveis) correspondem às peças que não são nem técnica nem economicamente recuperáveis. Assim, para estes itens, em caso de falha, a peça é simplesmente descartada, (GOMES e WANKE, 2008).

Considerando estes dois tipos de peças de reposição é que se desenvolve esta revisão bibliográfica. Serão abordados aqui os métodos que foram utilizados para solucionar o problema de estocagem de tais peças.

Koçağa (2004) estudou um sistema de serviço de peças de reposição de um grande fabricante de equipamentos para semicondutores. De acordo com o autor, a empresa tem por objetivo fornecer peças de reposição e serviços aos clientes que a procuram tanto por falhas de seus equipamentos, quanto para manutenções já programadas. Fazendo um levantamento histórico das demandas foi percebido que as mesmas não são regulares e poderiam ser reclassificadas para melhorar a análise do atendimento ao cliente. O autor propôs então, incorporar na empresa uma política de racionamento, com duas classes de demandas diferenciadas, utilizando somente dentro do tempo de reabastecimento, seu *lead-time*. Neste trabalho é construído um modelo que assume que as demandas seguem uma distribuição de Poisson e que o inventário é preenchido de acordo com a política de estoques $(S - 1, S)$, onde S indica o nível máximo de estoque, isto é, tão logo o nível de

estoque baixe em uma unidade é solicitado o ressuprimento.

Já no trabalho de Wanke (2005) foram apresentadas considerações metodológicas sobre como segmentar a gestão de peças de reposição do tipo consumíveis em termos de suas características principais, consumo médio e coeficiente de variação do consumo, assumindo como base para a determinação do nível de estoque a distribuição Gama. Segundo o autor, os estoques na empresa são repostos com base em previsões de consumo para os próximos meses, sendo que todas as peças de reposição são fabricadas internamente e os ciclos de produção observam o horizonte de um mês. Para este propósito, formulou o modelo de segmentação, para tais peças, implementado em planilhas MS-Excel utilizando o aplicativo estatístico SPSS®.

O autor Kayano (2005) desenvolveu um trabalho que consiste na elaboração de uma nova gestão de estoques nos centros de manutenção da Diretoria do Material da *Société Nationale des Chemins de Fer Français (SNCF)*. O foco do trabalho foi à determinação da quantidade de peças de reposição que devem ser estocadas para garantir um nível de serviço desejado nos centros de manutenção da *SNCF*. Para isso o autor desenvolveu um aplicativo utilizando MS Access® capaz de calcular novos parâmetros (pontos de pedido, quantidades de abastecimento, estoques de segurança) para a gestão de estoque, ou seja, o dimensionamento do estoque. E para estimar estes novos parâmetros foi utilizada a distribuição de Poisson e a distribuição normal. No entanto, com a utilização desse aplicativo, percebeu-se que a fórmula que calcula o lote econômico de compras (LEC), ou EOQ, era inadequada para o caso específico da manutenção na *SNCF*, pois os fluxos, além de não serem constantes durante o ano, eram bastante fracos, implicando lotes muito grandes e pouco frequentes de abastecimento.

Oliveira *et al.* (2007) apresentaram um modelo de simulação para analisar o comportamento de diversos cenários ou estratégias de políticas de estoque de itens sobressalentes de baixo consumo. Assim, contribuíram para o aprimoramento do processo de tomada de decisão e na construção de políticas de estoques que visem aperfeiçoar a disponibilidade de sistemas baseados na tecnologia COTS (*Commercial Off-The-Shelf*). A disponibilidade de um sistema é entendida como a fração do tempo em que o sistema permanece em bom funcionamento. Os cenários utilizados foram definidos por diferentes políticas de decisão, como a política (s, S)

onde a demanda é estocástica e está associada com os itens de movimentação lenta, com a finalidade de facilitar a análise de sensibilidade dos parâmetros e/ou fatores de entrada do problema. Uma vez obtidos os resultados da disponibilidade das peças de reposição, realizada utilizando um planejamento de experimento de simulação com enfoque na metodologia Fatorial, os autores utilizaram o programa MINITAB para calcular o efeito de cada fator e a interação dos fatores sobre as respostas encontradas.

Kochi (2008) teve como objetivo de trabalho melhorar a política de estoque do setor de serviços pós venda de relógios de uma empresa que comercializa artigos de luxo de joalheria e relojoaria. O autor comparou o método de cálculo de estoque, média ponderada, que era utilizado na empresa durante o estudo e, propôs dois outros métodos: o de suavização exponencial e o Bootstrap. O resultado indicou que os métodos propostos, através do cálculo de necessidades, foram melhores do que o utilizado pela empresa e com melhores níveis de serviço e menores custos de estocagem.

Gomes e Wanke (2008) apresentaram uma pesquisa que aborda a gestão de estoques de peças de reposição descartáveis. Neste trabalho foi feita uma comparação entre um modelo de simulação computacional convencional e um modelo por cadeias de Markov, cujo objetivo foi de determinar qual política representará o melhor momento de fazer um pedido para completar o estoque. Propôs uma heurística para determinação dos parâmetros (nível de estoque máximo e o ponto de pedido) para a melhor política de gestão de estoques. Isto é, uma política tipo (S, s) , em função dos itens: demanda, com distribuição Poisson, e custos pela falta, pelo excesso e do ressuprimento; assumindo o *lead time* constante equivalente a um período. A heurística desenvolvida a partir desses resultados mostrou que a aproximação da política (S, s) pela $(S, S - 1)$, mesma política utilizada por Koçağa (2004), é satisfatória em termos dos custos totais, sobretudo quando as peças de reposição apresentam elevado custo da falta, chamado pelos autores de extrema criticidade.

Freitas (2008) objetivou por fazer um levantamento de um modelo da gestão de estoque, já legitimado pela literatura, para aplicá-lo, a realidade da refinaria estudada, nas peças sobressalentes de manutenção. O modelo proposto pelo autor foi um modelo de controle de estoque baseado no sistema (r, q) , onde r é o ponto de

ressuprimento, equivale ao s na política tipo (S, s) , e q é a quantidade de itens para o ressuprimento. Este modelo foi utilizado, pelo autor, para tratar de problemas de otimização de estoques de sobressalentes com as premissas: possuir demandas com distribuição de Poisson e tempo de ressuprimento constante.

Silva (2009) desenvolveu em sua dissertação um estudo sobre peças de reposição de uma grande empresa multinacional do setor de siderurgia. O trabalho do autor consistiu em desenvolver uma metodologia que classifique e controle estas peças considerando demanda e *lead-time* estocásticos. Foram utilizados como premissas, nos modelos de estoques, as distribuições estatísticas de Poisson, Laplace, Gama e Normal em combinação com a otimização do custo total para a modelagem da demanda durante o *lead-time* e determinação do ponto de ressuprimento, quantidade de pedido e estoque de segurança. Para a geração dos valores de previsão foi implantado o método Bootstrap indicado para itens de baixa rotatividade com demanda intermitente, (WILLEMAIN *et. al*, 2004).

Drohomeretski *et al.* (2009) propuseram um modelo de gestão de estoque de peças de reposição não reparáveis, para uma empresa que produz equipamentos de refrigeração para todo o país. O modelo está baseado no método de revisão periódica e classificação ABC, abordando a dependência entre a demanda das peças sobressalentes e a dos produtos acabados com garantia de assistência pós venda. Para criar o modelo apropriado, no estudo de caso em questão, os autores utilizaram históricos de consumo das peças de reposição dos equipamentos, que ainda estão em garantia. Usou como premissa a revisão destes itens feita mensalmente e a partir de dados históricos foi possível estimar a distribuição normal da demanda. O modelo apresentou boa capacidade para adaptar-se a mudanças de demanda de produtos acabados e do consumo de peças de reposição.

Nos trabalhos acima se ressalta a importância da utilização de métodos adequados que se mostraram eficientes para a resolução do problema em estudo, estoques de peças de reposição. Os métodos utilizados foram uma combinação de classificação, simulação com funções de distribuição diferentes à exponencial, decididas por cada autor como consequência da especificidade do problema abordado, garantindo bom desempenho dentro da pesquisa desenvolvida.

As funções de distribuição utilizadas foram a de Poisson, Gama, Normal, Erlang e Laplace como relatado pelos autores Koçağa (2004), Wanke (2005), Kochi

(2008), Freitas (2008) e Silva (2009). No entanto, pesquisadores como Gomes e Wanke (2008) apresentam uma metodologia baseada em processos markovianos, utilizando as cadeias de Markov, mostrando que há necessidades de novos direcionamentos e uso de ferramentas diferentes das clássicas para ajustar melhor os resultados.

No artigo de Sales e Morales (2010) foi apresentada uma revisão dos trabalhos apresentados até o momento, onde se utilizam as metodologias clássicas conhecidas aplicadas para estoque de peças de reposição. Seguindo o desenvolvimento desse trabalho serão referidos os artigos sobre a metodologia chamada processos de Quase Nascimento e Morte (*Quasi-Birth-and-Death process*, QBD), que consegue representar melhor os estágios intermediários para o estudo das peças de reposição reparáveis, por exemplo. Esta metodologia também é utilizada para a modelagem do gerenciamento de estoques, e é entendida como uma extensão dos processos de Nascimento e Morte usada no estudo de peças de reposição que sejam reparáveis. Esta abordagem será apresentada no capítulo 3.

Fadiloglu e Yeralan (2002) apresentam exemplos que utilizam a metodologia processo QBD aplicados a modelagem de processos de linha de produção. Os processos em linha apresentados são modelados como se fosse um sistema de fila, que apresentam um grau de complexidade maior a cada modelo desenvolvido. O mais simples dos modelos é representado pelo modelo de fila $M/M/1$, definida por uma distribuição exponencial representado por M , de parâmetro λ , serviço de atendimento definido por uma distribuição exponencial M com um único serviço de atendimento, e a disciplina de atendimento, o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido. Estendendo o modelo, pode-se incluir dois servidores com chegadas exponenciais, *buffer* intermediário, avaria e reparação, entre outros. Entende-se por *buffer* todo local que serve de armazém temporário, menor do que o habitual, para ser utilizado como amortecedor na linha de produção.

Cada modelo, em Fadiloglu e Yeralan (2002), foi primeiramente apresentado, usando um diagrama de rede e após a visualização da rede são incluídas equações de balanço que definem o processo. A partir das equações de balanço é possível identificar cada sub-matriz dos estados de transição do sistema. A definição das equações de balanço encontra-se no tópico Processos de Nascimento e Morte.

No trabalho de Pérez-Ocón e Monoto-Cazorla (2004), considera-se que um sistema opera com n unidades e que destas apenas uma é suficiente para manter o sistema em funcionamento, casos as outras estejam no reparo ou na fila para a reparação. Sendo assim, uma vez que esta unidade sofre uma avaria e não se tem mais nenhuma outra para a substituição, pelos motivos anteriores, o sistema inteiro entra no estado de falha. Para que este estado seja minimizado, os autores realizam cálculos para a determinação dos vetores de probabilidade estacionária e as medidas de desempenho considerando termos de confiabilidade. Os cálculos envolvidos tomam em consideração que o tempo operacional e o tempo de reparo das unidades seguem uma distribuição tipo Fase contínua e que o sistema é governado por um processo QBD. As medidas de desempenho que os autores determinam são a disponibilidade e a taxa de ocorrência de falhas. Lembrando que a disponibilidade e taxa de falha são assuntos também abordados em Oliveira *et al.* (2007) e Koçağa (2004) respectivamente. Definições sobre a confiabilidade e disponibilidade de um sistema encontram-se no Anexo IV.

Huang *et al.* (2006) desenvolvem um modelo geral para demanda de peças de reposição reparáveis baseados em um processo QBD. No modelo é assumido que tanto o tempo operacional quanto o tempo de reparação também seguem uma distribuição tipo Fase de tempo contínuo assim como em Pérez-Ocón e Monoto-Cazorla, (2004). A partir do modelo desenvolvido, os autores constroem um algoritmo que determina a quantidade mínima necessária de peças de reposição a serem adquirida, ou que deve se manter, para que o sistema não fique inoperante.

Estes três últimos trabalhos descritos acima formam a base do estudo dessa dissertação. A utilização do processo QBD na determinação da quantidade de peças de reposição torna-se a nova metodologia que é eficiente na forma de visualização de resultados.

Neste capítulo foram enumerados capítulos de livros e artigos que estudam o cálculo do tamanho do lote econômico, EOQ, para estoques. Além de uma extensão ao método de Nascimento e Morte para quando se quer prever o tamanho de estoque, caso de peças sobressalentes, com a capacidade de serem recuperáveis. Esta revisão garante a necessidade de um maior estudo de tópicos relacionados a processos estocásticos para uma modelagem mais acurada de problemas reais.

Capítulo 3

Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão abordados os conceitos preliminares que formam a base essencial para o estudo relacionado ao estoque de peças de reposição reparáveis.

3.1. Processos Estocásticos

Os processos estocásticos foram inicialmente estudados nos anos de 1900 utilizados em estudos da física para descrever o movimento de partículas em um instante de tempo (Movimento Browniano e a Teoria do Caos), (GLATTFELDER, 2011). Este estudo serviu e serve como base para o desenvolvimento de pesquisas nas áreas de meteorologia, finanças e engenharia.

Os processos estocásticos podem-se classificar:

- Quanto ao comportamento dos parâmetros das variáveis aleatórias na evolução do tempo:
 - Processos Estacionários: onde a média e variância são constantes no tempo; e
 - Processos Não-estacionários: onde o valor esperado, a média da variável aleatória, pode crescer sem limite e sua variância aumenta com o tempo.

- Quanto à natureza da variável tempo e dos estados, pode-se visualizar a seguinte tabela:

Tabela 1- Classificação de Processos Estocásticos sob a natureza do Tempo e o Espaço de Estados diferenciados.

Espaço de Estados Tempo	Discreto	Contínuo
Contínuo	Cadeias Contínuas	Funções Estocásticas
Discreto	Cadeias Discretas	Sequências Estocásticas

A seguir alguns exemplos encontrados em Bhat (1971) ilustram a classificação visualizada na Tabela 1.

1 – Processos estocásticos com parâmetros, tempo discreto e espaço de estado discreto:

- O número de itens defeituosos em um esquema de amostragem. O número de itens inspecionados é o parâmetro de indexação.

2 – Processos estocásticos com parâmetros, tempo contínuo e espaço de estado discreto:

- Número de alunos esperando o ônibus a qualquer hora do dia.

3 – Processos estocásticos com parâmetros, tempo discreto e espaço de estado contínuo:

- Suponha que o produto não é enumerável (tais como tecido, gasolina, etc) e o inventário está sendo observado apenas em épocas distintas de tempo.

4 – Processos estocásticos com parâmetros, tempo e espaço de estado contínuo:

- O tempo de funcionamento de uma máquina até que ocorra a primeira falha.

Uma formulação matemática descreve os processos estocásticos como processos que evoluem ao longo do tempo e podem ser definidos como um conjunto indexado de variáveis aleatórias $\{X_t\}$ em que o índice t percorre um dado conjunto T que representa o tempo de observação da variável. O conjunto T é normalmente um conjunto de números inteiros não negativos e, X_t representa uma característica mensurável de interesse no instante t .

De acordo com Hillier e Lieberman (2006), um processo estocástico é normalmente estruturado da seguinte maneira:

O estado atual pode cair em qualquer uma das $M+1$ categorias mutuamente exclusivas denominadas de estados. Onde os estados do sistema no instante t , são representados pela variável aleatória X_t , e podem ser identificados como $0, 1, \dots, M$, os quais são os únicos valores possíveis. O sistema é observado em pontos determinados do tempo, identificados por $t=0, 1, 2, \dots$. Portanto, a sequência $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ fornece uma representação de como o estado do sistema físico, em estudo, evolui ao longo do tempo. Este tipo de processo é conhecido como um processo estocástico em tempo discreto em um espaço de estados finito.

A seguir será apresentado um exemplo disponível em Fogliatti e Mattos (2007), adaptado para este trabalho, de modo que ilustre os diferentes tipos de processos estocásticos segundo os espaços de estados e de parâmetros.

Exemplo

Considere um centro de manutenção no qual máquinas chegam para serem reparadas, entram numa fila na qual permanecem até ingressarem no serviço e são liberadas imediatamente após o serviço estar concluído. Logo, diferentes processos podem ser definidos:

- a) Seja N_k a variável aleatória que representa o número de máquinas na fila no instante em que a k -ésima máquina começa a ser atendida. Nesse caso, o processo estocástico $\{N_k : k = 1, 2, 3, \dots\}$, representado na Figura 1, é um processo estocástico

de parâmetro discreto, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e tempo $T = \{1, 2, 3, \dots\}$.

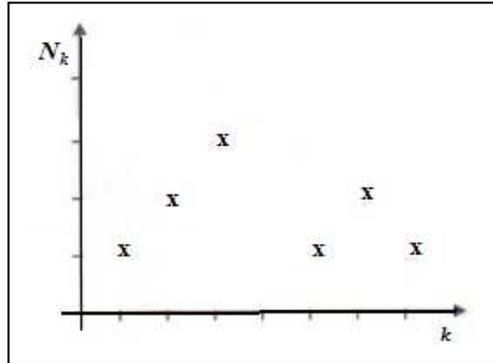


Figura 1 – Cadeia estocástica de parâmetro discreto do item a): Fogliatti e Mattos (2007).

b) Seja $X(t)$ a variável aleatória que representa o número de máquinas que chegam ao sistema até o tempo t . Nesse caso, o processo estocástico $\{X(t) : t \in T\}$, representado na Figura 2, é uma cadeia estocástica de parâmetro contínuo, com $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $T = [0, \infty)$.

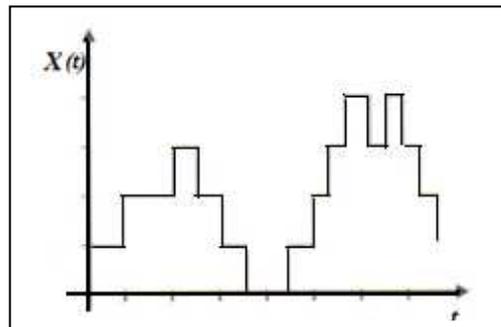


Figura 2 – Cadeia estocástica de parâmetro contínuo do item b): Fogliatti e Mattos (2007).

c) Seja W_k a variável aleatória que representa o tempo de permanência no sistema da k -ésima máquina. O processo $\{W_k : k \in T\}$, representado na Figura 3, é um processo estocástico contínuo de parâmetro discreto, com $E = [0, \infty)$ e $T = \{1, 2, 3, \dots\}$.

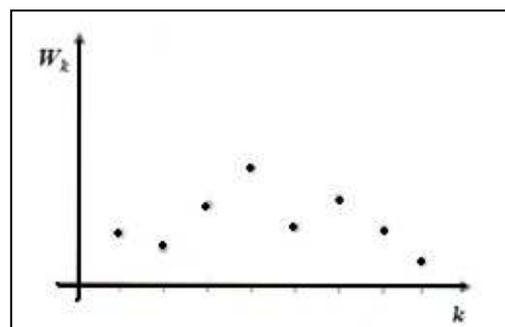


Figura 3 – Processo estocástico contínuo de parâmetro discreto do item c): Fogliatti e Mattos (2007).

d) Seja $Y(t)$ a variável aleatória que representa o tempo acumulado de atendimento de todas as máquinas até o tempo t . O processo estocástico $\{Y(t): t \in T\}$, representado na Figura 4, é um processo estocástico contínuo de parâmetro contínuo, com $E = [0, \infty)$ e $T = [0, \infty)$.

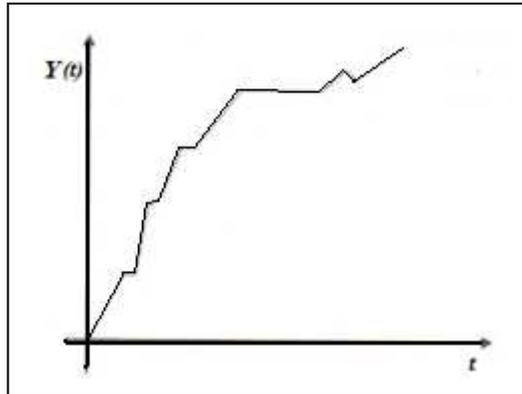


Figura 4 – Processo estocástico contínuo de parâmetro contínuo do item d): Fogliatti e Mattos (2007).

3.2. Processos Markovianos

Um processo estocástico $\{X(t)/t \in T\}$ é denominado processo markoviano se dada uma sequência de tempo $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t$, a distribuição de probabilidade condicional de $X(t_{n+1})$ para dados valores de $X(t_0), X(t_1) \dots X(t_n)$, depende unicamente de $X(t_n)$, ou seja:

$$\begin{aligned} P[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} / X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0] = \\ P[X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} / X(t_n) = x_n] \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

Em outras palavras, dado o estado presente, o comportamento futuro do processo é independente da sua história passada. Essa propriedade é denominada “ausência de memória”.

Um processo markoviano que possui o espaço de estados discreto é denominado cadeia de Markov.

3.3. Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov é um caso particular de processo estocástico. É um processo de espaço de estados discretos e parâmetro de tempo de valores discretos com a condição de que os estados anteriores não são relevantes para a predição dos estados futuros, isto desde que o estado atual seja conhecido.

Aplicações do modelo de Markov encontram-se em abordagens de análise de desempenho de sistemas de informação, instalações de serviços e sistemas de manufatura, (OSOGAMI, 2005)

Em linguagem matemática temos que, uma cadeia de Markov é uma família de variáveis aleatórias X_t , que caracterizam o estado de um sistema em pontos discretos do tempo $t = 0, 1, 2, \dots$. Esta família, $\{X_t\}$, por sua vez forma um processo estocástico, que possui a propriedade:

$$P\{X_{t+1} = j / X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}, \quad (3.3-1)$$

para todo $t = 0, 1, \dots$ e toda sequência $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$.

As probabilidades condicionais, $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$, em uma cadeia de Markov são chamadas probabilidades de transição em uma etapa.

Se para cada estado i e j , se verifica

$$P\{X_{t+1} = j / X_t = i\} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3-2)$$

então, as probabilidades de transição em uma etapa (ou passo) são ditas **estacionárias**, o que implica que estas probabilidades não mudam ao longo do tempo.

A existência destas probabilidades estacionárias de um passo pode ser estendida para cada i, j e n ($n = 0, 1, 2, \dots$), onde

$$P\{X_{t+n} = j / X_t = i\} = P\{X_n = j / X_0 = i\}, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3-3)$$

assim estas probabilidades condicionais são chamadas de probabilidade de transição em n passos.

Simplificando a notação das probabilidades de transição estacionárias:

- $p_{ij} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$, para um passo. (3.3-4)

- $p_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j / X_t = i\}$ para n passos. (3.3-5)

Desta maneira, a probabilidade de transição em n passos é simplesmente a probabilidade condicional de que o sistema chegue ao estado j após exatamente n passos, dado que ele no instante de tempo t se encontra no estado i , (HILLIER e LIEBERMAN, 2006).

Como as probabilidades $p_{ij}^{(n)}$ representam transições de um estado para outro, elas devem satisfazer as seguintes propriedades:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0, \quad \forall i \text{ e } j; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} = 1, \quad \forall i; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad M + 1 \text{ o número de estados}$$

Uma maneira de armazenar tais probabilidades de transição em n etapas é usando um arranjo matricial, conhecido como matriz de transição:

$$P^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & M \\ p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & \dots & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Na matriz de transição é válido observar que a entrada na célula (i, j) indica a transição do estado i para o estado j . Observar que uma consequência das propriedades acima mencionadas leva a estabelecer que $P^{(0)} = I_{M+1}$.

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), as cadeias de Markov podem ser representadas esquematicamente por diagramas de fluxo como o da Figura 5. No diagrama, os nós representam os j estados, e os arcos as transições entre esses estados no tempo, representados pelos λ_j .

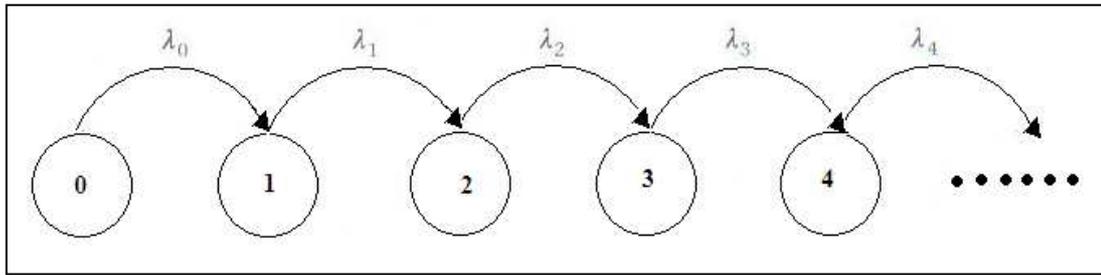


Figura 5 – Diagrama de fluxo de uma cadeia de Markov de parâmetro contínuo: Fogliatte e Mattos (2007).

O comportamento da cadeia de Markov $\{X(t), t \in T\}$ de parâmetro contínuo com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ é caracterizado pela distribuição inicial

$$P[X(t_0) = i], i = 0, 1, 2, \dots,$$

onde, t_0 é o instante inicial de observação, e as probabilidades (condicionais) de transição entre os estados i e j , $p_{ij}(u, v)$ são definidos como:

$$p_{ij}(u, v) = P[X(v) = j / X(u) = i] \quad 0 \leq u \leq v; \quad u, v \in T; \quad i, j \in E \quad (3.3-6)$$

$$\text{com } p_{ij}(v, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.4. Equações de Chapman-Kolmogorov

Um método para calcular as probabilidades de transição em n passos é através das Equações de Chapman-Kolmogorov onde,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}, \quad \forall 0 \leq i, j \leq M; \quad n = m+1, m+2, \dots \text{ e } 1 \leq m \leq n-1. \quad (3.4-1)$$

Estas equações implicam que as probabilidades de transição em n passos podem ser obtidas, recursivamente, a partir das probabilidades de transição de um passo.

Se denotarmos $P^{(n)}$ como a matriz de probabilidades de transição $[p_{ij}^{(n)}]$, então a equação (3.4-1) pode ser escrita como

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad 1 \leq m \leq n-1 \quad (3.4-2)$$

representado por uma multiplicação de matrizes. Portanto,

$$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)} = P^{(n-1)} \cdot P = P \cdot P^{n-1} = P^{n-1} \cdot P = P^n \quad (3.4-3)$$

dessa maneira, a matriz de transição em n etapas P^n pode ser obtida calculando a n -ésima potência da matriz de transição em uma etapa P .

Para exemplificar as relações apresentadas acima foi utilizado o *Interactive Operations Research Tutorial* (IOR), disponível no livro de HILLIER e LIEBERMAN (2006), neste tutorial se calculam as matrizes de transição P^n para qualquer inteiro positivo $2 \leq n \leq 99$. Nele foi possível construir a matriz de transição do exemplo de estoque de câmeras fotográficas, página 717.

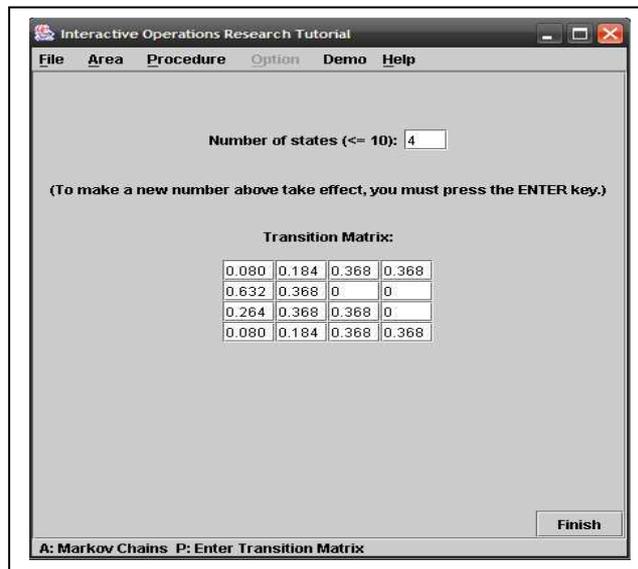


Figura 6 – Tela de entrada de dados para os estados de uma Cadeia de Markov com $2 \leq i, j \leq 10$.

A seguir são apresentadas duas telas que mostram as matrizes de transição em n etapas, utilizando o tutorial IOR para o exemplo referido, onde são utilizadas as Equações de Chapman-Kolmogorov.

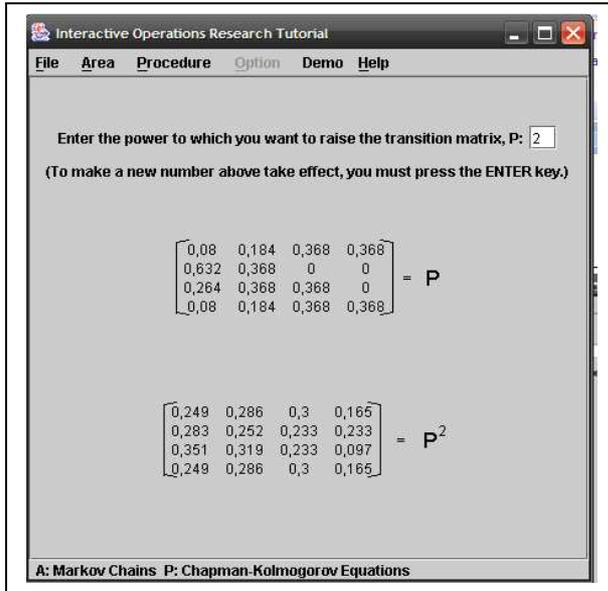


Figura 7 – Matriz de transição na 2ª etapa, $n=2$.

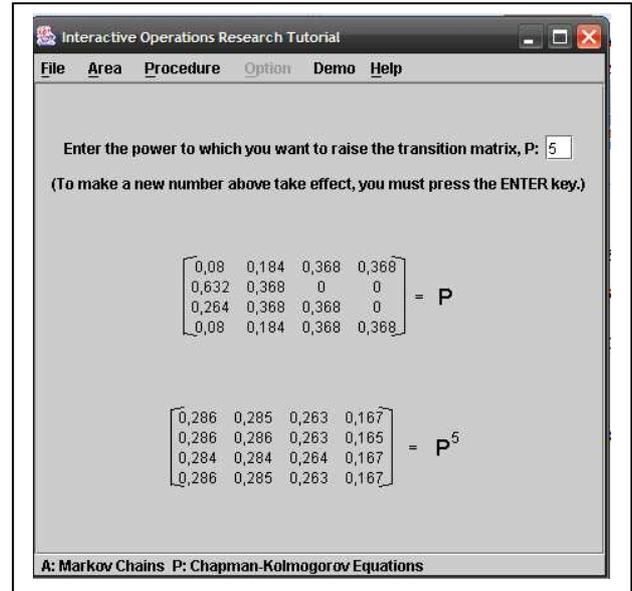


Figura 8 – Matriz de transição na 5ª etapa, $n=5$.

Notar nas matrizes, da Figura 7 e da Figura 8, que a soma das entradas de todas as linhas é exatamente igual a 1, e na Figura 8, após 5 passos, a matriz P^5 mostra que as probabilidades nas colunas se aproximam transformando as linhas em vetores iguais. Isto se interpreta como que as probabilidades de transição, entre estados, estão se tornando sem variação fixando o estado de chegada, j .

3.5. Classes de estados em uma cadeia de Markov

Os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados com base nas probabilidades de transição associadas aos estados. Para descrever mais propriedades das cadeias de Markov é necessário apresentar alguns conceitos e definições importantes a esses estados.

De acordo com Hillier e Lieberman (2006):

- O estado j é dito acessível a partir do estado i se $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$.
- Se o estado j for acessível a partir do estado i e o estado i for acessível a partir do estado j , então se pode dizer que os estados i e j se comunicam.

Em geral tem-se:

- Qualquer estado se comunica consigo mesmo;
- Se o estado i se comunica com o estado j , então o estado j se comunica com o estado i ;
- Se o estado i se comunica com o estado j , e o estado j se comunica com o estado k , então o estado i se comunica com o estado k ;

Em uma cadeia de Markov de parâmetros discretos, uma classe de comunicação fechada é um subconjunto $C \subset E$, de espaço de estados, com as seguintes propriedades:.

1 - Se para cada $i \in C$,

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall j \notin C; \forall n > 1$$

2 – Para cada par de estados $i, j \in C$

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall n > 1$$

Se $C=E$, então a cadeia é dita ser irredutível, (CLARKE e DISNEY, 1979).

Como consequência das propriedades de comunicação, os estados podem ser subdivididos em uma ou mais classes tais que, aqueles estados que se comunicam entre si, se encontram na mesma classe. E se em uma matriz de transição existir apenas uma classe, isto é, todos os estados se comunicarem, a cadeia de Markov é dita irredutível.

A seguir apresentam-se as definições das classes dos estados de uma cadeia de Markov.

1. Um estado j é *absorvente* se retorna com certeza para ele mesmo, em uma transição, isto é, $p_{jj} = 1$.
2. Um estado j é *transiente* se puder alcançar outro estado, e não retorna (volta) a este estado novamente. Um resultado importante é se j for um estado transiente então acontecerá o $p_{jj} < 1$ para todo $i = j \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.

3. Um estado j é *recorrente* se a probabilidade, no limite, de voltar ao estado anterior com base em outros estados for igual a 1. Neste caso, o estado pode ser recorrente se, e somente se, o estado não for transiente.

A recorrência é uma propriedade de classe, isto é, todos os estados em uma classe são recorrentes ou então transientes, (HILLIER e LIEBERMAN, 2006). Segundo Taha (2007), de acordo com as definições descritas, uma cadeia de Markov finita não pode consistir em estados que sejam todos transientes porque, por definição, a propriedade transiente requer entrar em outros estados. Isto é, toda cadeia com número finito de estados tem pelo menos um estado recorrente.

Para melhor serem entendidos os estados de uma matriz de transição se fornece um exemplo numérico encontrado em Nogueira, (2010), que também podem ser visualizado no diagrama da Figura 9. Seja a seguinte matriz de transição P :

$$P = \begin{array}{c|ccccc} \text{Estados} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.33 & 0.67 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

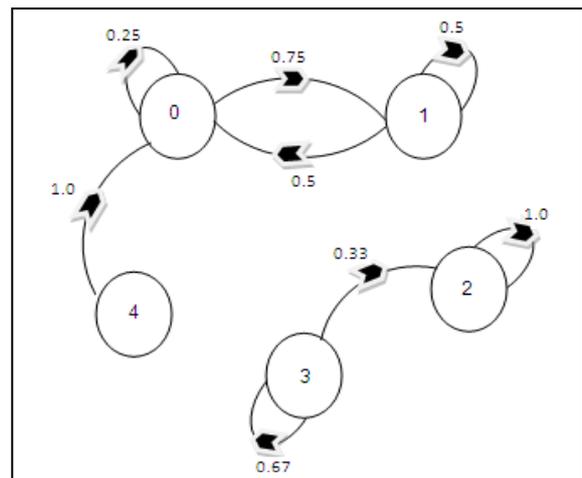


Figura 9 – Representação em diagrama de rede da matriz de transição P .

Os estados 0 e 1 são recorrentes e representam uma classe de comunicação fechada. Se o processo começar por um desses dois estados, este nunca sairá destes dois estados. Além disso, sempre que o processo inicia-se a partir de um desses estados, irá voltar ao estado de partida.

O estado 2 é um estado absorvente, ou seja, uma vez que o processo entre neste estado nunca mais o deixará.

Os estados 3 e 4 são estados transientes. No estado 3 percebe-se que há uma probabilidade positiva do processo sair deste estado para o estado 2 e nunca mais retorná-lo. E o estado 4 também é transiente pois, uma vez que o processo se

inicie nele, imediatamente o processo o deixa e nunca mais retorna ao estado de origem.

Outra propriedade útil das classes de uma cadeia de Markov é a periodicidade. O período do estado i é definido como o inteiro \bar{t} ($\bar{t} > 1$) tal que $p_{ii}^{(n)} = 0$ para todos os valores de n diferentes de $\bar{t}, 2\bar{t}, 3\bar{t}, \dots$ e \bar{t} é o maior inteiro com essa propriedade. Agora se houver dois números consecutivos s e $s+1$ tais que o processo possa se encontrar no estado i nos instantes s e $s+1$, o estado é dito como tendo período 1 e assim será denominado como um estado aperiódico.

Em uma cadeia de Markov de um número finito de estados, os estados recorrentes que forem aperiódicos são denominados de estados ergódicos e se uma cadeia de Markov possui todos os seus estados ergódicos é denominada cadeia de Markov ergódica.

3.6. Probabilidades de Estado Estável

Ao calcular as probabilidades de transição em n etapas nota-se uma interessante característica de algumas dessas matrizes de transição. Se n for suficientemente grande todas as linhas da matriz são vetores iguais, as entradas em cada linha tem valores idênticos, de modo que a probabilidade do sistema se encontrar em cada estado j não dependerá mais do estado inicial.

Esta propriedade vale, efetivamente, segundo condições relativamente genéricas, conforme é apresentado a seguir: (HILLIER e LIEBERMAN, 2006)

Seja uma cadeia de Markov ergódica e irredutível, então o $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe e não depende de i . Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad (3.6.1)$$

onde os π_j satisfazem as seguintes equações de estado estável.

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \quad \text{para } j = 0,1,\dots,M \quad (3.6.2)$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1 \quad (3.6.3)$$

Os π_j são chamados probabilidades de estado estável de uma cadeia de Markov. É importante considerar:

- a probabilidade de estado estável não implica que o processo se acomode em determinado estado, pelo contrário, o processo continua a realizar transições de estado em estado.
- o sistema de estado estável, acima apresentado, é formado por $M+2$ equações para $M+1$ incógnitas. Pelo fato do sistema (3.6.2) e (3.6.3) apresentar solução única, e o sistema (3.6.2) ser linearmente dependentes por conta de uma linha, pode-se eliminar a última, completando o sistema com a equação (3.6.3).

Retornando ao exemplo do estoque de câmeras fotográficas, na Figura 10 se mostra a matriz de transição após 8 passos, obtidas usando o tutorial IOR, nela aparecem as probabilidades de estado estável. Na Figura 11, são mostradas as equações de estado estável onde foi eliminada a última linha da matriz de transição inicial e substituída pela linha de 1's.

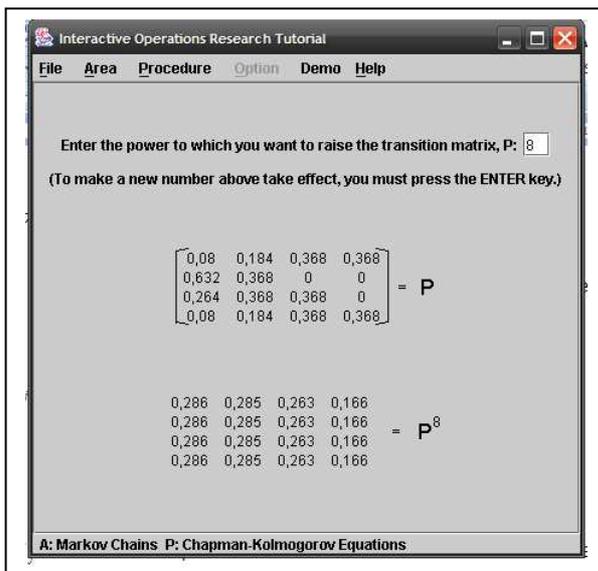


Figura 10– Matriz de transição na 8ª etapa, apresentando as probabilidades de estado estável, calculadas para n etapas.

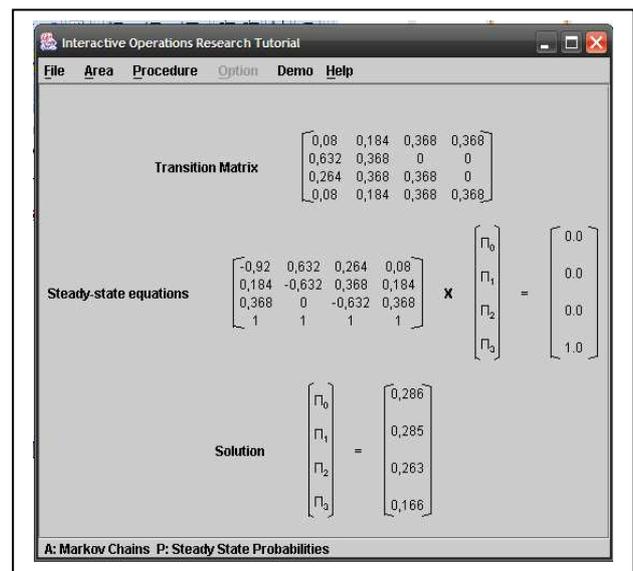


Figura 11 – Probabilidades de estado estável, calculadas por meio das equações de estado estável.

Notar que tanto na Figura 10 quanto na Figura 11 se teve por objetivo apresentar as probabilidades de estado estável de uma matriz de transição. Na Figura 10 percebe-se que para calcular estas probabilidades são necessários 8 multiplicações da matriz de transição original. Percebe-se que nem sempre o cálculo das probabilidades de estado estável será viável usando as Equações de Chapman-Kolmogorov, pois o número de etapas é finito, mas pode tomar valores grandes e o tamanho dos estados também podem ser grandes, o que o torna computacionalmente pesado.

No entanto, na Figura 11, apresenta-se outra forma de calcular as probabilidades de estado estável, que é através das equações de estado estável apresentadas (3.6.2) e (3.6.3). A construção do sistema de equações que calcule as probabilidades π_j segue com o descarte de uma das linhas da relação (3.6.2) e completada com a equação da relação (3.6.3). Para o exemplo encontraram-se os seguintes valores das probabilidades de estado estável:

$$\pi_0 = 0,286 \quad \pi_1 = 0,285 \quad \pi_2 = 0,263 \quad \pi_3 = 0,166.$$

3.7. Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Nas seções anteriores partimos do pressuposto que o parâmetro tempo t assume valores discretos. Esta hipótese é adequada para muitos casos, porém há os que necessitam ser analisados com o parâmetro de tempo contínuo. Este caso se desenvolve nesta seção.

Os estados possíveis do sistema continuam os mesmos, $0, 1, \dots, M$, iniciando no instante 0 e permitindo que o parâmetro de tempo agora definido como t' continuamente assumam valores $t' \geq 0$, fazendo com que a variável aleatória $X(t')$ seja o estado do sistema no instante t' . Portanto, $X(t')$ assumirá um de seus $M + 1$ valores possíveis ao longo de algum intervalo, $0 \leq t' \leq t_1$.

Considere agora três pontos no tempo:

1. $t' = r$, $r \geq 0$ um tempo passado,

2. $t' = s$, $s > r$ o tempo presente
3. $t' = s + t$, $t > 0$ representando t unidades de tempo no futuro.

Assumindo que $X(s) = i$ e $X(r) = x(r)$ é natural procurar a distribuição de probabilística de $t' = s + t$, ou seja, determinar a probabilidade

$$P\{X(s+t) = j / X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r), 0 < r < s\} \quad \text{para } i, j = 0, 1, \dots, M.$$

A determinação desta probabilidade não é fácil. No entanto se o processo estocástico envolvido possuir a propriedade fundamental a seguir esta determinação será simplificada.

Um processo estocástico de tempo contínuo $\{X(t'); t' \geq 0\}$ tem a propriedade markoviana se

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j / X(s) = i \text{ e } X(r) = x(r)\} &= P\{X(t+s) = j / X(s) = i\} \\ \forall i, j = 0, 1, \dots, M \text{ e todo } r \geq 0, s > r \text{ e } t > 0. \end{aligned} \quad (3.7-1)$$

Percebe-se que $P\{X(t+s) = j / X(s) = i\}$ é uma probabilidade de transição, da mesma forma das probabilidades de transição nas cadeias de Markov de tempo discreto apresentado nas seções anteriores, se diferenciando apenas pelo parâmetro t que agora não assume valores discretos.

Se estas probabilidades de transição forem independentes, de modo que

$$P\{X(t+s) = j / X(s) = i\} = P\{X(t) = j / X(0) = i\} \quad \forall s \geq 0, \quad (3.7-2)$$

elas são denominadas probabilidades de transição estacionárias.

Para simplificar a notação anterior das probabilidades de transição estacionárias, tem-se

$$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j / X(0) = i\}, \quad (3.7-3)$$

em que $p_{ij}(t)$ é chamada de função de probabilidade de transição de tempo contínuo. Supondo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.7-4)$$

Um processo estocástico de tempo contínuo $\{X(t'); t' \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov de tempo contínuo se ela possuir a propriedade markoviana.

De acordo com Hillier e Lieberman (2006), algumas considerações devem ser tomadas a partir das seguintes propriedades:

- Um número de estados finito.
- Probabilidades de transição estacionárias.

Para a análise das cadeias de Markov de tempo contínuo necessitam-se apresentar um conjunto de variáveis aleatórias que se relacionam a seguir.

Considerando que cada vez que o processo entra no estado i ele gasta um tempo até se transferir para um estado diferente; a quantidade de tempo que o processo gasta será representada pela variável aleatória T_i , $i = 0, 1, \dots, M$. Então, para descrever uma cadeia de Markov de tempo contínuo são necessárias:

1. A variável aleatória T_i que possui uma distribuição exponencial com uma média $\frac{1}{q_i}$, sendo q_i igual ao número de vezes que o processo deixa o estado i por unidade de tempo.
2. Ao sair do estado i , o processo vai para o estado j com probabilidade p_{ij} , em que estes satisfazem as seguintes condições

$$\begin{aligned}
 & p_{ii} = 0 \quad \text{para todo } i, \\
 & \text{e} \\
 & \sum_{j=0}^M p_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i.
 \end{aligned}
 \tag{3.7-5}$$

3. O próximo estado visitado após o estado i é independente do tempo que permaneceu neste.

Do mesmo modo que as probabilidades de transição em uma etapa desempenham um papel importante na descrição de uma cadeia de Markov de tempo discreto, para as cadeias de Markov de tempo contínuo tem-se o desempenho a partir das intensidades de transição, estas são apresentadas a seguir.

$$q_i = -\frac{d}{dt} p_{ii}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t}, \quad \text{para todo } i = 0,1,2,\dots,M, \quad (3.7-6)$$

e

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_i p_{ij}, \quad \text{para todo } j \neq i, \quad (3.7-7)$$

em que q_i é a taxa de transição fora do estado i no sentido que q_i é o número esperado de vezes que o processo deixe o estado i por unidade de tempo, e de modo similar, q_{ij} é a taxa de transição do estado i para o estado j no sentido que q_{ij} é o número de vezes esperado que processo transite do estado i para o estado j por unidade de tempo gasto no estado i . Assim,

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad (3.7-8)$$

A matriz Q formada pelas entradas $\begin{cases} q_{ij}, & i \neq j \\ q_i, & i = j \end{cases}$ define a matriz geradora da

cadeia de Markov em tempo contínuo.

Da mesa forma que as equações de Chapman-Kolmogorov são satisfeitas pelas probabilidades de transição das cadeias de Markov de tempo discreto, a função de probabilidade de transição de tempo contínuo também satisfaz essas equações. Dessa maneira, para quaisquer estados i e j e números não-negativos t e s ($0 \leq s \leq t$),

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=0}^M p_{ik}(s) p_{kj}(t-s). \quad (3.7-9)$$

Da propriedade da comunicação de estados de uma cadeia de Markov de tempo discreto tem-se o mesmo para as cadeias de Markov de tempo contínuo, pois se diz que um par de estados i e j se comunica entre si se houver tempos t_1 e t_2 tal que $p_{ij}(t_1) > 0$ e $p_{ji}(t_2) > 0$. Se todos os estados se comunicam formam uma classe, assim,

$$p_{ij}(t) > 0 \quad \text{para todo } t > 0 \text{ e todos os estados } i \text{ e } j.$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \quad \forall i = 0, 1, \dots, M \quad (3.7-10)$$

sempre existe e é independente do estado inicial de uma cadeia de Markov, para cada $j = 0, 1, \dots, M$. Estas probabilidades são conhecidas como probabilidades de estado estável de uma cadeia de Markov contínua, e os π_j satisfazem as equações

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}(t), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, M \text{ e todo } t \geq 0. \quad (3.7-11)$$

No entanto, as equações de estado estável a seguir fornecem um sistema de equações mais útil para encontrar as probabilidades de estado estável.

$$\pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, M.$$

e

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1.$$

(3.7-12)

A equação do estado estável (3.7-12) para o estado j^* , por exemplo, pode ser interpretado intuitivamente como segue. O lado esquerdo $\pi_{j^*} q_{j^*}$ é a taxa na qual o processo deixa o estado j . E cada termo $\pi_i q_{ij^*}$, do lado direito, é taxa na qual o estado entra ao estado j^* proveniente do estado i , somando-se ao longo dos $i \neq j^*$. Resultando então que o lado direito fornece a taxa na qual o processo entra no estado j a partir de qualquer estado. Portanto a equação (3.7-12) diz que a taxa na qual o processo deixa o estado j^* deve ser igual a taxa na qual o estado entra no estado j^* .

3.8. Processo de Nascimento e Morte

Neste tópico é apresentada a definição de processo de Nascimento e Morte com o desenvolvimento de equações de balanço. Estas equações serão úteis para o entendimento da extensão deste processo, conhecido como processo de Quase Nascimento e Morte a ser abordado no Capítulo 4. As definições deste tópico podem ser encontradas em (FOGLIATTI E MATTOS, 2007).

O processo de nascimento e morte é uma cadeia de Markov homogênea, irreduzível, de tempo contínuo. Para este processo, as mudanças permitidas entre estados devem ocorrer, apenas, entre os estados adjacentes, transições para os estados vizinhos imediatos. Isto é, se o processo estiver no estado j , ele só poderá ir para o estado $j+1$ ou para o estado $j-1$. Onde a transição para o estado $j+1$ se interpreta um nascimento para $j \geq 0$, e a transição para o estado $j-1$, uma morte, com $j > 0$. Processos de nascimento e morte são utilizados para representar a evolução do número de usuários em um centro de serviço.

Um processo de nascimento e morte pode ser esquematizado pelo diagrama de grafos apresentado na Figura 12, onde os nós representam os estados j , ou seja, os estados no processo, e os arcos representam as transições entre os estados, com as taxas de nascimento e morte λ_j e μ_j , sobre as ligações $(j, j+1)$ e $(j, j-1)$ respectivamente.

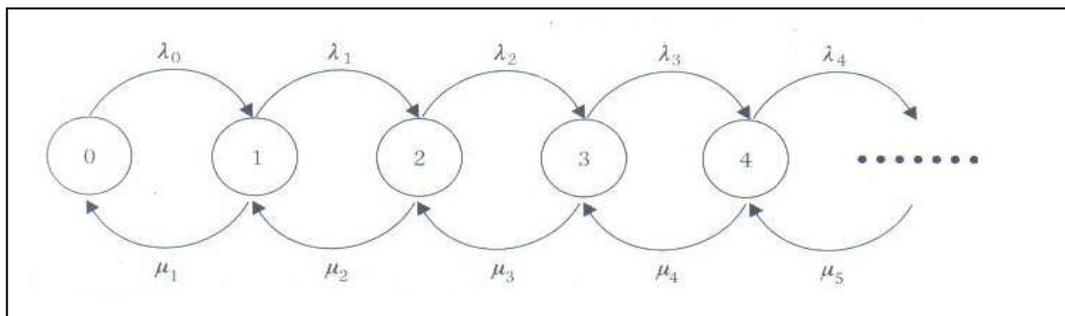


Figura 12 – Modelo básico do Processo nascimento e morte usando grafos: Fogliatti e Mattos (2007).

Para este processo são consideradas válidas as seguintes hipóteses:

1. No instante inicial $t_0 = 0$, o sistema se encontra vazio, isto é, $X(0) = 0$;
2. Nascimentos e mortes são eventos estatisticamente independentes;
3. Dado que o sistema está no estado j , no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, Δt tão pequeno quanto se queira, a probabilidade de ocorrer:

a) um nascimento é igual a $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$;

b) uma morte e igual a $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$;

c) mais de um evento (de nascimento(s) e/ou morte(s)) é desprezível, igual a

$o(\Delta t)$, onde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Usando a notação:

$$P_i^n(\Delta t) = P\{\text{ocorência de } i \text{ nascimentos em } \Delta t\} \text{ e}$$

$$P_k^m(\Delta t) = P\{\text{ocorência de } k \text{ mortes em } \Delta t\}$$

a terceira hipótese pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_1^n(\Delta t) = P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1 / X(t) = j] = \lambda_j \Delta t + o(\Delta t) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8-1)$$

$$P_1^m(\Delta t) = P[X(t + \Delta t) - X(t) = -1 / X(t) = j] = \mu_j \Delta t + o(\Delta t) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8-2)$$

e

$$P_i^n(\Delta t)P_k^m(\Delta t) = o(\Delta t) \quad \forall i, k \mid (i + k) > 1. \quad (3.8-3)$$

De (3.8-1) e (3.8-2), respectivamente, obtêm-se as probabilidades de não haver nascimento nem mortes em um intervalo pequeno de tempo, Δt :

$$P_0^n(\Delta t) = P[X(t + \Delta t) - X(t) = 0 / X(t) = j] = 1 - \lambda_j(\Delta t) - o(\Delta t) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8-4)$$

$$P_0^m(\Delta t) = P[X(t + \Delta t) - X(t) = 0 / X(t) = j] = 1 - \mu_j(\Delta t) - o(\Delta t) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8-5)$$

Com essas hipóteses, determinam-se, para todo n , as probabilidades P_n dos estados do processo, como mostrado a seguir.

Dividindo-se o intervalo de observação $(0, t + \Delta t)$ em dois subintervalos disjuntos $(0, t]$ e $(t, t + \Delta t)$, verifica-se que o sistema está no estado $j > 0$ no instante $(t + \Delta t)$, para Δt pequeno, se ocorre um dos seguintes eventos mutuamente excludentes:

1. no instante t , o sistema se encontra no estado j e, no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, não há nenhum nascimento e nenhuma morte;
2. no instante t , o sistema se encontra no estado j e, no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, há um nascimento e não há nenhuma morte;

3. no instante t o sistema está no estado j e, no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, há uma morte e não há nenhum nascimento.

O sistema está no estado $j=0$ no instante $(t + \Delta t)$, para Δt pequeno, se ocorre um dos seguintes eventos mutuamente excludentes:

1. no instante t , o sistema está no estado 0 e, no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, não há nenhum nascimento;
2. no instante t , o sistema está no estado 1 e, no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, há uma morte e não há nenhum nascimento.

Utilizando as hipóteses 1 e 2 apresentadas anteriormente e o Teorema da Probabilidade Total, pode-se calcular a probabilidade do sistema estar no estado j no instante $(t + \Delta t)$:

$$P_j(t + \Delta t) = P_j(t)P_0^n(\Delta t)P_0^m(\Delta t) + P_{j-1}(t)P_1^n(\Delta t)P_0^m(\Delta t) + P_{j+1}(t)P_0^n(\Delta t)P_1^m(\Delta t) + o(\Delta t), \quad \forall j \geq 1, \quad (3.8-6)$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_1(t)P_0^n(\Delta t)P_1^m(\Delta t) + P_0(t)P_0^n(\Delta t) + o(\Delta t). \quad (3.8-7)$$

Substituindo (3.8-1), (3.8-2), (3.8-3), (3.8-4) e (3.8-5) em (3.8-6) e (3.8-7), têm-se:

$$P_j(t + \Delta t) = P_j(t)[1 - \lambda_j \Delta t - o(\Delta t)][1 - \mu_j \Delta t - o(\Delta t)] + P_{j-1}(t)[1 - \lambda_{j-1} \Delta t - o(\Delta t)][1 - \mu_{j-1} \Delta t - o(\Delta t)] + P_{j+1}(t)[1 - \lambda_{j+1} \Delta t - o(\Delta t)][1 - \mu_{j+1} \Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad (3.8-8)$$

$$= P_j(t) - \lambda_j \Delta t P_j(t) - \mu_j \Delta t P_j(t) + P_{j-1}(t) \lambda_{j-1}(\Delta t) + P_{j+1}(t) \mu_{j+1} \Delta t + o(\Delta t), \quad \forall j \geq 1,$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda_0 \Delta t - o(\Delta t)] + P_1(t)[1 - \lambda_1 \Delta t - o(\Delta t)][\mu_1 \Delta t - o(\Delta t)] + o(\Delta t) \quad (3.8-9)$$

$$= P_0(t) - \lambda_0 \Delta t P_0(t) + \mu_1 \Delta t P_1(t) - o(\Delta t),$$

foram utilizadas as relações de aproximação $(\Delta t)^2 \cong o(\Delta t)$ e $o(\Delta t) \times \Delta t \cong o(\Delta t)$.

De (3.8-5) e (3.8-6), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{P_j(t + \Delta t) - P_j(t)}{\Delta t} &= -\lambda_j P_j(t) - \mu_j P_j(t) + \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) \\ &\quad + \mu_{j+1} P_{j+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad \forall j \geq 1, \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Tomando-se os limites quando $\Delta t \rightarrow 0$, têm-se:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\lambda_j P_j(t) - \mu_j P_j(t) + \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t), \quad \forall j \geq 1 \quad (3.8-10)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \quad (3.8-11)$$

que formam um sistema infinito de equações diferenciais que representam as possibilidades dos estados do sistema.

Como o processo de nascimento e morte é uma cadeia de Markov irreduzível, existe um tempo t^* a partir do qual ele entra no regime estacionário mantendo suas características estáveis. Neste caso,

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = 0, \quad \forall j, \forall t > t^*.$$

Portanto, o sistema de equações diferenciais (3.8-10) e (3.8-11) se convertem no sistema infinito de equações algébricas

$$0 = -\lambda_j P_j(t) - \mu_j P_j(t) + \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{j+1}(t), \quad \forall j \geq 1, \text{ e } t > t^* \quad (3.8-12)$$

$$0 = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t). \quad (3.8-13)$$

Rearranjando (3.8-12) tem-se:

$$\lambda_j P_j(t) - \mu_{j+1} P_{j+1}(t) = \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - \mu_j P_j(t) \quad \forall j \geq 1 \text{ e } t > t^*$$

e usando-se de recorrência,

$$\begin{aligned} \lambda_j P_j(t) - \mu_{j+1} P_{j+1}(t) &= \lambda_{j-1} P_{j-1}(t) - \mu_j P_j(t) \\ &= \lambda_{j-2} P_{j-2}(t) - \mu_{j-1} P_{j-1}(t) \\ &= \lambda_0 P_0(t) - \mu_1 P_1(t). \end{aligned} \quad (3.8-14)$$

De (3.8-13) e (3.8-14), tem-se:

$$\lambda_{j-1}P_{j-1}(t) - \mu_j P_j(t) = 0 \quad \forall j \geq 1 \text{ e } t > t^*$$

então,

$$\begin{aligned} P_j(t) &= \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} P_{j-1}(t) = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}}{\mu_j\mu_{j-1}} P_{j-2}(t) = \dots = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}\lambda_{j-3}\dots\lambda_0}{\mu_j\mu_{j-1}\mu_{j-2}\dots\mu_1} P_0(t) \\ &= P_0(t) \prod_{i=1}^j \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \quad \forall j \geq 1 \text{ e } t > t^*. \end{aligned} \quad (3.8-15)$$

Como $\sum_{j \geq 0, t > t^*} P_j(t) = 1$, obtém-se:

$$P_0(t) = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=1}^j \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} \quad \forall t > t^* \quad (3.8-16)$$

desde que soma do denominador de (3.8-16) seja convergente.

A partir de (3.8-15) e (3.8-16), tem-se a distribuição limite dos estados do sistema $(P_0(t), P_1(t), P_2(t)\dots)$, que é também a distribuição do estado de regime estacionário do processo, totalmente determinada pelas taxas de nascimento e de morte.

As equações (3.8-12) e (3.8-13) são denominadas **equações de balanço** ou **de equilíbrio** e podem ser obtidas diretamente do diagrama apresentado na Figura 1, utilizando o princípio da conservação de fluxos, isto é, para cada estado, “o fluxo que entra é igual ao que sai”.

Dessa forma, para qualquer estado $j \geq 1$ e $t > t^*$ tem-se:

$$\lambda_{j-1}P_{j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{j+1}(t) = \lambda_j P_j(t) + \mu_j P_j(t) \quad (3.8.17)$$

e para o estado $j = 0$,

$$\lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t). \quad (3.8-18)$$

Observar que para o regime estacionário as equações (3.8-12) até (3.8-18) podem ser trabalhadas omitindo a dependência do tempo em evidência, isto é, para $t > t^*$. Por exemplo, as equações de conservação de fluxo se tornam em:

$$\lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1} = \lambda_j P_j + \mu_j P_j \quad \forall j \geq 1.$$

3.9. Distribuição tipo Fase (PH)

Nesta seção apresenta-se uma distribuição de probabilidade que se considera uma generalização natural da distribuição de Erlang para abordagens computacionais, segundo Neuts (1994).

Definição 1: Uma distribuição de tipo Fase (distribuição PH) será representada por $H(\cdot)$ no intervalo $[0, \infty[$ com parâmetros (α, \mathbf{T}) , dada por

$$H(x) = 1 - \alpha \exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e}, \quad x \geq 0. \quad (3.9-1)$$

Onde α é um vetor linha de dimensão m ; \mathbf{T} é uma matriz de ordem m não singular e \mathbf{e} um vetor coluna onde todas as componentes são iguais a 1, (PÉREZ-OCÓN e MONTORO-CAZORLA, 2004 e HUANG *et al.* 2006).

A exponencial de uma matriz resulta ser uma nova matriz da mesma ordem, obtida como o limite de uma série de potências, da própria matriz, convergente. Ver detalhes no Anexo II.

A distribuição PH é entendida como a distribuição do tempo até a absorção em um processo de Markov em tempo contínuo com um número finito de estados. Os parâmetros (α, \mathbf{T}) se decompõem em um vetor de probabilidade inicial (α, α_{m+1}) e a matriz \mathbf{T} construirá o gerador do processo markoviano

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

sendo o vetor $\mathbf{T}^0 = -\mathbf{T}\mathbf{e}$ cujas componente são não negativas.

Uma distribuição PH representa variáveis aleatórias que são medidas pelo tempo t , que a cadeia de Markov subjacente gasta em sua parte transitória até a absorção, segundo Riska (2003). Em geral, uma distribuição PH é a distribuição do tempo até a absorção no estado 0 em uma cadeia de Markov, (OSOGAMI, 2005). Para Riska (2003), as distribuições PH são constituídas por uma mistura geral de exponenciais e são caracterizados por uma cadeia de Markov finita e absorvente. Cada estado transiente de uma distribuição PH será chamado uma fase. O número n de fases na distribuição PH é igual ao número de estados transitórios associados a

cadeia de Markov (subjacente).

Uma propriedade importante mencionada na literatura é: A distribuição tipo Fase é densa no conjunto de distribuições definida sobre o conjunto de números reais não negativos. Característica que a equipara com o conjunto dos números racionais, que possui a propriedade de poder se aproximar de qualquer número real, com a precisão desejada.

Aqui foram vistos definições de processos estocásticos, processos Markovianos e processos de Nascimento e Morte, entre outros. A distribuição (PH) também foi definida neste capítulo. Estas definições são importantes para o entendimento do processo QBD, extensão do processo de Nascimento e Morte, que será abordado no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Metodologia QBD e Aplicações

O conceito de processos estocásticos (em particular o processo de nascimento e morte) é básico para o estudo dos problemas de serviços na teoria de filas. Nesta pesquisa trabalhou-se com um modelo que estima a falta de peças sobressalentes no estoque, na presença de falha dos equipamentos; a abordagem foi feita via processos de Markov de estados finitos de tempo contínuo.

Na primeira seção apresentam-se aplicações que envolvem a extensão do processo de Nascimento e Morte, o processo Quase Nascimento e Morte (*Quasi-Birth-and-Death* – QBD).

4.1. Processo de Quase Nascimento e Morte (QBD)

O processo QBD é uma extensão do processo de Nascimento e Morte. O que os diferencia é a presença de subestados em cada estado, portanto haverá a opção de que as transições possam ocorrer entre estados ou no interior de um mesmo estado. A definição a seguir fornece uma explicação deste modelo.

Definição 2: Considere um processo de Markov com espaço de estado de duas dimensões: $E = \{(i, j) : i \geq 0; j = 1, 2, \dots, m\}$, referindo-se, por exemplo, ao nível n o conjunto de estados escrito por extenso $\{(n, 1), (n, 2), \dots, (n, m)\}$. Tal processo de

Markov é chamado de processo quase nascimento e morte (QBD) quando as transições de um passo são limitadas aos estados de mesmo nível ou nos dois níveis adjacentes, (HUANG *et al.* 2006).

Para o processo QBD, os estados são ordenados lexicograficamente, isto é,

$$\{(0, 1), \dots, (0, m), (1, 1), \dots, (1, m), \dots, (n, 1), \dots, (n, m), \dots\}$$

e o gerador infinitesimal Q , de forma genérica, tem a seguinte estrutura de blocos:

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & & & & \\ B_{10} & A_1 & A_0 & & & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.1-1)$$

onde as sub-matrizes B_{00} e A_1 denotam as transições entre os estados de mesmo nível i ; as sub-matrizes B_{01} e A_0 denotam as transições entre os níveis i e $i + 1$; e finalmente as sub-matrizes B_{10} e A_2 denotam as transições entre os níveis $i + 1$ e i .

Desta disposição podemos visualizar as chamadas equações de balanço

$$B_{00}\mathbf{e} + B_{01}\mathbf{e} = B_{10}\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + A_0\mathbf{e} = A_2\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + A_0\mathbf{e} = 0,$$

onde B_{00} , B_{01} , B_{10} , A_2 , A_1 e A_0 são submatrizes descrevendo cada estado do sistema e o vetor coluna \mathbf{e} de componentes 1's. Este gerador é assumido ser irredutível, (adaptado de PÉREZ-OCÓN e MONTORO-CAZORLA, 2004).

A seguir apresenta modelos para o processo QBD com distribuições que possuem ou não características de processos Markovianos. São apresentados exemplos disponíveis em Fadiloglu e Yeralan (2002), Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004) e Huang *et al.* (2006).

4.1.1. Representação de linhas de Produção

Para Fadiloglu e Yeralan (2002), em um processo QBD, os estados ao invés de corresponderem apenas a uma única opção de passo, como é o caso do processo de nascimento e morte, são formados por um grupo de sub-estados. As

com um único serviço de atendimento, e a disciplina de atendimento, o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido, $M/M/1$.

MODELO 1. Servidor definido por distribuição exponencial com buffer limitado.

A representação gráfica do modelo é dada na Figura 14, que mostra um modelo de fila típico $M/M/1$. A única diferença do modelo básico é a presença do *buffer* com tamanho limitado, M . Neste modelo, as peças chegam ao servidor como um processo de Poisson com uma taxa média λ , e eles são atendidos com o tempo de serviço exponencial de parâmetro μ .

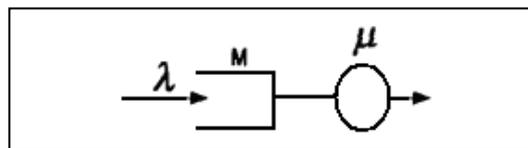


Figura 14 – Servidor com buffer limitado e parâmetros relevantes: Fadiloglu e Yeralan (2002).

Na Figura 15, apresenta-se o diagrama da cadeia de Markov utilizando a descrição do Modelo 1. Desta maneira facilita-se a obtenção das equações de estado estacionário, ou de balanço, do modelo.

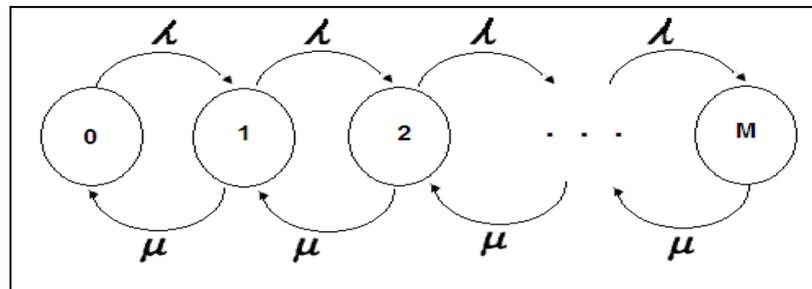


Figura 15 – Diagrama de transição de Markov para o Modelo 1: Fadiloglu e Yeralan (2002).

As equações de balanço pertinentes ao modelo são dadas a seguir.

$$\begin{aligned}
 & -\lambda P(0) + \mu P(1) = 0, \\
 & -(\lambda + \mu)P(i) + \mu P(i+1) + \lambda P(i-1) = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq M-1, \\
 & -\mu P(M) + \lambda P(M-1) = 0
 \end{aligned} \tag{4.1-2}$$

e os valores específicos das submatrizes de transição, em um estado, dadas pelo sistema de equações (4.1-2) são visualizadas na matriz de blocos Q a seguir:

MODELO 3. Servidor definido com tempo de serviço Erlang-2 e buffer limitado.

O Modelo 3, apresentado a seguir, representado na Figura 18, se diferencia do Modelo 1 somente pela sua função de distribuição do tempo de serviço. No Modelo 1, o processo de linha comporta-se como uma fila $M/M/1$ de distribuição exponencial, enquanto no modelo atual, a distribuição de probabilidades é Erlang-2, representado como uma fila $M/E_2/1$. Esta distribuição é a soma de duas distribuições exponenciais com a mesma taxa. Em ordem, para acomodar essa distribuição não exponencial, é preciso incorporar um estado adicional para cada nível de contagem. A Figura 19 representa esta ideia através do diagrama de transição de Markov.

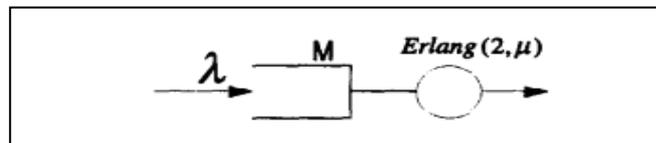


Figura 18 – Servidor com tempo de serviço Erlang-2, buffer limitado e parâmetros relevantes: Fadiloglu e Yeralan (2002).

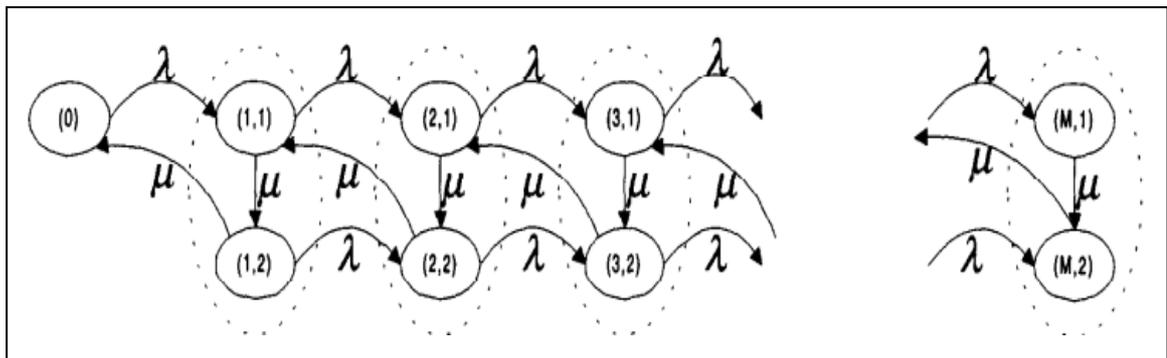


Figura 19 – Diagrama de transição de Markov do Modelo 3: Fadiloglu e Yeralan (2002).

No diagrama há apenas um estado corresponde ao estado inicial, o elemento 0 (zero) do grafo de contagem. Conseqüentemente, este elemento não pode ser incorporado no QBD e tem que ser tratado separadamente. O QBD começa a partir do elemento 1. Isto tem de ser levado em consideração ao aplicar o procedimento de solução de matriz polinomial.

Os exemplos apresentados, disponíveis em Fadiloglu e Yeralan (2002), fornecem uma ideia inicial da facilidade ao se representar via diagramas um modelo de processo de QBD, além desta se tornar uma ferramenta de muita utilidade na representação de processos produtivos. Outros modelos, que exemplificam processos de linha de produção, podem ser encontrados em trabalhos dos autores.

4.1.2. Parâmetros de Confiabilidade Usando um Processo QBD

A pesquisa desta dissertação teve no artigo de Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004) uma de suas fontes importantes de desenvolvimento. Neste artigo foi desenvolvido um modelo QBD objetivado a calcular os vetores de probabilidade estacionária, ou vetores de probabilidade de estado estável, e em termos destes, determinar medidas úteis da teoria de confiabilidade como a disponibilidade e a taxa de ocorrência de falha. Este estudo foi realizado considerando o tempo operacional e o tempo de reparo de uma unidade (máquina) segue uma distribuição tipo Fase e são independentes.

Assim, os autores assumem que os parâmetros de entrada necessários, a seguir, para o modelo QBD são α, T e β, S , respectivamente, da distribuição tipo Fase para as variáveis do tempo operacional e do tempo de reparo. Os valores atribuídos a estes parâmetros são:

- $\alpha = (1,0,0) \rightarrow$ vetor linha de probabilidade inicial de tamanho m indicando as m fases operacionais;
- $\beta = (1,0,0) \rightarrow$ vetor linha de probabilidade inicial de tamanho k indicando as k fases de reparação;
- $T = \begin{bmatrix} -0.0027 & 0.0027 & 0 \\ 0 & -0.008 & 0.008 \\ 0 & 0 & -0.02878 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz de ordem m , não singular com elementos da diagonal negativos e fora da diagonal todos positivos que governa o tempo operacional.

Os asteriscos substituem os valores $\leq 10^{-4}$.

A taxa de ocorrência de falha por unidade: $\nu = 0.2\%$.

- Para o caso de finitas peças de reposição temos os seguintes valores encontrados:

➤ Considerando 3 unidades sobressalentes

Os vetores de probabilidade estacionária são:

$$\pi_0 = (0.558, 0.218, 0.062)$$

$$\pi_1 = (0.096, 0.023, 0.016, 0.011, 0.003, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001)$$

$$\pi_2 = (0.003, 0.001, 0.001, 0.0004, *, *, *, *, *)$$

$$\pi_3 = (0.0001, *, *)$$

A medida de confiabilidade neste processo é de: $A = 0.9998$, ou seja, o sistema encontra-se operacional por um longo tempo.

A taxa de ocorrência de falha por unidade: $\nu = 0.19\%$.

➤ Considerando 5 unidades sobressalentes

Os vetores de probabilidade estacionária são:

$$\pi_0 = (0.558, 0.218, 0.062)$$

$$\pi_1 = (0.096, 0.023, 0.016, 0.011, 0.003, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001)$$

$$\pi_2 = (0.003, 0.001, 0.001, 0.0004, *, *, *, *, *)$$

Todos os outros vetores π_3, π_4 e π_5 apresentam valores $\leq 10^{-4}$.

A medida de confiabilidade neste processo é de: $A \cong 1$.

A taxa de ocorrência de falha por unidade: $\nu = 0,19\%$.

Neste trabalho analisado, tomou-se em consideração que tanto para o caso de infinitas peças sobressalentes, quanto para o caso em que são necessárias 5 unidades destas peças, os vetores de probabilidade estável são similares, tornando assim o sistema em um estado estável.

Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004) mostram que o sistema analisado encontra-se operando por um período longo de $2,6348 \times 10^8$ unidades de tempo, considerando que sempre terá pelo menos uma unidade (máquina) em reserva (*standby*). Em contra partida, o sistema trabalha por 64,0832 unidades de tempo quando o sistema está em baixa, ou seja, quando não existem mais peças na reserva.

4.1.3. Estimativa de peças de reposição reparáveis

Esta seção discorre de um algoritmo que provê o número de peças de reposição necessária para assegurar o funcionamento de um sistema, cujo a fonte é Huang *et al.* (2006). O objetivo destes autores foi modelar um problema que estime o mínimo de peças de reposição reparáveis que garanta o funcionamento de um sistema com 95% de confiabilidade no decurso de tempo t de excussão do processo, de 1500 horas. Para os testes numéricos foram utilizados os parâmetros apresentados em Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004) e diferentes tempos de funcionamento.

O problema abordado em Huang *et al.* (2006) considera a variável aleatória $\{X(t), t \geq 0\}$ que representa o número de falhas por unidades de tempo no sistema produtivo estudado. Essa variável aleatória se modela por um processo estocástico de quase nascimento e morte, QBD, que representa a demanda de peças de reposição reparáveis.

Antes de apresentar o pseudocódigo deste algoritmo, apresenta-se um resultado que faz a ligação entre o número de peças de reposição necessárias para assegurar o processo e a probabilidade de falha. Este resultado será utilizado como teste de parada do algoritmo.

Teorema. Suponha que, para garantir uma provisão de peças de reposição com uma probabilidade não inferior a P durante um período t , devem ser preparadas pelo menos h peças. Então, Q , t e P satisfazem a desigualdade $\gamma \exp(Qt)e > P$, onde Q é

uma matriz dos macro-estado de dimensão $h + 1$, e γ é um vetor linha associado distribuição fase do modelo cuja dimensão é apropriada ao problema.

A prova do teorema anterior está disponível em Huang *et al.* (2006). A seguir é apresentado o pseudocódigo de um algoritmo, construído por estes, que calcula a demanda do menor número de peças de reposição sujeita a restrição de confiabilidade, assegurado por uma probabilidade não inferior a P e executado durante um período t .

Algoritmo de HUANG-LIANG-GUO:

Passo 1: Seja $h = 0, Q = B_{00}, \gamma = \alpha$, calcular $\gamma \exp(Qt)e$. Se $\gamma \exp(Qt)e > P$ então não necessita de nenhuma reposição e o algoritmo termina, caso contrário vai para o passo 2.

Passo 2: Seja $h = 1, Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 \end{bmatrix}$, $\gamma = (\alpha, 0)$, calcular $\gamma \exp(Qt)e$. Se $\gamma \exp(Qt)e > P$

então se necessita de uma reposição e o algoritmo termina, caso contrário vai para o passo 3.

Passo 3: Seja $h = h + 1, Q = Q + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_0 \\ 0 & \dots & A_2 & A_1 \end{bmatrix}_{(h+1) \times (h+1)}$, $\gamma = (\alpha, 0, \dots, 0)_{1 \times (h+1)}$. Calcular

$\gamma \exp(Qt)e$. Se $\gamma \exp(Qt)e > P$ então se necessita de h reposições e o algoritmo termina, caso contrário execute o passo 3 novamente.

A análise do número mínimo de peças de reposição que satisfaz a demanda é verificada a cada iteração e determinada pelo parâmetro h . A matriz Q é uma matriz que se renova a cada iteração. Inicialmente essa tem os mesmos componentes da matriz de tempo operacional T , no entanto, a cada rodada a matriz Q vai se conformando a necessidade dos cálculos, aumentando o número de blocos de linhas e colunas em um, se configurando em uma matriz de blocos tri-diagonal. E para garantir que o número de peças de reposição seja suficiente é calculada a

confiabilidade do processo através da fórmula $\gamma \exp(Qt)e$, onde $\gamma = (\alpha, 0, 0, \dots, 0)_{(1 \times (h+1))}$, Q é a matriz infinitesimal renovada a cada iteração para h peças de reposição e, e é o vetor coluna de 1's.

Os valores numéricos gerados pelo código do algoritmo HUANG-LIANG-GUO são vistos a seguir. Eles foram gerados no ambiente Matlab como comentam os autores.

- Considerando o número mínimo de peças de reposição:

- Nenhuma peça de reposição, $h = 0$.

$Q = B_{00}$, $\gamma = \alpha$, logo $\gamma \exp(Qt)e = 0.0290$, com uma confiabilidade de 2,9%, não se pode aceitar que o sistema funcione sem peça sobressalente.

- Uma peça de reposição, $h = 1$.

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 \end{bmatrix}, \gamma = (\alpha, 0), \text{ logo } \gamma \exp(Qt)e = 0.8995, \text{ que ainda é um valor de}$$

confiabilidade inferior a 95%, determinado pelos autores.

- Duas peças de reposição $h = 2$.

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & 0 \\ B_{10} & A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 & A_1 \end{bmatrix}, \gamma = (\alpha, 0, 0), \text{ logo } \gamma \exp(Qt)e = 0.9984, \text{ que satisfaz o grau}$$

de confiabilidade exigido para trabalhar-se com segurança, não deixando o sistema parar.

As entradas com valores zeros nas matrizes Q e γ correspondem a outras matrizes formadas por blocos de zeros, cada qual com as dimensões apropriadas para se executar os cálculos necessários.

No trabalho realizado por Huang *et al.* (2006) verifica-se que são necessárias duas peças de reposição no mínimo, apresentando uma confiabilidade de 99,84% de certeza, para que o sistema funcione por um longo período sem correr

o risco de falha. O algoritmo foi implementado no ambiente Scilab 5.2.2, para esta dissertação, onde se confirma os resultados fornecidos por esses autores. O código do algoritmo encontra-se no apêndice A. Os resultados desse código são apresentados na Figura 20.

```

Scilab Console
File Editar Preferências Controle Aplicativos ?
Scilab Console
E =
    0.0290162
E =
    0.8979637
E =
    0.9966249

Número necessário de peças de reposição

    2.

Execução feita.

```

Figura 20 – Resultados obtidos com o código do algoritmo HUANG-LIANG-GUO, rodado no Scilab.

Os valores de E são os valores probabilidade do sistema permanecer em funcionamento, sem correr risco de entrar no estado de falha, a cada iteração. O 1º valor de E é para quando não há necessidade de peças de reposição em estoque, o 2º para quando se necessita de pelo menos uma peça guardada no estoque e, o 3º e último E, apresenta a probabilidade superior a estabelecida de $P=95\%$ do código do algoritmo, desta forma as iterações são finalizadas e é impresso a quantidade de peças de reposição necessária para o sistema funcionar sem se preocupar com a falta de peças sobressalentes no estoque de reposição.

Os valores encontrados na Tabela 1 representam as probabilidades para que um sistema permaneça em funcionamento durante determinados períodos de tempo t , gerados pelo código do algoritmo de HUANG-LIANG-GUO. O tempo foi analisado considerando produção contínua de 24 horas diárias durante 30 dias. Desta forma, o primeiro período de tempo, analisado por Huang *et al.* (2006), representa o tempo de funcionamento de um maquinário é de 62 dias, aproximadamente 2 meses. Os outros tempos de processamento, considerados, equivalem a 6 e 8 meses de 24 horas de funcionamento diário.

Tabela 1 – Valores de confiabilidade para que um sistema permaneça em funcionamento analisado por diferentes valores de t .

Quantidade Estimada de peças no estoque	Valor de E com $t=1500h$	Valor de E com $t=4320h$	Valor de E com $t=5760h$
0	2.9%	0.001%	0.00003%
1	89.79%	70.59%	62.43%
2	99.66%	98.82%	98.40%
3	99.98%	99.95%	99.94%

Na Tabela 1, no processo de 1500 horas de duração, percebe-se que, se for decidido não estocar nenhuma peça de reposição ou simplesmente optar por armazenar uma, a probabilidade de não precisar de peças é de 2.9%, muito baixa, enquanto, a de não precisar de mais de uma é de 89.79%. Também é observado que, para estes dois casos, há uma diminuição considerável à medida que o tempo de funcionamento, em avaliação, aumenta. No entanto, a diminuição entre as probabilidades, para o armazenamento de 2 ou 3 destas peças é menor, menos de 1% para cada período de tempo determinado, mostrando a estabilidade do processo. Assim, a decisão será tomada a partir da confiabilidade implementada no algoritmo estudado.

Os valores observados na tabela, nos três tempos de funcionamento, garantem que o modelo, usando um processo QBD, fornece uma boa aproximação para representar ocorrências de falhas, isto é, a necessidade de peças sobressalentes ou de reposição, validando a proposta de representação.

Este capítulo foi elaborado com a expectativa oferecer uma visão mais refinada ao tratamento dos estoques de peças de reposição reparáveis. Aqui são encontradas as definições fornecidas nos capítulos anteriores, mostrando a potencialidade do processo QBD. O processo QBD reúne o que há de mais valioso no tratamento de estoque comum (quantidade do pedido, custo de produção, manutenção, etc.) e aplica aos estoques de peças de reposição. Os tratamentos aqui vistos tomam base aos processos de manutenção de equipamentos, utilizando dos artifícios matemáticos da confiabilidade e da disponibilidade, garantindo assim os modelos apresentados.

Capítulo 5

Conclusões

5.1. Considerações Finais

Iniciou-se a pesquisa desta dissertação com o estudo do comportamento dos estoques de peças de reposição ou peças sobressalentes. O estoque de peças sobressalentes apresenta dificuldades, que alguns autores assinalam, por causa de informações incompletas ou falta de uma coleta regular delas nas empresas. Acrescentado a esta dificuldade, as pesquisas sobre métodos para serem aplicados a estoques sobressalentes estão ainda em desenvolvimento.

Na revisão bibliográfica realizada percebeu-se que há resultados com a adaptação das técnicas existentes para a quantificação dos estoques de peças de reposição, como método preliminar, para completar dados que descrevam as características destes itens, por exemplo, a segmentação, classificação ABC e a criticidade. Esta revisão foi feita para cobrir o objetivo de fazer um levantamento bibliográfico sobre como as técnicas usadas para prever a quantidade de peças de reposição necessárias para um processo produtivo. Outro método também utilizado por pesquisadores é a simulação. Isto, porque nem sempre as empresas dispõem de todos os dados necessários para calcular e validar um resultado, ou não tem possibilidades de obtê-los. Nestes trabalhos revisados, mostrou-se que a simulação foi uma ótima saída quando não se tem dados completos, ou quando estes são

insuficientes, para garantir conclusões eficientes para uma previsão dos estoques de peças de reposição.

As características das peças de reposição, tais como: baixo giro, comportamento irregular e intermitente, demanda baixa, as vezes de alto custo de aquisição e longo tempo de elaboração fazem mais complexa a tomada de decisão do quando e quantos destes itens são necessários a mínimo custo. Portanto, se teve como segundo objetivo o estudo de modelos de processos estocásticos para representar o problema do cálculo do tamanho do estoque de peças sobressalentes reparáveis. Este objetivo foi satisfeito com o estudo do processo QBD e sua aplicação no algoritmo que estima o número de peças necessárias para garantir, com alto grau de confiabilidade, a manutenção do funcionamento de um processo produtivo. Esta se constitui numa ferramenta que modela de forma mais ajustada a previsão do tamanho do estoque de sobressalentes reparáveis. Este tamanho depende de dois parâmetros um ligado ao tempo em que acontecerá a necessidade de uma peça de reposição (uma falha no processo produtivo) e o segundo ligado ao tempo necessário para a reparação desta peça.

O enfoque dado ao modelo, que mede o tamanho de estoque de peças de reposição, é a de previsão da seguinte parada no processo produtivo ou previsão da seguinte falha. Na ocorrência de falha se tem a opção de substituição por uma peça nova ou uma peça reparada, sob a hipótese que a reparação deixa a peça como nova, sempre que esta esteja disponível. Considerar a possibilidade de reparação de uma peça sobressalente é uma opção de responsabilidade ambiental incorporada nos processos produtivos.

Foram verificados os resultados computacionais, sobre dados acadêmicos, para a matriz infinitesimal trabalhada nos artigos Pérez-Ocon & Montoro-Cazorla (2004) e Huang *et al.* (2006), utilizando o ambiente Scilab 5.2.2, num Notebook STI, Processador Pentium T4400 HD 320 SATA II.

5.2. Trabalhos futuros

Aprofundar no estudo de cadeias de Markov a tempo contínuo, pois suas aplicações levam a modelos mais ajustados na previsão de falhas de um sistema

produtivo. Adicionalmente aprofundar no estudo dos processos estocásticos, em especial, processo de Quase Nascimento e Morte (processo QBD), cujas aplicações em medições da confiabilidade de processos produtivos resultam mais informativas.

Fazer um levantamento da matriz infinitesimal Q em problemas estoques de peças de reposição em empresas, tanto como das matrizes de tempo operacional e de tempo de reparo, assim, formulando um estudo de caso.

Referências

- ALVES, D.: *Processos Estocásticos*. sites.ffclrp.usp.br/ccp/(SEM%204)/PE/ProcEstoc17292.doc. Acessado em janeiro de 2011.
- BALLOU, Ronald H.: *Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos/Logística Empresarial*. 5ta. Edição. Porto Alegre: Bookman, 2006.
- BHAT, U. N.: *Elements of Applied Stochastic Processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Dallas, Texas – December 1971.
- BRANCO, R. M., COELHO, A. S.; *Cadeias absorventes de Markov no processo produtivo de filé congelado de pescada*. Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco, 01 (1,2,3,4) : 1-788. 2006.
- CLARKE, A. B.; DISNEY, R. L.: *Probabilidade e Processos Estocásticos*. Livros Tecnicos e Científicos, Editora S.A., 1979.
- DIAS, A.: *Confiabilidade na manutenção industrial*. www.icapdelrei.com.br/.../confiabilidade_na_manutencao_industrial.pdf acessado em outubro de 2010.
- DROHOMERETSKI, E.; FALCI, F. S. M. G. e FAVARETTO, F.: *Modelo de controle de estoque para peças de reposição: o caso de uma indústria de equipamentos para refrigeração da grande Curitiba*. Revista Inovação Gestão e Produção - INGEPRO, p. 104-115, 2009.
- EL SAADANY, A. M. A.; JABER, M. Y.: *The EOQ repair and waste disposal model with switching costs*. ELSEVIER, Computers & Industrial Engineering 55 p. 219–233, ano 2008.
- FADIOGLU, M. M. e YERALAN, S.: *Models of Production Lines as Quasi-Birth-Death Processes*. Mathematical and Computer Modelling 35, p. 913-930, 2002. <http://www.ie.bilkent.edu.tr/~mmurat/ProductionLinesMCM.pdf>, acessado em 16 de junho de 2010.
- FARIA, L. F. V. de: *Uma proposta de metodologia de gestão de estoques de sobressalentes em uma empresa química: Estudo de Caso*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, Campos dos Goytacazes - RJ, 2010.
- FOGLIATTI, M. C. e MATTOS, N. M. C.: *Teoria das Filas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2007.
- FREITAS, R. P.: *Controle de estoque de peças de reposição: revisão da literatura e um estudo de caso*. Dissertação (Mestre em Engenharia de Produção) – Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2008.
- GLATTFELDER, J.: *Stochastic Processes and the History of Science: From Planck to Einstein*. <http://blogs.olsen.ch/jbg/2008/09/03/stochastic-processes-and-the-history-of-science-from-planck-to-einstein>, acessado em janeiro de 2011.

- GOMES, A. V. P. e WANKE, P. F.: *Modelagem da gestão de estoques de peças de reposição através de cadeia de Markov*. Revista Gestão. Produção, São Carlos, v. 15, n. 1, p. 57-72, jan. - abr. 2008.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J.: *Introdução à Pesquisa Operacional*. Tradução Ariovaldo Griesi; Revisão técnica, João Chang Junior – São Paulo. McGraw-Hill, 2006.
- HUANG, Z.; LIANG, L. and GUO, B.: *A general repairable spare part demand model based on quasi birth and death process*. March, 2006, Vol.32, N°2.
- HUISKONEN, J.: *Maintenance Spare Parts Logistics: Special Characteristics and Strategic Choices*. International Journal of Production Economics, 2001.
- KAYANO, L. K.: *Gestão de estoques das peças de reposição de uma empresa ferroviária*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- KOCHI, G. T.: *Aplicação dos modelos de previsão de demanda intermitente na gestão de estoque de peças de reposição de relógios*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- KOÇAĞA, Y. L.: *Spare parts inventory management with delivery lead times and rationing*. Ph. Thesis – Institute of Engineering and Science of Bilkent University, 2004.
- LARC-PCS: *Modelagem e Simulação de Sistemas de Computacionais. Noções de Processos Estocásticos e Cadeias de Markov*. EPUSP, 2004.
- NEUTS, M.F. *Matrix-Geometric Solution in Stochastic Models: An Algorithm Approach*. Dover Publication Inc. New York, 1994
- NOGUEIRA, F.: *Modelagem e Simulação – Cadeias de Markov*. www.inf.unioeste.br/~rogerio/Cadeias-Markov3.pdf. Acessado em março de 2010.
- OLIVEIRA, C. A. de; RIBEIRO, J. R.; SILVA, A. C. S. da; BELDERRAIN, M. C. N.: *Gestão de estoques de peças de reposição de sistemas construídos com tecnologia COTS utilizando simulação*. Rio de Janeiro, SPOLM 2007.
- OSOGAMI T.: *Brief tutorial on phase-type distributions*, <http://www.cs.cmu.edu/~osogami/thesis/html/node39.html>, 2005, acessado em 26/02/2011.
- PÉREZ-OCÓNA, R. and MONOTO-CAZORLA, D.: *A multiple system governed by a quasi-birth-and-death process*. Reliability Engineering and System Safety, 84: 184 – 196, 2004.
- RIBEIRO, M. V.; SANTOS, P. R.; MORALES, G.: *Manual de aplicação do ambiente Scilab 3 na resolução de modelos de Programação Linear e Não-linear*. Relatório Técnico da UENF Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes – RJ, 2010.
- RICHTER, K.: *The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers*. European Journal of Operational Research 1996, 313-324.
- RISKA, A.: *Phase-Type distributions*, <http://www.cs.wm.edu/~riska/PhD-thesis-html/node19.html>, 2003, acessado em 26/02/2009.

- ROSS, S. M.: *Stochastic Processes*. 2ª edição, 1996.
- ROGERS, D. S. & TIBBEN-LEMBKE, R. (2001). An examination of reverse logistics practices. *Journal of Business Logistics*, 22(2), 129–148.
- SALASAR, L. E. B.: *O processo de Poisson Estendido e aplicações*. Dissertação apresentada a UFSC em 2007.
- SALES, M. V. S; FRANÇA, F. C. C; MORALES, G.; SANTOS, P. R.; RIBEIRO, M. V.: *Melhoria do Ensino da Pesquisa Operacional em Cursos de Engenharia de Produção com Apoio de Ferramentas Computacionais*. Baurú – SP, XVI SIMPEP 2009.
- SALES, M. V. S; MORALES, G.: *Estado da Arte em Estoque de Peças de Reposição: Introdução a Processo de Quase-Nascimento-e-Morte*. Baurú – SP, XVII SIMPEP 2010.
- SANTOS, J. S.: *Cálculo Variacional e Controle Ótimo: Exponencial de uma Matriz*. Ano de 2007. dfm.ffclrp.usp.br/~jair/listas/ExpMatriz.pdf. Acessado em Fevereiro de 2011.
- SILVA, D. N.: *Aplicação de processos estocásticos em gestão de custos de manutenção - uma abordagem da utilização da cadeia de Markov*. Rio de Janeiro, SPOLM 2008.
- SILVA, G. L. C.: *Modelo de estoque para peças de reposição sujeita à demanda intermitente e lead time estocástico*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2009.
- SIQUEIRA, I. P.: *Processos de Decisão Markovianos em Sistemas de Segurança e Proteção*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Recife, 1999.
- SODRÉ, U.: *Exponencial de uma matriz*. Londrina, 2001.
- TAHA, H. A.: – *Pesquisa operacional*. 8.ed. São Paulo: Pearson ; Prentice Hall, 2007.
- WANKE P.F.: *Metodologia para gestão de estoques de peças de reposição: um estudo de caso em empresa brasileira*. *Revista Tecnológica*, p. 60-65, 2005.
- WILLEMAIN, T.R.; SMART, C.N.; SCHWARTZ, H.F.: *A new approach to intermittent forecasting demand for service parts inventories*. *International Journal of Forecasting*, v. 20, p. 375-387, 2004.

ANEXO I – Diferença entre Distribuição e Processo de Poisson

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade discreta, cujo objetivo é expressar a probabilidade de certo número de eventos que ocorrem em um dado período de tempo, caso estes ocorram com uma taxa média conhecida e caso cada evento seja independente do tempo decorrido desde o último evento.

Para uma formulação matemática consideremos X variáveis aleatórias que representam o número de ocorrências, chegadas, discretas durante um intervalo de tempo de determinado comprimento. A probabilidade de que existam exatamente k ocorrências, com k inteiro e não negativo é

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

onde λ é um número real igual ao número esperado de ocorrências num dado intervalo de tempo.

E a função de distribuição acumulada da variável aleatória é dada como,

$$P(X) = \sum_{k=0}^X \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Na Figura 21 é ilustrada a distribuição de Poisson para valores de λ diferentes.

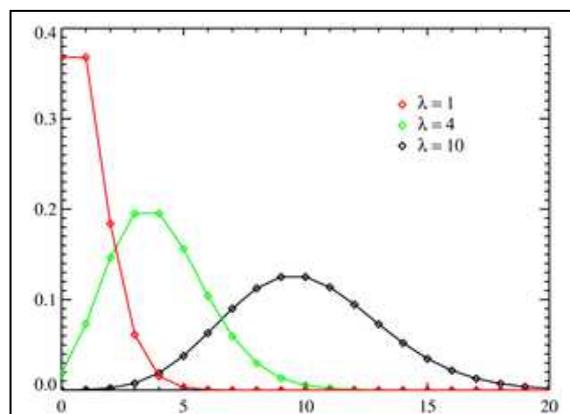


Figura 21 – Gráfico para a distribuição de Poisson com λ diferentes.

Processo de Poisson

Para Alves (2011), um processo de contagem é dito ser um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, se for verdade que:

- O processo tem incrementos independentes (os eventos ocorrendo em intervalos de tempo disjuntos são independentes de cada outro).
- Os incrementos do processo são estacionários (a distribuição do número de evento em qualquer intervalo de tempo depende somente do tamanho desse intervalo e não de quando o intervalo termina).
- A probabilidade de que exatamente um evento ocorra em qualquer intervalo de tempo de comprimento t é $\lambda t + o(t)$, isto é,

$$P[X(t) = 1] = \lambda t + o(t).$$

- A probabilidade de que mais que um evento ocorra em qualquer intervalo de tempo de comprimento t é $o(t)$, isto é,

$$P[X(t) \geq 2] = o(t).$$

Na definição acima $o(t)$ denota uma função real de t que decresce para zero mais rápido do que t , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

Salasar (2007) ressalta que o processo de Poisson é um processo de contagem onde as ocorrências do evento não são simultâneas e uma vez que o processo se encontra no estado n , a única transição possível $n + 1$.

Das definições acima pode concluir que a distribuição de Poisson está preocupada em analisar a probabilidade com que cada evento ocorra sem considerar o tempo na sua análise. Já o processo de Poisson se interessa por determinar a probabilidade com que determinado evento ocorra durante um período de tempo t , considerando este o parâmetro essencial para o cálculo.

ANEXO II – Exponencial de uma Matriz Quadrada

A exponencial de uma matriz real tA de ordem n pode ser obtida por vários modos distintos. Como exemplo, apresenta-se três formas:

- Uma série infinita de potências de A ;
- Pelo método dos autovalores;
- Pelo Teorema de Cayley-Hamilton.

Neste texto será apresentada a teoria misturada para a resolução da exponencial de uma matriz disponível em (SODRÉ, 2001).

A exponencial de uma matriz quadrada M pode ser definida como:

$$\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k . \quad (**)$$

Onde para cada matriz quadrada M de números reais de ordem $n \times n$, esta série de potências de matrizes converge para $\exp(M)$. A seguir se esboça a justificativa desta afirmação.

Sendo λ um autovalor para a matriz M , então não é difícil provar que λ^n é um autovalor para a matriz M^n e como consequência é possível mostrar que e^λ é um autovalor para a matriz e^M , o que garante a existência dos autovetores v_k não nulos tal que:

$$e^M v_k = e^{\lambda_k} v_k$$

onde os λ_k são autovalores para a matriz M .

Para mostrar a convergência da série (**) se calculam os autovalores da matriz M e se mostra que a exponencial de uma matriz é o somatório de n matrizes, (SANTOS, 2007),

$$e^M = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k},$$

onde as matrizes Z_k são obtidas via,

$$Z_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_j)(M - \lambda_j I)$$

ANEXO III – Operações de Kronecker

Produto de Kronecker

Definição 3: Se A e B são matrizes retangulares de dimensões $k_1 \times k_2$ e $k'_1 \times k'_2$, respectivamente, o produto de Kronecker $A \otimes B$ é definido como

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1k_2}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k_11}B & \cdots & A_{k_1k_2}B \end{bmatrix}$$

onde $A \otimes B$ é uma matriz de dimensões $k_1 k'_1 \times k_2 k'_2$, e pode ser escrita na forma compacta $(A_{ij}B)$.

Soma de Kronecker

Definição 4: Sejam A e B matrizes quadradas de dimensões $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, a soma de Kronecker de A e B , $A \oplus B$, é a matriz de dimensão $mn \times mn$, escrita como

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B$$

onde I_n e I_m são matrizes identidades de ordem n e m , respectivamente.

Uma propriedade funcional desta soma é a seguinte igualdade das matrizes abaixo

$$\exp(A \oplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B)$$

A seguir se apresenta o código, Figura 21, desenvolvido no ambiente Scilab 5.2.2, para calcular a matriz infinitesimal Q da seção 4.1.2, utilizando as operações apresentadas acima, o produto e a soma de Kronecker.

A matriz Q é uma matriz de blocos tri-diagonal. Cada um desses blocos são obtidos como resultado das equações de balanço do processo estocástico de quase nascimento e morte. As construções das matrizes, que utilizaram as operações de Kronecker definidas acima, elas foram construídas passo a passo multiplicando um elemento, por vez, da primeira matriz por todos os elementos da segunda matriz. A


```

trabalho.sce - Scilab text editor
trabalho.sce
1 m=3 //m=input("Ordem da matriz T e S, m = ");
2 T=[-0.0027 0.0027 0; 0 -0.008 0.008; 0 0 -0.02878] //T=input("Matriz T de tempo operacional de ordem m, T=");
3 S=[-0.02 0.02 0; 0.01 -0.08 0.07; 0.005 0 -0.1] //S=input("Matriz S de tempo de reparação de ordem m, S=");
4 alfa=[1 0 0] //alfa=input("Entre com os valores do vetor alfa de ordem 1 x m, alfa =");
5 beta=[1 0 0] //beta=input("Entre com os valores do vetor beta de ordem 1 x m, beta =");
6 e=ones(m,1)
7 I=eye(m,m)
8 BZ=zeros(m,m)
9 B1K_Z=zeros(m,m^2);
10 BLK_Z=zeros(m^2,m^2); //DA 2ª LINHA E 2ª COLUNA EM DIANTE//
11 BL1_Z=zeros(m^2,m); //QUALQUER LINHA DA 1ª COLUNA//
12
13 To=-T*e
14 So=-S*e
15
16 Bo1=To*alfa;
17 Ao2=So*beta;
18 Bn=So*alfa;
19
20 B00=T
21
22 B01=[Bo1(1,1)*beta Bo1(1,2)*beta Bo1(1,3)*beta; Bo1(2,1)*beta Bo1(2,2)*beta Bo1(2,3)*beta; Bo1(3,1)*beta
Bo1(3,2)*beta Bo1(3,3)*beta]
23
24 B10=[I(1,1)*So I(1,2)*So I(1,3)*So; I(2,1)*So I(2,2)*So I(2,3)*So; I(3,1)*So I(3,2)*So I(3,3)*So]
25 BN_1N=[To(1,1)*I; To(2,1)*I; To(3,1)*I]
26 BNN_1=[Bn(1,1)*beta Bn(1,2)*beta Bn(1,3)*beta; Bn(2,1)*beta Bn(2,2)*beta Bn(2,3)*beta; Bn(3,1)*beta
Bn(3,2)*beta Bn(3,3)*beta]
27 BNN=S
28
29 A1=[T(1,1)*I+I(1,1)*S T(1,2)*I+I(1,2)*S T(1,3)*I+I(1,3)*S; T(2,1)*I+I(2,1)*S T(2,2)*I+I(2,2)*S T(2,3)*I+I(2,3)*S;
T(3,1)*I+I(3,1)*S T(3,2)*I+I(3,2)*S T(3,3)*I+I(3,3)*S]
30
31 A0=[Bo1(1,1)*I Bo1(1,2)*I Bo1(1,3)*I; Bo1(2,1)*I Bo1(2,2)*I Bo1(2,3)*I; Bo1(3,1)*I Bo1(3,2)*I Bo1(3,3)*I]
32
33 A2=[I(1,1)*Ao2 I(1,2)*Ao2 I(1,3)*Ao2; I(2,1)*Ao2 I(2,2)*Ao2 I(2,3)*Ao2; I(3,1)*Ao2 I(3,2)*Ao2 I(3,3)*Ao2]
34
35 Q=[B00 B01 B1K_Z B1K_Z B1K_Z BZ; B10 A1 A0 BLK_Z BLK_Z BL1_Z; BL1_Z A2 A1 A0 BLK_Z BL1_Z; BL1_Z BLK_Z A2 A1 A0 BL1_Z;
BL1_Z BLK_Z BLK_Z A2 A1 BN_1N; BZ B1K_Z B1K_Z B1K_Z BNN_1 BNN]

```

Figura 22 – Código que gera a matriz infinitesimal Q , do exemplo numérico, seção 4, em Pérez-Ocón e Montoro-Cazorla (2004)

ANEXO IV – Definições de Confiabilidade e Disponibilidade

Na dissertação muito se ouve falar de confiabilidade e disponibilidade, a seguir serão apresentadas as definições das mesmas por (DIAS, 2011).

Confiabilidade

Embora a atenção com a degradação seja antiga, a confiabilidade como uma teoria específica é recente e vem sendo usada há aproximadamente 40 anos. É por isso que a confiabilidade torna-se tão bem integrada aos programas de manutenção. Muitas são as definições de confiabilidade. Matematicamente a confiabilidade pode ser representada, simplesmente, como:

$$C(X) = 1 - \int_0^X f(X)dx$$

onde, $C(X)$ é a confiabilidade e $f(X)$ a função de densidade de probabilidade de falha e X a variável aleatória.

Disponibilidade

A disponibilidade de um dado produto ou sistema está na verdade, diretamente associado com a “qualidade temporal” ou vida desse sistema, se considerado reparável.

Segundo a NBR-5462 (1994), disponibilidade é a capacidade de um item estar em condições de executar uma certa função em um dado instante ou durante um intervalo de tempo determinado, levando-se em conta os aspectos combinados de sua confiabilidade, manutenibilidade e suporte de manutenção, supondo que os recursos externos requeridos estejam assegurados.

APÊNDICE A

O código a seguir foi elaborado pelo autor dessa dissertação para conferir os resultados do trabalho de Huang *et al.* (2006). O objetivo desta construção é de comprovar os resultados numéricos encontrados por estes autores e, verificar o entendimento das propriedades das operações de Kronecker e da distribuição PH.

Para o código são necessários o conhecimento das matrizes de tempo operacional e de tempo de reparo, e incorporar outras matrizes necessárias para o cálculo inicial, como as matrizes de zeros, de 1's e a matriz identidade, cada qual com a sua dimensão adequada.

O ambiente Scilab 5.2.2 foi escolhido pela sua liberdade de utilização, Ribeiro *et al.* (2010) e Sales *et al.* (2009), e pela maneira simples de apresentar seus resultados. A facilidade de utilização deste ambiente permitiu que o autor construísse este código sem a utilização de muitas funções já contidas neste pacote. Como é o caso da função produto de Kronecker (*kron*) encontrada no pacote do Scilab 5.2.2. Esta função não foi utilizada em um primeiro momento para a execução dos cálculos do algoritmo por finalidade de aprendizado.

Logo após a entrada dos dados iniciais, o código gera as matrizes (blocos) que serão utilizadas no desenvolvimento do algoritmo. A seguir é apresentado o código, desenvolvido pelo autor dessa dissertação, no ambiente Scilab 5.2.2 para a verificação e confirmação dos resultados obtidos no trabalho de Huang *et al.* (2006) a partir do algoritmo HUANG-LIANG-GUO.

```

Dissertação.sce - Scilab text editor
oDissertação.sce

//Parâmetros de entrada

m=3; //dimensão básica para o crescimento das matrizes
T=[-0.0027 0.0027 0; 0 -0.008 0.008; 0 0 -0.02878]; //matriz de tempo operacional
S=[-0.02 0.02 0; 0.01 -0.08 0.07; 0.005 0 -0.1]; //matriz de tempo de reparo
t=1500; // tempo de trabalho do maquinário para o teste
alfa=[1 0 0];
beta=[1 0 0];
e=ones(m,1); // matriz coluna de 1's
I=eye(m,m); //matriz identidade de dimensão m
BZ=zeros(m,m); // matriz de zeros de dimensão m
B1K_Z=zeros(m,m^2);
BLK_Z=zeros(m^2,m^2);
BL1_Z=zeros(m^2,m);

// Cálculo inicial

To=-T*e;
So=-S*e;
Bo1=To*alfa;
Ao2=So*beta;

Bn=So*alfa;
B00=T;
B01=[Bo1(1,1)*beta Bo1(1,2)*beta Bo1(1,3)*beta; Bo1(2,1)*beta Bo1(2,2)*beta Bo1(2,3)*beta; Bo1(3,1)*beta
Bo1(3,2)*beta Bo1(3,3)*beta];
B10=[I(1,1)*So I(1,2)*So I(1,3)*So; I(2,1)*So I(2,2)*So I(2,3)*So; I(3,1)*So I(3,2)*So I(3,3)*So];
BN_1N=[To(1,1)*I; To(2,1)*I; To(3,1)*I];
BNN_1=[Bn(1,1)*beta Bn(1,2)*beta Bn(1,3)*beta; Bn(2,1)*beta Bn(2,2)*beta Bn(2,3)*beta; Bn(3,1)*beta
Bn(3,2)*beta Bn(3,3)*beta];
BNN=S;

A1=[T(1,1)*I+I(1,1)*S T(1,2)*I+I(1,2)*S T(1,3)*I+I(1,3)*S; T(2,1)*I+I(2,1)*S T(2,2)*I+I(2,2)*S T(2,3)*I+I(2,3)*S;
T(3,1)*I+I(3,1)*S T(3,2)*I+I(3,2)*S T(3,3)*I+I(3,3)*S];
A0=[Bo1(1,1)*I Bo1(1,2)*I Bo1(1,3)*I; Bo1(2,1)*I Bo1(2,2)*I Bo1(2,3)*I; Bo1(3,1)*I Bo1(3,2)*I Bo1(3,3)*I];
A2=[I(1,1)*Ao2 I(1,2)*Ao2 I(1,3)*Ao2; I(2,1)*Ao2 I(2,2)*Ao2 I(2,3)*Ao2; I(3,1)*Ao2 I(3,2)*Ao2 I(3,3)*Ao2];

// Execução do algoritmo

P=0.95; // Confiabilidade do sistema permanecer em funcionamento
h=0; Q=T; gama=alfa; E=gama*expm(Q*t)*ones(m,1)
if E>P then
    disp(h, 'Número necessário de peças de reposição');
else h = h + 1; Q=[B00 B01; B10 A1]; gama=[alfa zeros(1,m^2)]; E=gama*expm(Q*t)*ones(3*(3*h+1),1)
    if E>P then
        disp(h, 'Número necessário de peças de reposição');
    else h = h + 1; Q=[B00 B01 B1K_Z; B10 A1 A0; BL1_Z A2 A1]; gama=[alfa zeros(1,h*m^2)];
E=gama*expm(Q*t)*ones(3*(3*h+1),1)
    if E>P then
        disp(h, 'Número necessário de peças de reposição');
    else h = h + 1; Q=[B00 B01 B1K_Z B1K_Z; B10 A1 A0 BLK_Z; BL1_Z A2 A1 A0; BL1_Z BLK_Z A2 A1]; gama=[alfa
zeros(1,h*m^2)]; E=gama*expm(Q*t)*ones(3*(3*h+1),1)
    if E>P then
        disp(h, 'Número necessário de peças de reposição');
    end,
    end,
    end,
    end,
if E<P then h = h + 1;
    disp(h, 'Terminou o número de iterações permitidas')
end

```

Figura 24 – Código implementado a partir do código do algoritmo de HUANG-LIANG-GUO.

Notar que a matriz Q , matriz de blocos tri-diagonal, está sendo modificada a cada iteração para efeitos de cálculos. Após a execução do algoritmo visualizam-se as probabilidades que indicam o grau de confiabilidade para que o sistema permaneça em funcionamento sem correr o risco de entrar em estado de falha. A confiabilidade exigida pelo algoritmo é $P=95\%$ como determinado pelos autores Huang *et al.* (2006). Se o algoritmo calcula um valor inferior ao dessa probabilidade ele faz uma nova iteração, parando somente quando o valor calculado da probabilidade for maior ou igual ao exigido.

Os produtos de Kronecker, no código apresentado, são encontrados nas matrizes B_{01} , B_{10} , B_{N_1N} , B_{NN_1} , B_{NN} , A_0 , A_2 e a soma de Kronecker é encontrada na formulação da matriz A_1 . A construção dessas matrizes é essencial para que a cada iteração a matriz Q seja modificada de acordo com as necessidades. Por fim, o algoritmo determina a quantidade de peças de reposição necessária de acordo com o grau de confiabilidade exigida para o sistema não entrar em estado de falha.