Daniel Francisco de Paula Sodré Martins

Escalas, Inversas e Tríades: A Matemática aplicada à Música

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

16/06/2015

Daniel Francisco de Paula Sodré Martins

Escalas, Inversas e Tríades: A Matemática aplicada à Música

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

Coorientador: Prof. Leonardo Fuks

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
16/06/2015

Daniel Francisco de Paula Sodré Martins

Escalas, Inversas e Tríades: A Matemática aplicada à Música

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 16 de Junho de 2015.

Prof. Mikhail Petrovich Vishnevskii
D.Sc. - UENF

Luis Humberto Guillermo Felipe
D.Sc. - UENF

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Prof. Leonardo Fuks
PhD. - UFRJ
(CO–ORIENTADOR)

ao “seu” Pedro,

meu saudoso avô

Agradecimentos

À minha esposa Renata, pelo incentivo para ingressar no mestrado, e pelo apoio e carinho dados no decorrer da difícil caminhada, mesmo à distância. Graças a ela juntei forças para iniciar e terminar o curso.

À minha mãe, Ana Beatriz, ao meu pai, Mauro, ao meu padrasto, Lilico, e meus avós, Marisa, Jael e Pedro (in memoriam) pela força e incentivo, e por me darem a base para o que eu sou hoje.

Ao meu orientador, Professor Doutor Geraldo de Oliveira Filho, por aceitar tão prontamente o tema proposto, e pelas valiosas orientações. Seu incentivo foi crucial para o término deste trabalho.

Ao meu co–orientador, Professor Doutor Leonardo Fuks, por aceitar de coração aberto minha proposta de trabalho, e por, embora mais à distância, sempre compartilhar de seu conhecimento.

À CAPES, pelo manutenção das bolsas, importantes para o desenvolvimento do trabalho.

A todos os professores do PROFMAT, polo UENF por sua dedicação e trabalho sério.

Aos colegas de Curso, pelo clima de ajuda e compartilhamento de conhecimento criado em nosso convívio. Um agradecimento especial aos colegas Cadú e Renato, pelas caronas e viagens sempre bem–humoradas até o polo.

‘‘A música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números.‘‘
Gottfried Leibniz

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar algumas aplicações da matemática à música, enfatizando seu papel na percepção de simetrias e padrões presentes na composição musical. Em toda a história, a presença de simetrias e padrões em obras de artes sempre foi fonte geradora de prazer ao ser humano. O estudo da matemática, nesse contexto, ajuda a entender como se formam estas simetrias e padrões. A matemática então é vista como uma ferramenta importante para o total entendimento e apreciação da desta arte.

Utilizamos o software AUDACITY para mostrar o comportamento da onda sonora, e alterar a onda de forma a modificar as qualidades do som. Utilizamos outro software gratuito, o SCALA, para construir a escala pitagórica e a escala temperada, além de outras escalas menos conhecidas. Por fim, investigamos como a estrutura algébrica de grupo pode ser usada para mostrar operações costumeiramente feitas por músicos (como inversões e obtenção de tríades) em uma linguagem matemática. A teoria de Grupos necessária foi desenvolvida no decorrer do capítulo.

Palavras-chaves: Música; Razões; Funções Periódicas; Teoria de Grupos.

Abstract

The aim of this work is to show some aplications of mathematics to music, enphasising its role in perception of simmetry and patterns presents in musical composition. In all history, the presence of simmetry and patterns in art works was a generating source of pleasure to the mankind. The study of mathematics, in this context, aids to understand how these simmetries and patterns are formed. The mathematics, thus, is shown like an important tool for the entire understanding and appreciation of this art.

We used the software AUDACITY to show the behavior of sound wave, and change the wave form to modify the sounds qualities. We used another free software, SCALA, to build the pythagorean scale and the tempered scale, in addition to lesser-known scales. Lastly, we investigated how the algebraic structure of group can be used to show operations usually done by musicians (like inversions and obtaining triads) in mathematics language. The group theory needed was developed during the chapter.

Key-words: Music, Ratios, Periodic Functions, Group Theory

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de símbolos

λ	Comprimento de onda
v	Velocidade de propagação de uma onda
f	Frequência
T	Período

Sumário

Introdução

A matemática do ensino básico, da maneira que é ministrada atualmente, deixa escapar muitos de seus aspectos belos e prazerosos. Devido à urgência de se cumprir conteúdos e de realizar avaliações, muitas aplicações práticas interessantes da matemática são deixadas em segundo plano, o que favorece o desinteresse e o consequente fracasso da maior parte dos alunos nesta disciplina. Como oboísta e clarinetista amador, sempre fiquei maravilhado pelos padrões e simetrias presentes na música, e a presente dissertação é uma oportunidade de trazêr tais padrões e simetrias, além de aplicações práticas, à luz da matemática.

Neste trabalho serão exibidas algumas formas de modelar matematicamente a música, utilizando como ferramentas dois programas computacionais. A ideia aqui não é desconsiderar o estudo da matemática por ela mesma, como área do saber independente, mas sim mostrar como ela pode ser um poderoso instrumento para compreender outras disciplinas, destacando aqui seus aspectos artísticos. Tal interdisciplinaridade é encorajada pelos PCN's, que indicam que um dos objetivos do ensino é:

> utilizar as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação.(PCN, 1998)

A matemática pode ser um instrumento poderoso para a compreensão da realidade que nos cerca, pois garante outras formas de enxergar o mundo. Os PCN's também salientam que

> É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.(PCN, 1998)

Desenvolveremos a dissertação de acordo com a seguinte configuração:

No capítulo 1, traçaremos um panorâma histórico da utilização da matemática no desenvolvimento da música, desde a escola pitagórica até a história recente.

No capítulo 2, utilizaremos o software gratuíto Audacity para mostrar como a onda sonora pode ser alterada para se mudar a frequência, amplitude e timbre do som.

No capítulo 3, utilizaremos o software gratuíto SCALA, para construir as escalas pitagórica e temperada, além de outras escalas não usuais.

No capítulo 4, usaremos as noções de grupo e de aritmética modular para mostrar simetrias e padrões presentes na música, além de algumas operações feitas por músicos e compositores, sob o ponto de vista matemático. O pouco de teoria de grupos e aritmética modular necessários serão desenvolvidos no decorrer do capítulo. Usaremos excertos musicais de domínio público na análise, e que portanto podem ser utilizados por qualquer interessado.

No capítulo 5, faremos a conclusão e considerações finais, visando contribuir para a literatura existente e propor estudos posteriores. Por fim, apresentaremos as referências bibliográficas e os apêndices.

Capítulo 1

Matemática e Música na História

Neste capítulo, exibiremos um breve panorama histórico do desenvolvimento matemático e físico aplicado à música, bem como da evolução desta arte.

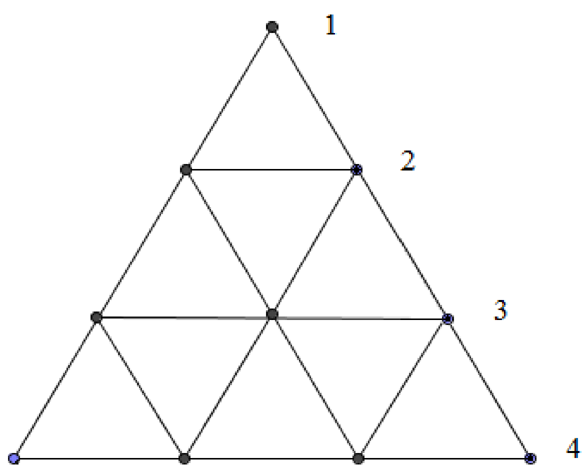
1.1 A escola Pitágorica

Pitágoras de Samos nasceu por volta de 540 a.c., e sua existência é envolta de mitos e mistérios. Os membros de sua escola, a Escola Pitagórica, levavam o estudo do Quadrivium praticamente como uma seita. Para eles, toda a compreensão do mundo passava pelo total entendimento do Quadrivium. Nesse contexto, Pitágoras e seus seguidores procuravam inter-relacionar suas descobertas, de modo a torná-las "perfeitas". Assim, eles relacionavam por exemplo, conceitos aritméticos à geometria, e esta à música e à astronomia.

Segundo (ROQUE, 2012), para os pitagóricos, a matemática era dividida entre o estudo dos números e o estudo das grandezas. O estudo dos números se dividia em aritmética (estudo das quantidades por si mesmas) e música (relações entre quantidades). Já o estudo das grandezas se dividia em geometria (grandezas em ”repouso”) e astronomia (grandezas em movimento inerente). Tal conjunto de disciplinas ja ficou conhecido na Idade Média como Quadrivium (quatro vias). Esta era a base do conhecimento considerado essencial para o iniciar o indivíduo numa vida de aprendizagem (EVES, 2008).

Os pitagóricos foram os únicos até Aristóteles a fundamentarem cientificamente a música (EVES, 2008). Embora diversos povos já tivessem organizado suas escalas musicais, foi Pitágoras o primeiro a criar uma escala obedecendo uma lógica científico-matemática (ABDOUNUR, 2003). Uma das lendas mais famosas sobre Pitágoras diz que, ao passar por uma oficina, ele teria ficado encantado com a harmonia existente entre os sons produzidos pelos martelos dos trabalhadores de uma oficina. Ele observou que um martelo com o dobro de massa de outro de mesmo material gerava um som igual ao do martelo menor, porém mais grave. Pitágoras pensou então em traduzir esta ideia de modo geral. Através de um instrumento rudimentar, que constava de uma só corda tensionada sobre uma caixa com uma escala numérica marcada, chamado de monocórdio, Pitágoras foi capaz de reproduzir as mesmas sensações sonoras existentes entre os sons dos martelos. Modificando o comprimento da corda com um traste móvel, em pontos que resultavam em frações dos primeiros quatro inteiros, e comparando com o som produzido pela corda solta, Pitágoras obteve as mesmas consonâncias que havia ouvido. Ele percebeu que, por exemplo, a razão 1:2 produzia um intervalo agradável ao ouvido, no caso sons iguais, porém com diferença de altura. Pitágoras também estabeleceu os outros principais intervalos. O intervalo de quinta correspondia à razão 2:3; o intervalo de quarta à razão 3:4. Estas razões eram bastante especiais para os Pitagóricos, pois eram formadas pelos 4 primeiros números inteiros, cuja soma 1+2+3+4=10 dá origem à a chamada Tetraktys (figura 1), que simbolizava o princípio gerador de tudo (HENRIQUE, 2011). A partir do intervalo de quinta, todas as notas poderiam ser obtidas, criando a chamada **escala diatônica Pitagórica**. A escala pitagórica foi pioneira pelo fato de poder ser reproduzida usando processos matemáticos, ao invés de pura utilização do aparato auditivo.

Figura 1 – Tetraktys: a soma dos quatro primeiros inteiros



A escala Pitagórica, porém, não era totalmente perfeita, como esperavam os Pitagóricos. Utilizando o processo de obter notas através de intervalos de quinta, obtemos um última nota que não é exatamente a nota de partida "oitavada". Isso vem do fato de que somar n quintas equivale a calcular a n–ésima potência de $\frac{3}{2}$, e para $n, k \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \neq 2^k$. Por conta disso, várias outras escalas foram propostas ao longo da história, o que não tira o mérito dos pitagóricos em sua descoberta.

1.2 Idade Média

Considerado por muitos como a ”idade das trevas”, a Idade Média contou com alguns avanços na teoria musical, como a invenção e posterior estabelecimento, fomentado principalmente pelo músico Guido d’Arezzo, da pauta musical como sistema de notação, que também foi o responsável pelos nomes das notas: *ut, re, mi, fa, sol, la, si*. A sílaba *ut* foi substituída posteriormente pela sílaba *do*, mais suave para o canto. Outro destaque deste período foi Boécio, grande transmissor da obra de Aristóteles, que tinha como base o uso de métodos lógicos que deveriam fazer parte de qualquer investigação científica (ROQUE, 2012). O *De Institutione Musica*, seu tratado sobre música, foi a obra sobre teoria musical mais difundida na Idade Média. Este tratado se apoiava na doutrina pitagórica, e usava a matemática para racionalizar as consonâncias musicais e o princípio da divisão do monocórdio (ABDOUNUR, 2003).

A Idade Média foi também o período em que compositores passaram a dar mais importância à harmonia, ao invés de somente o caráter melódico da música. Por volta do século IX, surgem as primeiras composições polifônicas, denominadas *Organum Paralelo* (ABDOUNUR, 2003). Como o nome sugere, havia nesse modo de composição uma maior preocupação com a estrutura vertical da música (harmonia).

1.3 Séculos XIV e XV

O período que compreende os séculos XIV e XV foi um muito importante para a música, tanto no que tange à teoria quanto à composição, principalmente devido a aprofundamentos relevantes em relação à compreensão das ideias de Série Harmônica e Temperamento. Gioseffo Zarlino foi o principal teórico musical deste período. Em sua obra encontramos uma síntese de toda a teoria musical do Renascimento, passando pela classificação dos instrumentos até as regras de composição e afinação da escala (HENRIQUE, 2011). Sua obra teve como base teórica o matemático Ludovico Fogliani, que teve como principal obra a *Musica Theorica*, em que ele discute a natureza do som de maneira puramente matemática.

Neste período, destacamos Leonardo da Vinci, que também contribuiu para o desenvolvimento da música. Em seus escritos, encontramos cálculos bastante aproximados da velocidade de propagação do som. Ele também descreveu o fenômeno de vibração por simpatia, usando cordas de alaúde com mesma afinação (HENRIQUE, 2011). Além disso, dentre seus projetos, havia varias descrições de novos instrumentos bastante curiosos, como a Viola Organista, a Lira de Braccio e o Órgão de Tubos de Papel.

Na parte musical, destacamos os compositores William Byrd, principal compositor da renascença inglesa; Josquin des Prés, considerado o mais moderno dentre os compositores de sua época; Giovanni Pierluigi Palestrina, importante no desenvolvimento da música polifônica e do contraponto; e Claudio Monteverdi, inovador no emprego de acompanhamentos instrumentais, dissonâncias e cromatismos.

1.4 O século XVII

O século XVII foi muito frutífero em todas as áreas do conhecimento humano, principalmente devido ao estabelecimento dos processos de matematização, experimentação e mecanização constituídas na Revolução Científica (ABDOUNUR, 2003). Os fenômenos naturais passaram a ser estudados a partir do método científico, em contraponto à simples analogias apoiadas em místicas numerológicas ou evidências pouco seguras. Foi o século de surgimento de grandes gênios, os quais destacamos alguns que contribuíram para o campo matemático na música:

- Galileu Galilei: Em seu tratado *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze Attenti Alla Mecanica e I Movimenti Locali* expôs a dedução da Lei de Propagação de Ondas em Cordas, estabelecendo relações entre frequência, comprimento, diâmetro, densidade e tensão. Mostrou também que intervalos musicais podiam ser descritos por razões entre as frequências sonoras, e apresentou uma explicação ainda atual sobre consonâncias e dissonâncias.

- Marin Mersenne: Estabeleceu as Leis relativamente à cordas, conhecidas hoje como Leis de Mersenne. Calculou a velocidade do som utilizando o eco com erro de apenas 10% do valor real, e foi o primeiro a determinar a frequência de uma nota musical estabelecida. Sua obra também foi importante para o estudo dos instrumentos musicais sob o olhara da matemática. Propôs a divisão da oitava em 12 partes, desiguais e iguais, obtendo neste último o monocórdio harmônico (DIAS,)

- Joseph Sauveur: Matemático e físico, foi o primeiro a apresentar o conceito de harmônico (capítulo 2) a partir de uma corda tensa, e de som fundamental. Introduziu a noção de nó e ventre para caracterizar ondas estacionárias em cordas.

- Christiaan Huygens: Estudou o som baseado em sua teoria ondulatória, o que contribuiu para o melhor entendimento e representação dos fenômenos musicais. Estudou também o fenômeno da falha de uma coma no temperamento desigual, o que contribuiu para a emergência do temperamento igual.

- Isaac Newton: Teceu importantes comentários sobre os sons musicais em seus artigos sobre ótica. Em seu *Principia* analisou matematicamente a propagação do som, apoiado na teoria ondulatória de Huygens.

No âmbito musical, temos como principais compositores: Heinrich Schütz, que trabalhou a música eclesiástica alemã; Girolamo Frescobaldi, grande intérprete e virtuose em diversos instrumentos; Dietrich Buxtehude, que foi uma das grandes inspirações de Johann Sebastian Bach; e Jean-Baptiste Lully, que introduziu a forma de abertura francesa – rápido, lento e rápido – precursora da forma sonata e da sinfonia.

1.5 O século XVIII

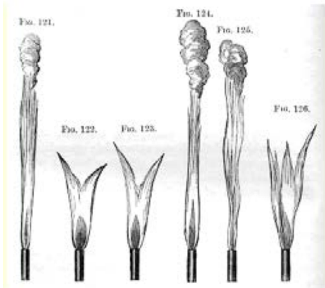
Neste período, houve um grande desenvolvimento da acústica teórica. Lagrange, Bernoulli, e Euler contribuíram matematicamente para o entendimento de certos fenômenos como altura, timbre e transmissão do som em líquidos. O desenvolvimento do Cálculo por Newton e Leibniz possibilitou o aparecimento de grandes obras teóricas, de cunho matemático, sobre acústica, dentre elas *A New Theory of Music*, de Euler; *The Elements of Music , Theoretical and Practical*, de d'Alembert; *On Sound and the Tones of Organ Pipes*, de Bernoulli; *The Nature and Properties of Sound*, de Lagrange; *Vibrating Strings*, de Riccati; *The Movements of Elastic Fluids in Cylindrical Tubes*, de Poisson; *Aerial Vibrations in Cylindrical Tubes*, de Hopkins; *Vibrations of Air in Cylindrical and Conical Tubes*, de Duhamel; e *A New Theory of Sonorous Tubes*, de Quet (HENRIQUE, 2011).

O século XVIII marca também o surgimento das séries e integrais de Fourier, além da Análise de Fourier, fundamentada pelo matemático Jean Baptiste Fourier, em sua obra *Théorie Analytique de la Chaleur*. Embora não cite aplicações à acústica, a teoria presente nesta obra é de grande importância para esta área e outras da física. O Teorema de Fourier se transformou no fundamento para análises de harmônicos, consonâncias e dissonâncias, batimentos e outros conceitos musicais.

Também no século XVIII começa a se estabelecer um dos maiores compositores da história: Johann Sebastian Bach, que foi um dos grandes difundidores do sistema de afinação por temperamento igual, proposto pelo matemático Andreas Werckmeister. Sua obra "Das wohltemperierte Klavier", uma coleção de fugas e prelúdios sobre as 12 tonalidades maiores e 12 tonalidades menores mostrava a versatilidade desse sistema de afinação, que permitia infinitas modulações em tonalidades bem diferentes. Além de Bach, destacamos Georg F. Haendel, que é considerado um dos maiores compositores deste período, deixando um grande legado em cantatas, óperas e aberturas e Wolfgang Amadeus Mozart, considerado por muitos como o maior compositor de todos os tempos. Sua música tem a complexidade e elegância inerente a muitos conceitos matemáticos.

1.6 Séculos XIX, XX e XXI

Os últimos três séculos da história marcaram o estabelecimento da acústica e da tecnologia do som. No sécculo XIX, destacamos Félix Savart e suas contribuições para a construção de instrumentos musicais, estudos sobre a vibração sonora da voz humana e de corpos sólidos; August Kundt, e sua medição da velocidade do som através do dispositivo de formação de ondas estacionárias conhecido como tubo de Kundt; Helmholtz, e seus estudos sobre instrumentos musicais e percepção do som, sua teoria sobre consonância e dissonância, e a criação dos ressoadores que levaram o seu nome (*ressoadores de Helmholtz*); John Tyndall, e seu livro *Sound*, onde analisava e representava ondas sonoras utilizando-se de diversos meios tais como chamas e projeções (figura 2).



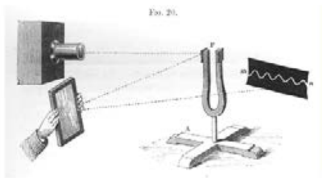


Figura 2 – À esquerda: efeito de diferentes vogais em chamas; à direita: projeção de uma onda sonora produzida por um afinador, gerando uma onda senoidal

No século XX, temos importantes contribuições , as quais destacamos as de Wallace Sabine, que fez importantes conclusões sobre a acústica arquitetônica, sendo responsável pela construção de importantes salas de concerto; e Hugo Riemann, cuja teoria sobre tríades terá uma parte mostrada no capítulo 4

As últimas décadas marcaram um grande desenvolvimento da acústica musical, impulsionado pela existência de equipamentos adequados e do da computação para geração de sons. Em (HENRIQUE, 2011), o leitor poderá encontrar vários outros matemáticos, físicos, engenheiros e outros pesquisadores que contribuíram e que contribuem para o desenvolvimento musical, seja na parte teórica quanto na parte prática.

O século XIX corresponde ao período romântico da música, onde temos composições importantes como grande parte da obra de Beethoven e óperas de Verdi. É o século de muitos dos grandes compositores que eternizaram suas obras no conjunto das grandes criações artísticas da humanidade. É o século também onde se dá o maior desenvolvimento da orquestra sinfônica, que passa a ter uma maior dimensão, tanto numérica quanto sonora.

O inicio do século XX é um período marcado pela quebra dos padrões românticos, como visto nos balés de Stravinsky e o dodecafonismo presente em Schoenberg. A segunda metade do século XX e início do século XXI é um período de experimentação na música, passando pela música microtonal, música eletroacústica , apesar de paralelamente haver o desenvolvimento de uma música mais ”tradicional”, como nos grandes compositores de trilhas sonoras (John Williams, Bernard Herrmann, Hans Zimmer etc.).

1.7 Pesquisas Recentes

Em (LEWIN, 1982), é proposta a modelagem das relações entre as tríades, utilizando as operações adaptadas dos escritos de Hugo Riemann (P, L e R), esplorada nesta dissertação. Esta modelagem foi trabalhada também em (HYER, 1995), onde é mostrado o valor heurístico da representação da gráfica no *tonnetz* da família de operações PLR, advindas de sua origem acústica. Em (HOOK, 2002), é feito um estudo sobre o interessante Grupo das Tranformações Triádicas Uniformes (UTT em inglês). Em (CRANS A; FIORE. T.; SATYENDRA, 2009), foram estudadas as ações de grupos dihedrais em música. Outros exemplos particulares de aplicações de grupos podem ser encontrados em (PAPADOPOULOS, 2000).

As relações entre música e matemática para serem usadas em fins didáticos foram estudadas, por exemplo, em (CAMPOS, 2009) e (PEREIRA, 2013), onde são também estudadas as escalas musicais e sua formação e algumas outras aplicações da matemática à música. Estes dois trabalhos pertencem ao banco de trabalhos do PROFMAT, mostrando o crescente interesse na área.

Capítulo 2

Análise da Onda Sonora

Neste capítulo, veremos como os aspectos psicoacústicos do som (altura, intensidade e timbre) podem ser verificadas e modificados via modelagem matemática, utilizando o software AUDACITY. Para um tutorial de uso do software, consultar o website

`portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000013570.pdf`

(acesso 27/05/2015)

2.1 Onda Sonora

Uma **onda** é um fenômeno físico, definido como sendo uma propagação de energia e quantidade de movimento sem que haja propagação de matéria (HENRIQUE, 2011). Uma definição geral de onda sonora é de que elas são ondas capazes de se propagar através de gases, líquidos ou sólidos. Como é um fenômeno periódico, uma onda pode ser modelada matematicamente por meio de funções trigonométricas ou soma delas. Podemos classificar uma onda de várias formas, como por exemplo:

- Mecânica ou Eletromagnética
- Propagativa ou Estacionária
- Plana ou Esférica
- Longitudinal, Transversal ou Torcional

Todas as ondas são propagativas, porém, em meios de dimensão finita, formam-se configurações ondulatórias estacionárias, que comumente denominam-se **ondas estacionárias**. Quanto à propagação, as ondas podem ser esféricas, quando a propagação se faz por esferas pulsantes ou oscilantes; ou planas, quando a frente de onda é plana. Quanto à direção, uma onda pode ser transversal, quando a direção de oscilação é perpendicular à direção de propagação; ou longitudinal, quando a direção de oscilação é a mesma da propagação.

Quando duas ondas se encontram, ocorre o fenômeno de **interferência**, que pode ser construtiva (mesma fase) ou destrutiva (oposição de fase); e podem gerar **batimentos**, quando os dois sons têm frequências próximas, gerando picos de amplitude. A seguir, algumas definições sobre ondas:

Definição 2.1 ***Comprimento de onda*** λ *é a distância de uma oscilação completa.*

Definição 2.2 ***Amplitude*** A *é a distância entre o eixo de propagação e a crista da onda*

Definição 2.3 ***Frequência*** f *é o número de oscilações por unidade de tempo. A unidade de frequência é o Hertz* (Hz)*. A faixa de frequência audível pelo ser humano é aproximadamente entre* $20Hz$ *e* $20000Hz$

Definição 2.4 ***Período*** T *é o tempo de uma oscilação completa. O período é o inverso da frequência, ou seja,* $T = \frac{1}{f}$ *ou* $f = \frac{1}{T}$

Uma **onda sonora** é uma onda mecânica, ou seja, que precisa de um meio material e elástico para se propagar e longitudinal. O som trata-se tanto da sensação auditiva quanto da perturbação oscilatória provocada em um meio. O som tem as seguintes características (HALLIDAY, 1996):

- **Intensidade**: é a característica que nos diz se um som é ”forte” ou ”fraco”. A intensidade é definida como a taxa média de transmissão de energia por unidade de área **amplitude** da onda.
- **Altura**: é a característica que nos permite diferenciar um som agudo de um som grave. Este parâmetro está associado à frequência da onda. A faixa de frequência audível pelo ser humano geralmente varia de 20Hz à 20000Hz . Associaremos frequências à notas musicais. Atualmente, utilizamos como base a nota Lá, associada à frequência 440Hz.
- **Timbre**: é a característica que nos permite diferenciar dois sons de mesma altura e intensidade emitidos por diferentes instrumentos ou vozes. Depende da forma da onda.

O **intervalo** entre duas notas é dado pela razão entre suas frequências. Definimos o intervalo i entre as frequências f_1 e f_2 como

$$i = \frac{f_1}{f_2}$$

.Por exemplo, $i = 2$ corresponde ao intervalo de **oitava**; $i = \frac{4}{3}$ é o intervalo de **quinta** (pitagórica, como veremos no capítulo 3); $i = \frac{3}{2}$ é o intervalo de **quarta** (pitagórica).

O som emitido por uma fonte sonora geralmente é um som complexo, ou seja, um som formado por uma série de frequências sonoras, chamada de série harmônica, que soando juntas produzem o timbre. Quando ouvimos uma nota em uma determinada frequência, ouvimos, na verdade uma série de outras frequências secundárias, que são interpretados por nossos ouvidos como o timbre. Cada uma dessas constituintes do som complexo é denominada **parcial**. A primeira parcial é denominada **fundamental**, e geralmente, é a frequência que sobressai no som ouvido. Quando uma parcial for um múltiplo inteiro da fundamental, é denominada **harmônico**. A fundamental f_1 é chamada também de primeiro harmônico, e a frequência $f_n = n.f_1$ é o n–ésimo harmônico (HENRIQUE, 2011). Os harmônicos somam–se para formar o som complexo, como vemos na figura 4. A intensidade de cada harmônico nos dá a forma da onda, e portanto o timbre da fonte sonora. A presença de harmônicos também é responsável pela sensação de **consonância** entre duas notas musicais. Quanto mais harmônicos coincidentes duas notas tiverem, mais consonantes elas serão, e ao tocá-las juntas, elas parecerão harmoniosas aos nossos ouvidos.

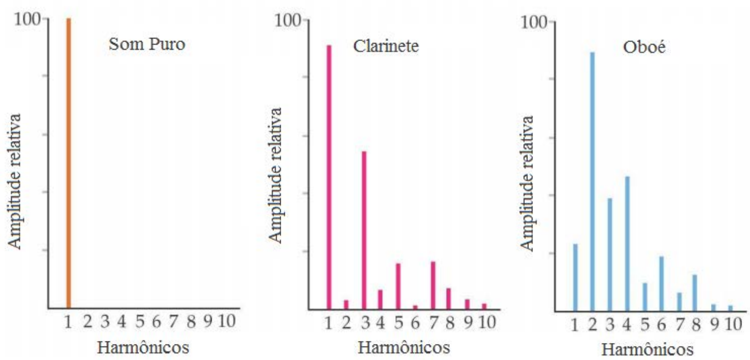


Figura 3 – Harmônicos de diferentes instrumentos. A intensidade dos harmônicos é o que caracteriza o timbre

Notas com frequências muito próximas no entanto geram a sensação de dissonância, e quando tocadas juntas geram **batimentos**. Batimentos são um fenômeno que ocorrem quando duas ondas de mesma natureza, mesma direção e mesma amplitude e com frequências próximas ($f_1 \cong f_2$). Como as frequências das ondas diferem, há momentos de interferência construtiva, onde a amplitude resultante é grande e momentos de interferência destrutiva, em que a amplitude é pequena.

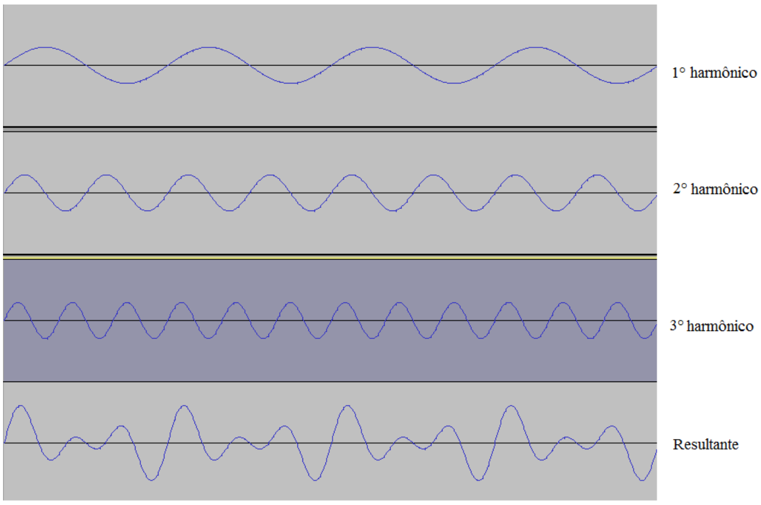


Figura 4 – Som complexo (parte inferior) e seus harmônicos

2.2 Representação Trigonométrica de uma onda

Uma onda pode ser representada matematicamente por uma função trigonométrica, da forma

$$f(x) = k + a\,\mathrm{sen}(px + \phi)$$

. Os significados dos parâmetros k, a, p e ϕ são os seguintes:

- k: translada o gráfico da função verticalmente:

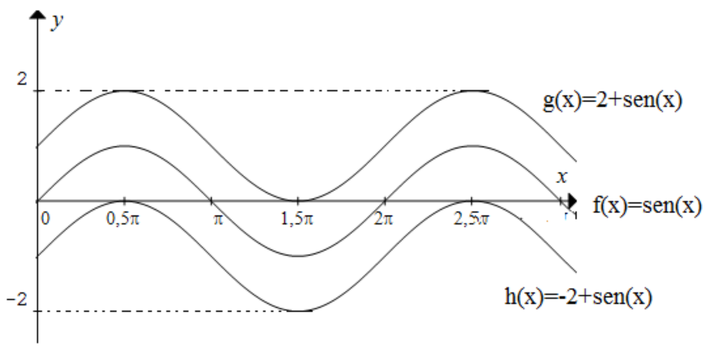


Figura 5 – Variando o valor de k

- a: Altera a amplitude da função:

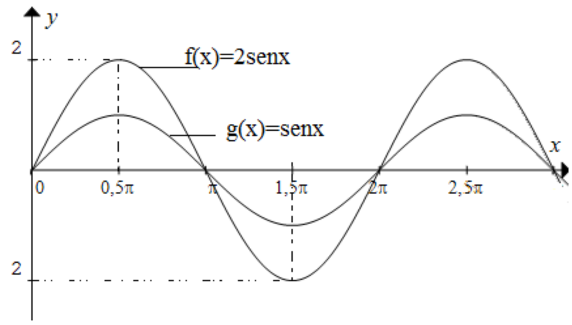


Figura 6 – variando o valor de a

- p: Altera o período da função:

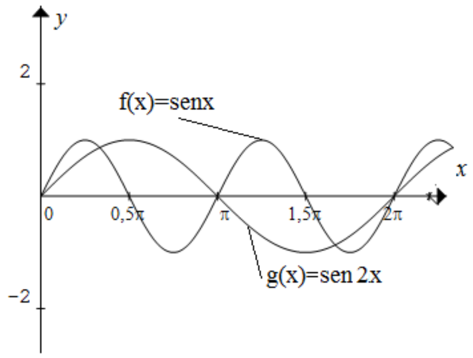


Figura 7 – Período de $f(x)$ é $p_1 = \pi$, e período de $g(x)$ é $p_2 = 2\pi$

- ϕ: Desloca horizontalmente o gráfico. Em física, é chamado de **fase**:

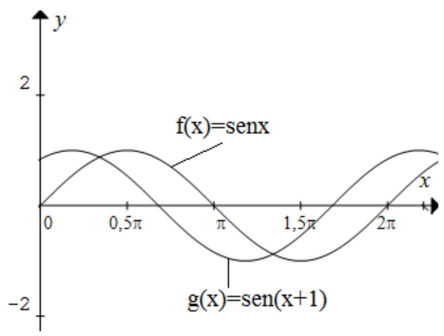


Figura 8 – Alterando a fase

A seguir, sugerimos uma série de atividades a fim de verificar como devemos modificar a onda sonora para alterar as características do som.

2.3 Modificando a intensidade

Utilizando o software AUDACITY, é possível criar ondas sonoras a partir da ferramenta **inserir→tom**. Para esta primeira atividade, veremos como se comporta o som ao se alterar amplitude. Para isso, siga os passos:

- Com a ferramenta **inserir=>tom**, crie um som senoidal de frequência 440Hz com amplitude 0,4, de duração 1s
- Adicione uma nova faixa sonora (Ctrl+Shift+N), e nela insira um som com a mesma frequência e duração, com amplitude 0,6.
- Toque as faixas separadamente em looping (segurando a tecla Shift, clique em play), utilizando o comando **solo**; e depois toque-as conjuntamente.

Utilizando a ferramenta de zoom, é possível observar a amplitude das ondas. Através da audição, é possível perceber que a onda de maior amplitude é a de maior intensidade, e que quando tocadas juntas, o som resultante tem uma intensidade maior ainda. Isso resulta do fato de as ondas se somarem, e a amplitude resultante ser igual a 1. Podemos somar as duas ondas no AUDACITY, fazendo o seguinte:

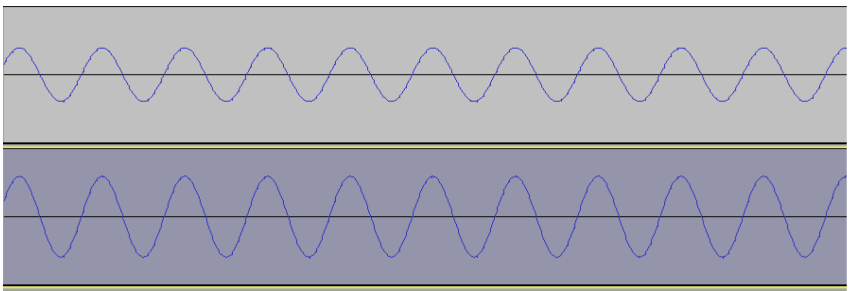


Figura 9 – Intensidades diferentes

- Aperte Ctrl+Shift+A para selecionar todas as duas faixas
- Cique em **faixas→mixar e renderizar**
- Dê zoom e observe que a amplitude agora é igual a 1

Podemos também subtrair duas ondas, invertendo uma delas com o comando **efeitos→inverter** e somando com a outra. No exemplo, a amplitude resultante será igual a 0,2.

2.4 Frequência e batimento

Para esta atividade, vamos usar as mesmas ferramentas utilizadas anteriormente. Primeiro vamos criar duas notas em intervalo de oitava e observar as ondas sonoras geradas:

- Com a ferramenta **inserir=>tom**, crie um som senoidal de frequência $440Hz$ com amplitude 0,4, de duração $1s$
- Adicione uma nova faixa sonora (Ctrl+Shift+N), e nela insira um som com mesma duração e amplitude, com frequência $220Hz$.
- Toque as faixas separadamente em looping (segurando a tecla Shift, clique em play), utilizando o comando **solo**; e depois toque-as conjuntamente.

Utilizando a ferramenta de zoom, é possível observar que a onda com a maior quantidade de "picos" num mesmo intervalo de tempo, ou seja, com maior frequência, é a mais aguda. Como o intervalo é de oitava, as notas parecem as mesmas aos ouvidos, porém com alturas diferentes.

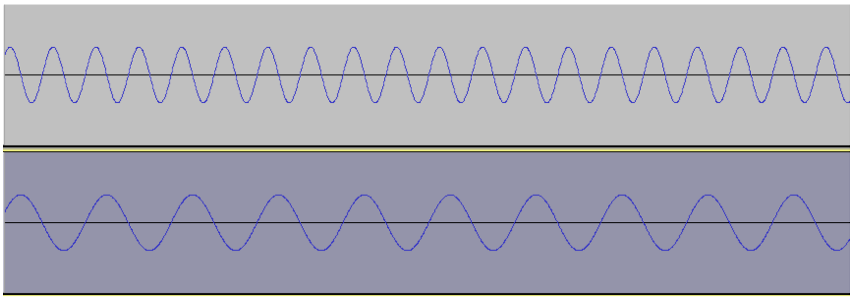


Figura 10 – Comparação de ondas com frequências diferentes

Seguindo o mesmo procedimento, mas criando duas ondas com frequências $440Hz$ e $445Hz$, podemos ouvir os batimentos entre as ondas. Podemos somar as duas ondas para observar a onda resultante. Os picos da onda resultante correspondem aos batimentos. Este fenômeno é importante na afinação dos instrumentos. Os músicos procuram ouvir os batimentos a fim de eliminá-los via alterações no instrumentos.

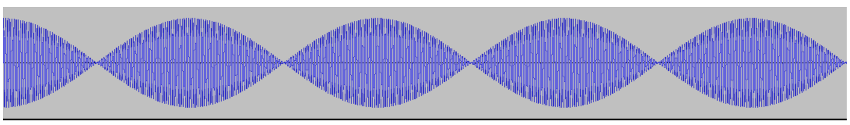


Figura 11 – Batimentos

2.5 Timbre

Para se observar a mudança de timbre no AUDACITY, podemos criar uma frequência qualquer fundamental e criar faixas adicionais com sons harmônicos à fundamental. Para alterar o timbre, basta diminuir o volume dos harmônicos e escutar o resultados. Somando-se todas as ondas, obtemos a onda resultante, que é chamada de espectro sonoro. Como sugestão, pode-se inserir as frequências 200Hz, 400Hz, 600Hz, 800Hz, 1000Hz, 1200Hz, 1400Hz, e alterar a intensidade de cada uma delas para modificar o timbre do som ouvido. A ferramenta **faixas→mixar e renderizar** permite visualizar a onda resultante. Perceba que a frequência é a mesma, porém a forma da onda é modificada, o que caracteriza a mudança de timbre.

Podemos obter timbres parecidos com o de alguns instrumentos, modificando-se a intensidade dos harmônicos. Como ilustração, temos os seguintes instrumentos:

- Clarinete: Possui harmônicos pares aproximadamente iguais a zero. Os harmônicos vão diminuindo a intensidade quanto maios for a frequência
- Oboé: Possui todos os harmônicos, e alguns harmônicos superiores são mais intensos que a fundamental
- Flauta: Possui todos os harmônicos, sendo que apenas os primeiros são mais intensos

Uma alternativa para obtenção de timbres modificando-se as ondas sonoras é a simulação presente no endereço eletrônico $http : //phet.colorado.edu/en/simulation/fourier$ (acesso 27/05/2015). Nela, o usuário pode manipular a amplitude de cada harmônico de forma a gerar uma onda resultante que pode ser ouvida. A simulação está em inglês, porém é de manuseio simples.

Capítulo 3

Escalas Musicais e sua Construção

Neste Capítulo, veremos como são construídas as principais escalas e realizaremos sua construção no software SCALA. As escalas em 5 tipos: Pitagórica, Mesotônica, Escala Justa, Escalas de Temperamento Igual e Escalas de Temperamento Irregular. Focaremos na construção da escala pitagórica e a escala de temperamento igual. As referências para este capítulo são (BENSON, 2006) e (WRIGHT, 2009). Para a utilização do software SCALA, consulte o Apêndice C.

3.1 Consonâncias e Dissonâncias

Antes de passarmos à construção das escalas, vamos discutir o conceito de consonância e dissonância, introduzido no capítulo 1. O espectro sonoro audível é um conjunto contínuo de frequências. Porém, para se fazer música, é necessário tomar um conjunto discreto desse espectro, ao qual chamamos de **escala**. Para selecionar esse conjunto de frequências, o fator mais importante é a quantidade de consonâncias possíveis entre os sons formadores da escala. O conceito de consonância depende da época, e também da cultura, mas aqui vamos nos ater aos aspectos gerais.

Como vimos no capítulo anterior frequência f emitida por um instrumento musical convencional pode ser decomposta em frequências que são múltiplos inteiros de f. O componente f_1 é a **fundamental**, e componente $f_n = n.f_1$ é o n–ésimo **harmônico**. Neste trabalho, dois sons serão mais consonantes quanto maior o número de harmônicos em comum tiverem.

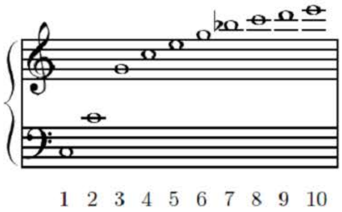


Figura 12 – Dó e seus harmônicos

Na figura 12, vemos a série de harmônicos baseada na nota Dó abaixo do Dó central. Vale observar no entanto que o sétimo harmônico é um pouco mais baixo que o Si♭ acima da pauta. Na escala temperada, que veremos a seguir, até mesmo o 3^o e o 5^o harmônicos são um pouco diferentes das notas Mi e Sol mostradas acima.

Um intervalo de oitava corresponde a dobrar a frequência de vibração. Por exemplo, o Lá de frequência $440Hz$ é uma oitava mais agudo que o Lá de frequência $220Hz$. Para essas duas notas, as parciais são:

Parciais	Nota 1	Nota 2
1	440 Hz	220 Hz
2	880 Hz	440 Hz
3	1320 Hz	660 Hz
4	1760 Hz	880 Hz
5	2200 Hz	1100 Hz
6	2640 Hz	1320 Hz

Tabela 1 – Lá 440Hz e Lá 220 Hz

Podemos observar na tabela 1 que todos os harmônicos do Lá $440Hz$ são harmônicos do Lá $220Hz$, basta continuar indefinidamente o cálculo dos harmônicos. Por causa dessa extrema semelhança, o cérebro humano percebe estas notas como sendo a mesma, sendo a primeira mais aguda que a segunda. As duas notas são consonantes. No capítulo 4, usaremos essa relação de oitava para fazer equivalência entre notas.

Outro exemplo de consonância são notas com razão $3:2$ entre suas frequências. Por exemplo, os harmônicos presentes entre o Lá 220 Hz o Mi 330 Hz são:

Podemos perceber que o 3^o harmônico do Lá 220 Hz corresponde ao 2^o do Mi 330 Hz. Além disso, essas notas terão muitos outros harmônicos em comum. Por isso, essas duas notas são consideradas consonantes. Em geral, razões entre números inteiros pequenos são mais consonantes que outros intervalos. Devemos enfatizar que essa discussão somente se aplica a notas cujos harmônicos são múltiplos inteiros da fundamental.

Parciais	Nota 1	Nota 2
1	220 Hz	330 Hz
2	440 Hz	660 Hz
3	660 Hz	990 Hz
4	880 Hz	1320 Hz
5	1100 Hz	1650 Hz
6	1320 Hz	1980 Hz

Tabela 2 – Lá 220 Hz e Mi 330 Hz

3.2 Escala Pitagórica

No Capítulo 1 vimos que Pitágoras foi o primeiro a analisar a construção de escalas de maneira científica. Ele descobriu que o intervalo de quinta perfeita, correspondente à razão de frequência $3:2$ era particularmente consonante. Ele usou então esse intervalo como base para a construção de uma escala: partindo da corda solta, soma-se intervalos de quinta para obter as outras notas. Para somar intervalos, basta multiplicar as razões que os representam. Como atividade podemos propor a construção dessa escala, bastando seguir o seguinte procedimento:

- Partiremos da quarta, que chamaremos de Fá, de razão $4:3$. As próximas notas são obtidas multiplicando-se a anterior por $3:2$;
- Toda vez que uma nota passar do intervalo de oitava $(2:1)$, traremos ela uma oitava abaixo dividindo a razão obtida por 2;
- Colocamos as razões obtidas em ordem crescente, para formar a escala.

Os resultados obtidos deverão ser os seguintes:

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Razão	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Tabela 3 – Escala Pitagórica

Para inserir esta escala no Software SCALA, basta usar o comando INPUT e digitar as razões, partindo da segunda para a úlltima. Após isso, a escala pode ser vista usando o comando SHOW e tocada usando o teclado virtual. Perceba as principais consonâncias, (quartas, quintas e oitavas), usando a tecla SHIFT para manter as notas tocando.

No sistema pitagórico, os intervalos entre duas notas sucessivas podem ser o **tom pitagórico**, de $9:8$ ou o **semitom pitagórico**, de $256:243$, ou $2^8:3^5$. Em sala de aula, pode ser explorado o fato de que o semitom nesse sistema não é bem a metade de um tom, pois $\frac{2^8}{3^5}.\frac{2^8}{3^5}=\frac{2^{16}}{3^{10}}\neq\frac{9}{8}$. Mas esses valores são bem próximos: $\frac{2^{16}}{3^{10}}=1.10985715...\cong$

$\frac{9}{8} = 1.125$. À diferença entre o tom pitagórico e dois semitons pitagóricos dá-se o nome de **coma pitagórico** (para a definição de cent (¢) , ver 3.1):

$$\frac{9}{8} \div \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{531441}{524288} \cong 1,0136 \cong 23.5¢$$

(para a definição de cent (¢) , ver 3.1).

Para o problema da coma, foram criados dois semitons de tamanhos diferentes: o semitom diatônico e o semitom cromático com 90¢ e 114¢. A diferença entre eles é aproximadamente um coma pitagórica (24¢) e a soma é o tom pitagórico (204¢).

3.3 Escala de Temperamento Igual

3.3.1 Cents

Como vimos na seção anterior, para somar intervalos basta multiplicamos as suas razões de frequências. Assim, por exemplo, uma oitava (2:1) mais uma quinta (3:2) dá a razão 6:2. Isso ocorre pois nossa percepção musical da distância entre duas notas é logarítmica quanto à frequência, e logaritmos transformam produtos em somas. Para medir as pequenas diferenças existentes entre intervalos de várias escalas, assim como para o estudo das escalas microtonais, o sistema mais utilizado é o sistema de **cents**, introduzido pelo matemático inglês Alexander J. Ellis por volta de 1880 ((HENRIQUE, 2011)). É o sistema ideal para comparar pequenas diferenças de afinação, sendo portanto muito usado por acústicos e etnomusicólogos, pois permite o estudo dos micro–intervalos existentes em escalas não–ocidentais.

Como veremos, o intervalo de semitom, em uma escala igualmente temperada, vale aproximadamente $1,0594630954$. O **cent** (¢) é definido como a centésima parte desse intervalo, ou seja,

$$1¢^{100} = 1,059463094 \Rightarrow 1¢ = \sqrt[100]{1,059463094} = 1,00057779$$

Como em uma 8^a há 12 semitons temperados, ela fica dividida em 1200 ¢, e portanto o cent poderia ser igualmente definido como

$$1¢ = \sqrt[1200]{2}$$

Agora, seja i o intervalo entre duas frequências e $i(¢)$ o intervalo dado em cents. Temos que:

$$i = \sqrt[1200]{2^{i(¢)}} \Rightarrow i = 2^{\frac{i(¢)}{1200}}$$

Aplicando o logaritmo decimal aos dois lados da igualdade, ficamos com:

$$\log i = \log 2^{\frac{i(¢)}{1200}} \Rightarrow \log i = \frac{i(¢)}{1200} \log 2 \Rightarrow i(¢) = 3986,313714 \log i$$

Portanto, para passar de um intervalo qualquer para cents, podemos usar a aproximação

$$i(¢) = 3986 \log i \tag{3.1}$$

Esse sistema torna mais fácil a percepção de diferenças tonais entre a escala de temperamento igual e outros sistemas de afinação. Em cent, a escala cromática de Dó fica:

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
Dó	Dó #	Ré	Ré #	Mi	Fá	Fá #	Sol	Sol #	Lá	Lá #	Si	Dó

Tabela 4 – Escala cromática em cents (¢)

Calculando-se, por exemplo, a quinta pitagórica ($3 : 2 = 1,5$) em cents, obtemos aproximadamente 702 ¢. Em cents, podemos somar ou subtrair intervalos ao invés de multiplicar e dividir, pois esta é uma unidade logaritmizada. Como atividade, pode-se pedir aos alunos que se calcule os intervalos pitagóricos em cents, utilizando a equação 3.1. O resultado aproximado obtido deverá ser:

0	204	408	498	702	906	1110	1200
Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó

Tabela 5 – Escala pitagórica em cents

3.3.2 Temperamento igual

Proposto por Andreas Werckmeister e difundido principalmete por Johan Sebastian Bach, sistema de temperamento igual divide a 8^a em doze partes iguais, chamadas de semitom temperado. Na afinação por temperamento igual, é possível modular a tonalidade livremente, sem a necessidade de alterar o instrumento para isso. Nesse sistema, as 5^a são diminuídas em $-1,96¢$, e o coma pitagórico é distribuído igualmente entre as doze 5^{as}. O intervalo de semitom é definido como sendo $2^{\frac{1}{12}} \cong 1,059463094$, e podemos achar todas as notas de uma escala usando este intervalo. Por exemplo, partindo do Lá 440Hz, podemos obter todas as outras notas: 466,16Hz (Lá# ou Si$\flat$), 493,88Hz (Si), 523,25Hz (Dó) etc.

3.4 Outras Escalas

3.4.1 Escala Natural

Para se construir a escala natural, utilizamos a série dos harmônicos de uma dada nota fundamental. Neste tipo de escala, os intervalos não geram batimentos. Existem dois intervalos diferentes de tom, designados tom maior ($204¢$) e tom menor ($182¢$); e um intervalo de semitom ($112¢$), que não é a metade de nenhum dos dois tipos de tom. Observe a tabela 6:

0	204	386	498	702	884	1088	1200
Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó

Tabela 6 – Escala Natural

Esta escala ficou conhecida como **escala de Zarlino**, em referência a Gioseffo Zarlino, que antecipou a construção da escala natural muito antes de conhecer a sére dos harmônicos cientificamente ((HENRIQUE, 2011)). Era a escala usada majoritariamente na Renascença. A utilização de uma escala natural em um instrumento de teclas, porém, gerava um problema, pois necessitava de pelo menos 53 teclas por oitava para conseguir a máxima consonância em todas as tonalidades.

3.4.2 Escala Mesotônica

A escala mesotônica surgiu da necessidade de se favorecer o intervalo de terça, reajustando as quintas. A variante mais comum desse tipo de escala é aquela em que as terças maiores são obtidas pela razão $5:4$, e as demais notas são interpoladas o mais igualmente possível. Assim, entre a primeira nota e a terça dela, digamos Dó e Mi, com intervalo $5:4$, interpolamos a razão $\sqrt{5}\backslash 2$, correspondente ao Ré. Fazemos o mesmo para Fa, Sol, Lá e Sol, Lá, Si. Isso nos deixa com dois semitons a decidir: Mi para Fá e Si para Dó. Como 5 tons de razão $\sqrt{5}\backslash 2$ e 2 semitons perfazem uma oitava de razão $2:1$, entãp a razão para o semitom é:

$$\sqrt{2\backslash(\sqrt{5}\backslash 2)^5} : 1 = 8 : 5^{\frac{5}{4}}$$

A tabela 7 de razões de frequência segue abaixo. Observe que a quinta não é mais perfeita:

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	La	Si	Dó
Razão	$1:1$	$\sqrt{5}:2$	$5:4$	$2:5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{1}{4}:1}$	$5^{\frac{3}{4}:2}$	$2:5^{\frac{5}{4}:4}$	2:1
Cents	0	193,1	386,3	503,4	696,5	889,7	1082,8	1200

Tabela 7 – Escala mesotônica

3.5 Sugestão de atividade

Além das atividades apresentadas no corpo do capítulo, sugerimos a seguinte atividade.

Comparações entre as escalas

Como visto, a quinta pitagórica corresponde a um intervalo de 702 ¢, enquanto que a quinta temperada corresponde a um intervalo de 700¢. Para compará-las, criaremos no SCALA um escala com três notas: a tônica, a quinta temperada e a quinta pitagórica:

- insira o comando **Input**, e escolha "3"como a quantidade de notas da escala
- insira os intervalos em cents: 700.00 (quinta temperada), 702.00 (quinta pitagórica) e 1200 (oitava)

Com o teclado virtual, é possível ouvir as duas quintas. Perceba que a diferença de 2¢ é quase imperceptível. Perceba também que, como são próximas, as duas quintas geram batimentos quando tocadas juntas.

Agora, vamos comparar as terças. Como visto, a terça pitagórica corresponde a um intervalo de 408¢, e a terça temperada corresponde a um intervalo de 400¢. Criaremos uma escala com três notas: a tônica, a terça temperada e a terça pitagórica:

- insira o comando **Input**, e escolha "3"como a quantidade de notas da escala
- insira os intervalos em cents: 400.00 (terça temperada), 408.00 (terça pitagórica) e 1200 (oitava)

Neste caso, com o auxílio do teclado virtual, é perceptível para a maioria das pessoas o intervalo de 8¢ entre as terças. É possível perceber também como soam diferentes quando tocadas juntamente com a tônica.

Como sugestão final, pode-se pedir que os alunos acessem o site:

$http://home.broadpark.no/~rbrekne/referhtml/musicmaths.html\#intervals$ (acesso 27/05/2015)

No item 5, é possível ouvir essas e outras diferentes escalas musicais, além das diferenças entre os principais intervalos.

Capítulo 4

Aplicações da Teoria de Grupos à Música

Neste capítulo, exploraremos simetrias contidas em vários exemplos musicais, utilizando a Teoria de Grupos como ferramenta matemática. Embora a teoria de grupos não seja conteúdo do ensino básico, pode-se trabalhar os conceitos básicos, que são simples: um conjunto com uma operação que obedece a certas "regras". Salientamos que o trabalho aqui desenvolvido deve ser apresentado aos alunos de maneira bastante informal. Este capítulo tem como referências principais (BENSON, 2006), (WRIGHT, 2009) e (TOWNSEND, 2011). Os exemplos musicais e outros arquivos estão hospedados em

$https : //www.dropbox.com/sh/kurs6uda13nyqnx/AABjcptqfvUoZqfKHoDgKNtha?dl = 0$

4.1 Grupos

Antes de passarmos às aplicações de grupos à música, apresentaremos parte da teoria de grupos estritamente necessária para o desenvolvimento do que se segue. Um **grupo** é um conjunto no qual dois elementos x e y podem ser combinados através de uma operação para formar um outro elemento (único) que também pertence ao conjunto, e o conjunto munido desta operação definida nele deve obedecer a certas regras, a saber:

- A ordem em que se realiza a operação não altera o resultado final;
- Tem que existir um elemento (chamado identidade)no conjunto que operado com todos os outros seja neutro, no sentido de não mudar o número operado;
- Para cada elemento do conjunto existe um outro que operado com ele resulta no elemento identidade.

A operação deve ser definida para cada grupo dado, e não necessariamente deve se referir às operações tradicionais. Podemos mostrar vários exemplos de grupos já conhecidos pelos alunos, como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ munidos da soma usual, ou $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ munidos da multiplicação usual. Definindo formalmente:

Definição 4.1 *Seja $G \neq \emptyset$ um conjunto munido de uma operação $*$, tal que*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

*O par $(G, *)$ é chamado de **grupo** se são satisfeitos os seguintes axiomas:*

(i) (Associatividade): Dados $g, h, j \in G$, vale

$$(g * h) * j = g * (h * j)$$

(ii) (Identidade): $\exists e \in G$ tal que

$$e * g = g * e = g, \forall g \in G$$

(iii) (Inverso): $\forall g \in G, \ \ \exists\, g^{-1} \in G$, dito inverso de g, tal que

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

Pela definição, a operação definida no conjunto G não necessariamente é comutativa. Para grupos onde a comutatividade é satisfeita, temos a seguinte definição:

Definição 4.2 *Um grupo é dito **abeliano** se satisfaz*

(iv) (Comutatividade): $\forall\ g, h \in G$, vale

$$g * h = h * g$$

Quando a operação for clara no contexto, usaremos G para denotar o grupo $(G, *)$, Para denotar $g * h$, usaremos gh. Para grupos abelianos, utilizaremos a notação $g + h$=$g * h$. Como exemplos de grupos abelianos, podemos citar os mesmos exemplos vistos anteriormente, pois as operações de soma e multiplicação naqueles conjuntos são comutativas.

Proposição 4.1 *Todo grupo G satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) O elemento identidade $e \in G$ é único

(ii) $\forall g \in G$, o inverso g^{-1} é único

Demonstração:(1) suponha que existam e_1, $e_2 \in G$ satisfazendo o item (3) da definição 1. Então, $e_1 g = g = ge_2 = e_2 g$. Portanto, $e_1 g = e_2 g$, e como o produto é único, temos que $e_1 = e_2$.

(2) Se $gg_1^{-1} = g_1^{-1}g = e$ e $gg_2^{-1} = g_2^{-1}g = e$ segue que $g_1^{-1} = eg_1^{-1} = (g_2^{-1}g)g_1^{-1} = g_2^{-1}$. Portanto, $g_1^{-1} = g_2^{-1}$.□

Definição 4.3 *Um **subgrupo** de um grupo G é um subconjunto de G que é também um grupo sob a mesma operação de G.*

Definição 4.4 *Um grupo G é **cíclico** se $\exists\ x \in G$ tal que $\forall\ y \in G$, $y = x^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Tal elemento x é chamado **gerador** de G. Denotaremos o grupo gerado por x como $\langle x \rangle$.*

Definição 4.5 *Congruência modular*
Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é congruente a y módulo n, denotado $x \equiv y(mod \ \ n)$ se e somente se x deixa o mesmo resto que y na divisão por n.

Pela definição, temos, por exemplo, $4 \equiv 0(mod \ \ 2)$, $9 \equiv 5 \equiv 1(mod \ \ 4)$. Não é necessário utilizar a divisão euclidiana para verificar se dois números são congruentes módulo n.

Obs: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $b > a$. Tem se que $a \equiv b(mod \ \ n) \Leftrightarrow n \mid b - a$

Decorre da definição que $\equiv (mod \ \ n)$ é uma relação de equivalência. Com efeito, seja $n \neq 0 \in \mathbb{Z}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem

(i) $a \equiv a(mod \ \ n)$

(ii) $a \equiv b(mod \ \ n) \Rightarrow b \equiv a(mod \ \ n)$

(iii) $a \equiv b(mod \ \ n)$ e $b \equiv c(mod \ \ n) \Rightarrow a \equiv c(mod \ \ n)$

Por ser uma relação de equivalência, a relação $\equiv (mod \ \ n)$ gera uma partição do conjunto $\mathbb{Z}$ em n classes de equivalência $\overline{n}$. Por exemplo, como $4 \equiv 0(mod \ \ 2)$, podemos dizer que 4 pertence à classe $\overline{0}$. Podemos definir o seguinte:

Definição 4.6 *O conjunto $\mathbb{Z}_n$ é o conjunto $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}\}$ de todas as classes de equivalência módulo n.*

O conjunto $\mathbb{Z}_n$, munido da operação

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

dita adição, é um exemplo de grupo abeliano finito.

Definição 4.7 *Seja $S \neq \emptyset$ finito. Seja $G = \{f : S \to S; f$ bijetiva$\}$. Seja $*$ a operação de composição de funções:*

$$* : G \times G \to G$$
$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

S é um grupo, contendo a identidade

$$I_S : S \to S$$
$$x \mapsto x$$

*Esse grupo é chamado de **Grupo das Permutações do Conjunto S**.*

Denotaremos por S_n o grupo de permutações do conjunto $S = \{1, 2, ..., n\}$. Temos diretamente que o número de elementos de S_n é $n!$. Podemos mostrar que se $n > 3$, então S_n é não abeliano. Com efeito, sejam $f, g \in S_n$ definidas como se segue:

$f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$ e $f(x) = x \forall x,\ 3 \leq x \leq n$

$g : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$

$g(1) = 2$, $g(2) = 3$ $g(3) = 1$ e $g(x) = x\ \forall x,\ 4 \leq x \leq n$
Como

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 3(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 1$$

Segue que

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Vamos denotar um elemento $f \in S_n$ por

$$f = (a = f(d), b = f(a), c = f(b), d = f(c))$$

Por exemplo, abaixo os elementos de S_3 são: $e = (1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 3)$, $f_2 = (1, 3, 2)$, $f_3 = (3, 2, 1)$, $f_4 = (2, 4, 1)$ e $f_5 = (3, 1, 2)$.

4.2 Conjunto das classes de intervalos

O intervalo de oitava comumente utilizado na música ocidental está dividida em 12 semitons. As notas musicais se repetem após 12 semitons em uma nova oitava, e portanto podemos pensar nos intervalos como classes de equivalência módulo oitava. Dessa maneira, associaremos cada um dos 12 intervalos da escala diatônica a um elemento do conjunto $\mathbb{Z}_n$, como representado na tabela 8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Un	2m	2M	3m	3M	4J	5dim	5J	6m	6M	7m	7M

Tabela 8 – Correspondência entre $\mathbb{Z}_{12}$ e a escala dodecafônica

Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto de classes de intervalos. Neste conjunto, definimos uma operação soma de intervalos, fazendo a correspondência de cada intervalo a um elemento de $\mathbb{Z}_{12}$. Desse modo, por exemplo, temos que 3^aM+ 6^am $= \overline{4} + \overline{8} = \overline{12} = Un$. Na figura 13, o conjunto de classes de intervalos está representado na escala cromática de Dó.

Figura 13 – Intervalos associados à escala de Dó maior

Apresentamos, a seguir, um teorema sobre geradores de um grupo, mas omitiremos a sua demonstração

Teorema 4.1 *Um elemento $\overline{x}$ de $\mathbb{Z}_n$ é um gerador se e somente se $mdc(\overline{x}, n) = 1$*

Este teorema garante que os geradores do grupo $\mathbb{Z}_n$ são aqueles que são primos com n. Portanto, por exemplo, os geradores do grupo aditivo $\mathbb{Z}_{12}$ são $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$ e $\overline{11}$. Assim, o conjunto das classes de intervalos somente pode ser gerado pelos intervalos de 2^a menor, 4^a justa, 5^a justa e 7^a maior.

$2^a m$	$2^a M$	$3^a m$	$3^a M$	4^aJ	5^adim	$5^a J$	$6^a m$	$6^a M$	$7^a m$	$7^a M$	1^aJ
Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá	Lá#	Si	Dó

4^aJ	$7^a m$	$3^a m$	$6^a m$	$2^a m$	5^adim	$7^a M$	$3^a M$	$6^a M$	$2^a M$	$5^a J$	1^aJ
Fá	Lá#	Ré#	Sol#	Dó#	Fá#	Si	Mi	Lá	Ré	Sol	Dó

$5^a J$	$2^a M$	$6^a M$	$3^a M$	$7^a M$	5^adim	$2^a m$	$6^a m$	$3^a m$	$7^a m$	4^aJ	1^aJ
Sol	Ré	Lá	Mi	Si	Fá#	Dó#	Sol#	Ré#	Lá#	Fá	Dó

$7^a M$	$7^a m$	$6^a M$	$6^a m$	$5^a J$	5^adim	4^aJ	$3^a M$	$3^a m$	$2^a M$	$2^a m$	1^aJ
Dó	Si	Lá#	Lá	Sol#	Sol	Fá#	Fá	Mi	Fá#	Ré	Dó#

Tabela 9 – Sequência de intervalos gerados por cada gerador de $\mathcal{M}$

Na tabela 9, vemos que as sequências geradas por $2^a m$ e por $7^a M$ correspondem às escalas cromáticas ascendente e descendente respectivamente, enquanto que as sequências geradas por $5^a J$ e por $4^a J$ correspondem ao ciclo das quintas e a sua inversão, o ciclo das quartas respectivamente, que são importantíssimos em música. O ciclo das quintas mostra a afinidade existente entre as escalas. Quanto mais próximo no ciclo forem duas tonalidades, mais acidentes eles compartilham, e assim uma mudança de um tom para outro próximo no ciclo soa mais natural. Por exemplo, uma modulação de Sol maior para Ré maior muda apenas uma nota (Dó passa a ser Dó #), e todas as outras são comuns às duas tonalidades.

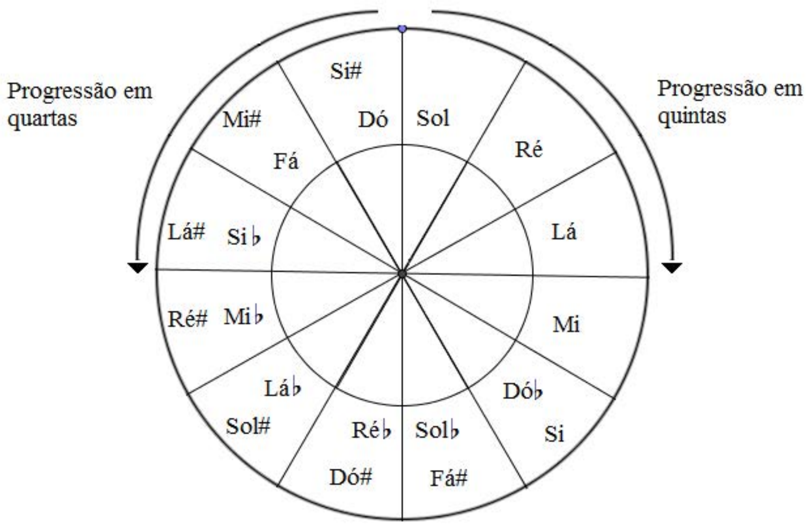


Figura 14 – Círculo das quintas e quartas

4.3 Tranformações em $\mathcal{M}$

Em música, é usual utilizarmos as operações de **transposição** e **inversão**. Definiremos matematicamente essas transformações. Nesta seção, usaremos como base a escala cromática de Dó. Portanto $0 = Unssono =$ Dó, $1 = 2^a m =$Dó#, $2 = 2^a M =$ Ré, $3 = 3^a m =$ Ré# etc.

Definição 4.8 *A função*

$$T_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$
$$x \mapsto T_n(x) = x + n$$

é chamada ***transposição****.*

Definição 4.9 *A função*

$$I_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$
$$x \mapsto I_n(x) = -x + n$$

é chamada ***inversão****.*

Encontramos transposições por exemplo na 9^a *sinfonia* de Antonin Dvorak. No compasso 149 do primeiro movimento temos a seguinte melodia tocada pela flauta e pelo oboé:

Figura 15 – melodia do primeiro movimento da 9^a de A. Dvorak

A melodia pode ser transcrita na linguagem de $\mathbb{Z}_{12}$ como $(7, 10, 10, 9, 7)$ $(9, 0, 0, 9, 0)$ $(10, 7, 7, 9, 10)$ $(9, 10, 9, 5, 7)$. No compasso 316, a mesma melodia é repetida pela flauta com uma transposição T_1 em todas as notas:

Figura 16 – Melodia transposta por T_1

A melodia transcrita fica $(8, 11, 11, 10, 8)$(10,1,1,10,1)$(11, 8, 8, 10, 11)$ $(10, 11, 10, 6, 8)$. Como exemplo de inversão, temos a *Rapsódia sobre um tema de Paganini* de Sergei Rachmaninoff. A 18^a variação é uma inversão I_0 do fragmento do 24^o *capriccio* de Nicolo Paganini:

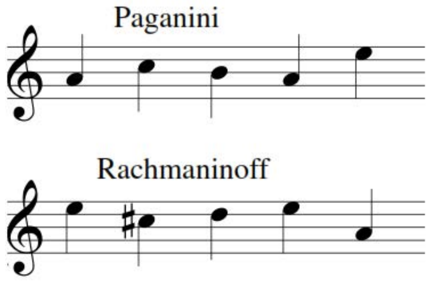


Figura 17 – Tema de Paganini e inversão de Rachmaninoff

Transcrevendo o tema de Paganini, temos $P = (9, 4, 2, 9, 4)$, e claramente, a melodia de Rachmaninoff é $I_0(P) = (3, 8, 10, 3, 8)$. Outro exemplo pode ser encontrado em Béla Bartok, em seu *quinto quarteto de cordas*. No excerto abaixo (figura 18), a linha debaixo é uma inversão I_8 da linha de cima. A linha de cima é $A = (4, 2, 3, 1, 11, 10)$ e a linha debaixo é $I_8(A) = (4, 6, 5, 7, 9, 10)$:

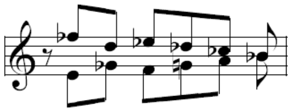


Figura 18 – Simetria por reflexão

Vamos ver agora outros grupos ligados às transformações de transposição e inversão. O conjunto G de todas as transposições em $\mathcal{M}$, munido da operação

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\to \mathcal{M} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

é um grupo, contendo os elementos $\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7,T_8,T_9,T_{10},T_{11}\}$. Novamente, G é cíclico, e tem como geradores T_1, T_5, T_7 e T_{11}. O conjunto de todas as inversões não é um grupo (mostrar), mas o conjunto de todas as transposições e inversões é um grupo, com a operação similar à descrita na seção anterior .

4.4 Tríades

Uma **tríade** é um conjunto de 3 notas diferentes tocadas simultaneamente. Denotaremos uma tríade pela terna (x, y, z), em que $x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$. Omitiremos a notação de barras aqui. Existem dois tipos principais de tríades: a **tríade maior**, que é uma tríade que pode ser ordenada de forma que seus termos sejam $(k, k + 4, k + 7)$, e a **tríade menor**, que é uma tríade que pode ser ordenada de forma que seus termos sejam $(k, k + 3, k + 7)$. Esses dois tipos de tríade formam o conjunto $\mathbb{T}$. As tríades maiores e menores têm seus nomes dados pela primeira nota, quando escritas na forma $(k, k+4, k+7)$ ou $(k, k+3, k+7)$, chamada de **tônica**. Desse modo, por exemplo, a tríade $(0, 4, 7)$, que é da forma $(k, k+4, k+7)$ é a tríade de Dó maior, denotada *Dó* , e a tríade $(0, 3, 7)$, da forma $(k, k+3, k+7)$ é a tríade de Dó menor, denotada *dó* . Existem, portanto, 12 tríades maiores e 12 tríades menores, que podem ser obtidas por transposição a partir de Dó M e Dó m:

$$\text{Dó M} = (0,4,7) \xrightarrow{T_1} (1,5,8) \xrightarrow{T_1} (2,6,9) \xrightarrow{T_1} (3,7,10) \xrightarrow{T_1} (4,8,11) \xrightarrow{T_1} ...$$

$$\text{Dó m} = (0,3,7) \xrightarrow{T_1} (1,4,8) \xrightarrow{T_1} 2,5,9 \xrightarrow{T_1} (3,6,10) \xrightarrow{T_1} (4,7,11) \xrightarrow{T_1} ...$$

Qualquer tríade menor pode ser obtida de uma tríade maior por meio de uma inversão apropriada e vice-versa. De fato, dada uma tríade maior, de forma $(j, j+4, j+7)$, aplicamos uma inversão I_n, obtendo $(-j+n, -j-4+n, -j-7+n)$. Como $-1 \equiv 11(modn)$, $-4 \equiv 8(modn)$ e $-7 \equiv 5(modn)$, a tríade fica $(11j+n, 11j+8+n, 11j+5+n)$. Fazendo $n = 7$ por exemplo, ficamos com $(11j+7, 11j+3, 11j)$, que é uma tríade menor. Analogamente, dada uma tríade menor, de forma $(j, j+3, j+7)$, aplicamos uma inversão I_n, obtendo $(-j+n, -j-3+n, -j-7+n)$, que equivale a $(11j+n, 11j+9+n, 11j+5+n)$. Fazendo $n = 7$, ficamos com $(11j+7, 11j+4, 11j)$, que é uma tríade maior.

Uma sugestão de atividade é achar todos as tríades presentes no desenvolvimento harmônico do excerto da 9^a sinfonía de L. Beethoven, compassos 159 à 176 do 2^o movimento. Partindo da tríade $(3, 7, 10)$, aplicamos as transformações I_3, I_8, I_1, I_6, I_4, I_9, I_2. I_7, I_0 e I_5. Após achá-las, podemos nomear cada uma de acordo com o parágrafo anterior, tomando o cuidado de, após aplicar a transformação, colocar a tríade na ordem $(k, k+3, 4+7)$ ou $(k, k+4, k+7)$. O resultado será:

$$(3,7,10) \xrightarrow{I_{10}} (0,3,7) \xrightarrow{T_3} (8,0,3) \xrightarrow{I_8} (5,8,0) \xrightarrow{I_1} (1,5,8) \xrightarrow{I_6} (10,1,5) \xrightarrow{I_{11}} (6,10,1) \xrightarrow{I_4} (3,6,10) \xrightarrow{I_9} (11,3,6) \xrightarrow{I_2} (8,11,3) \xrightarrow{I_7} (4,8,11) \xrightarrow{I_0} (1,4,8) \xrightarrow{I_5} (9,1,4).$$

Ou seja, Ré#, dó, Sol#, fá, Dó#, lá#, Fá#, ré#, Si, sol#, Mi, dó#, Lá. Pode-se pedir ao aluno a tarefa inversa: dar as o nome das tríades e pedir que eles escrevam cada uma na forma de terna ordenada, utilizando a tabela 10:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá	Lá#	Si

Tabela 10 – Conversão para $\mathbb{Z}_{12}$

Após isso, solicitar que descubram qual foi a inversão feita de uma tríade para a outra. Para isso, eles deverão pensar primeiro no inverso de cada nota da tríade, e depois fazer uma transposição de modo que resulte na tríade desejada. Por exemplo, a primeira tríade é (3, 7, 10). Calculando os inversos de cada nota, temos a tríade (9, 5, 2). A ordem canônica dessa tríade é (2, 5, 9), e portanto devemos somar $-2 \equiv 10(mod 12)$ a cada nota, para obter a tríade $(0, 3, 7)$. Assim, a inversão será I_{10}.

4.5 Grupo PRL

Trataremos agora das funções P, R, e L, que agem sobre o conjunto $\mathbb{T}$, formando o grupo PRL, estudado pioneiramente pelo matemático Hugo Riemann, no século XIX (não confundir com Bernhard Riemann). Esta teoria é chamada de Neo-Riemanniana em sua homenagem.

Definição 4.10 *Definimos P como*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ (x, y, z) \mapsto P(x, y, z) &= I_{x+z}(x, y, z) \end{aligned}$$

Definição 4.11 *Definimos L como*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ (x, y, z) \mapsto L(x, y, z) &= I_{y+z}(x, y, z) \end{aligned}$$

Definição 4.12 *Definimos R como*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ (x, y, z) \mapsto L(x, y, z) &= I_{x+y}(x, y, z) \end{aligned}$$

O significado musical de cada função é

- P: transforma a tríade em sua paralela menor ou maior (triade menor ou maior com a mesma tônica)
- R: transforma tríade em sua relativa menor ou maior. A relativa menor de uma tríade maior é a tríade menor em que a tônica está a uma terça menor abaixo. Por exemplo, a relativa menor de Dó (0, 4, 7) é lá (9, 0, 4).
- L: modifica o tom líder, ou seja, diminui à tônica uma 2^am e mantém as outras duas notas. Por exemplo, $L(D) = (0, 4, 7) = mi = (4, 7, 11)$

Definição 4.13 *O Grupo PLR é definido pelo conjunto das funções P, L e R com a operação $\circ$ de composição de funcões*

Partindo do acorde de Dó maior, traçamos a rede de acordes aplicando as funções P, R, e L sucessivamente. A figura resultante é chamada de ***tonnetz***. Na figura, utilizamos outra notação para as notas: Dó = C, Ré = D, Mi = E, Fá = F, Sol = G, Lá = A e Sí = B.

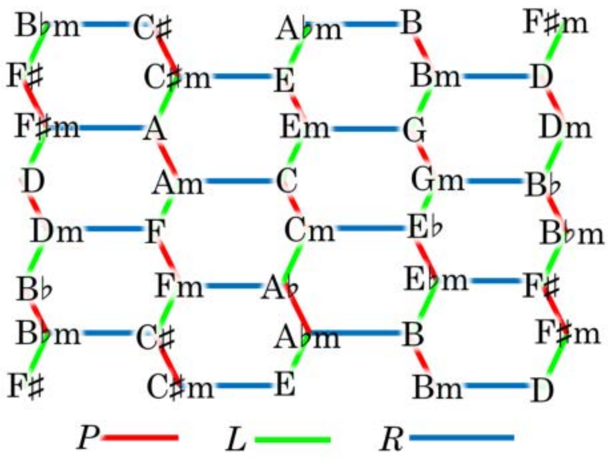


Figura 19

Perceba que podemos unir o topo com a parte de baixo, e a parte esquerda com a direita, formando a figura chamada *toro*.

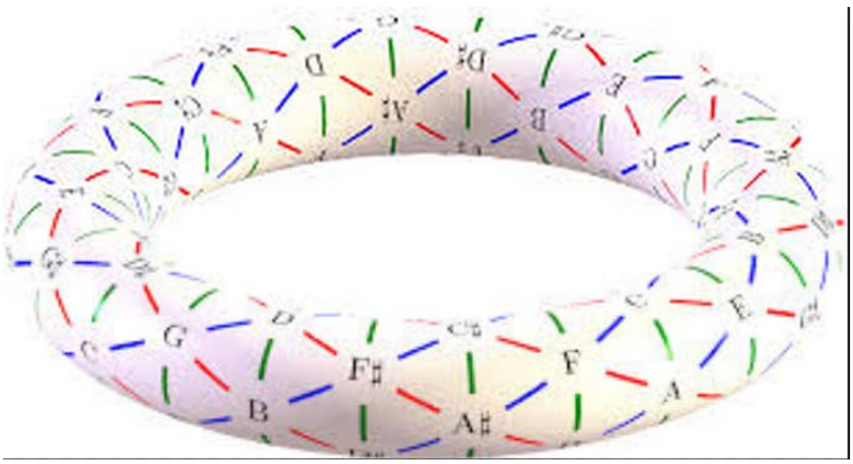


Figura 20 – Tonnetz representado em um toro

4.5.1 Exemplos

- Canon, de Pachelbel

Partindo da tríade Ré, aplicamos $R \circ L$, $R \circ L \circ R$, $L \circ R$, L. O resultado será: Ré, Lá, si, Fá#. Esta é uma sequência harmônica bastante utilizada na música popular.

- 9^a sinfonía de Beethoven, compassos 156 à 176

  Utilizamos aqui o mesmo exemplo dado para transposições e inversões. Partindo da tríade Re#, aplicamos sucessivamente as operações R, e L. Continuando a sequência, obtemos todos as tríades do tonnetz:

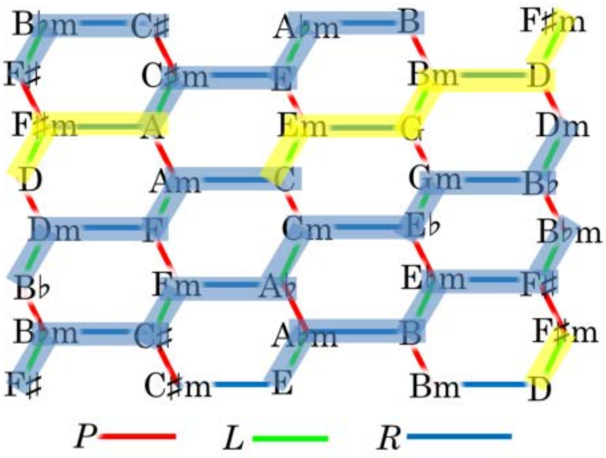


Figura 21 – Exemplo de percurso harmônico em Beethoven

Considerações Finais

Como forma de mostrar a importância da matemática como área de saber humano, mostramos algumas aplicações desta à música, que foi escolhida devido à minha afinidade ao tema e pelo caráter lúdico das aplicações. Achamos que o conteúdo desenvolvido aqui possa ser trabalhado em turmas do ensino médio, amparado por uma parceria com o professor de física (para o capítulo 2) e o professor de artes. A teoria de grupos, embora não faça parte do currículo do ensino médio, pode ser tratada de maneira informal pelo professor, enfatizando o caráter estrutural de grupo. Idealmente, a aplicação da teoria deve ser seguida pela a audição dos exemplos musicais sugeridos, além de outros que podem ser acrescentados pelo professor. Outro ponto chave é a utilização da informática aplicada ao ensino e aprendizagem como ferramenta de trabalho essencial na atual realidade. Pensamos que uma boa aula expositiva é importante, mas aulas diferenciadas oferecem novas abordagens aos conteúdos trabalhados tradicionalmente em sala de aula, oferecendo uma alternativa ao aluno

É importante salientar que música não é meramente matemática, por ser uma arte subjetiva. Mas é importante mostrar que a matemática é uma das bases do desenvolvimento musical, tanto no âmbito prático (como visto no capítulo 3) quanto no âmbito teórico (como visto os capítulos 2 e 4). Podemos afirmar que, sem o desenvolvimento matemático adquirido pela humanidade, a música teria um progresso muito menor do que o que vemos atualmente.

Para trabalhos futuros ou baseados por este, sugerimos o desenvolvimento do tema de escalas aplicadas à construção dos instrumentos, ou seja: quais propriedades deve o instrumento ter para realizar certos tipos de escala (dimensões, tensões, materiais etc). Outra sugestão é uma investigação da música serial, que utiliza de belas aplicações de análise combinatória e teoria de grupos. Existem diversas outras aplicações interessantes, que podem ser vistas nos livros indicados nas referências bibliográficas

Por fim, é um privilégio poder trabalhar em duas áreas aparentemente distintas, mas que ao serem observadas de maneira mais profunda, revelam-se intrinsecamente ligadas. E esperamos que este trabalho possa inspirar a produção de outros neste tema, a fim de contribuir com a inserção de música nas escolas, algo que achamos ser de grande importância para o desenvolvimento cultural e social dos alunos.

Referências

ABDOUNUR, O. J. a. *Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados*. [S.l.]: Ensaios Transversais, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 18.

BENSON, D. J. *Music: A Mathematical Offering*. [S.l.]: Versão Web, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.

CAMPOS, G. P. D. S. *Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares*. Dissertação (Mestrado) — UFES, 2009. Citado na página 21.

CRANS A; FIORE. T.; SATYENDRA, R. Musical actions of dihedral groups. *The American Mathematical Monthly*, 2009. Citado na página 21.

DIAS, A. S. M. P. A relação matemática e música. Citado na página 18.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Ministério da Educação, 2008. Citado na página 15.

GONCALVES, A. *Introdução à Álgebra*. [S.l.]: Projeto Euclides, 1977. Nenhuma citação no texto.

HALLIDAY, D. *Física, Vol. 2*. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 23.

HENRIQUE, L. L. *Acústica Musical*. [S.l.]: Serviço de Educação e Bolsas, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 16, 17, 19, 20, 22, 24, 33 e 35.

HOOK, J. Uniform triadic transformations. *Journal of Music Theory*, 2002. Citado na página 21.

HYER, B. *Reimagining Riemann*. [S.l.]: Journal of Music Theory, 1995. Citado na página 21.

LEWIN, D. *A formal Theory of Generalized Tonal Functions*. [S.l.]: Journal of Music Theory, 1982. Citado na página 21.

MED, B. *Teoría da Música*. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 53.

PAPADOPOULOS, A. Mathematics and group theory in music. 2000. Citado na página 21.

PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)*. Brasília, DF, 1998. Disponível em: <http://abntex2.googlecode.com/>. Citado na página 13.

PEREIRA, M. d. C. *Matemática e Musica: de Pitágoras aos Dias de Hoje*. Dissertação (Mestrado) — UNIRIO, 2013. Citado na página 21.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

TOWNSEND, A. Maths and music theory. *University College London Undergraduate Maths Coloquium*, 2011. Citado na página 37.

WRIGHT, D. *Mathematics and Music*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.

Apêndices

APÊNDICE A

Introdução à Teoria Musical

Trataremos do mínimo necessário de teoria musical para o entendimento do trabalho. Leitores interessados em uma abordagem mais profunda podem encontrar em (MED, 1996). A música é composta primariamente de:

- **Melodia** é um conjunto de notas dispostas de forma sucessiva uma sucessão. É chamada também de concepção **horizontal** da música
- **Harmonia** é um conjunto de notas dispostas simultaneamente. É chamada também de concepção **vertical** da música
- **Ritmo** é a ordem e proporção da duração das notas.

Veremos agora os entes principais na criação musical: as **notas musicais**.

A.1 Notas musicais

Iniciamos com a escala musical moderna representada em um teclado:

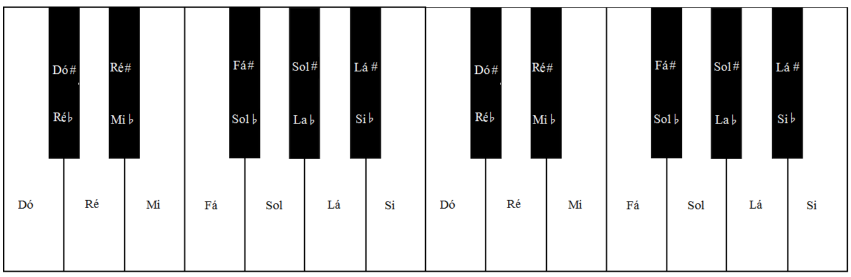


Figura 22

Perceba que as teclas pretas e brancas intercalam-se. Chamamos de **intervalo** a distância entre duas notas. O intervalo de **semitom** ou **meio tom** é o intervalo entre duas teclas "adjacentes"(uma preta com uma branca ou entre duas brancas sem uma preta entre elas.). O intervalo de um **tom** é o intervalo formado por dois semitons.Os acidentes são alterações às notas ”naturais”. São eles: **bemol** $\flat$, que abaixa a nota em meio tom; o **sutenido** # aumenta a nota em meio tom e o **bequadro** $\natural$, que desfaz o efeito dos outros acidentes. O efeito dos acidentes é valido dentro do mesmo compasso (ver definição abaixo). Se dois nomes se referem à mesma nota, eles são chamados de **enarmônicos** ou **enarmonicamente equivalentes**.

Chamamos de **escala diatônica maior** a escala de sequência *tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom*, e de **escala diatônica menor** a de sequência *tom, semitom, tom, tom, semitom, tom, tom*. Existem portanto 12 escalas maiores 12 menores. Em uma mesma escala, utilizamos apenas sustenidos ou bemóis, nunca os dois juntos.

Exemplos:

Fá, Sol, Lá, Si$\flat$, Dó, Ré, Mi, Fá (escala diatônica de Fá maior)

Fá, Sol, Lá$\flat$, Si$\flat$, Dó, Dó$\flat$, Ré$\flat$, Mi$\flat$, Fá

Ré, Mi, Fá#, Sol, Lá, Si, Dó#, Ré (escala diatônica de Ré maior)

Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Lá#, Dó, Ré (escala diatônica de Ré menor)

A escala diatônica fica caracterizada então pela quantidade de bemóis ou sustenidos presentes nela. Quando dizemos que a escala contêm um bemol, já sabemos que se trata da escala diatônica de Fá maior, e a escala que contêm 2 sustenidos é a escala diatônica de Ré maior. A **escala cromática** é aquela que consiste de todas as 12 notas de uma oitava. Em música, a ”origem” da contagem em um intervalo é 1, e toma-se como base as sete notas da escala diatônica como base. Existem 12 intervalos principais: Uníssono (Un), segunda menor (2^am), segunda maior (2^aM), terça menor (3^am), terça maior (3^aM), quarta justa (4^aJ), quinta diminuta (5^adim), quinta justa (5^aJ), sexta menor (6^am), sexta maior (6^aM), sétima menor (7^am), sétima maior (7^aM) e oitava justa ($8a$J).

A.2 Notação musical

A música é escrita utilizando-se uma **pauta** ou **pentagrama**, que são cinco linhas intercaladas por quatro espaços, contados ambos de baixo para cima. Cada linha ou espaço corresponde a uma nota. Para definir o nome das notas, utiliza-se um figura utilizada **clave**. A clave dá o seu nome à linha onde é assinada, e as linhas e espaços que se seguem continuam a sequência de notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si). As principais claves são a Clave de sol na segunda linha e clave de fá na quarta linha. Podem ser utilizadas **linhas suplementares** para indicar notas mais graves ou mais agudas.

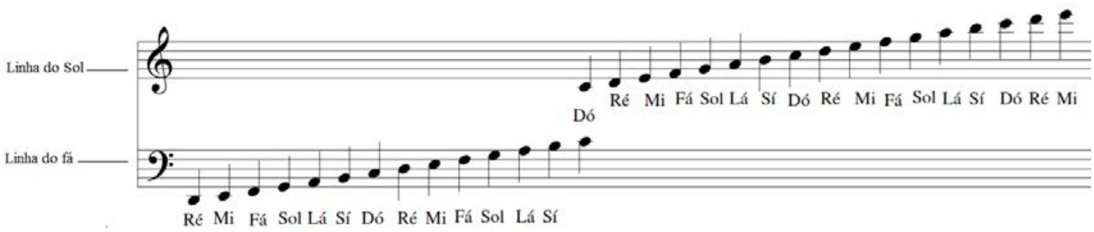


Figura 23 – Pauta musical com o nome das notas

Para indicar a tonalidade, utilizamos a **armadura de clave**, que é a sequência de bemóis ou sustenidos contida na escala diatônica de base utilizada na música em questão. As notas indicadas sempre serão sustenizadas ou bemolizadas, a não ser que seja usado um bequadro (♮) para cancelar o sustenido ou bemol da nota.

Figura 24 – Armadura de clave dos tons de Fá e Ré maiores

A.3 Figuras de tempo

A música é dividida em unidades de tempo, que se juntam em grupos regulares chamados de **compasso**, indicado por uma barra. Os compassos mais comuns são o de 2, 3 e 4 unidades de tempo. AS notas musicais e as respectivas pausas são indicadas por diferentes figuras:

Figura	Pausa	Tempo	Nome
𝅝	𝄻	1	SEMIBREVE
𝅗𝅥	𝄼	1/2	MÍNIMA
♩	𝄽	1/4	SEMÍNIMA
♪	𝄾	1/8	COLCHEIA
𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/16	SEMICOLCHEIA
𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/32	FUSA

Figura 25 – Notas, pausas e duração relativa

Para a definição da quantidade de tempos de um compasso e da unidade de tempo, utiliza-se a **fórmula de compasso**, que é uma fração em que o numerador indica a quantidade de tempos e o denominador indica a figura que vale uma unidade de tempo. Por exemplo, a fórmula

indica que cada compasso contêm 4 tempos, e que a unidade de tempo é a semínima. Abaixo, um exemplo musical em compasso de quatro tempos, com dois compassos em tonalidade de Fá maior. As notas escritas são Si, Sol, Lá, Dó, Sí, Mi, Ré.

Figura 26 – Trecho musical

APÊNDICE B

Tutorial do Software SCALA

B.1 Introdução

SCALA é um software para experimentação com afinações musicais. Nele, podem ser construídas, editadas, comparadas e analisadas desde escalas históricas até escalas de temperamento igual, além de geração de outras escalas e afinações que podem ser usadas em instrumentos MIDI. Tudo isso está integrado em um único aplicativo com uma grande variedade de rotinas matemáticas e métodos de criação de escalas. Além disso, SCALA disponibiliza gratuitamente uma grande biblioteca de escalas que podem ser usadas para análise ou para criação musical. O programa está disponível apenas em inglês. Utilizaremos somente algumas funcionalidades do programa para o propósito deste trabalho.

B.2 Download e instalação

O pacote de instalação está disponível em

$http://www.huygens-fokker.org/scala/downloads.html$

Para instalar o programa no WINDOWS ©, antes é necessário instalar o Gtk+, disponível em

$http://gtk-win.sourceforge.net$

No instalador, deve-se marcar todas as caixas nas opções adicionais. Após a instalação deste, deve-se instalar o SCALA, disponível para download em

$http://www.huygens-fokker.org/software/Scala_Setup.exe$

Para iniciar a instalação, clicar em Scala_Setup.exe e escolher um diretório para instalação, por exemplo $C:\backslash Arquivodeprogramas\backslash Scala22$. Também é necessário baixar o arquivo de escalas, disponível em $http://www.huygens-fokker.org/docs/scales.zip$. O arquivo baixado deve ser extraído no subdiretório \scl. Após isso, o programa está pronto para rodar.

B.3 Comandos básicos

SCALA funciona através de comandos, que são digitados na caixa inferior da janela do programa. Alguns comandos básicos:
INPUT: Inicia o processo manual de criação de escalas. Primeiro, SCALA solicitará o número de notas da escala. Após isso, são solicitadas as razões, que podem ser em forma de fração n/n ou em Cents, acrescentando um ponto no número (por exemplo, 300.00).
LOAD: carrega um arquivo de escala na memória. Por exemplo, LOAD ptolemy.scl carrega o arquivo ptolemy.scl.
SHOW: mostra a escala armazenada na memória. Cada nota é associada a um número, e é mostrado ao lado de cada nota a razão entre a nota e a tônica em forma de fração ou decimal e em Cents, e o nome usual do intervalo. SHOW DATA: mostra todos os dados referentes à escala carregada na memória.
CLS: Limpa a tela
EQUAL (n): Cria uma escala de n notas igualmente temperadas.

B.4 Menus

Outra maneira de utilizar o programa é por meio de menus, que desempenham o mesmo papel dos comandos. Temos por exemplo, os ícones LOAD, INPUT, SHOW etc. Além destes, destacamos os ítens EDIT, para editar a escala armazenada na memória; PLAY, pra tocar em um teclado virtual a escala armazenada na memória; e FREQ para ajustar a frequência da nota base da escala.

B.5 Utilização

Basicamente, utilizaremos o comando INPUT e o teclado virtual neste trabalho. SCALA é bastante complexo, e pode ser utilizado mais profundamente. Vejamos um exemplo básico de utilização:

- Tecle INPUT,
- Entre com o número 7. Este será o número de notas da nossa escala
- Entre com as frações $9/8$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $16/9$, $243/128$ e $2/1$
- Tecle SHOW
- A escala aparecerá na tela

- Clique no teclado virtual, ou aperte a tecla *F4*. Nele a escala poderá ser tocada.