Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear

José Arica

LEPROD/CCT/UENF

Março, 2024

Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear

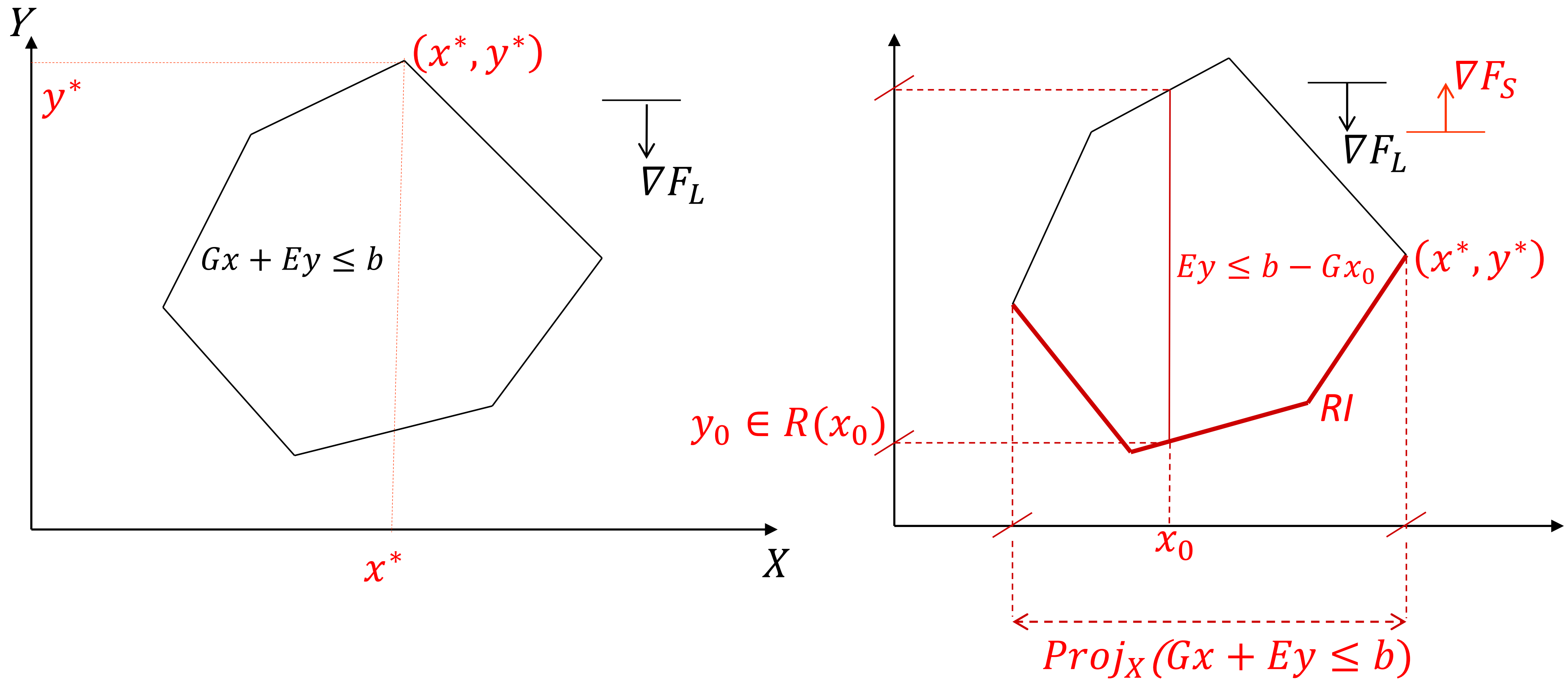
Aqui consideramos el Problema de Dois Niveis Linear (PDNL):

$$
(PDNL):\quad
\begin{array}{c}
minimizar_{(x,y)} \quad F_L(x,y) = c_1^T x + c_2^T y \\
onde\ x \in \Re_+^{n_1}\ e\ y\ \text{é}\ solução\ de \\
(PS(x)):\ minimizar_y\ F_S(y) = d^T y \\
Gx + Ey \leq b \\
y \in \Re_+^{n_2}
\end{array}
$$

Comapremos o (PDNL) com um problema de PL comum:

$$
(PL):\quad
\begin{array}{c}
minimizar_{(x,y)} \quad F_L(x,y) = c_1^T x + c_2^T y \\
\cancel{onde\ X \in \Re_+^{n_1}\ e\ y\ é\ solução\ de} \\
\cancel{(PS(x)):\ minimizar_y\ F_S(y) = d^T y} \\
Gx + Ey \leq b \\
x \in \Re_+^{n_1}, y \in \Re_+^{n_2}
\end{array}
$$

Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear



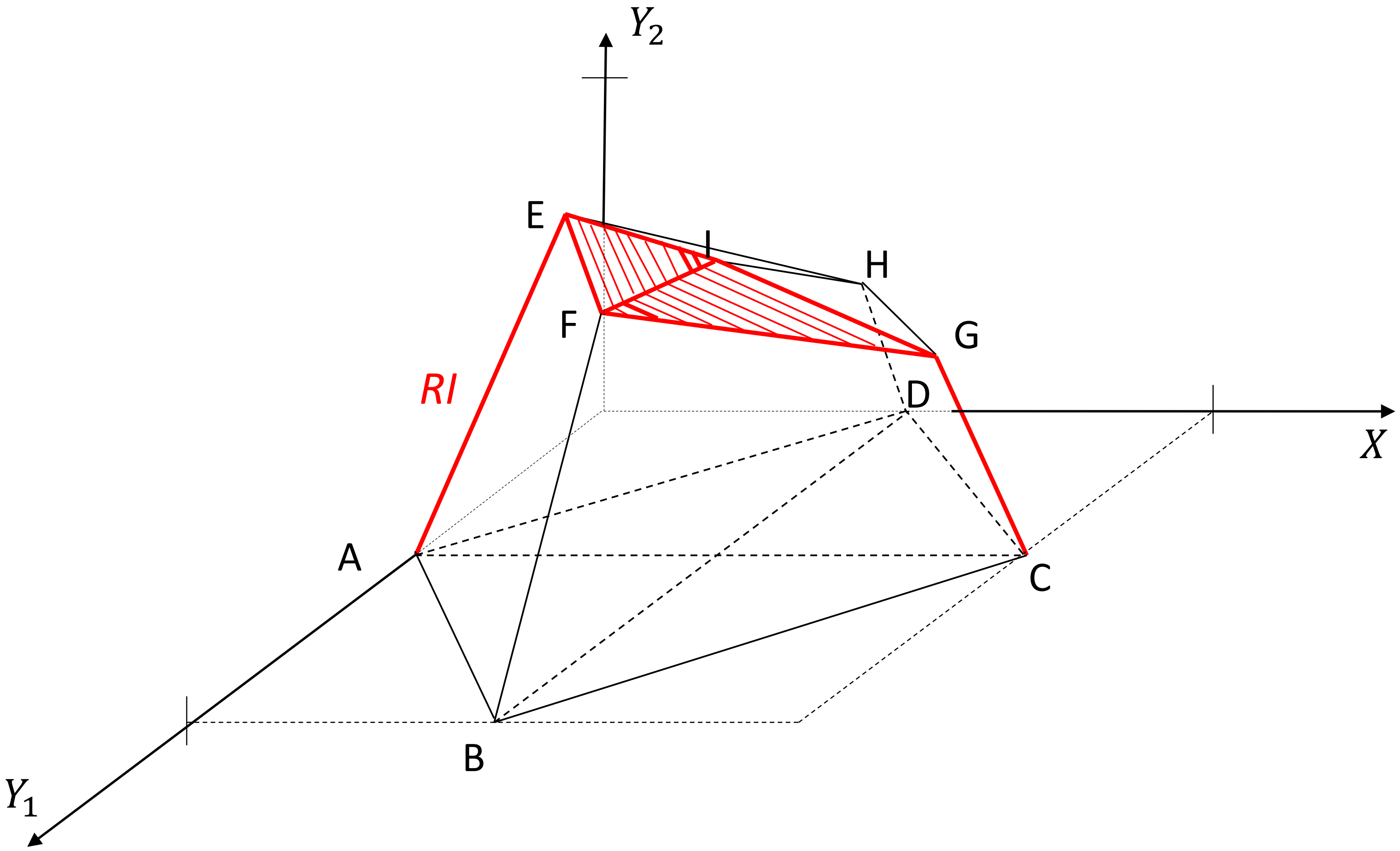
Note que:

$$(\text{PDNL}) \Leftrightarrow \begin{array}{c} minimizar_{(x,y)} F_L(x,y) \\ (x,y) \epsilon RI \end{array}$$

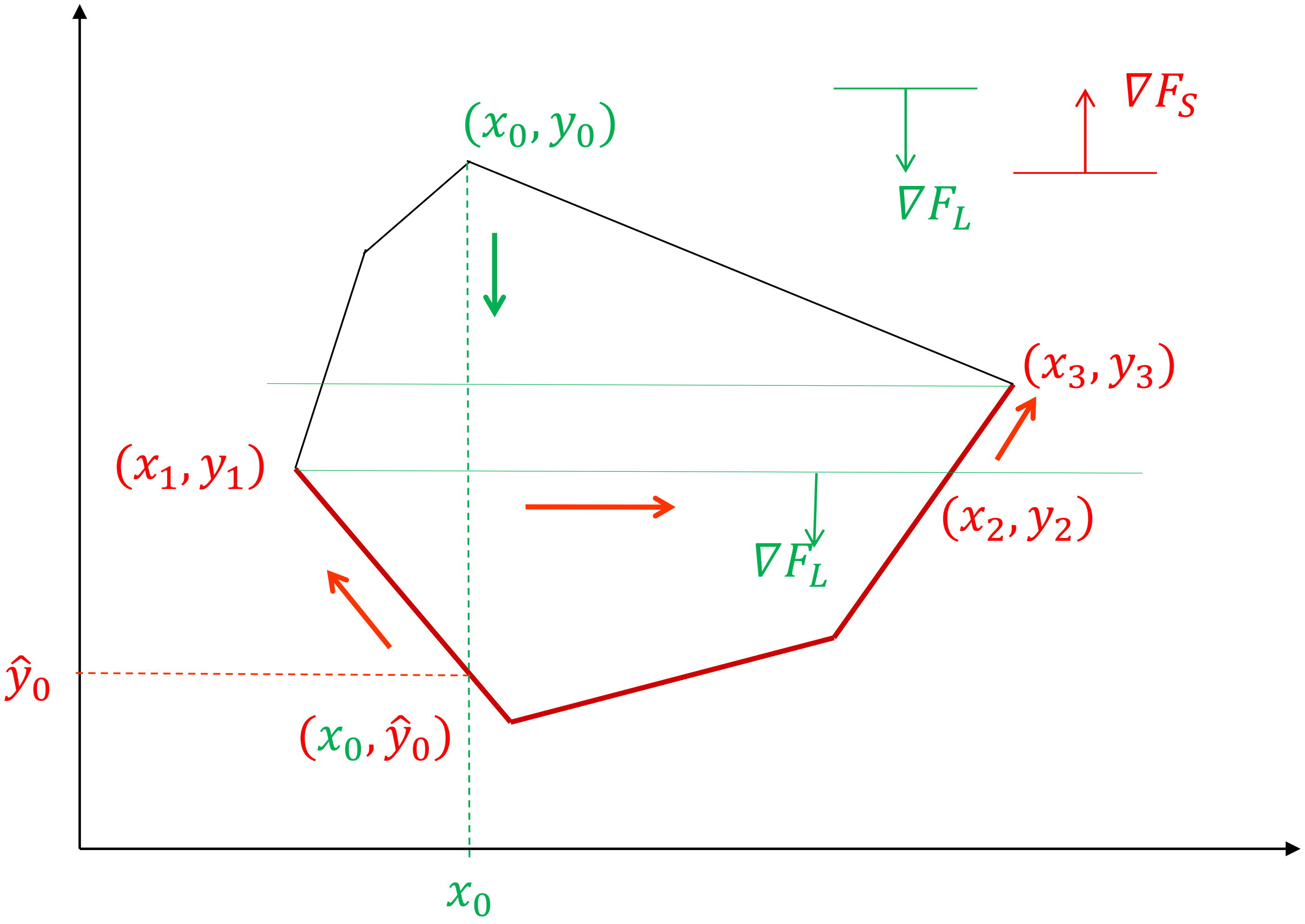
Example 2 *(Campêlo and Scheimberg, 2005)*

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize}_{(x,y)} & F_L(x,y) = -x + 2y_1 - 20y_2 \\
 & x \geq 0 \text{ and } y = (y_1, y_2) \geq 0 \text{ solves} \\
(FP(x))\text{: maximize}_{(y_1,y_2)} & F_S(y) = -y_1 + 10y_2 \\
 & x + y_1 + y_2 \leq 3 \\
 & x + y_1 - y_2 \geq 1 \\
 & -x + y_1 + y_2 \leq 1 \\
 & x - y_1 + y_2 \leq 1 \\
 & 16x - 6y_1 + 60y_2 \leq 37 \\
 & 6x - 16y_1 + 60y_2 \leq 17 \\
 & 6x - 6y_1 + 60y_2 \leq 27 \\
 & 16x - 16y_1 + 60y_2 \leq 27 \\
 & y \geq 0
\end{array}
$$

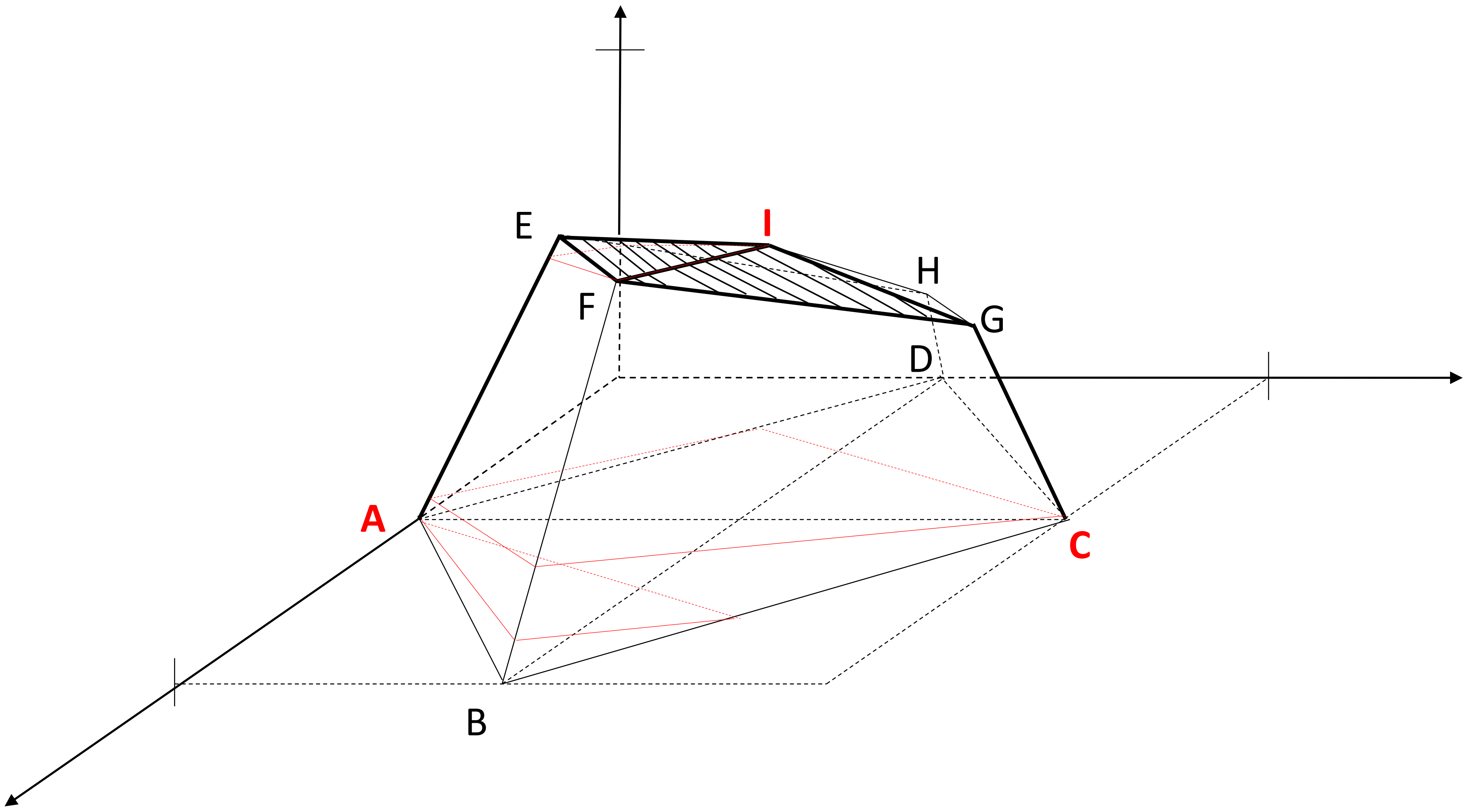
Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear



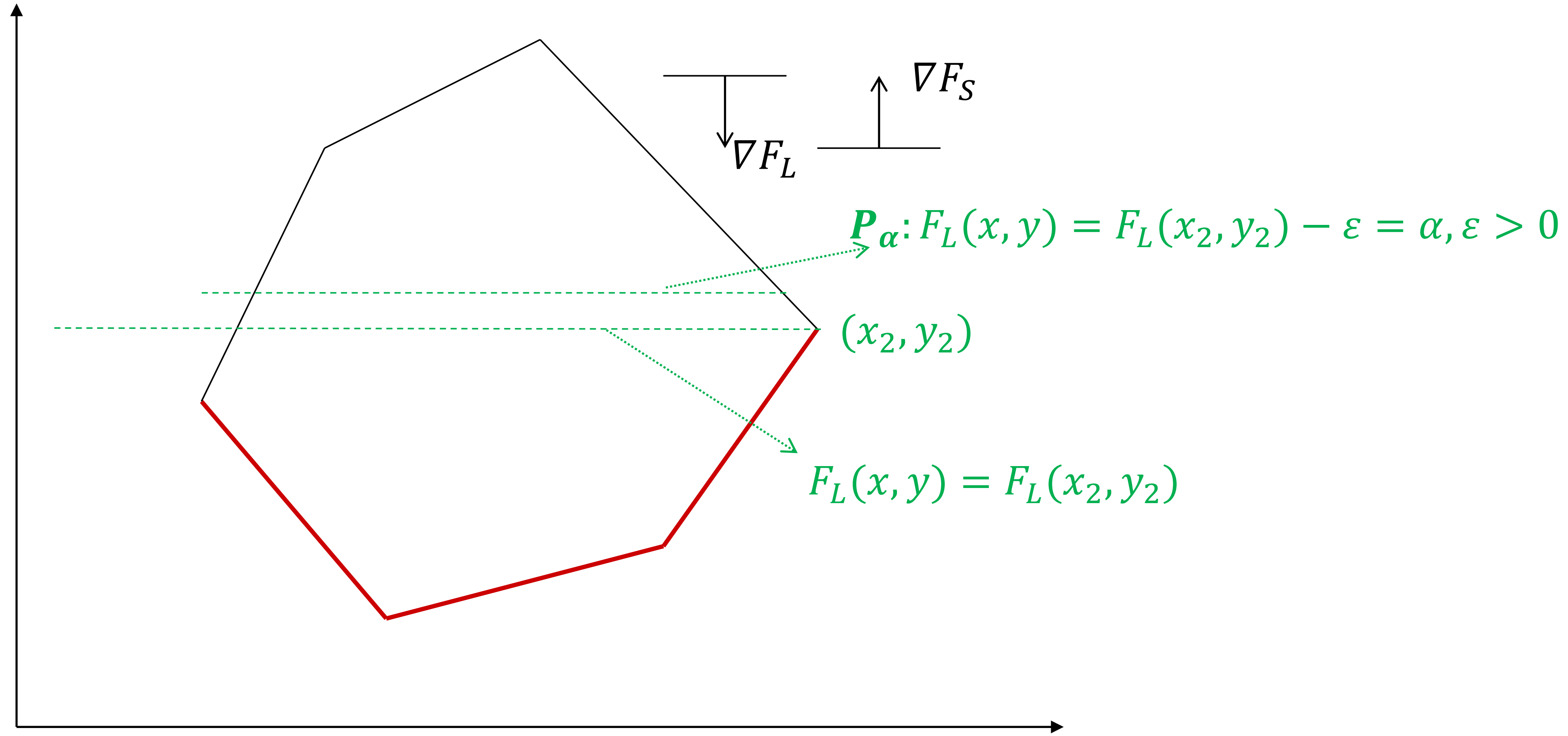
Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear



Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear



Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear



Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ (x, y) \epsilon \Re_{+}^{n_1+n_2} : Gx + Ey \leq b, \underbrace{c_1^T x + c_2^T y}_{F_L(x,y)} = \alpha \right\}$$

Existe algum ponto da RI em $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$?

Pelas condições de KKT, pode-se provar que a questão: "Existe algum ponto da RI em $\boldsymbol{P}_\alpha$?", é equivalente à questão: **o seguinte sistema tem solução?**

$$\begin{aligned} Gx + Ey + s &= b \\ c_1^T x + c_2^T y &= \alpha \\ u - E^T w &= d \\ u^T y + w^T s &= 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, s \geq 0, u &\geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

Z

Γ

$F(z,\gamma) = z^t\gamma$

Note que $u^T y + w^T s \geq 0$, para todo $y \geq 0, s \geq 0, u \geq 0, w \geq 0$. Portanto, existe um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \epsilon RI$ se, e somemte se, $0 = F(\bar{z}, \bar{\gamma}) = min\{F(z,\gamma):\ z\epsilon Z, \gamma\epsilon\Gamma\}$, onde $F(z,\gamma) = z^t\gamma$, com $z^T = (x^T, y^T, s^T)$ e $\gamma^T = (0^T, u^T, w^T)$.

Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear

$$K = \begin{bmatrix} G & E & I_m \\ c_1^T c & 2 & T \end{bmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix}$$

$$Z = \left\{ z \epsilon \Re^{n_1+n_2+m} : Kz = \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix}, \underbrace{x \geq 0, y \geq 0, s \geq 0}_{z \geq 0} \right\}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & -E^T \end{bmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \left\{ \gamma \epsilon \Re^{n_1+n_2+m};\ H\gamma = d, \underbrace{u \geq 0, w \geq 0}_{\gamma \geq 0} \right\}$$

Uma proposta algoritmica para o Problema de Dois Níveis Linear

Seguindo o conceito de pontos singulares em Campello e Scheimberg (2005), tem-se a seguinte definição:

Definição 1. *Um ponto* $(\bar{z},\bar{\gamma})$ *é chamado de ponto de equilíbrio para* $F(z,\gamma) = z^t\gamma$, se se cumpre que

$$min_{\gamma\epsilon\Gamma}F(\bar{z},\gamma) = F(\bar{z},\bar{\gamma}) = min_{z\epsilon Z}F(z,\bar{\gamma})$$

Proposição 1. If $(\bar{z},\bar{\gamma})$ é *um* ponto de equilíbrio para $F(z,\gamma) = z^t\gamma$, como na Definição 1, então $F(\bar{z},\bar{\gamma})=0$.

Algoritmo 1. Considere $F(z,\gamma) = z^t\gamma$, para $(z,\gamma)\epsilon Z \times \Gamma$.

Passo 1. Se $Z \times \Gamma = \phi$, não existe ponto de equilíbrio. Caso contrário, seja $z^0\epsilon Z$ e encontre $\bar{\gamma}\epsilon\Gamma$, tal que $z^{0^T}\bar{\gamma} = min_{\gamma\epsilon\Gamma}F(z^0,\gamma)$.

Passo 2. Tente encontrar $\bar{z}\epsilon Z$, tal que $\bar{z}^T\,\bar{\gamma} = min_{z\epsilon Z}F(z,\bar{\gamma})$. Se este problema é ilimitado, não existe ponto de equilíbrio. Caso contrário, $(\bar{z},\bar{\gamma})$ *é um ponto de equilíbrio para* $F(z,\gamma)$.

Bibliografia

1. **ASSAD, C; MORALES, G., ARICA, J. (2022)**. *Vertex Enumeration of Polyhedra*, Pesquisa Operacional (2022) 42: e254570, p.1-20.

2. **CAMPÊLO, M.; SCHEIMBERG, S. (2005)**. *A Simplex Approach for Finding Local Solutions of a Linear Bilevel Program by Equilibrium Points*. Annals of Operations Research, 138(1): 143–157.