

# MODELO NUMÉRICO PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

**MARCOS VINÍCIOS PEREIRA SANT'ANA**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE  
DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ  
JANEIRO - 2005



# MODELO NUMÉRICO PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

**MARCOS VINICIOS PEREIRA SANT'ANA**

“Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia Civil”.

Orientador: Prof. Jean Marie Desir

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ  
JANEIRO – 2005

# MODELO NUMÉRICO PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

## MARCOS VINICIOS PEREIRA SANT'ANA

“Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia Civil”.

Aprovada em 14 de janeiro de 2005

Comissão Examinadora:

---

Prof. Flávio de Souza Barbosa (D. Sc.) – UFJF

---

Prof<sup>a</sup>. Vânia José Karan (D. Sc.) – UENF

---

Prof. Aldo Durand Farfán (D. Sc.) – UENF

---

Prof. Jean Marie Desir (D. Sc.) – UENF  
Orientador

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela força e graça de poder realizar este trabalho.

Aos meus pais, Aney Ferreira de Sant'ana e Alcinea Pereira Sant'ana e meus irmãos Francymárcio Pereira Sant'ana e Guilherme Pereira Sant'ana pelo grande apoio e por sempre estarem presente e por me incentivar a prosseguir nesta caminhada.

Ao Prof. Jean Marie Desir pela orientação, por incentivar-me durante todas as etapas desse trabalho e pela grande ajuda nos momentos mais difíceis, sem a qual a realização deste trabalho seria impossível.

Ao Prof. Jonas Alexandre pela atenção dispensada e por ajudar os meus primeiros passos na pesquisa científica.

Ao Prof. Sérgio Tibana por resolver os problemas relacionados com a minha transferência para a UENF.

A todos os professores deste departamento, que desde a graduação, sempre estiveram dispostos a colaborar com meu aprimoramento profissional.

Aos meus colegas de turma por toda ajuda e troca de conhecimentos, em particular Ricardo Schwan por estar sempre disposto a tirar uma dúvida.

A CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

O concreto reforçado com fibras vem sendo utilizado cada vez mais nas últimas quatro décadas em elementos estruturais que requerem uma boa tenacidade. Na literatura técnica, existem muitos trabalhos experimentais que possibilitam uma melhor compreensão do comportamento mecânico deste material. Em termos de modelagem numérica, os inúmeros modelos propostos para simular o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras podem ser divididos em dois grandes grupos. No primeiro grupo, a modelagem é feita considerando o concreto reforçado com fibras como um compósito bifásico, ou seja, através das propriedades dos componentes deste compósito. O segundo grupo considera este material como um material monofásico, sendo modelado por meio de leis constitutivas do conjunto. Estes inúmeros modelos, em função da variedade de parâmetros que afetam o comportamento do concreto reforçado com fibras, utilizam simplificações. Por este motivo, continua sendo necessário o desenvolvimento de novos modelos que possam considerar e representar os parâmetros que influenciam o comportamento deste compósito, como por exemplo: a deterioração da aderência na interface entre os dois materiais, a distribuição e a orientação aleatória das fibras. Neste trabalho, apresenta-se um modelo numérico com o método dos elementos finitos que utiliza três discretizações de representação deste compósito. Nas duas primeiras, com o objetivo de simular o efeito destes parâmetros acima referidos no comportamento do concreto reforçado com fibra, adota-se uma modelagem que considera este material como um compósito bifásico, o concreto e as fibras e uma interface de espessura infinitesimal entre estas fases. A diferença entre as duas discretizações bifásicas está no tipo de malha adotada para representar a distribuição das fibras e sua aleatoriedade. Na primeira, o concreto é representado por uma malha de elementos quadrilaterais retangulares quadráticos e as fibras por elementos de treliça aleatoriamente distribuídas nas arestas dos elementos quadrilaterais. Na segunda, as fibras estão distribuídas aleatoriamente nas arestas de elementos quadrilaterais não retangulares. O equilíbrio do sistema é equacionado partindo do salto de deslocamento que ocorre na interface entre o concreto e a fibra. Na terceira forma, o concreto reforçado com fibras é considerado como um material monofásico com características definidas de acordo com resultados experimentais. Os resultados numéricos obtidos com as diferentes discretizações são comparados com resultados experimentais disponíveis para avaliar a eficiência do modelo.

## **Abstract**

The fiber reinforced concrete (FRC) has been used more and more in the last four decades in structural elements that request a good tenacity. In the technical literature, there are many experimental works that allow a better understanding of the mechanical behavior of this material. In terms of numeric modelling, the countless models proposed to simulate the mechanical behavior of the FRC can be divided in to two great groups. In the first group, the modelling is made considering the FRC as a two-phase composite, in other words, the modelling is made through the micro-mechanicals properties of the components of this composite. The second group considers this material as a mono-phase material, being modeled through constitutive laws of the group. These countless models, due to the variety of parameters that affect the behavior of the FRC, use simplifications. For this reason, it is still necessary the development of new models that can consider and reproduce the influence of the parameters in the behavior of this composite, as for instance: the debonding at the interface among the two materials, the random distribution and orientation of the fibers. This work presents a numerical model with the finite element method using three different approaches for the treatment of FRC. In two of them, with the objective of simulating the effect of the parameters cited above in the behavior of the FRC, a modelling that considers this material as a two-phase composite is adopted, the concrete and the fibers and an interface of infinitesimal thickness between them. The difference between the two-phase approaches is the mesh type adopted to represent the random distribution of the fibers. In the first approach, the concrete is represented with quadratic rectangular quadrilateral elements and the fibers with truss elements randomly distributed at the boundary of the quadrilateral elements. In the second approach, the fibers are randomly distributed at the boundary of the quadrilateral non-rectangular elements. The balance of the system is worked out taking into account the displacement jump that occurs at the interface between the concrete and the fiber as a consequence of the debonding process at the interface. In the third proposal, the FRC is considered as a material of a single phase and its characteristics are defined according to experimental results. The results of these three proposals are discussed and compared with available experimental results.

## SUMÁRIO

|   |     |
|---|-----|
| <b>Lista de figuras</b> .....   | VI  |
| <b>Lista de tabelas</b> .....   | XI  |
| <b>Lista de símbolos</b> .....  | XII |
| <b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....  | 1   |
| 1.1 - Considerações gerais.....   | 1   |
| 1.2 - Objetivo da pesquisa.....   | 9   |
| 1.3 - Relevância do trabalho.....   | 10  |
| 1.4 - Organização do trabalho de pesquisa.....                                    | 11  |
| <b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....                                   | 12  |
| 2.1 - Considerações gerais.....   | 12  |
| 2.2 - Mecanismo de interação na interface concreto – fibra.....                   | 12  |
| 2.3 - Propriedades mecânicas do concreto reforçado com fibras.....                | 16  |
| 2.3.1 - Compressão.....   | 16  |
| 2.3.2 - Tração.....   | 19  |
| 2.3.3 - Flexão.....   | 23  |
| 2.3.4 - Cisalhamento.....   | 28  |
| 2.3.5 - Módulo de elasticidade.....   | 30  |
| 2.4 - Modelagem numérica.....   | 35  |
| 2.5 - Comentários gerais sobre a modelagem numérica.....                          | 43  |
| <b>CAPÍTULO 3 - DESCRIÇÃO DO MODELO NUMÉRICO</b> .....                            | 44  |
| 3.1 - Introdução.....   | 44  |
| 3.2 - Leis constitutivas dos materiais.....                                       | 45  |
| 3.2.1 - Lei do Concreto.....  | 45  |
| 3.2.2 - Lei de escoamento do aço.....   | 47  |
| 3.2.3 - Lei da interface.....   | 48  |
| 3.3 - Implementação das leis constitutivas na formulação de elementos finitos.... | 52  |
| 3.3.1 - Problema de valor de contorno.....  | 57  |
| 3.4 - Implementação computacional do modelo.....                                  | 60  |



|   |           |
|---|-----------|
| 3.4.1 - Matriz tangente.....                    | 63        |
| 3.4.2 - Critérios de convergência.....          | 64        |
| <b>CAPÍTULO 4 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>  | <b>66</b> |
| 4.1 - Introdução.....                           | 66        |
| 4.2 - Programa experimental.....                | 67        |
| 4.3 - Análise numérica.....                     | 71        |
| 4.4 - Comparação dos resultados.....            | 89        |
| <b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b> | <b>94</b> |
| 5.1 - Conclusões.....                           | 94        |
| 5.2 - Sugestões para futuros trabalhos.....     | 97        |
| 5.3 - Referências bibliográficas.....           | 99        |

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

**Figura 1.1:** Minimização da concentração de tensão no concreto com fibras (adaptado de Figueiredo, 2000).....3

**Figura 1.2:** Tipos de fibras - A - fibra irregular; B - fibra com extremidades em cravo; C - fibra deformada; D - fibra com extremidade em gancho; E - fibra corrugada; F - fibra lisa; G - fibra com extremidades planas, H - fibra torcida.....4

**Figura 1.3:** Diagrama de tensão - deformação elástica de matriz e fibras (adaptado Figueiredo, 2000).....5

**Figura 1.4:** Curvas típicas de tensão - deformação para baixo e alto volume de fibras (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).....7

### CAPÍTULO 2

**Figura 2.1:** Curva esquemática arrancamento de versus deslocamento (adaptada de Bentur e Mindes, 1990).....13

**Figura 2.2:** Curvas típicas de tensão de aderência versus deslizamento (adaptada de Reinhardt e Naaman, 1999).....16

**Figura 2.3:** Curva tensão - deformação (adaptado de Fanella e Naaman, 1985).....17

**Figura 2.4:** Influência do volume de fibras na curva tensão de compressão versus deformação (Fanella e Naaman, 1985).....18

**Figura 2.5:** Resposta típica tensão - deformação – (a) concreto de resistência convencional reforçado com fibras -  $V_f < 5\%$ ; (b) *SIFCON* (concreto de alto desempenho com elevado volume de fibras -  $V_f > 5\%$ ) sob tração (Adaptado de Zia *et al.*, 1996).....19

|  |    |
|--|----|
| <b>Figura 2.6:</b> Curvas tensão de tração - deformação com várias frações de volume de fibras (adaptado de Kulla, 1993).....  | 20 |
| <b>Figura 2.7:</b> Curvas tensão de tração - deformação para diferentes tipos de fibras de aço, com fração de volume – $V_f = 1,73\%$ (adaptado de Shah <i>et al.</i> , 1978)..... | 21 |
| <b>Figura 2.8:</b> Diagrama esquemático de carga - deflexão, típica do CRF (adaptado de Zia <i>et al.</i> , 1996).....   | 23 |
| <b>Figura 2.9:</b> Diagrama de carga versus deflexão do CRF (adaptado de Zia <i>et al.</i> , 1996).....  | 24 |
| <b>Figura 2.10:</b> Condição de contorno do ensaio de flexão.....  | 25 |
| <b>Figura 2.11:</b> Curva carga - deflexão e índices de tenacidade (ASTM C-1018).....  | 26 |
| <b>Figura 2.12:</b> Diferentes corpos-de-prova para ensaios de cisalhamento.....   | 28 |
| <b>Figura 2.13:</b> Curvas de tensão de cisalhamento - deslocamento em concreto sem fibras e concreto reforçado com fibras (Adaptado de Swamy <i>et al.</i> , 1987).....           | 29 |
| <b>Figura 2.14:</b> Resultado típico de uma análise limite do módulo de elasticidade de um compósito.....  | 31 |
| <b>Figura 2.15:</b> Modelos de duas fases (célula unitária) para compósitos com fibras (Alwan e Naaman, 1994).....   | 32 |
| <b>Figura 2.16:</b> Quadro esquemático do pseudo modelo de três fases (adaptado de Alwan e Naaman, 1994).....  | 33 |
| <b>Figura 2.17:</b> Comparação entre os modelos e dados experimentais de Alwan (1994), adaptado de Naaman e Reinhardt (1995).....  | 35 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figura 2.18:</b> Configuração da malha utilizada no modelo.....   | 37 |
| <b>Figura 2.19:</b> Esquema de distribuição de tensão nas fibras.....  | 39 |
| <b>Figura 2.20:</b> Representação esquemática da curva tensão versus deformação – (a) <i>SIFCON</i> sob compressão; (b) <i>SIFCON</i> sob tração (Naaman e Reinhardt, 1995)..... | 40 |
| <b>Figura 2.21:</b> Comparação entre os resultados experimentais e o modelo analítico, gráfico momento versus curvatura (Naaman e Reinhardt, 1995).....                          | 42 |
| <b>Figura 2.22:</b> Comparação entre os resultados experimentais e o modelo analítico, curva momento - deflexão (Naaman e Reinhardt, 1995).....                                  | 42 |
| <br><b>CAPÍTULO 3</b>  |    |
| <b>Figura 3.1:</b> Superfície desviadora de William – Warnke com três parâmetros.....  | 45 |
| <b>Figura 3.2:</b> Critério de William – Warnke.....   | 46 |
| <b>Figura 3.3:</b> Deslocamento relativo na interface.....   | 52 |
| <b>Figura 3.4:</b> Deslocamentos nodais de um elemento de treliça com GLD.....   | 55 |
| <br><b>CAPÍTULO 4</b>  |    |
| <b>Figura 4.1:</b> Quadro esquemático das discretizações propostas.....  | 67 |
| <b>Figura 4.2:</b> Condições de contorno do ensaio de flexão.....  | 70 |
| <b>Figura 4.3:</b> Curva carga x deflexão – concreto sem fibra (C30; C65) e concreto reforçado com fibras (C30A1; C30A2; C65A1; C65A2) adaptado de Resende (2000).....           | 70 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Figura 4.4:</b> Definição da malha segunda as propostas de modelagem.....                     | 71 |
| <b>Figura 4.5:</b> Disposição das fibras na matriz de concreto.....                              | 73 |
| <b>Figura 4.6:</b> Representação da filosofia de fibra equivalente.....                          | 73 |
| <b>Figura 4.7:</b> Esquema geral do procedimento numérico.....                                   | 74 |
| <b>Figura 4.8:</b> Malha aleatória com diferentes volumes de fibras – concreto C30.....          | 77 |
| <b>Figura 4.9:</b> Malha retangular com diferentes volumes de fibras - concreto C30.....         | 77 |
| <b>Figura 4.10:</b> Malha aleatória com diferentes distribuições - concreto C30.....             | 78 |
| <b>Figura 4.11:</b> Malha retangular com diferentes distribuições - concreto C30.....            | 78 |
| <b>Figura 4.12:</b> Malhas 1 e 2, refinamento da malha retangular.....                           | 79 |
| <b>Figura 4.13:</b> Refinamento das malhas aleatórias.....                                       | 80 |
| <b>Figura 4.14:</b> Malha retangular com refinamento – concreto C30.....                         | 81 |
| <b>Figura 4.15:</b> Malha aleatória com refinamento – concreto C30.....                          | 81 |
| <b>Figura 4.16:</b> Diferentes malhas aleatórias - diferentes orientações de fibras.....         | 82 |
| <b>Figura 4.17:</b> Malhas aleatórias com 1% de fibras – concreto C30.....                       | 83 |
| <b>Figura 4.18:</b> Malhas aleatórias com 2% de fibras – concreto C30.....                       | 83 |
| <b>Figura 4.19:</b> Distribuição de diferentes concentrações de fibras nas malhas bifásicas..... | 84 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 4.20:</b> Malha aleatória com diferentes concentrações - concreto C30.....  | 85 |
| <b>Figura 4.21:</b> Malha retangular com diferentes concentrações - concreto C30.....   | 85 |
| <b>Figura 4.22:</b> Lei bi-linear local para aderência na interface concreto-fibra.....   | 86 |
| <b>Figura 4.23:</b> Malha aleatória com diferentes interfaces - concreto C30.....   | 87 |
| <b>Figura 4.24:</b> Malha retangular com diferentes interfaces – concreto C30.....  | 87 |
| <b>Figura 4.25:</b> Malha retangular – concreto C30 e C65.....  | 88 |
| <b>Figura 4.26:</b> Malha aleatória – concreto C30 e C65.....   | 88 |
| <b>Figura 4.27:</b> Malha aleatória versus experimental - concreto C30.....   | 89 |
| <b>Figura 4.28:</b> Malha retangular versus experimental – concreto C30.....  | 89 |
| <b>Figura 4.29:</b> Malha aleatória versus experimental - concreto C65.....   | 90 |
| <b>Figura 4.30:</b> Malha retangular versus experimental - concreto C65.....  | 90 |
| <b>Figura 4.31:</b> Comparação das três discretizações – malha aleatória, malha retangular e malha monofásica – concreto C30..... | 91 |
| <b>Figura 4.32:</b> Malha aleatória com diferentes concentrações versus experimental – concreto C30.....                          | 92 |
| <b>Figura 4.33:</b> Campo de tensões das três discretizações (tensões em MPa).....  | 93 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| <b>Tabela 1.1:</b> Propriedades para diversos tipos de fibras (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).....                           | 6  |
| <b>Tabela 2.1:</b> Modelos para estimar a resistência de cisalhamento de vigas.....   | 30 |
| <b>Tabela 4.1:</b> Propriedades das fibras aço utilizadas nos ensaios.....  | 68 |
| <b>Tabela 4.2:</b> Valores médios de resistência à compressão e do módulo de elasticidade dos concretos especificados de C30..... | 69 |
| <b>Tabela 4.3:</b> Valores médios de resistência à compressão e do módulo de elasticidade dos concretos especificados de C65..... | 69 |
| <b>Tabela 4.4:</b> Parâmetros para o modelo numérico.....   | 75 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $f_c$  - Resistência de compressão do concreto
- $f_t$  - Resistência de tração do concreto
- $\tau_a$  - Tensão cisalhante de adesão da fibra.
- $\tau_f$  - Tensão cisalhante de fricção da fibra
- $\tau_{au}$  - Tensão cisalhante de adesão última da fibra
- $\tau_{fu}$  - Tensão cisalhante de fricção última da fibra
- $\sigma_f$  - Tensão de tração da fibra
- $E_f$  - Módulo de elasticidade da fibra
- $G_f$  - Módulo de aderência da matriz na interface
- $\tau_{av}$  - Tensão de cisalhamento de aderência média da fibra
- $f'_{cf}$  - Resistência de compressão do concreto reforçado com fibra
- $\epsilon_c$  - Deformação do concreto
- $\epsilon'_{cf}$  - Deformação do concreto reforçado com fibra.
- $I_r$  - índice de reforço da fibra
- D - Constante elástica
- K - Matriz de rigidez do elemento
- Ni - Função de interpolação
- R - Componente desviadora do vetor que define um ponto P da superfície (critério de William-Warnke)
- $R_c$  - Vetor de posição normal a elipse para  $\theta = 60^\circ$  (raio máximo de compressão)
- $R_t$  - Vetor de posição normal a elipse para  $\theta = 0$  (raio máximo de tração)
- $[[\chi]]$  - salto do vetor  $\chi$
- $\rho_0$  - coesão máxima
- $d\lambda$  - multiplicador plástico
- $\zeta$  - Força de endurecimento
- $\chi$  - Variável interna de escoamento
- $:$  - produto interno entre tensores
- $\otimes$  - produto tensorial
- $tr$  - traço do tensor



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1- CONSIDERAÇÕES GERAIS

O concreto é um compósito formado por duas fases: a pasta de cimento e os agregados. Este material possui grandes vantagens, tais como: a capacidade de se adaptar a molde permitindo, desta forma, uma total liberdade às concepções arquitetônicas, eficiência para obtenção de uma estrutura monolítica hiperestática que garanta assim uma reserva de segurança, baixa necessidade de conservação e manutenção quando bem executado, grande resistência a agentes agressivos (sol, chuva), apresenta uma resistência a efeitos térmicos, atmosféricos e ao desgaste mecânico. Além disso, o baixo custo do concreto é outro atrativo que tem impulsionado sua utilização em escala mundial. O concreto só perde para a estrutura metálica nos casos de vãos muito grandes, nos quais a utilização do concreto pretendido esgota a faixa de viabilidade econômica.

Apesar destas inúmeras vantagens que contribuem para o sucesso deste compósito, o mesmo apresenta certos problemas que limitam a sua utilização, como o seu peso próprio, que acaba sendo a solicitação dimensionante quando se trata de estruturas especiais de grandes vãos, além de oferecer uma dificuldade maior às reformas ou demolições. Entretanto, a principal limitação deste material é a sua baixa resistência aos esforços de tração ( $f_t$ ), cujo valor é bem inferior à resistência à compressão ( $f_c$ ), estando geralmente compreendida entre 0,07 e 0,11 da resistência à compressão (Figueiredo, 200). Este comportamento está associado às fissuras que se formam ou já estão presentes no concreto e que interferem com uma intensidade maior quando o material é solicitado à tração. De fato, o concreto é caracterizado por uma baixa resistência à tração e pequena capacidade de se deformar, ou seja, apresenta o comportamento de um material frágil. Para contornar essa deficiência, o concreto quando submetido à tração, é reforçado em geral com elementos de aço. Historicamente este elemento de reforço constituiu-se de barras contínuas, as quais são colocadas em locais adequados na estrutura para resistir às tensões de tração e cisalhamento impostas à estrutura. Outra alternativa que vem sendo utilizada e pesquisada com maior intensidade nas últimas décadas é a incorporação de diversos tipos de fibras como reforço com o objetivo de melhorar o

comportamento do concreto à tração e, desta forma, controlar e combater a fissuração. Entretanto, o emprego da fibra com o intuito de melhorar o desempenho de um material frágil é um conceito antigo, que data dos primórdios da civilização. Há milhares de anos, conforme relatos da Bíblia, o homem já incorporava fibras da palha de trigo à argila de forma a confeccionar tijolos mais resistentes. Fibras de amianto foram usadas há cerca de 4500 anos como reforço em peças de argila cozida e outros tipos de fibra, inclusive crina de cavalo, também foram empregadas para melhorar a resistência à fratura e dar tenacidade a diversos materiais usados pelo homem (Swamy, 2000).

Na revisão bibliográfica de Simões (1998) sobre a utilização de fibras no concreto, identificam-se dois períodos bem distintos. O primeiro, anterior à década de 1960, foi pioneiro e sem nenhuma aplicação prática registrada. Nesta fase buscava-se alcançar um ganho de resistência do concreto com a presença das fibras. Como não foi possível correlacionar experimentalmente um ganho de resistência com os fatores que são geralmente utilizados para caracterizar uma adição de fibras, como o teor de fibra e as dimensões, o interesse pelo assunto reduziu-se bastante.

Entretanto, o segundo período iniciado na década de 60 e que perdura até hoje, corresponde a uma fase de rápido desenvolvimento tecnológico. Nesta segunda fase, alguns dos primeiros estudos teóricos de concreto reforçado com fibras (Romuald e Batson, 1963; Romuald e Mandel, 1964) tratavam basicamente do comportamento de concretos reforçados com fibras de aço. Este rápido desenvolvimento foi possível devido ao desenvolvimento de novas técnicas de ensaio, que permitiram avaliar com outro enfoque a real contribuição da presença das fibras, ou seja, o ganho substancial em tenacidade que elas proporcionam. De fato, o surgimento dos ensaios com deformação controlada possibilitaram um monitoramento completo do comportamento do material, inclusive, além da resistência máxima. Associado a este fato, verificou-se também que os efeitos da ação de ponte de transferência de tensão exercida pelas fibras (deslocamento, deslizamento, arrancamento ou escoamento das fibras) afetam a propagação das microfissuras, ocorrendo assim, um retardamento e um maior controle da fissuração, pois é necessária uma quantidade maior de energia para o crescimento das mesmas (Bentur e Mindes, 1990). Para entender melhor esta noção de ponte de tensões das fibras vale lembrar como um material frágil se mostra susceptível às concentrações

de tensões quando do surgimento e propagação de uma fissura a partir do aumento da tensão a ele imposto. Conforme apresentado por Figueiredo (2000), quando o concreto simples apresenta uma fissura, a mesma irá representar uma barreira à propagação de tensões, que pode ser representada simplificada pelas linhas de tensão, o que facilita a compreensão deste fenômeno. Esta fissura provoca um desvio das linhas de tensões, o que implica numa concentração de tensões na extremidade da fissura e, no caso desta tensão superar a resistência da matriz, ocorre uma ruptura abrupta do material.

O concreto reforçado com fibras, no entanto, apresenta um comportamento pseudo-dúctil. Isto ocorre pelo fato da fibra servir como ponte de transferência de tensões através das fissuras, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das mesmas. Com isto, tem-se uma grande interrupção da propagação das fissuras no concreto, ou seja, o concreto apresenta uma certa capacidade portante pós-fissuração. Este comportamento é ilustrado na figura 1.1.

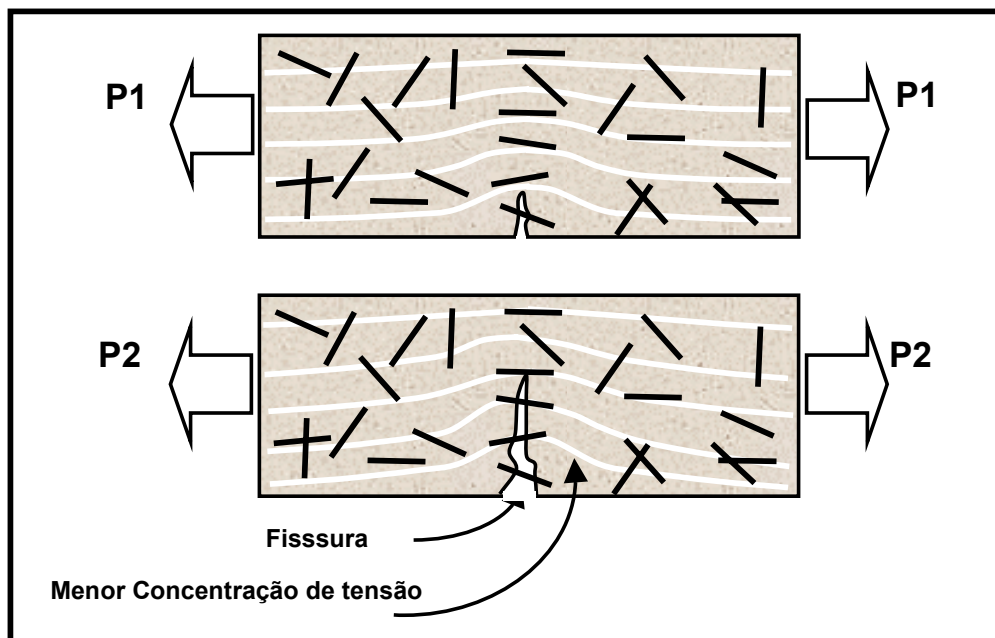


Figura 1.1: Minimização da concentração de tensão no concreto com fibras  
(adaptado de Figueiredo, 2000)

As fibras, além de serem mais eficientes no controle do processo de fissuração do concreto, contribuem para melhorar várias propriedades mecânicas como a ductilidade, a resistência ao cisalhamento, à torção e à fadiga quando comparados as do concreto convencional. Em termos experimentais, diversos

estudos foram propostos visando quantificar os efeitos da adição de fibras nas propriedades mecânicas de concretos, dos quais resultaram expressões empíricas relacionando as propriedades da matriz reforçada com as características do reforço de fibra para determinadas condições de ensaios. Nessa linha, destacam-se alguns trabalhos (Fanella e Naaman, 1985; Ezeldin e Balaguru, 1992; Hsu e Hsu, 1994). Na área teórica foram desenvolvidos vários modelos com base na lei das misturas ou teoria dos compósitos. Esta teoria determina as propriedades de um material por meio de uma homogeneização das propriedades de seus componentes, no caso da fibra e do concreto. Nesta área destacam-se os estudos iniciais de Shah e Rangan (1971). No entanto, essa teoria foi sendo abandonada, devido à dificuldade de se considerar todas as variáveis do problema. Visando superar as limitações da teoria dos compósitos, atualmente, modelos analíticos baseados em outras teorias, como a mecânica da fratura (Shah, 1990), têm sido propostos.

Paralelamente ao avanço nas pesquisas experimentais e teóricas, observou-se um desenvolvimento na tecnologia das fibras e na sua utilização prática como reforço para concreto. As fibras comumente utilizadas para reforçar o concreto são produzidas a partir do aço, de plásticos (polipropileno, polietileno), vidro, carbono, nylon, poliéster, fibras minerais (amianto) e de fibras naturais (sisal, coco e bambu), nas formas mais variadas conforme ilustrado na figura 1.2. Esta variedade enorme de fibras pode ser dividida em dois grandes grupos: fibras de baixo módulo e de alto módulo de elasticidade. Entre as primeiras, tem-se: as fibras de nylon e de polipropileno.

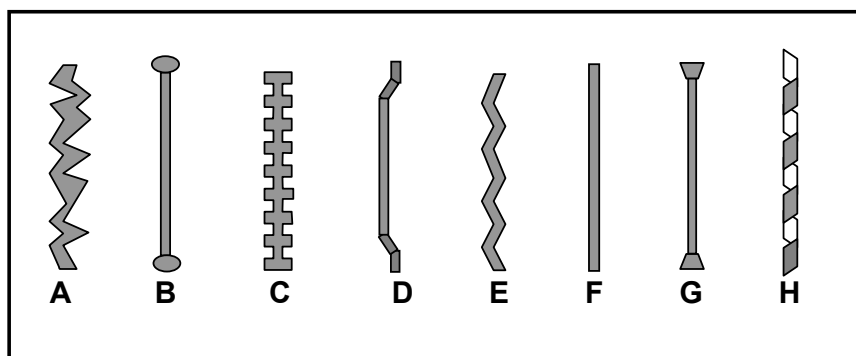


Figura 1.2: Tipos de fibras - A - fibra irregular; B - fibra com extremidades em cravo; C - fibra deformada; D - fibra com extremidade em gancho; E - fibra corrugada; F - fibra lisa; G - fibra com extremidades planas; H - fibra torcida

As fibras de baixo módulo de elasticidade interferem pouco nas resistências à tração e à compressão. Isto porque estas fibras, apesar de terem uma resistência à tração maior do que o concreto, têm módulo de elasticidade menor, o que significa uma grande deformabilidade. Assim sendo, as estruturas em concreto reforçadas com fibras de baixo módulo podem apresentar uma fissuração elevada antes de chegarem ao colapso, pois o concreto fissura antes de a fibra atingir a sua deformação de ruptura.

No que diz respeito às fibras de alto módulo de elasticidade, a sua aplicação promove uma alteração na resistência, sendo as mais comuns as de aço e carbono. A influência do módulo de elasticidade das fibras no comportamento de uma matriz de concreto pode ser entendida melhor observando-se o gráfico da figura 1.3, que mostra as curvas  $\sigma - \epsilon$  de uma matriz hipotética reforçada com dois tipos de fibras, uma de alto módulo de elasticidade e outra de baixo módulo, considerando nos dois casos, um comportamento elástico perfeito (Figueiredo, 2000).

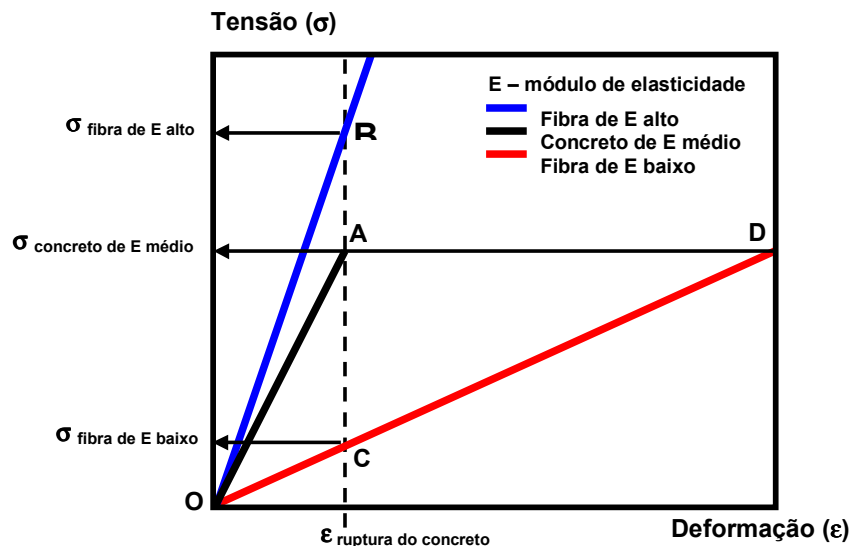


Figura 1.3: Diagrama de tensão - deformação elástica de matriz e fibras  
(adaptado Figueiredo, 2000)

O comportamento da matriz está representado pela linha O-A, enquanto as linhas O-B e O-C correspondem aos das fibras de alto e baixo módulos, respectivamente. Quando a matriz se rompe (ponto A) e transfere a tensão para a fibra, neste momento a fibra de baixo módulo possui um nível de tensão muito baixo (ponto C), devendo se deformar muito mais intensamente, até o ponto D, para atingir o mesmo nível de tensão da matriz. Logo, a fibra de baixo módulo não poderá oferecer uma

capacidade de reforço após a fissuração da matriz para um dado carregamento ou permitirá uma grande deformação do compósito, com um conseqüente elevado nível de fissuração (ponto D). Isto ocorreria supondo-se que a fibra de baixo módulo tenha resistência mecânica suficiente para atingir o nível de tensão associado ao ponto D. Porém, campanhas experimentais (Bentur e Mindes, 1990) constataram que as fibras de baixo módulo apresentam menor resistência mecânica, como pode ser observado pelos valores apresentados na tabela 1.1.

Por outro lado, a fibra de alto módulo de elasticidade já apresentará um elevado nível de tensão ( $\sigma_{\text{FIBRA}}$  de módulo de elasticidade alto) no momento da ruptura da matriz, o que lhe permitirá atuar como um reforço já a partir do ponto B, caso sua resistência não tenha sido superada. Além do tipo de fibra, diversos fatores influenciam o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras, tais como: a composição da matriz; a geometria das fibras, o tipo de fibra – aço, polimérica, mineral ou vegetal; as características da superfície das fibras; a relação entre a rigidez das fibras e a rigidez da matriz; a orientação das fibras — alinhadas ou aleatoriamente orientadas; teor de fibras na mistura ou fração de volume de fibras ( $V_f$ ) e a taxa de carregamento.

Tabela 1.1: Propriedades para diversos tipos de fibras  
(adaptado de Bentur e Mindess, 1990)

| Material                                      | Diâmetro<br>( $\mu\text{m}$ ) | Densidade<br>( $\text{g/cm}^3$ ) | Módulo de elasticidade<br>(GPa) | Resistência<br>À tração<br>(GPa) | Deformação<br>na ruptura<br>(%) |
|---|-------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| <b>Aço</b>                                    | 5 - 500                       | 7,84                             | 200                             | 0,5 - 2,0                        | 0,5 - 3,5                       |
| <b>Vidro</b>                                  | 9 - 15                        | 2,60                             | 70 - 80                         | 2 - 4                            | 2,0 - 3,5                       |
| <b>Amianto</b>                                | 0,02 - 0,4                    | 2,60                             | 160 - 200                       | 3 - 3,5                          | 2 - 3                           |
| <b>Polipropileno</b>                          | 20 - 200                      | 0,9                              | 5 - 77                          | 0,5 - 0,75                       | 8                               |
| <b>Kevlar</b>                                 | 10                            | 1,45                             | 65 - 133                        | 3,60                             | 2,1 - 4,0                       |
| <b>Carbono</b>                                | 9                             | 1,90                             | 230                             | 2,60                             | 1                               |
| <b>Nylon</b>                                  | -                             | 1,1                              | 4                               | 0,9                              | 13 - 15                         |
| <b>Celulose</b>                               | -                             | 1,2                              | 10                              | 0,3 - 0,5                        | -                               |
| <b>Acrílico</b>                               | 18                            | 1,18                             | 14 - 19,5                       | 0,4 - 1,0                        | 3                               |
| <b>Poliétileno</b>                            | -                             | 0,95                             | 0,3                             | $0,7 \times 10^{-3}$             | 10                              |
| <b>Fibra de madeira</b>                       | -                             | 1,5                              | 71                              | 0,9                              | -                               |
| <b>Sisal</b>                                  | 10 - 50                       | 1,50                             | -                               | 0,8                              | 3                               |
| <b>Matriz de concreto para<br/>comparação</b> | -                             | 2,50                             | 10 - 45                         | $3,7 \times 10^{-3}$             | 0,02                            |

A influência da fração de volume de fibras pode ser caracterizada em dois estágios da matriz de concreto: pré e pós-fissuração. No primeiro estágio, percebe-se apenas uma mudança significativa no comportamento do material quando se utilizam técnicas especiais de mistura que possibilitam a adição de altos volumes de fibras, como, por exemplo, o *SIFCON* (*Slurry Infiltrated Fibre Concrete*), que consiste em adicionar inicialmente as fibras e, em seguida, infiltrar o cimento fluido, preenchendo os vazios existentes. Esta técnica permite trabalhar com volume de fibras que variam de 7 a 15%, entretanto já houve casos que utilizaram mistura contendo até 27% de fibras (Naaman *et al.*, 1991). Para os casos normais, onde o volume de fibras utilizado varia de 1,0 a 2,0 %, os valores obtidos para a resistência à tração e deformação são praticamente os mesmos de uma matriz não reforçada (Resende, 2000). A figura 1.4 ilustra a influência da fração de volume no comportamento do material. Na pós-fissuração, as fibras influenciam significativamente o comportamento do material, pois o mesmo pode apresentar até mesmo uma resistência à tração maior do que a da matriz na fase pré-fissuração nos casos com adição de altos volumes de fibras, aumentando desta forma a capacidade de absorver energia de deformação, ou seja, a tenacidade do material.

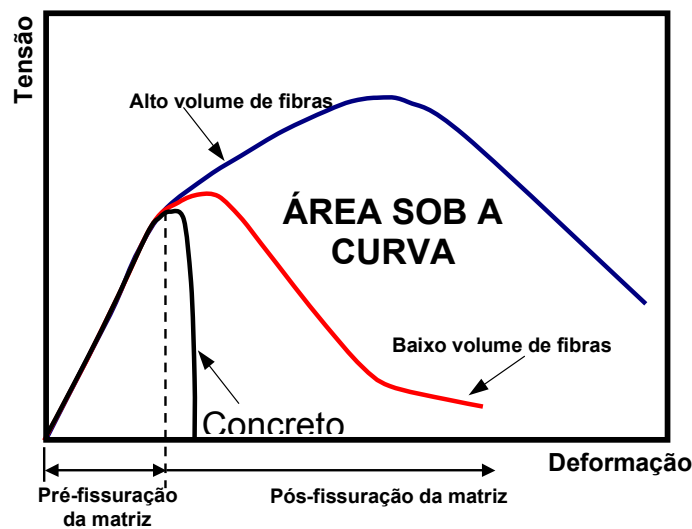


Figura 1.4: Curvas típicas de tensão - deformação para baixo e alto volume de fibras (adaptado de Bentur e Mindess, 1990)

Atualmente as fibras são utilizadas como reforço primário e secundário nas mais variadas estruturas de concreto. Nas situações em que as fibras constituem o reforço primário de um elemento estrutural não é utilizado o reforço tradicionalmente

constituído de barras de aço, porém quando as fibras são utilizadas como reforço secundário existe a presença de uma armação constituída de barras de aço que, constituem o reforço primário. Entre as inúmeras aplicações, destacam-se:

- I. O uso em painéis delgados, para vedação de vãos internos e externos de edifícios. Nestes painéis, devido à sua geometria, o reforço convencional não pode ser utilizado, tendo as fibras como reforço primário. Nestes painéis a fração de volume de fibras é relativamente alta, geralmente maior que 5% do volume, para garantir, além da resistência, uma boa tenacidade.
- II. Revestimento das paredes de túneis (concreto projetado), na produção de estacas pré-moldadas, estruturas resistentes a grandes cargas de vento (furacão, tornados, aplicações estas que apresentam altas cargas localizadas e ou grandes deformações, exigindo desta forma, um material com boa tenacidade).
- III. Os pavimentos rígidos viários (rodovias e aeroportos), pisos industriais, componentes nos quais as fibras são adicionadas primariamente para controlar a fissuração induzida pela variação da temperatura ou umidade, como tabuleiros de pontes e revestimento de pavimentos. Nestas aplicações, as fibras são utilizadas como reforço secundário.

É importante ressaltar que as fibras não substituem o reforço convencional. As fibras e as barras desempenham papéis diferentes na matriz do concreto e existem várias aplicações onde ambas são utilizadas para aumentar o desempenho das estruturas. Nas aplicações II e III, as fibras não são utilizadas para melhorar a resistência à tração do concreto, embora uma pequena melhora da resistência possa ser observada algumas vezes com a sua adição à matriz de concreto. Nestas aplicações, o papel das fibras é controlar e combater o processo de fissuração do concreto.

Embora o volume de informações disponíveis, especialmente experimentais, sobre o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibra, seja atualmente considerável, em termos de modelagem numérico-computacional, a maioria dos modelos propostos até hoje ainda tem simulado o comportamento deste material de



forma limitada, em função do grande número de parâmetros que influenciam o comportamento mecânico deste compósito, como por exemplo: a aleatoriedade da distribuição e orientação das fibras na matriz de concreto. Por este motivo, continua sendo necessário o desenvolvimento de novos modelos que possam simular, de uma maneira mais apropriada, o comportamento de elementos estruturais feitos com concreto reforçado com fibras distribuídas aleatoriamente.

## **1.2 - OBJETIVO DA PESQUISA.**

Neste trabalho apresenta-se um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibra (CRF), enfatizando dois aspectos que exercem grande influência no comportamento deste material, que são a aleatoriedade de distribuição e orientação das fibras e a questão da degradação da aderência na interface concreto - fibra. O CRF é considerado nas simulações como compósito bifásico (matriz de concreto + fibras) e como um material monofásico. O modelo apresentado baseia-se no trabalho desenvolvido inicialmente para analisar o fenômeno da aderência concreto – aço (Desir, 1998). A implementação do modelo do presente trabalho é feita no programa de elementos finitos desenvolvido por Desir (1998) e com o qual é possível simular o fenômeno da aderência sob várias condições de solicitação: estado plano de tensão e estado plano de deformação, como também problemas axissimétricos. Porém, para analisar o comportamento do CRF, considerou-se a primeira opção, fazendo as considerações necessárias para tratar a questão da distribuição aleatória de fibras.

No modelo de aderência (Desir, 1998), o concreto é modelado segundo uma lei elastoplástica definida de acordo com o critério a três parâmetros de William – Warnke. Para o aço (barra) adotou-se também uma lei elastoplástica, no caso o critério de Von Mises, que será aplicado para representar o comportamento das fibras no presente trabalho. Uma lei tensão de aderência versus deslizamento bilinear é adotada para modelar o comportamento da interface, ou seja, a degradação da aderência na interface entre os dois materiais. Visando avaliar o desempenho do modelo sugerido, processa-se uma análise para verificar a sensibilidade do modelo a alguns parâmetros que exercem grande influência no comportamento do concreto reforçado com fibra, tais como: sensibilidade à variação da fração de volume de

fibras, à distribuição aleatória de orientação e de concentração das fibras, bem como a sensibilidade do modelo ao comprimento da fibra inserida na matriz de concreto e aos parâmetros relacionados ao fenômeno de aderência na interface concreto – fibra, entre outros. Por último, os resultados numéricos e experimentais são comparados em termos da curva carga versus deslocamento e da distribuição das tensões nos elementos estruturais.

### **1.3 - RELEVÂNCIA DO TRABALHO**

O concreto reforçado com fibras apresenta um grande potencial que pode conduzir a estruturas mais duráveis e esbeltas e, como consequência, tornar as obras mais econômicas. Este grande potencial do CRF, em parte, já foi observado em vários estudos relatados na literatura (Hannat, 1978), uma vez que a adição de fibras melhora várias propriedades mecânicas do concreto, como por exemplo: a resistência à tração e à flexão, a resistência ao cisalhamento e ao impacto. Além disso, permite um maior controle da fissuração e do modo de ruptura. Diferentemente do enfoque adotado para o concreto armado convencional, a adição de fibras descontínuas tem como objetivo fundamental a modificação do modo de ruptura do material, conferindo uma maior ductilidade no estágio pós-pico do carregamento.

Este ganho de ductilidade proporcionado pelas fibras possibilita a obtenção de estruturas mais eficientes, mais leves e com menor necessidade de armadura convencional. Apesar da grande potencialidade do concreto reforçado com fibras e do atual nível de conhecimento técnico, ainda não se tem um completo conhecimento do seu comportamento mecânico, devido ao grande número de parâmetros que influenciam o seu comportamento. Diante deste fato, torna-se imperativo o desenvolvimento de novas pesquisas experimentais, bem como o desenvolvimento de modelos numérico-computacionais que possam considerar de forma mais eficiente os diversos parâmetros que interferem no comportamento do CRF, modelos estes que, futuramente, servirão de suporte para ferramentas numéricas confiáveis que auxiliarão os projetistas na simulação do desempenho de estruturas feitas com este material, o que, em consequência, permitirá uma melhor

exploração da potencialidade do concreto reforçado com fibras, de forma mais eficiente, econômica e segura.

#### **1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO DE PESQUISA**

Este trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, é feita uma breve introdução ao presente estudo, ressaltando a importância do estudo e o objetivo da pesquisa, como também a organização do trabalho. O segundo capítulo apresenta o mecanismo de interação fibra-concreto, as propriedades mecânicas do concreto reforçado com fibras e as duas abordagens, nas quais se agrupam os inúmeros modelos numéricos propostos para simular o comportamento deste material. No terceiro capítulo, é apresentado o modelo constitutivo para aderência aço-concreto (Desir, 1998), o qual foi adaptado no presente trabalho para descrever o comportamento concreto reforçado com fibras. A incorporação deste modelo numa formulação em elementos finitos, bem como as características do programa desenvolvido no trabalho de Desir (1998), são apresentados de forma resumida para facilitar o entendimento do conceito da degradação da aderência concreto - fibra, fenômeno este que é um dos aspectos tratados neste trabalho.

O quarto capítulo descreve os procedimentos utilizados na criação de um exemplo da aplicação do modelo numérico-computacional proposto, o qual simula o comportamento de uma viga feita com concreto reforçado com fibras de aço. Em seguida são apresentados os resultados que expressam a sensibilidade do modelo aos principais parâmetros que influenciam o comportamento do CRF. Por último, os resultados deste exemplo são comparados com valores experimentais para avaliar a eficiência do modelo proposto.

No quinto capítulo, as conclusões pertinentes ao trabalho são apresentadas, bem como as sugestões para futuros trabalhos relacionados ao assunto apresentado neste trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **2.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS**

No presente estudo, o concreto reforçado com fibras é definido em termos macroscópicos como um material monofásico e como um compósito bifásico formado por duas fases (concreto + fibras) com uma interface entre ambas. Neste tipo de compósito, a interação que ocorre na interface concreto - fibra é responsável pela eficiência das fibras em melhorar o desempenho do material. O objetivo deste capítulo é, portanto, apresentar o mecanismo envolvido na interação concreto - fibra, bem como as propriedades mecânicas do concreto reforçado com fibras, tais como: resistência à compressão, à tração, à flexão, resistência ao cisalhamento e o módulo de elasticidade. Neste capítulo é apresentada também uma descrição geral das abordagens utilizadas nas modelagens numéricas deste compósito.

#### **2.2 - MECANISMO DE INTERAÇÃO NA INTERFACE CONCRETO - FIBRA**

A eficiência das fibras em melhorar as propriedades mecânicas de materiais frágeis (por exemplo: concreto) é controlada por dois fatores: o processo de transferência de tensão da matriz para as fibras e pela capacidade das fibras de atuarem como pontes de transferência de tensão na matriz fissurada, a qual ocorre em estágios elevados de carregamento (Bentur e Mindess, 1990). Para tentar simular a interação concreto – fibra, os vários modelos propostos na literatura técnica produzem uma solução analítica, a qual está baseada geralmente nos resultados obtidos com ensaios de arrancamento (pull-out). Estes modelos constituem uma base para a compreensão e para o estabelecimento do mecanismo de interação que influencia significativamente o desempenho de um material de características frágeis. Os processos envolvidos na interação concreto – fibra, ocorrem num volume bastante reduzido da matriz, localizado em torno da fibra. A micro-estrutura da matriz nesta zona é bastante diferente do restante da matriz e por isso pode ser considerada como uma terceira fase com propriedades próprias. O completo entendimento do mecanismo responsável pela transferência de tensão é de fundamental importância para a determinação da lei constitutiva em termos da relação tensão versus deformação do compósito. Em materiais frágeis, o processo

de transferência de tensão pode ser dividido em duas fases, a primeira chamada de pré-fissuração e a segunda de pós-fissuração. Na fase elástica, antes da fissuração, a transferência de tensão cisalhante de adesão ( $\tau_a$ ) é o mecanismo dominante. Esta transferência elástica de tensão é o principal mecanismo a ser considerado para prever o limite de proporcionalidade e a tensão inicial de fissuração do compósito. Com o início da degradação da aderência, o processo de transferência de tensão cisalhante de fricção ( $\tau_f$ ) torna-se o dominante. Neste caso, ocorrem deslizamentos relativos entre a fibra e a matriz. A transição entre estes dois processos ocorre quando a tensão cisalhante interfacial excede a tensão cisalhante de adesão última ( $\tau_{au}$ ). Os valores da tensão cisalhante de fricção última ( $\tau_{fu}$ ) não são necessariamente iguais aos da tensão cisalhante de adesão última ( $\tau_{au}$ ), conforme ilustrado na figura 2.1, na qual é apresentada uma curva esquemática de tensão de cisalhamento na interface versus deslocamento.

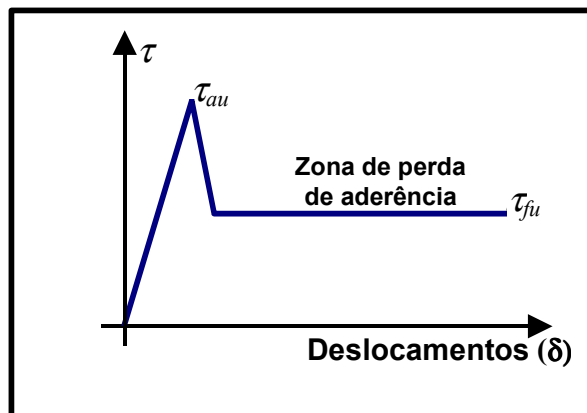


Figura 2.1: Curva esquemática de arrancamento versus deslocamento (adaptada de Bentur e Mindes, 1990)

A transição entre os dois mecanismos é um processo gradual no qual ambos os mecanismos de transferência de tensão são ativados. No entanto, estes mecanismos podem atuar também de forma combinada, o que dificulta a determinação precisa destes mecanismos. Esta situação ocorre nos casos onde a resistência de tração da matriz é elevada e quando a tensão cisalhante interfacial excede o valor da tensão cisalhante de adesão última. Devido a esta combinação, a perda de aderência pode ocorrer antes da matriz fissurar. Em compósitos com matriz de baixa resistência à tração, a fissuração pode ocorrer antes da degradação da

aderência. Em termos de análise numérica, a primeira expressão matemática proposta para descrever a transferência de tensão na fase elástica, ou seja, na fase pré-fissuração, foi desenvolvida por Cox (1952). Os modelos seguintes se basearam em conceitos similares, ou seja, na análise de um campo de tensões em torno de uma fibra descontínua embebida em uma matriz elástica (Bentur e Mindess, 1990).

Para o cálculo do campo de tensões, várias hipóteses simplificadoras são assumidas, tais como: a matriz e a fibra são ambos materiais elásticos; a interface é infinitesimal; não existe deslizamento entre a fibra e a matriz na interface; as propriedades da matriz, nas vizinhanças da fibra, são as mesmas do restante da matriz; as fibras são arranjadas de maneira regular e repetida; a deformação de tração na matriz,  $\varepsilon_m$ , a uma distância  $R_e$  do centro da fibra, é igual à deformação de tração no compósito,  $\varepsilon_c$ ; nenhuma tensão é transmitida através das extremidades da fibra; em relação ao campo de tensões, não existe efeito em torno de uma fibra atuando nas fibras vizinhas. Baseado nessas suposições, Cox (1952) derivou as seguintes equações para a tensão de tração,  $\sigma_f$ , na fibra e para a tensão cisalhante elástica na interface,  $\tau$ , a uma distância  $x$  da extremidade da fibra:

$$\sigma_f(x) = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\cosh \beta_1 \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\beta_1 l}{2}} \right] \quad (2.1)$$

$$\tau(x) = E_f \varepsilon_m \left[ \frac{G}{2E_f \ln(R_e/r)} \right]^{1/2} \frac{\sinh \beta_1 \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\beta_1 l}{2}} \quad (2.2)$$

onde:

$$\beta_1 = \left[ \frac{2G}{E_f r^2 \ln(R_e/r)} \right] \quad (2.3)$$

$R_e$  - raio efetivo da matriz em torno da fibra

$r$  - raio da fibra

$l$  - comprimento da fibra

$E_f$  - módulo de elasticidade da fibra

$G$  - módulo de aderência da matriz na interface

O problema de transferência de tensão, no entanto, em muitos tratamentos simplificados, é estabelecido por uma tensão cisalhante de aderência média  $\tau_{av}$ , assumindo desta forma uma distribuição uniforme ao longo do comprimento da fibra, sob uma carga de arrancamento  $P$ :

$$\tau_{av} = P/2\pi r l_f \quad (2.4)$$

Dentre as várias simplificações que visam estabelecer a transferência de tensões entre a matriz e as fibras, pode ser citada aquela desenvolvida por Voo e Foster (2003). Esta proposta foi baseada em observações experimentais. Nestas observações verificou-se que existe uma relação entre o tipo de fibra, a tensão cisalhante de aderência média da fibra  $\tau_{av}$ , e a resistência de tração da matriz sem fibras,  $f_t$ . Esta relação foi estabelecida como forma de obter a tensão de aderência das fibras para as situações onde este parâmetro não foi determinado diretamente através de investigações utilizando ensaios de arrancamento, uma vez que este parâmetro é de fundamental importância na modelagem do concreto com fibras. Com base nestas observações, os referidos autores estabeleceram as seguintes relações:

$$\text{Fibra com extremidade em gancho} \Rightarrow \tau_{av} = 2,5 f_t \quad (2.5)$$

$$\text{Fibra reta} \Rightarrow \tau_{av} = 1,2 f_t \quad (2.6)$$

Nos casos em que  $f_t$  não foi determinado diretamente, adotou-se a expressão:

$$f_t = 0,33(f_c)^{1/2} \quad (2.7)$$

onde  $f_c$  é a resistência à compressão da matriz

Ao analisar os mecanismos envolvidos na interação matriz-fibra, verifica-se a influência exercida pela interface, uma vez que esta interface é a responsável por transferir os esforços da matriz para as fibras. Portanto, a caracterização do comportamento deste terceiro elemento é de fundamental importância para compreender melhor esta interação matriz-fibra, que tanto influencia o comportamento macroscópico deste compósito. Nesta área, podem ser destacados os estudos teóricos de Naaman (1999), nos quais, para modelar analiticamente o comportamento da interface, adotou-se uma lei constitutiva em termos da tensão

local de aderência média e o deslizamento local ( $\xi$ ) correspondente. Exemplo desta relação constitutiva é apresentada na figura 2.2. A partir desta relação, os parâmetros  $G$  e  $\tau_{av}$ , que representam o módulo de aderência da interface e a tensão cisalhante de aderência média, respectivamente, são determinados. Estes parâmetros são fundamentais para caracterizar o comportamento da interface, como também para a sua modelagem.

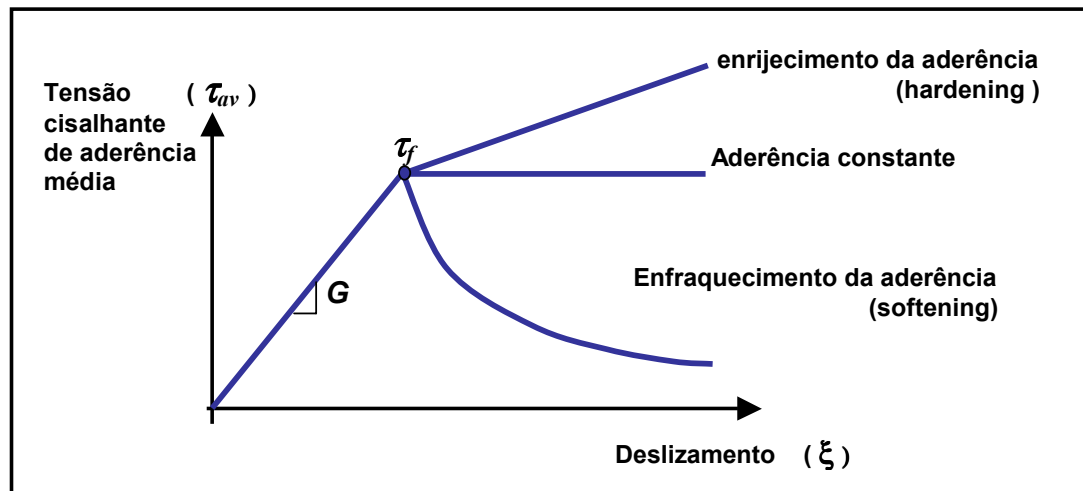


Figura 2.2: Curvas típicas de tensão de aderência versus deslizamento (adaptada de Reinhardt e Naaman, 1999)

## 2.3 – PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS.

A seguir são apresentadas, de forma resumida, algumas propriedades deste material, como a resistência à compressão, à tração, à flexão, ao cisalhamento e o módulo de elasticidade, propriedades estas que permitem compreender melhor o comportamento de um material.

### 2.3.1 – COMPRESSÃO

Experimentalmente foi verificado que a resistência à compressão é pouco influenciada pela adição de fibras, quando comparada às alterações produzidas na resistência à tração e à flexão. A adição de fibras pode provocar um aumento na resistência à compressão do material em até 23% (Williamson, 1974). Entretanto,



Fanella e Naaman (1985) verificaram que a adição de fibras de aço produziu um aumento mais significativo na resistência à compressão quando comparada à da matriz não reforçada e a da matriz com adição de fibra de polipropileno ou de vidro. A influência do tipo de fibra pode ser observada na figura 2.3, que apresenta curvas em termos de tensão-deformação para misturas contendo 1% de fibras.

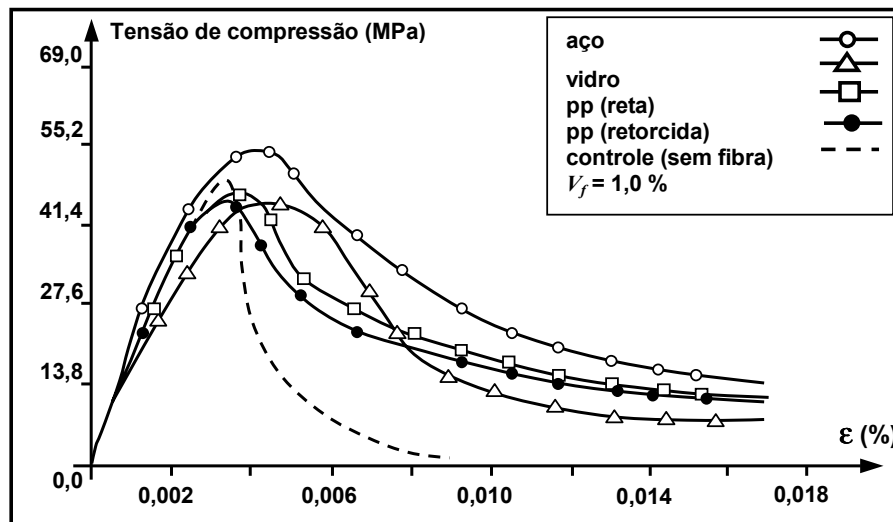


Figura 2.3: Curva tensão - deformação (adaptado de Fanella e Naaman, 1985)

Embora a adição de qualquer tipo de fibra produza nenhuma ou pequenas modificações no estágio elástico do comportamento do material, o comportamento pós-pico do material apresenta mudanças significativas em função da presença das fibras. O material torna-se capaz de absorver muito mais energia de deformação até o seu completo esgotamento, ou seja, o concreto apresenta maior tenacidade, que se traduz numa resposta muito mais suave em termos da declividade do ramo descendente da curva tensão-deformação. Tais observações podem ser comprovadas na figura 2.4, provenientes do estudo experimental conduzido com o objetivo de verificar a influência das características do reforço de fibras no desempenho à compressão do concreto (Fanella e Naaman, 1985). O aumento na tenacidade associado à presença das fibras pode, inclusive, evitar que o concreto apresente um comportamento frágil no instante do colapso (Pakotiprapha *et al.*, 1974). De fato, mesmo no caso de concretos de alta resistência, que apresentam um comportamento mais frágil, já foi constatado que as fibras podem alterar o modo de ruptura do material (Swamy *et al.*, 2000).

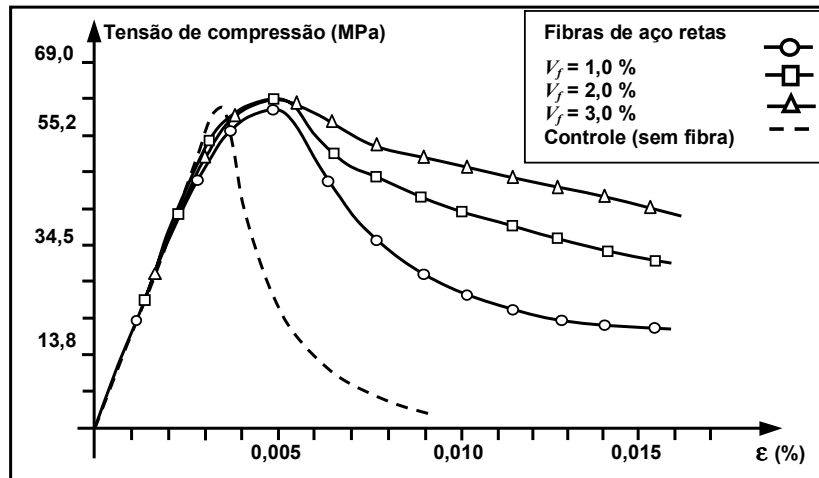


Figura 2.4: Influência do volume de fibras na curva tensão de compressão versus deformação (Fanella e Naaman, 1985)

Em termo de modelos analíticos para descrever o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras, observa-se que as várias expressões matemáticas propostas para o concreto com fibra utilizaram como base as expressões de Carreira e Chu (1985) propostas para descrever o comportamento do concreto simples. Nesse sentido, destaca-se o trabalho de Ezeldin e Balaguru (1992), que propuseram uma expressão matemática para descrever uma completa relação tensão versus deformação para o concreto com fibras, e para tal foram considerados parâmetros da fibra e a deformação correspondente para determinada resistência. Esta expressão matemática é:

$$\frac{f'_{c_c}}{f_{c_c}} = \beta \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{of}} \right) / \beta - 1 + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{of}} \right) \quad (2.8)$$

onde  $f'_{c_c}$  é a resistência à compressão de pico do concreto reforçado com fibras,  $\epsilon_{of}$  é a deformação correspondente para esta resistência,  $f_{c_c}$  e  $\epsilon_c$  são os valores de tensão e de deformação correntes da curva tensão – deformação, respectivamente, e  $\beta$  é um parâmetro que depende da forma da curva tensão - deformação. Ezeldin e Balaguru (1992), obtiveram por meio uma de série de ensaios em corpos-de-prova de concreto reforçado com fibras de aço com a extremidade em ganchos, a seguinte

relação para o parâmetro  $\beta$ :

$$\beta = 1,093 + 0,7132 (I_r)^{-0,926} \quad (2.9)$$

onde:

$$I_r = V_f \cdot l_f / \phi_f \quad (2.10)$$

$I_r$  - Índice de reforço das fibras

$l_f$ ,  $\phi_f$ ,  $V_f$  - comprimento, diâmetro e fração de volume das fibras, respectivamente.

### 2.3.2 – TRAÇÃO

O comportamento do concreto reforçado com fibras sob tração depende principalmente da fração de volume de fibras, que dependendo do percentual desta fração pode aumentar a resistência à tração em até 60% (Naaman *et al.*, 1974). A influência deste parâmetro pode ser observada na resposta tensão-deformação que, de forma geral, pode ser dividida em dois ou três estágios (Zia *et al.*, 1996). Para concretos normais com baixas frações de volume de fibras ( $V_f < 5\%$ ) a resposta em termos da relação tensão-deformação pode ser dividida em dois estágios, conforme ilustrado na figura 2.5a. Os concretos de alto desempenho com moderadas e altas frações de volume de fibras ( $V_f > 5\%$ ) apresentam uma resposta em termos da relação tensão-deformação que pode ser dividida em três estágios, como ilustrado na figura 2.5b.

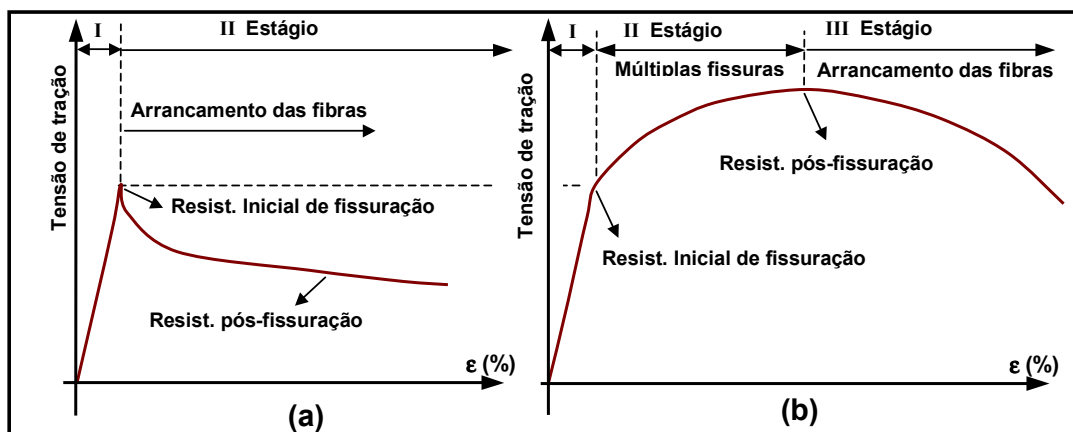


Figura 2.5: Resposta típica tensão - deformação – (a) concreto de resistência convencional reforçado com fibras -  $V_f < 5\%$ ; (b) SIFCON (concreto de alto desempenho com elevado volume de fibras -  $V_f > 5\%$ ) sob tração (Adaptado de Zia *et al.*, 1996)

Nos concretos convencionais com baixas frações, no primeiro estágio, antes de ser atingida a resistência inicial de fissuração da matriz, o comportamento pode ser descrito como elástico e semelhante ao da matriz não reforçada. O segundo estágio é caracterizado por uma redução mais suave da capacidade de carga quando comparada a de uma matriz não reforçada. Observa-se, portanto, uma resistência residual oriunda da ação de ponte de transferência de tensão exercida pelas fibras que cruzam as fissuras. O concreto de alto desempenho de elevado volume de fibras apresenta também um comportamento elástico no primeiro estágio. Porém, em função do volume de fibras, o material adquire uma capacidade de absorver cargas maiores que a necessária para fissurar a matriz, ou seja, o material possui uma resistência pós-fissuração maior do que a resistência inicial de fissuração da matriz.

Desta forma inicia-se o segundo estágio, caracterizado pela formação de múltiplas fissuras, seguida pelo terceiro estágio, que em função da não participação da matriz e do arrancamento das fibras, passa a reduzir progressivamente a capacidade de carga. Observando as curvas da figura 2.6, que apresentam a resposta mecânica de concretos reforçados com fibras em termos de tensão-deformação, obtidos por ensaios em corpos-de-prova prismáticos (Kulla, 1993), percebe-se claramente o padrão de comportamento com dois ou três estágios, dependendo da fração de volume de fibras utilizada.

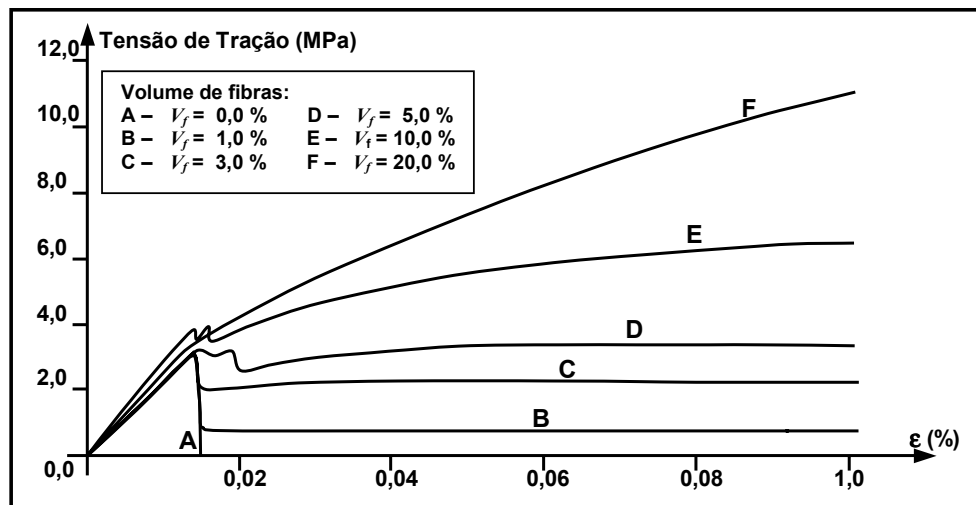


Figura 2.6: Curvas tensão de tração - deformação com várias frações de volume de fibras (adaptado de Kulla, 1993)

A forma das fibras influencia bastante o comportamento deste compósito quando submetido a esforços de tração, pois quanto melhor o sistema de ancoragem concreto-fibra, menor será a perda de resistência com o aumento de deformação. Na figura 2.7 são apresentadas algumas curvas (Shah *et al.*, 1978), em termos de tensão-deformação para diferentes tipos de fibras de aço e que permitem que se note claramente que quanto melhor é o sistema de ancoragem, maior é a capacidade de absorção de carga com o aumento de deformação. O mecanismo de ancoragem é bastante influenciado pela relação de forma das fibras, dada pela razão entre o comprimento e o diâmetro da fibra ( $l_f / \phi_f$ ).

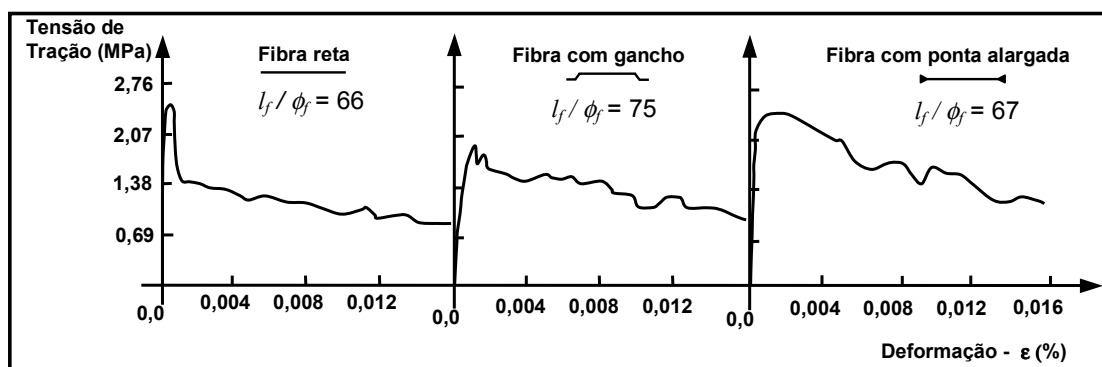


Figura 2.7: Curvas tensão de tração - deformação para diferentes tipos de fibras de aço, com fração de volume –  $V_f = 1,73\%$  (adaptado de Shah *et al.*, 1978)

Outros parâmetros que exercem grande influência na resistência à tração de concretos reforçados com fibras são a orientação e a distribuição aleatória das fibras na matriz de concreto. Para fibras alinhadas na direção do carregamento, o aumento da resistência pode ser maior que 133% para uma fração de volume de 5%, sendo esta de fibras de aço e retas (Shah e Ragnan, 1971). Entretanto, para fibras mais ou menos aleatoriamente distribuídas na matriz, o aumento de resistência é muito menor, podendo variar de 0 (zero) até 60% (Hughes, 1981), com algumas investigações indicando valores intermediários.

Quanto à modelagem numérica do comportamento do concreto reforçado com fibras sob tração, várias expressões matemáticas foram propostas para prever o comportamento na fase linear, anterior ao início da fissuração. Tais expressões são baseadas na mecânica da fratura, mecânica do dano, mecânica dos materiais compostos e em aproximações empíricas (Zia *et al.*, 1996). Utilizando a mecânica

dos materiais compostos, a resistência inicial de fissuração na tração pode ser determinada da seguinte forma (Naaman, 1987):

$$f'_{t_{ci}} = f'_i(1 - V_f) + \alpha_1 \alpha_2 \tau (V_f l_f / \phi_f) \quad (2.11)$$

onde  $f'_i$  é a resistência à tração da matriz não reforçada,  $V_f$  e  $l_f / \phi_f$ , são respectivamente a fração de volume e relação de forma de fibras,  $\alpha_1$  é um coeficiente de aderência que representa a fração de aderência mobilizada na matriz fissurada e  $\alpha_2$  é o fator de eficiência de orientação de fibra no estado não fissura do compósito.

Após o início do processo de fissuração, a resistência de pós-fissuração será tanto maior quanto for a resistência de aderência na interface concreto-fibra, a relação de forma e fração de volume de fibras. Na literatura podem ser encontradas várias equações empíricas para calcular a resistência última de compósitos com fibra sob tração (Gasparini *et al.*, 1989; Lim *et al.*, 1987; Naaman *et al.*, 1974), podendo ser destacado o estudo conduzido por Lim *et al.* (1987). Estas expressões matemáticas relacionam as propriedades do compósito, tais como a sua resistência à tração e sua resistência residual no regime pós-fissuração, com parâmetros dos seus componentes, no caso, a resistência à tração da matriz, a fração de volume de fibras, a relação de forma das fibras, as propriedades de aderência e a aleatoriedade da orientação das fibras. Segundo estes autores, o valor da resistência última à tração do concreto reforçado com fibras pode ser calculado em função das propriedades do reforço de fibras por:

$$f'_{t_{cu}} = \eta_1 \eta'_o \tau_u I_r \quad (2.12)$$

sendo  $f'_{t_{cu}}$  a resistência à tração última;  $\eta_1$  um fator de eficiência associado ao comprimento das fibras;  $\eta'_o$  um fator de orientação das fibras após a fissuração;  $\tau_u$ , a resistência das fibras ao arrancamento (tensão cisalhante última exibida pelas fibras no ensaio de pull-out); e  $I_r$  o índice de reforço das fibras. Para o caso do uso de fibras curtas, ou seja,  $l_f / \phi_f \leq 100$ , Lim *et al.* (1987) determinaram os seguintes valores:  $\eta_1 = 0,5$  e  $\eta'_o = 0,405$ .

### 2.3.3 – FLEXÃO

As fibras têm maior influência na resistência do compósito à flexão do que na resistência à compressão ou à tração, uma vez que em alguns casos, a resistência à flexão pode ser aumentada em até 150% (Johnston, 1974). O comportamento do concreto reforçado com fibras sob flexão é bastante influenciado por vários parâmetros, tais como: tipo de fibra, relação de forma, fração de volume de fibras, orientação das fibras e as características de aderência das fibras. Nos vários estudos sobre o comportamento à flexão são utilizados, geralmente, dois parâmetros, a resistência inicial de fissuração e a resistência última à flexão. A resistência última à flexão pode variar de modo considerável dependendo do volume de fibras e também, dependendo da contribuição deste e dos outros parâmetros acima citados, a resistência última pode ser menor ou igual à resistência inicial de fissuração (Zia *et al.*, 1996).

Estes parâmetros podem ser observados ao se analisar uma curva típica carga de flexão versus deflexão de corpos-de-prova de concreto reforçado com fibra, submetidos à flexão. Nesta curva, podem ser observados três estágios distintos, conforme ilustra a figura 2.8. O primeiro estágio é caracterizado por uma resposta mais ou menos linear até ponto o A. Neste estágio, a carga imposta ao material é compartilhada entre a matriz e as fibras, até atingir a resistência inicial de fissuração na flexão da matriz que é conhecida como "resistência de fissuração inicial" ou "limite de proporcionalidade".

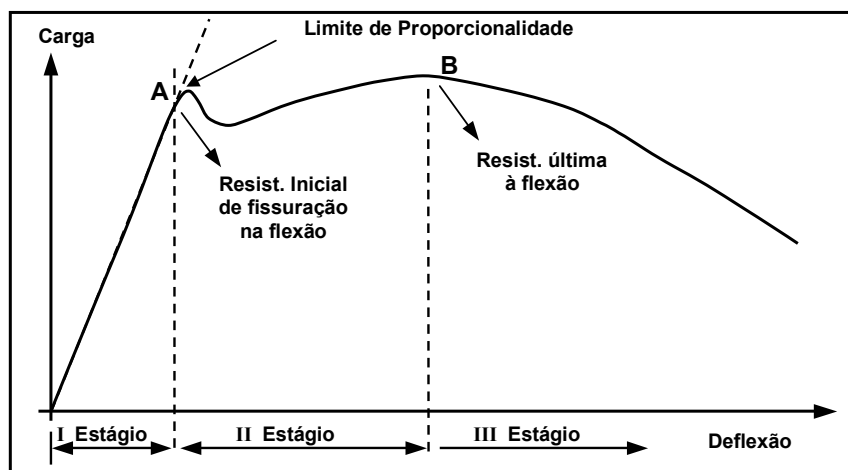


Figura 2.8: Diagrama esquemático de carga - deflexão, típica do CRF (adaptado de Zia *et al.*, 1996)

No segundo estágio observa-se um comportamento não linear localizado entre o ponto A e o ponto B. Nesta fase ocorre uma transferência progressiva de tensão da matriz fissurada para as fibras. Com carga crescente, as fibras tendem a ser arrancadas gradualmente da matriz, o que conduz a uma resposta de carga-deformação não linear até que a resistência última à flexão no ponto B seja alcançada. É importante notar que este trecho não ocorre para valores de fração de volume de fibras baixos ( $V_f < 0,5\%$ ). Nestes casos, a resistência última à flexão coincide com a resistência inicial de fissuração e desta forma a curva carga-deflexão decresce imediatamente após atingir a carga de fissuração. No terceiro estágio, após ser atingida a resistência última à flexão, em função da não participação da matriz e do arrancamento das fibras, a capacidade de carga passa a ser reduzida progressivamente.

A influência da fração de volume das fibras, bem como os três estágios característicos do comportamento do concreto reforçado com fibras submetido à flexão, podem ser observados na figura 2.9, que apresenta os resultados dos ensaios em vigas sob flexão em termos de curva carga-deflexão (Balaguru *et al.*, 1992).

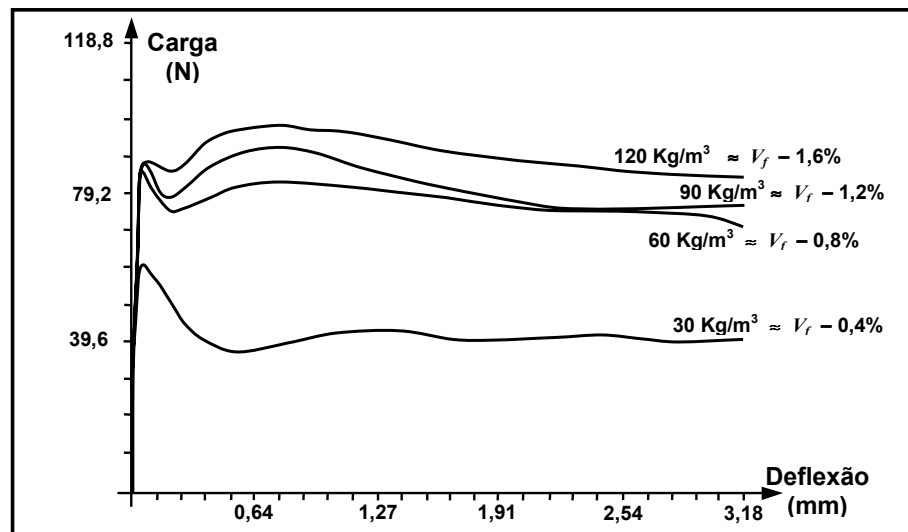


Figura 2.9: Diagrama de carga versus deflexão do CRF  
(adaptado de Zia *et al.*, 1996)

O desempenho do concreto reforçado com fibras na flexão pode ser comparado por meio da resistência inicial de fissuração, por índices de tenacidade e pelos fatores de resistência residual de acordo com as prescrições da norma ASTM



C-1018 (1997). A resistência inicial de fissuração reflete o comportamento até o início da fissuração, e os índices de tenacidade e os fatores de resistência residual refletem o comportamento pós-fissuração do material submetido à flexão. De acordo com a condição de contorno ilustrada na figura 2.10, a norma ASTM C-1018, estabelece a resistência inicial de fissuração na flexão por:

$$f'_{fci} = \frac{PL}{bd^2} \quad (2.13)$$

onde:

$P$  - carga inicial de fissuração

$L$  - vão entre os apoios da viga

$b$  - largura da viga.

$d$  - altura da viga.

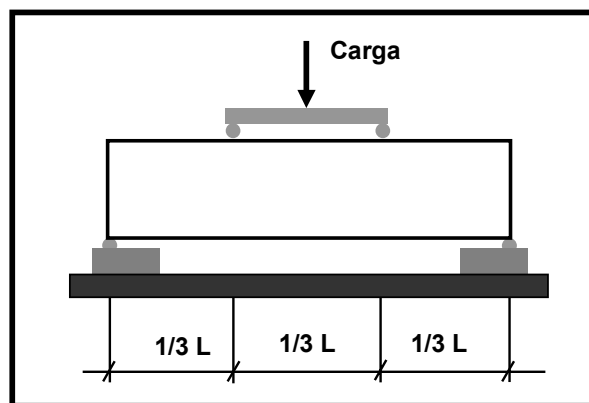


Figura 2.10: Condição de contorno do ensaio de flexão

A tenacidade é expressa como a razão entre a quantidade de energia necessária para flexionar uma viga com uma determinada flecha e que representa os estágios de fissuração. A figura 2.11 apresenta uma curva carga-deflexão e os índices de tenacidade segundo a norma ASTM C-1018 (1997). De uma forma geral, os índices de tenacidade fornecem uma referência da proximidade do comportamento de um material ao comportamento do material elástico plástico ideal adotado pela já referida norma. A obtenção de valores da ordem de 5 para o índice de tenacidade  $I_5$ , 10 para o índice  $I_{10}$ , e assim sucessivamente para os demais índices indicam que o material possui um comportamento elástico-plástico perfeito. Os índices de tenacidade  $I_5$ ,  $I_{10}$ ,  $I_{20}$  e  $I_{30}$  são definidos como:

$$I_5 = \frac{A_{3\delta_f}}{A_{\delta_f}} \tag{2.14}$$

$$I_{10} = \frac{A_{5,5\delta_f}}{A_{\delta_f}} \tag{2.15}$$

$$I_{20} = \frac{A_{10,5\delta_f}}{A_{\delta_f}} \tag{2.16}$$

$$I_{30} = \frac{A_{15,5\delta_f}}{A_{\delta_f}} \tag{2.17}$$

onde:

$\delta_f$  – deflexão inicial de fissuração, ou seja, no limite de proporcionalidade

$A_{\delta_f}$  - área sob a curva até a deflexão  $\delta_f$

$A_{3\delta_f}$  - área sob a curva até a deflexão  $3\delta_f$

$A_{5,5\delta_f}$  - área sob a curva até a deflexão  $5,5\delta_f$

$A_{10,5\delta_f}$  - área sob a curva até a deflexão  $10,5\delta_f$

$A_{15,5\delta_f}$  - área sob a curva até a deflexão  $15,5\delta_f$

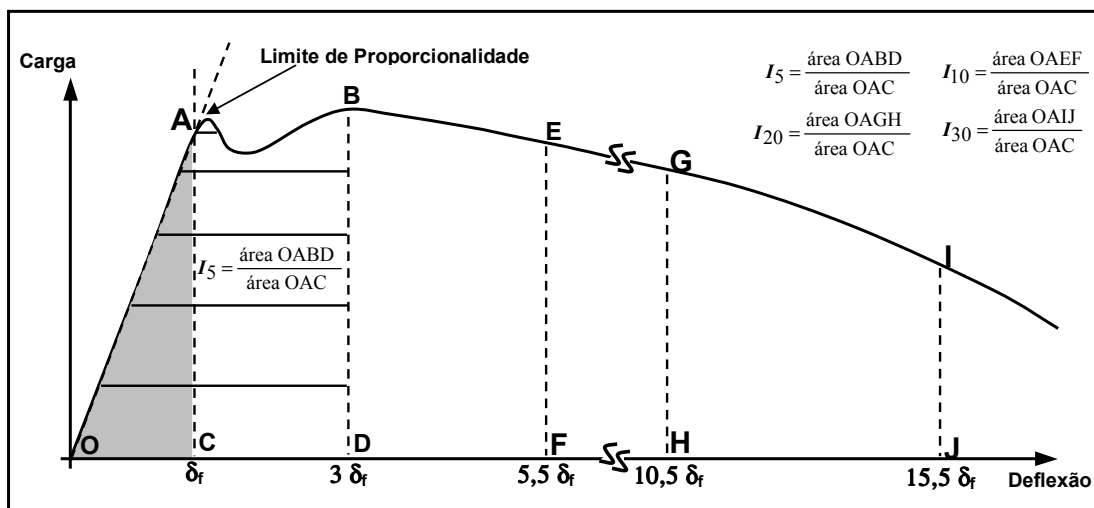


Figura 2.11: Curva carga - deflexão e índices de tenacidade (ASTM C-1018)

A partir dos índices de tenacidade é possível determinar os fatores de resistência residual, os quais, representam a resistência média que o material possui após o início da fissuração, expresso como percentuais da resistência inicial de fissuração

para intervalos de deflexão. Valores baixos para estes fatores indicam um desempenho ruim para o concreto reforçado com fibras. Os fatores de resistência residual são definidos segundo a norma ASTM C-1018 como:

$$R_{a,b} = \frac{100}{b-a} \cdot (I_b - I_a) \quad (2.18)$$

onde

$R_{a,b}$  – fator de resistência residual entre os índices de tenacidade com referência “a” e “b”.

Assim, por exemplo, os fatores de resistência residual entre os índices de tenacidade  $I_5 - I_{10}$  e  $I_{10} - I_{20}$ , apresentam as seguintes expressões:

$$R_{5,10} = 20 (I_{10} - I_5) \quad (2.19)$$

$$R_{10,20} = 10 (I_{20} - I_{10}) \quad (2.20)$$

A resistência última de flexão geralmente aumenta linearmente com o índice de reforço de fibra, definido como o produto de fração de volume de fibra pela relação de forma ( $V_f \cdot l_f / \phi_f$ ). Baseado nestas observações Shah e Rangan (1971), propuseram a seguinte equação para estimar a resistência última à flexão de concreto reforçado com fibras:

$$f'_{f_{cu}} = A \cdot f_f (1 - V_f) + \beta \left( \frac{V_f l_f}{\phi_f} \right) \quad (2.21)$$

onde  $f'_{f_{cu}}$  é a resistência última à flexão do compósito com fibra,  $f_f$  é a resistência máxima da matriz (argamassa ou concreto),  $A$  e  $\beta$  são constantes que podem ser determinadas experimentalmente. Para o concreto simples,  $A = 1$  e  $\beta = 0$ . A constante  $\beta$  está relacionada à tensão de aderência das fibras e à distribuição aleatória das mesmas. Para as constantes  $A$  e  $\beta$ , Swamy *et al.* (1974), estabeleceram os valores de 0,97 e 4,94, respectivamente, para a resistência última à flexão do concreto com fibra e 0,843 e 4,25, respectivamente, para sua resistência inicial de fissuração.

### 2.3.4 – CISALHAMENTO

A ruptura por cisalhamento pode ser repentina e catastrófica e isto ocorre para seções onde, por limitações construtivas, pouco ou nenhuma armadura pode ser colocada na estrutura. Vários pesquisadores observaram que a adição de fibras resulta num substancial acréscimo na resistência ao cisalhamento (Swamy e Bahia, 1985; Barr, 1987; Narayanan e Darwish, 1987; e Swamy *et al.*, 1987). A adição de uma fração de volume de fibras igual a 1% pode produzir um aumento de até 170% na resistência última de cisalhamento. Em alguns estudos verificou-se que os estribos de vigas podem ser parcial ou totalmente substituídos pelas fibras (Williamson, 1978).

A contribuição das fibras na melhoria do desempenho do concreto sob cisalhamento está diretamente relacionada com a aleatoriedade de distribuição e orientação das fibras, de forma a proporcionar um reforço de espaçamento pequeno, o que é impossível de ser obtido por qualquer armadura convencional. Desta forma, as fibras interceptam e fazem ligação das fissuras formadas em todas as direções, aumentando a fricção nas superfícies destas fissuras, o que explica uma distribuição mais uniforme das fissuras, com diminuição do espaçamento entre elas (Simões, 1998). Uma das aproximações mais utilizadas para estimar a resposta ao cisalhamento direto de um material é feita por meio de ensaio de compressão em corpos-de-prova cilíndricos ou prismáticos, conhecidos por (push-off specimen), conforme ilustra a figura 2.12.

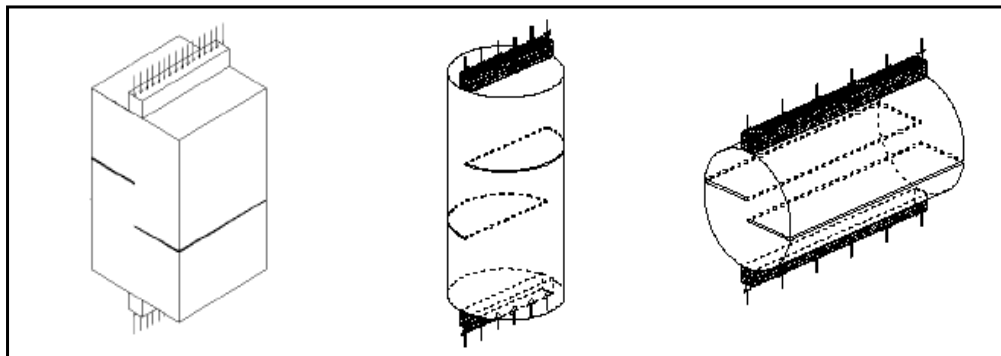


Figura 2.12: Diferentes corpos-de-prova para ensaios de cisalhamento

Utilizando corpos-de-prova semelhantes, Swamy *et al.* (1987) realizaram uma série de ensaios para verificar a influência das fibras no comportamento do concreto

ao cisalhamento. Na figura 2.13, resultados destes ensaios de cisalhamento direto, em termos de curvas do tipo tensão de cisalhamento-deslocamento vertical e deslocamento horizontal, são apresentados.

Pode-se notar que a presença das fibras promove uma diminuição sensível no deslocamento lateral dos corpos-de-prova, apesar do aumento substancial na sua capacidade de carga. Além disso, percebe-se que o efeito das fibras sobre o desempenho do material é amplificado à medida que o teor presente na mistura aumenta. As características geométricas das fibras empregadas têm grande influência sobre o desempenho do material. Fibras com maior relação de forma, em geral, mostraram-se mais efetivas, levando a maiores resistências de cisalhamento, conforme foi verificado em ensaios experimentais (Jindal, 1984).

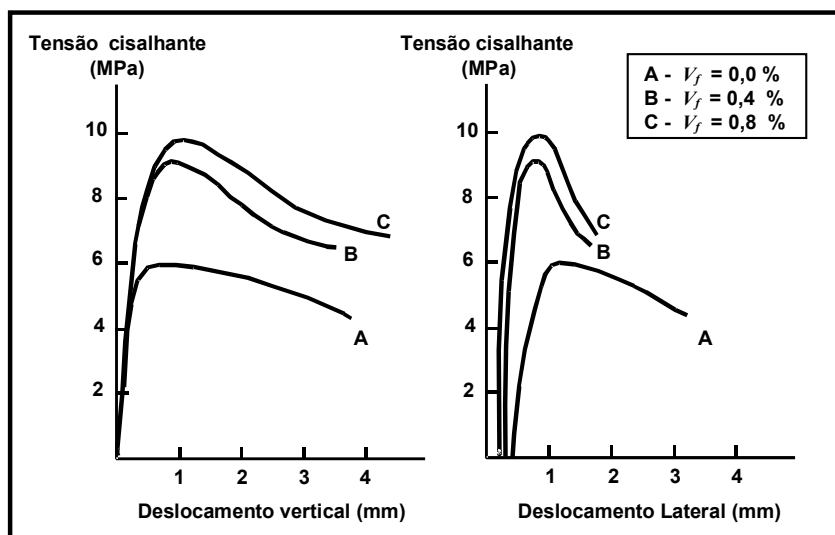


Figura 2.13: Curvas de tensão de cisalhamento - deslocamento em concreto sem fibras e concreto reforçado com fibras (Adaptado de Swamy *et al.*, 1987)

Em termos de modelagem do comportamento do material, observa-se uma tendência à procura de expressões para quantificar a contribuição das fibras no combate ao cisalhamento. Entre os vários modelos propostos para estimar a resistência de cisalhamento levando em consideração a influência das fibras podem ser destacados os modelos de Narayanan e Darwish (1987); Ashour *et al.* (1992); Imam (1995); S.C.A (1995). Na tabela 2.1, é apresentado um resumo da formulação de alguns destes modelos que, estimam a resistência ao cisalhamento de vigas de concreto reforçado com fibras.

Tabela 2.1: modelos para estimar a resistência ao cisalhamento de vigas.

| Autor               | Modelos   |
|---------------------|---|
| Ashour<br>(1992)    | $V_u = \left[ \left( 0,7 \cdot \sqrt{f_c} + 7F_f \right) \frac{d}{a} + 17,2 \cdot \rho_s \frac{d}{a} \right] wd$  |
| Iman (1995)         | $V_u = 0,6 \cdot \frac{1 + \sqrt{5.08/d_a}}{1 + d/25d_a} \cdot \sqrt[3]{\rho_s \cdot (1 + 4F_f)} \cdot \left[ f_c^{0,44} + 275 \cdot \sqrt{\frac{\rho_s \cdot (1 + 4F_f)}{(a/d)^5}} \right] \cdot wd$ |
| Narayanan<br>(1987) | $V_u = \left( 0,24 \cdot \left( \frac{f_c}{20 - \sqrt{F_f}} + 0,7 + \sqrt{F_f} \right) + 80 \rho_s \frac{d}{a} + 1,7F_f \right) wd$   |
| S.C.A.<br>(1995)    | $V_u = \left[ \xi (1 + 50 \rho_s) \cdot 0,30 f_t + 1,7F_f \right] \cdot wd$   |

onde, nestes modelos:

$f_c$  = resistência à compressão do concreto

$F_f$  = fator das fibras =  $(l_f / \phi_f) V_f \cdot B_f$

$l_f$ ;  $\phi_f$ ;  $V_f$  = comprimento, diâmetro e volume de fibras, respectivamente.

$B_f$  = fator de aderência das fibras, sendo:  $B_f = 1,0$  - fibras com ganchos,

$B_f = 0,9$  - fibras deformadas,  $B_f = 0,5$  - fibras retas e lisas.

$\rho_s$  = taxa de armadura longitudinal

$A_s$  = seção de aço

$w$ ;  $d$  = largura e altura da viga respectivamente.

$d_a$  = diâmetro máximo do agregado

$a$  = distância do apoio até a carga cortante.

### 2.3.5 - MÓDULO DE ELASTICIDADE

O módulo de elasticidade de um compósito pode ser determinado por meio de duas técnicas distintas. Na primeira técnica o módulo é determinado com base nas propriedades mecânicas e na fração de volume dos componentes do compósito. A segunda técnica está baseada na teoria da homogeneização que estabelece uma relação entre as escalas micro e macroscópicas, na qual um material heterogêneo é representado por material homogêneo “equivalente”. No método de homogeneização é usualmente assumido que um compósito é localmente formado por uma repetição espacial de uma micro estrutura ou célula elementar (unitária). Utilizando este conceito, o módulo de elasticidade de compósito é determinado com

base nas características da célula unitária. Desta forma, a eficiência em determinar, analítica ou numericamente, a resposta elástica de um compósito utilizando esta técnica depende bastante da complexidade da célula unitária considerada (Naaman e Reinhardt, 1995). Esta técnica de homogeneização é complexa e bastante extensa, sendo descrita em detalhes em muitos livros e trabalhos que abordam especificamente este assunto (Guedes, 1990).

Quanto à primeira técnica, inúmeros modelos foram propostos. Estes modelos variam dos mais simples, como o de Voigt e Reuss, até os mais complexos. Os mais simples consideram o compósito com fibras como um material de duas fases (matriz + fibra), com aderência perfeita entre as duas. Tais modelos, em geral, são determinados por meio da análise limite: análise limite superior, análise limite inferior e uma combinação linear de ambas. As expressões analíticas destes modelos são funções dos módulos de elasticidades e das frações de volume dos componentes do compósito. Na análise pelo limite superior, assume-se que as fibras são contínuas e orientadas na direção do carregamento, ao longo da qual o módulo é determinado. Já pelo limite inferior, as fibras são descontínuas e normais ao carregamento. A figura 2.14 apresenta um resultado típico obtido por meio da análise limite para estimar o módulo de elasticidade de um compósito.

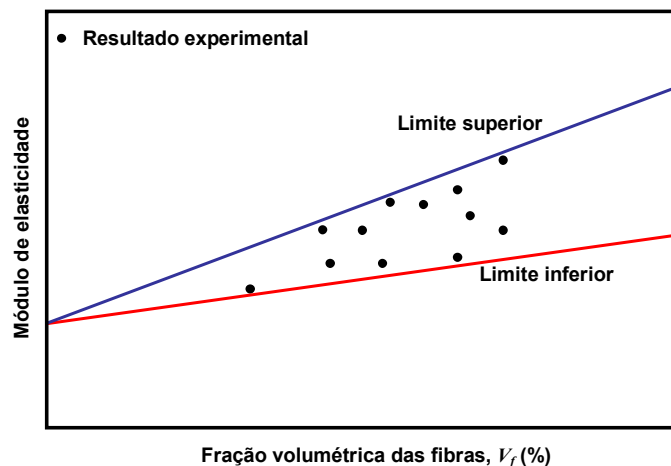


Figura 2.14: Resultado típico de uma análise limite do módulo de elasticidade de um compósito

Estes modelos mais simples, que consideram uma aderência perfeita entre as duas fases (matriz + fibra), podem superestimar o fenômeno, uma vez que na realidade não existe uma aderência perfeita. Analisando a influência deste

parâmetro no módulo de elasticidade do compósito, Baalbaki *et al.* (1992) concluíram que estes modelos não são muito eficientes para determinar o módulo de elasticidade de um compósito. Na figura 2.15 é apresentada, de forma resumida, a maioria dos modelos de duas fases propostos para determinar o módulo de elasticidade de um compósito.

|  |                     |                           |        |
|--|---------------------|---------------------------|--------|
|  | <b>Modelo Voigt</b> | $E_c = E_f V_f + E_m V_m$ | (2.22) |
|--|---------------------|---------------------------|--------|

|  |                     |   |        |
|--|---------------------|---|--------|
|  | <b>Modelo Reuss</b> | $\frac{1}{E_c} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$ | (2.23) |
|--|---------------------|---|--------|

|  |                                |  |        |
|--|--------------------------------|--|--------|
|  | <b>Modelo Hirsch - Dougill</b> | $\frac{1}{E_c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_{c_{VOIGT}}} + \frac{1}{E_{c_{REUSS}}} \right)$ | (2.24) |
|--|--------------------------------|--|--------|

|  |                        |   |        |
|--|------------------------|---|--------|
|  | <b>Modelo Popovics</b> | $E_c = \frac{1}{2} (E_{c_{VOIGT}} + E_{c_{REUSS}})$ | (2.25) |
|--|------------------------|---|--------|

|  |                             |   |        |
|--|-----------------------------|---|--------|
|  | <b>Modelo Halpin - Tsai</b> | $E_c = \frac{3}{8} E_{c_{VOIGT}} + \frac{5}{8} E_{c_{REUSS}}$ | (2.26) |
|--|-----------------------------|---|--------|

|  |                      |  |        |
|--|----------------------|--|--------|
|  | <b>Modelo Counto</b> | $\frac{1}{E_c} = \frac{1 - \sqrt{V_f}}{E_m} + \left( \frac{1 - \sqrt{V_f}}{\sqrt{V_f}} E_m + E_f \right)^{-1}$ | (2.27) |
|--|----------------------|--|--------|

|  |                      |  |        |
|--|----------------------|--|--------|
|  | <b>Modelo Hashin</b> | $E_c = \left[ \frac{(E_m E_f) + (E_f - E_m) V_f}{(E_m + E_f) - (E_f - E_m) V_f} \right] \cdot E_m$ | (2.28) |
|--|----------------------|--|--------|

Para todos os modelos: Fase 1 – matriz Fase 2 - fibra

$E_f$  - módulo de elasticidade da fibra;  $E_m$  - módulo de elasticidade da matriz

Figura 2.15: Modelos de duas fases (célula unitária) para compósitos com fibras (Alwan e Naaman, 1994)

Um exemplo destes modelos mais avançados é o proposto por Alwan e Naaman (1994), no qual uma interface em torno da fibra é introduzida no modelo, sendo considerada como a terceira fase com aderência imperfeita. Esta interface pode ser considerada na análise possuindo propriedades similares ou diferentes às



da matriz, conforme ilustra a figura 2.16. Baseando-se nestas considerações, o módulo de elasticidade de um composto com fibras alinhadas é formulado utilizando a combinação linear das análises limites. Pelo limite inferior, é assumida uma distribuição uniforme de tensão. No limite superior, é considerada uma deformação uniforme. As respectivas expressões são mostradas a seguir:

- limite inferior: 
$$E_{c\ inf} = \frac{Q}{\left[ \frac{1 - \frac{\tanh(\lambda_f)}{\lambda_f}}{E_f} \right] + \left[ \frac{(Q-1) + \frac{\tanh(\lambda_f)}{\lambda_f}}{E_m} \right]} \quad (2.29)$$

- Limite superior: 
$$E_{c\ sup} = V_f E_f \left[ 1 - \frac{\tanh(\lambda_f)}{\lambda_f} \right] + V_m E_m \quad (2.30)$$

onde:

$$Q = 1 + \frac{E_m A_m}{E_f E_f} \quad (2.31)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi r_f K}{E_m A_m}} \cdot Q \quad (2.32)$$

$l_f, r_f, A_f$  = comprimento, raio e área da fibra, respectivamente.

$K$  = Módulo de aderência da interface

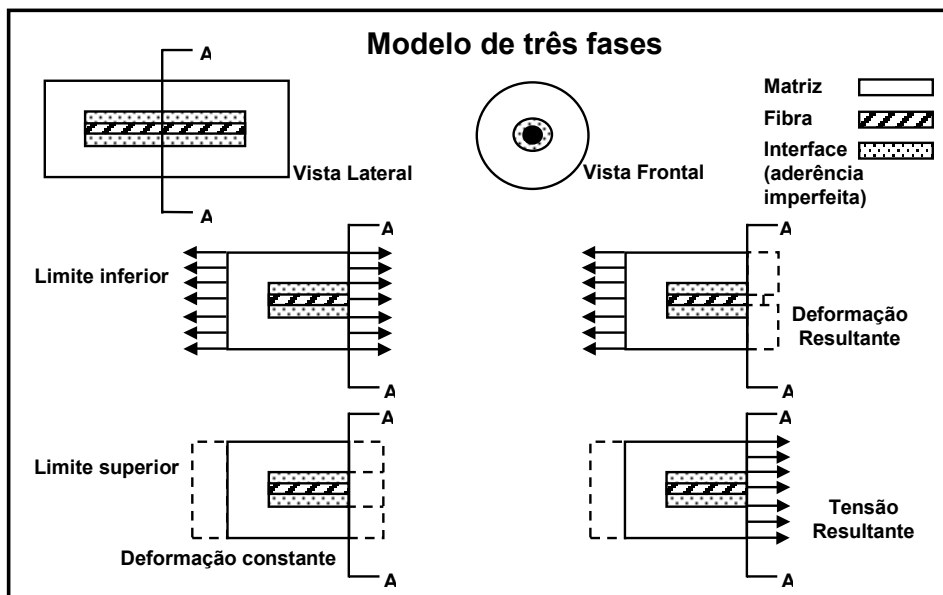


Figura 2.16: Quadro esquemático do pseudo modelo de três fases (adaptado de Alwan e Naaman, 1994)

Pela combinação linear das eq. (2.29) e (2.30), obtém-se um valor médio para o módulo de elasticidade ( $E_{med}$ ), que é dado por:

$$E_{med} = \alpha E_{c\text{inf}} + (1 - \alpha) E_{c\text{sup}} \quad (2.33)$$

Para obter o módulo de elasticidade de compósitos com fibras aleatoriamente distribuídas, realizou-se uma combinação linear entre o módulo de elasticidade de compósitos com fibras alinhadas, eq.(2.33), e a solução pelo limite inferior do modelo de Reuss modificado. Este modelo de Reuss para compósitos com fibras normais ao carregamento é então modificado para considerar o aumento de porosidade provocado pelas fibras, sendo expresso por:

$$E_{mod} = \frac{\left(\frac{1-p}{1-p_o}\right)^3 E_m E_f}{E_f V_m + \left(\frac{1-p}{1-p_o}\right)^3 E_m V_f} \quad (2.34)$$

onde:

$p$  = porosidade da matriz com fibras

$p_o$  = porosidade da matriz sem fibras

E, finalmente, pela combinação linear das eq. (2.33) e (2.34), obtém-se a expressão do módulo de elasticidade para compósitos com fibras aleatoriamente distribuídas:

$$E_{c\text{aleatório}} = \mu E_{med} + (1 - \mu) E_{mod} \quad (2.35)$$

Por meio de comparação com resultados experimentais, determinou-se um valor médio de 0,5 para os coeficientes das equações (2.33) e (2.35). O desenvolvimento completo das expressões deste modelo pode ser visto no trabalho de Alwan e Naaman (1994). Os resultados obtidos com este tipo de modelo proposto para determinar o módulo de elasticidade de compósitos reforçados com fibras aleatoriamente distribuídas podem ser observados na figura 2.17, que apresenta uma comparação entre este modelo mais avançado e os modelos mais simples, de duas fases.

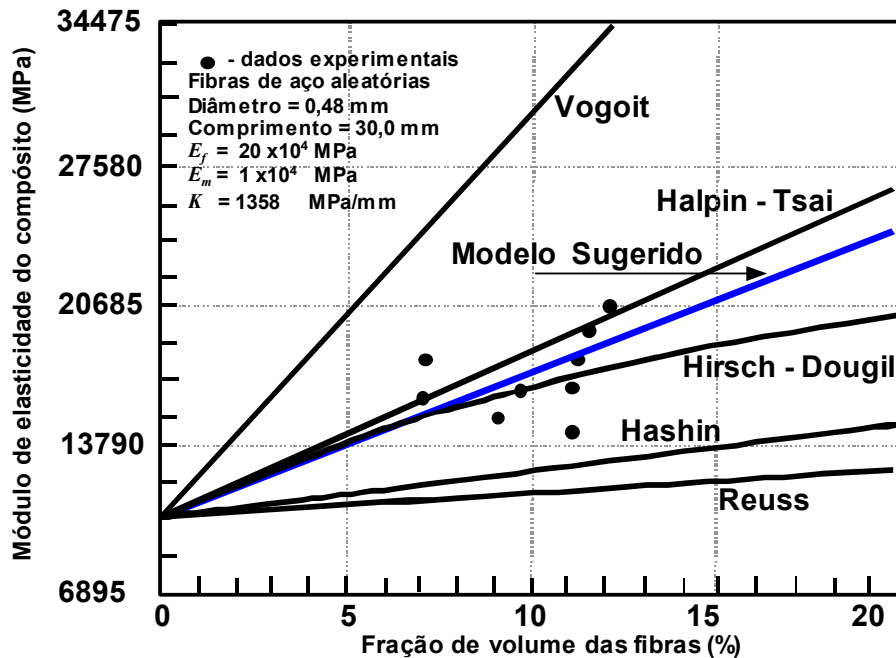


Figura 2.17: Comparação entre os modelos e dados experimentais de Alwan (1994), adaptado de Naaman e Reinhardt (1995)

## 2.4 - MODELAGEM NUMÉRICA

Métodos experimentais têm sido utilizados exhaustivamente para estudar o comportamento de compósitos reforçados com fibras, como por exemplo os casos do concreto não armado com fibras e do concreto com armadura convencional reforçado com fibras. Para tal, vários modelos matemáticos elaborados inicialmente para prever o comportamento na fase elástica são modificados para considerar a influência da adição de fibras, podendo-se destacar a consideração da aleatoriedade de distribuição e orientação e do mecanismo de aderência na interface matriz-fibra. Vale lembrar que estas influências ocorrem com maior intensidade na fase pós-pico, ou seja, após o limite de proporcionalidade da fase elástica. Por esta razão, a maioria dos modelos que são derivados de processos empíricos não é adequada para descrever o completo comportamento de compósitos.

Os modelos numérico - computacionais desenvolvidos para simular o comportamento mecânico dos compósitos reforçados com fibras podem ser classificados em dois grupos. Em ambos os grupos a análise do comportamento macroscópico do material é realizada, ou por simulação numérica, ou através da resposta mecânica de elementos estruturais feitos com este material. A diferença

entre os dois grupos está caracterizada pelo método e o nível da modelagem, ou seja, micro-escala e macro-escala (Naaman e Reinhardt, 1995).

No primeiro grupo, a modelagem do comportamento mecânico do compósito é realizada em nível de seus constituintes (micro-escala), ou seja, a modelagem está baseada nas propriedades micro-mecânicas do concreto e das fibras. Diferentes técnicas numéricas são introduzidas para considerar o início da fissuração do material, o processo de abertura de fissuras, a resistência de arrancamento das fibras (pull-out), entre outros mecanismos envolvidos. Estas propriedades micro-mecânicas são então integradas para realizar uma simulação na qual se procura estabelecer as propriedades mecânicas do material ou as respostas estruturais de elementos feitos com este compósito. Neste grupo podem ser destacados os modelos de tração de Alwan (1994), Bolander *et al.* (1997) e o modelo de flexão de Rossi *et al.* (1992).

O segundo grupo utiliza uma abordagem na qual o compósito é considerado como um material anisotrópico e que pode ser modelado por meio de leis constitutivas que descrevem o comportamento macro do material, ou seja, modelagem de macro escala. Estas leis constitutivas que descrevem o comportamento dos materiais em geral estão em termos da relação tensão-deformação ( $\sigma = f(\epsilon)$ ). Nesta linha de abordagem, podem ser citados os modelos de Wang (1995), Naaman e Homrich (1989), entre outros. A vantagem deste segundo grupo é possibilitar uma fácil incorporação das leis constitutivas a uma modelagem computacional que visa prever o comportamento do elemento estrutural feito com este compósito. Para uma melhor compreensão do tipo de modelagem utilizada em cada grupo é apresentado, de forma resumida, um exemplo de cada grupo.

O primeiro exemplo é o modelo de Bolander e Satio (1997), que analisa o comportamento de compósitos reforçados com fibras alinhadas ou aleatórias sob tração. Neste modelo, as fibras são modeladas como entidades discretas e a matriz é representada por uma malha de polígonos convexos de geometria aleatória, conforme ilustra a figura 2.18a. Cada polígono é considerado como uma partícula rígida com os seguintes graus de liberdade: dois deslocamentos e uma rotação definida no centróide da partícula. Os polígonos são interligados por uma interface, ilustrada na figura 2.18b. Esta interface flexível é na realidade um conjunto de molas e sua rigidez é determinada em função da contribuição da rigidez da matriz e das

fibras. Uma completa descrição deste esquema, incluindo sua formulação, pode ser encontrada no trabalho de Kawai (1978).

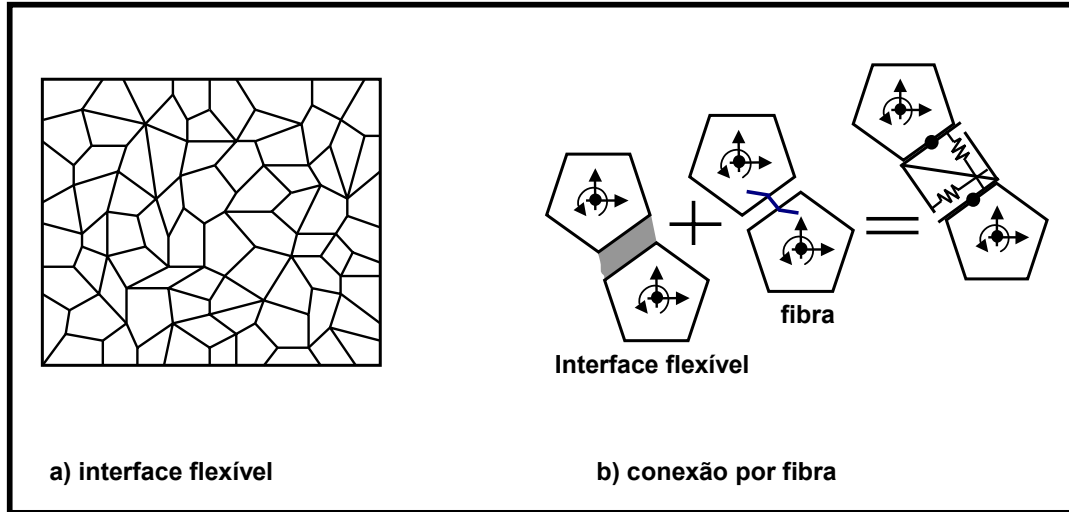


Figura 2.18: Configuração da malha utilizada no modelo

Na modelagem, as contribuições das fibras nas fases pré e pós-fissuração são consideradas de forma diferente. Antes da fissuração, a contribuição das fibras para a rigidez do sistema é determinada com base no mecanismo de transferência de tensão entre a matriz e a fibra, ou seja, a rigidez local das fibras é determinada utilizando o modelo proposto por Cox (1952), que relaciona a tensão axial da fibra com a deformação da matriz, por:

$$\sigma_f(x) = E_f \varepsilon_m \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta_1 (l_f/2 - x))}{\cosh(\beta_1 l_f/2)} \right] \quad (2.36)$$

onde  $x$  é uma distância a partir de uma das extremidades da fibra,  $E_f$  é o módulo de elasticidade da fibra,  $\varepsilon_m$  é a deformação da matriz na direção da fibra e  $l_f$  é comprimento da fibra. O parâmetro  $\beta_1$  é definido como:

$$\beta_1 = \left[ \frac{2G}{E_f r^2 \ln(R_e / r)} \right]^{1/2} \quad (2.37)$$

onde  $R_e$  é o raio efetivo da matriz em torno da fibra,  $r$  é o raio da fibra e  $G$  é o módulo de aderência da matriz na interface. A distribuição de tensão determinada pela eq. (2.36) para fibras com diferentes orientações diminui à medida que o ângulo  $\theta$  aumenta, ângulo este entre a direção de carregamento e a direção da fibra, conforme ilustrado na figura 2.19. A tensão na fibra que cruza a interface entre duas partículas é utilizada para definir a contribuição da fibra na rigidez local destas partículas. A rigidez local da fibra é determinada de forma aproximada, por meio da seguinte equação:

$$K_f = A_f E_f \frac{\cos\theta}{h} \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta_1(l_f/2 - x_c))}{\cosh(\beta_1 l_f/2)} \right] \quad (2.38)$$

onde  $A_f$  é a seção da fibra,  $x_c$  é a distância de uma das extremidades da fibra até a interface entre as partículas rígidas e  $h$  é a distância entre os centróides na direção do carregamento. Esta rigidez local é determinada para ser então somada à rigidez das partículas rígidas que, em seguida, é transformada na rigidez global do sistema.

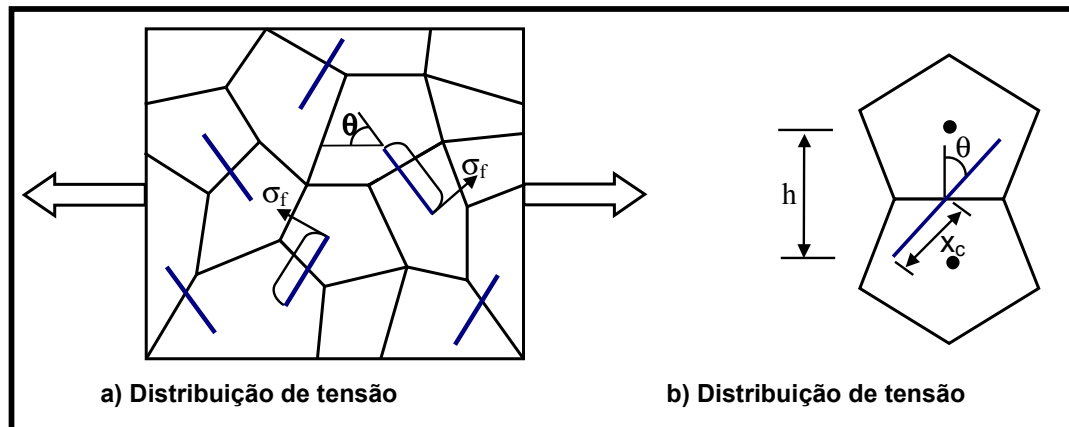


Figura 2.19: Esquema de distribuição de tensão nas fibras

A fissuração é caracterizada pela degradação das propriedades elásticas do conjunto de molas que simula a interface entre as partículas rígidas. Para cargas de tração, o critério de fissuração adotado é  $F = \sigma_n / \sigma_{mu} > 1$ , onde  $\sigma_n$  é a tensão normal para uma dada interface e  $\sigma_{mu}$  é a resistência da matriz não reforçada. A interface onde ocorre a relação  $F > 1$  é considerada fissurada. Na etapa de pós-

fissuração, a contribuição das fibras para a rigidez das partículas rígidas é considerada por meio do mecanismo de aderência fibra-matriz, sendo representado pela relação tensão de aderência versus deslizamento. Baseando-se em algumas considerações, Bolander *et al.* (1997) propuseram para a resistência do compósito na fase de pós-fissuração a seguinte equação:

$$f_{t_{cu}} = \lambda \tau V_f l_f / \phi_f \quad (2.39)$$

onde  $\lambda$  é um fator de fibras que está relacionado a vários parâmetros das fibras, que incluem o fator de eficiência de orientação das fibras, possível escoamento nas extremidades da fibra e a diminuição da resistência de atrito, entre outros,  $\tau$  é tensão de aderência na interface matriz-fibra. Uma completa compreensão deste modelo pode ser obtida no trabalho de Bolander *et al.* (1997). Analisando as equações (2.37), (2.38) e (2.39), observa-se claramente o tipo de modelagem numérico-computacional utilizada para simular o comportamento mecânico do compósito, ou seja, o comportamento macro do material é representado neste modelo por meio dos parâmetros micro-mecânicos dos componentes deste material, como por exemplo: a resistência da matriz, a tensão de aderência na interface matriz-fibra, módulo de elasticidade dos componentes, fração de volume das fibras entre outros.

Exemplos típicos do segundo grupo são os modelos propostos por Homrich e Naaman (1987), Naaman e Homrich (1989), para analisar o comportamento do *SIFCON* submetido à compressão e à tração, respectivamente. Estes modelos foram formulados com base nos processos empíricos obtidos por ensaios experimentais. A figura 2.20 ilustra o comportamento típico do *SIFCON* submetido à compressão e à tração, expresso nas curvas (a) e (b), respectivamente, em termos de relação tensão-deformação. Para modelar o comportamento deste material sob estes dois efeitos, dividiu-se a análise com base nas curvas experimentais em dois trechos, o ramo ascendente e o descendente. Após uma extensa investigação da relação tensão-deformação, estes autores propuseram as seguintes leis constitutivas para modelar o comportamento do *SIFCON* sob compressão:

- ramo ascendente

$$f'_{cc} = f_{cc \max} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}} \right)^A \right] \quad (\epsilon \leq \epsilon_{\max}) \quad (2.40)$$

onde  $f'_{c\max}$  é a tensão de pico,  $\epsilon_{\max}$  é a deformação de pico e  $A$  é um parâmetro dado por:

$$A = E_0 \frac{\epsilon_{\max}}{\sigma_{\max}} \tag{2.41}$$

em que,  $E_0$  é o módulo de elasticidade do material.

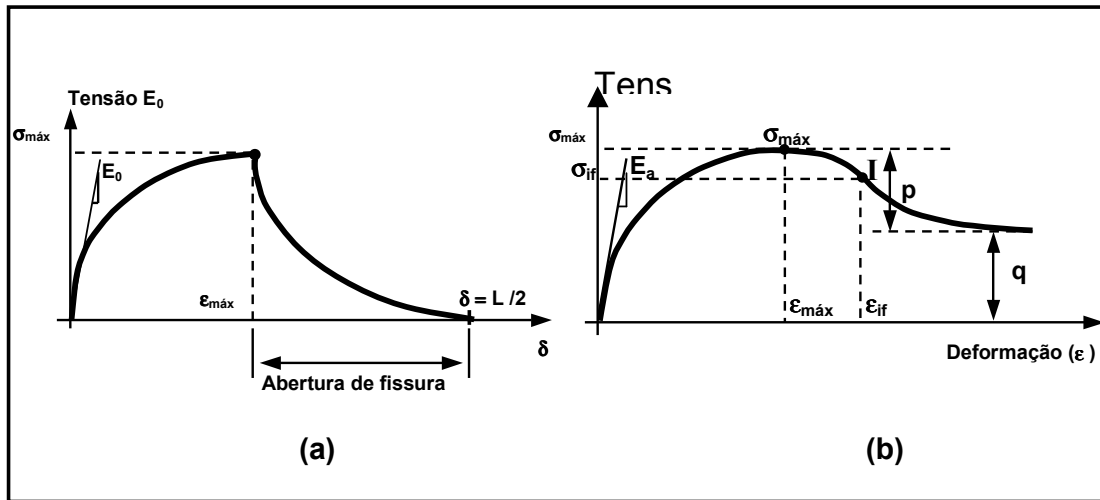


Figura 2.20: Representação esquemática da curva tensão versus deformação – (a) SIFCON sob compressão; (b) SIFCON sob tração (Naaman e Reinhardt, 1995)

- ramo descendente foi utilizado a expressão desenvolvida por Absi e Naman, (1986):

$$f'_{c_c} = p \cdot \text{Exp} \left[ b \epsilon^m \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{\max}} - 1 \right)^m \right] + q \quad (\epsilon > \epsilon_{\max}) \tag{2.42}$$

onde:

$q$  = tensão pós-fissuração (residual) obtida experimentalmente.

$$p = f'_{c_{\max}} - q \tag{2.43}$$

$$m = \frac{1}{1 + 1n \frac{f'_i - q}{f'_{c_{\max}} - q}} \tag{2.44}$$

$$b = \frac{1 - m}{m (\epsilon_{if} - \epsilon_{\max})^m} \tag{2.45}$$



onde  $f'_i$  e  $\varepsilon_{if}$  = tensão e deformação, respectivamente, no ponto de inflexão da curva na parte descendente da curva tensão x deformação. Deve-se observar que os parâmetros  $p$ ,  $q$  e o ponto de inflexão são determinados com base nos valores médios observados nas curvas tensão-deformação..

Para modelar o comportamento à tração do *SIFCON*, Naaman e Homrich (1989), propuseram um modelo semelhante ao desenvolvido para a compressão. Esta lei constitutiva para a tração também está baseada na relação tensão-deformação. Para o ramo ascendente, as equações utilizadas são as mesmas da compressão, porém com valores diferentes para os parâmetros. Para o ramo descendente, utiliza-se uma relação tensão x abertura de fissura definida por:

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{2\delta}{l}\right)^2 \quad (2.46)$$

onde  $\delta$  é a abertura de fissura. Neste modelo as barras de aço são modeladas por meio de expressões propostas por Sargin (1971):

$$\sigma = E_s \varepsilon \quad \text{para } (\varepsilon \leq \varepsilon_y) \quad (2.47)$$

$$\sigma = \sigma_y \quad \text{para } \varepsilon_y (\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_{sh}) \quad (2.48)$$

$$\sigma = \sigma_y + E_{sh} (\varepsilon - \varepsilon_{sh}) \left[ 1 - E_{sh} \frac{\varepsilon - \varepsilon_{sh}}{4(\sigma_{su} - \sigma_y)} \right] \quad \text{para } (\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_{sh}) \quad (2.49)$$

onde  $\varepsilon_y$  é a deformação no início do escoamento,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento,  $\sigma_{su}$  é a resistência última do aço,  $E_s$  é o módulo de elasticidade da barra,  $E_{sh}$  é o módulo no fim do escoamento e  $\varepsilon_{sh}$  é a deformação no fim do escoamento. Nas figuras 2.21 e 2.22, são apresentados resultados expressos através da curva momento versus curvatura e da curva momento versus deflexão, respectivamente, de uma viga de *SIFCON* reforçada com barras de aço, obtidas a partir do modelo proposto. Estes resultados teóricos são comparados com os resultados experimentais obtidos por

Sargin (1971). Analisando estes resultados, observa-se que o modelo apresentou uma boa convergência com os resultados experimentais.

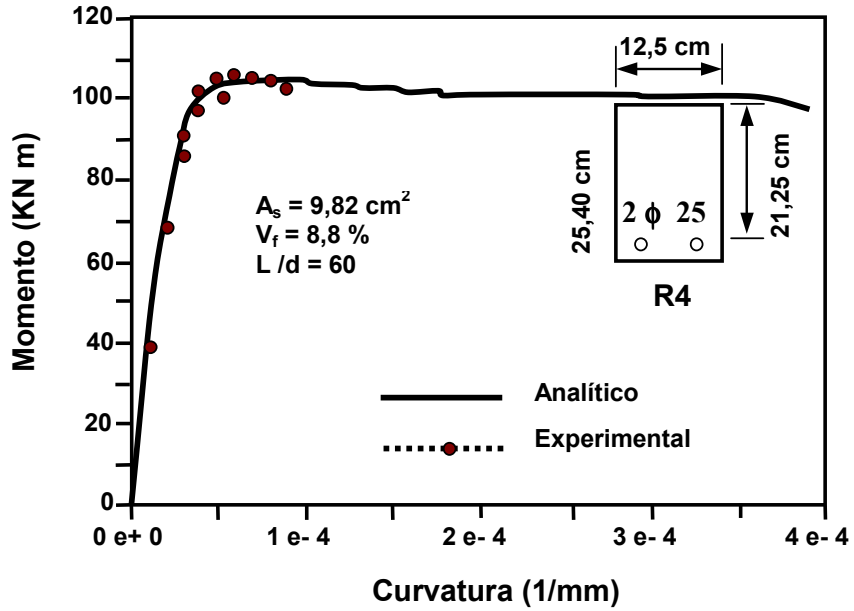


Figura 2.21: Comparação entre os resultados experimentais e o modelo analítico, gráfico momento versus curvatura (Naaman e Reinhardt, 1995)

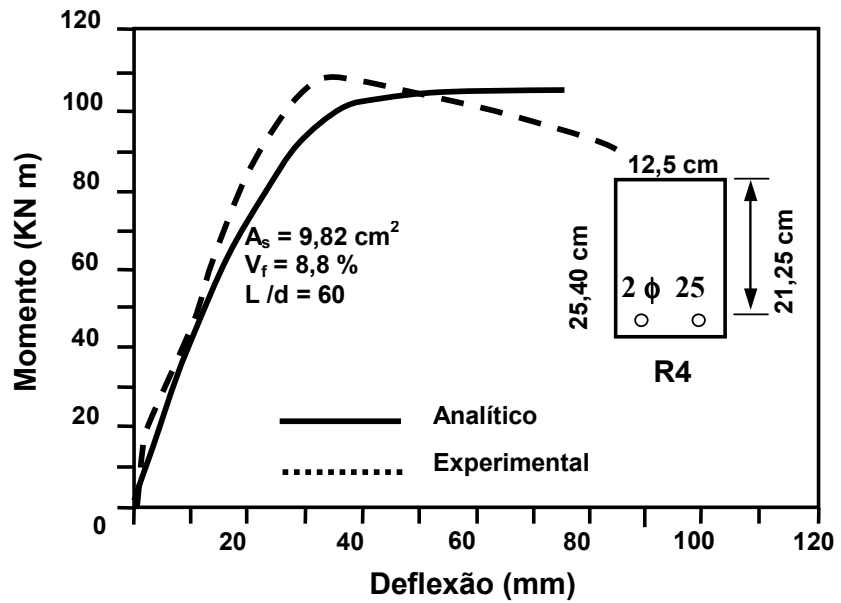


Figura 2.22: Comparação entre os resultados experimentais e o modelo analítico, curva momento - deflexão (Naaman e Reinhardt, 1995)

## 2.5 – COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE A MODELAGEM NUMÉRICA.

A apresentação destes modelos numéricos tem por objetivo fornecer uma visão geral de como este material tem sido tratado nas simulações e como pode servir de base para futuras implementações numéricas. Após a análise dos vários modelos propostos para estabelecer o comportamento mecânico de compósitos cimentícios reforçados com fibras, observar-se que as respostas obtidas com estes modelos contribuíram bastante para a compreensão do comportamento deste material, possibilitando a sua utilização de forma mais racional. Porém, como este material apresenta uma série de parâmetros que afetam o seu desempenho, tais modelos utilizam simplificações para estabelecer o seu comportamento. Devido a estas simplificações, uma completa compreensão do material não foi atingida, exigindo assim novas pesquisas e modelos que possam considerar e representar todos os aspectos do comportamento deste compósito, como por exemplo: distribuição e orientação das fibras e a interação fibra-concreto, ou seja, a deterioração progressiva da aderência na interface entre os dois materiais.

Pode-se questionar também qual a forma mais eficiente de simular o concreto reforçado com fibras, como um compósito de duas fases, na qual este material é simulado através das propriedades mecânicas dos seus componentes ou como um material monofásico, na qual este material é representado através de leis constitutivas. Para tentar responder a este questionamento, este trabalho, como foi mencionado anteriormente, propõe-se a simular o concreto reforçado com fibras segundo as duas linhas de abordagem com o objetivo de avaliar e comparar estas diferentes abordagens adotadas na simulação numérica do comportamento deste compósito.

É importante ressaltar que a questão da degradação da aderência na interface matriz-fibra, a distribuição e orientação aleatória das fibras são as principais variáveis consideradas neste estudo. Estas variáveis foram definidas como as principais por serem parâmetros que influenciam bastante o comportamento macroscópico do concreto reforçado com fibras. Portanto, o modelo proposto neste presente trabalho, distingue-se dos demais modelos propostos para analisar o comportamento do CRF pelo fato, de considerar na análise, o efeito em conjunto da distribuição e orientação aleatórias das fibras, bem como o efeito da degradação da aderência na interface matriz-fibra.

## CAPÍTULO 3

### DESCRIÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

#### 3.1 – INTRODUÇÃO

Este modelo, que tem por objetivo analisar o comportamento do concreto reforçado com fibras, está baseado no trabalho de Desir (1998), que analisa o problema da degradação da aderência aço-concreto por meio de simulações de arrancamento de barras embutidas no concreto. No modelo de aderência são considerados três materiais diferentes para o estudo do problema de aderência: o concreto, o material de interface e o aço (barra de aço), utilizado para representar a fibra neste trabalho. O material de interface fictício tem uma espessura nula. Entretanto, como a lei de comportamento do concreto é definida em função de dados experimentais, o modelo permite também analisar o concreto reforçado com fibra como um compósito de uma única fase. Para modelar o comportamento à ruptura do concreto, adota-se uma lei elastoplástica definida de acordo com o critério a três parâmetros de William-Warnke (Chen, 1988). O material de interface é tratado com lei de comportamento próprio. Para o escoamento do aço, é adotada uma lei elastoplástica que segue o critério de Von Mises.

Nos próximos itens são apresentadas as leis constitutivas dos materiais utilizados no modelo de aderência e a incorporação das mesmas dentro de uma formulação de elementos finitos. A descrição das leis de comportamento do concreto e do aço será breve, uma vez que já foi objeto de muitos estudos (Chen, 1982), que permitiram a elaboração de vários modelos eficientes. No caso da interface, a descrição das leis constitutivas será mais detalhada. A parte clássica da formulação do método dos elementos finitos, como também a implementação numérica de um elemento finito, não será apresentada neste trabalho, uma vez que as mesmas já foram amplamente descritas em inúmeros trabalhos e livros técnicos (Bathe, 1982). Porém, considerações relativas ao método serão apresentadas para facilitar o entendimento da incorporação da lei constitutiva da interface dentro de uma formulação em elementos finitos, permitindo desta forma que seja incorporado a um elemento finito o deslocamento relativo entre o aço e o concreto. Por fim, são apresentados o método de resolução numérica utilizado e os procedimentos necessários para incorporar o modelo de aderência (Desir, 1998) em um programa

básico de elementos finitos, bem como as modificações necessárias para adequá-lo ao caso de concretos reforçados com fibras.

### 3.2 – LEIS CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS

#### 3.2.1 – LEI DO CONCRETO

O comportamento do concreto à ruptura é modelado com uma lei elastoplástica definida de acordo com o critério a três parâmetros proposto por Willam e Warnke (Chen, 1988). Nesta formulação, a superfície de ruptura no espaço das tensões, conforme ilustra a figura 3.1, representa o caso de plasticidade perfeita do concreto e pode ser definida pela equação:

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_0) \quad \text{com } 0^\circ < \theta < 60^\circ \quad (3.1)$$

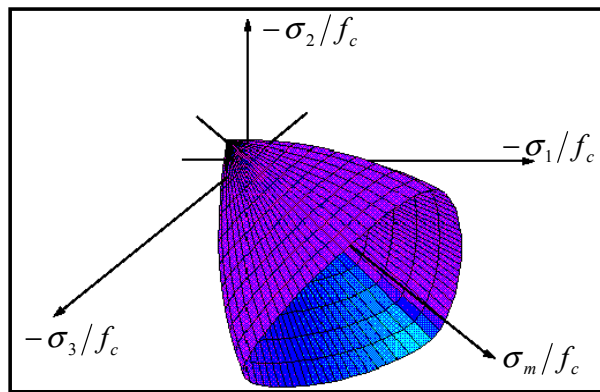


Figura 3.1: Superfície desviadora de Willam – Warnke com três parâmetros

Na equação (3.1),  $f(\theta)$  depende do ângulo de singularidade  $\theta$ , conhecido também como ângulo de Lode e  $\rho_0$  é a coesão máxima. Num plano desviador, a função de escoamento entre dois meridianos é uma curva elíptica (figura 3.2). Ainda na equação (3.1),  $\tau$ ,  $\sigma$  e  $\theta$  são definidos por:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} \\ \tau = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{2}} \\ \cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{12} \tau} \end{cases} \quad (3.2)$$

Estas expressões representam uma alternativa aos três invariantes  $I_1, I_2, I_3$  do tensor de tensão  $\sigma$ . As tensões são escolhidas de tal forma que verifiquem  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ . Além disso,  $\mathbf{s}$  é chamado tensor desviador de tensão. Esse critério foi escolhido por corresponder à maioria das verificações experimentais relativas ao comportamento do concreto até a ruptura.

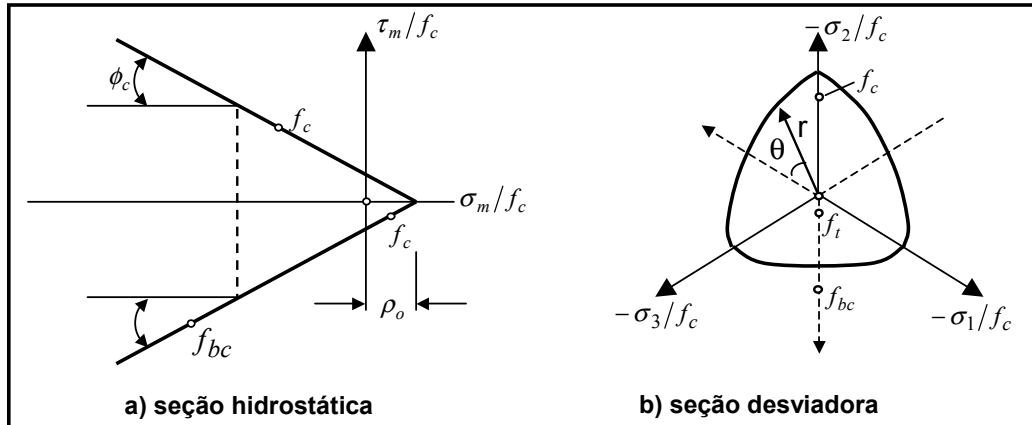


Figura 3.2: Critério de William - Warnke

No espaço das tensões, as resistências de tração uniaxial, de compressão uniaxial e de compressão biaxial são utilizadas para caracterizar este critério de ruptura. Utilizando as expressões de Fauchet (1991):

$$f_c = \frac{3r_c}{\sqrt{3} - r_c} \rho_o \quad f_t = \frac{3r_t}{\sqrt{r_t} - r_t} \rho_o \quad f_{bc} = \frac{3r_t}{\sqrt{3} - 2r_t} \rho_o \quad (3.3)$$

sendo  $r_c < \sqrt{3}$  e  $r_t < \sqrt{3/2}$ .

Os três parâmetros do critério de William-Warnke podem ser escritos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_c = \frac{\sqrt{3}f_c}{f_c + 3\rho_o} \\ r_t = \frac{\sqrt{3}(f_{bc} - f_t)}{f_t + 2f_{bc}} \\ \rho_o = \frac{f_t(\sqrt{3} + f_t)}{3f_t} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Substituindo estes parâmetros nas expressões dadas por Chen (1998),  $f(\theta)$  pode ser determinado por:

$$f(\theta) = \frac{a+b}{c} \quad (3.5)$$

onde:

$$\begin{cases} a = 2r_c (r_c^2 - r_t^2) \cos \theta \\ b = r_c (2r_t - r_c) \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_c r_t} \\ c = 4(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta + (r_c - 2r_t)^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Os valores de resistência são normalizados em relação à resistência à compressão biaxial  $f_c$ . Para considerar o escoamento do material, a equação (3.1) pode ser escrita na forma:

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - z\rho_o) \quad (3.7)$$

onde  $\rho = z\rho_o$  representa um parâmetro de endurecimento isotrópico.

### 3.2.2 – LEI DE ESCOAMENTO DO AÇO

Para a modelagem do aço, considera-se um campo de tensão uniaxial num referencial móvel  $(t, n, b)$  ao longo da linha  $s$  que representa o elemento de aço. O tensor de tensões é dado por:

$$\sigma = \sigma_{tt} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad (3.8)$$

O comportamento do aço é descrito com uma lei elastoplástica, no caso o critério de Von Mises. Então, usando as invariantes do tensor de tensões, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma = tr(\sigma/3) = \sigma_{tt}/3 \\ \tau = \sqrt{\frac{1}{3}|\sigma_{tt}|} \end{cases} \quad (3.9)$$

A superfície de Von Misses incluindo um escoamento isotrópico, escreve-se:

$$f(\sigma, z) = \tau - zk = \sqrt{\frac{1}{3}|\sigma_u|} - zk \quad (3.10)$$

onde:

$$k = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_y} \quad (3.11)$$

e  $\sigma_y$  e  $z$  são, respectivamente, a resistência à tração elástica do aço e o parâmetro de escoamento. A lei de fluxo associada, considerando somente a direção tangente pode ser simplificada para :

$$\Delta\varepsilon_u = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{H} f_{,u}^2 \right) : \Delta\sigma_u \quad (3.12)$$

ou

$$\Delta\sigma_u = \frac{EH}{H + Ef_{,u}^2} \Delta\varepsilon_u \quad (3.13)$$

Para uma lei elastoplástica  $\sigma - \varepsilon$  bi-linear,  $f_{,u}^2$  vale 1/3 e o módulo de escoamento se escreve:

$$H = \frac{EE_t}{3(E - E_T)} \quad (3.14)$$

### 3.2.3 – LEI DA INTERFACE

Num compósito como o concreto reforçado com fibra, a interface é um elemento fundamental porque o fenômeno de arrancamento ocorre antes de uma ruptura por tração das fibras, merecendo, por esta razão, uma atenção especial. A interface entre o aço e o concreto é considerada como uma superfície de descontinuidade formada pelas superfícies paralelas de dois materiais adjacentes (contínuos): fibras e concreto, respectivamente. A espessura desta zona de interface pode ser considerada infinitesimal em relação ao volume total da estrutura. As propriedades da interface são diferentes daquelas dos dois outros materiais porque deve ser considerada como um material graduado entre o concreto e o aço.



O comportamento dessa superfície elementar é modelado com uma lei constitutiva que representa o comportamento da interface concreto-aço (Desir, 1998). Existem, na literatura, diferentes abordagens para a análise do comportamento da interface concreto-aço, mas que não consideram a degradação da aderência na interface. Entretanto, a formulação original na qual se baseia este trabalho considera este aspecto delicado da aderência e que para tal adotou um enfoque energético macroscópico (Coussy, 1995) considerando também o acoplamento dos efeitos das evoluções elásticas e o escoamento plástico. Para o desenvolvimento desta lei constitutiva, foram considerados dois aspectos principais: (I) uma superfície elementar, (II) leis de evolução plástica.

### I - Superfície elementar

Para este sistema de espessura infinitesimal, o equilíbrio mecânico e a cinemática das deformações precisam ser assegurados. O primeiro é assegurado por meio da verificação da continuidade do vetor de tensões que atua na superfície:

$$T^- = T^+ \Leftrightarrow [[\sigma \cdot n]] = 0 \quad (3.15)$$

Na equação (3.15),  $T = \sigma \cdot n$  é o vetor de tensões,  $\sigma$  é o tensor de tensões e  $n$  é o vetor unitário normal à superfície (i.e. perpendicular à direção do elemento de fibra). Os índices – e + indicam que o mesmo vetor atua com sentido contrário sobre lados opostos. Para simplificação, cada ponto da interface é definido pela coordenada curvilínea  $s$  orientada pelo vetor tangente unitário  $t$ . Enquanto o vetor de tensão é contínuo, o vetor de deslocamentos é descontínuo, dando origem a um deslocamento relativo entre lados opostos da superfície:

$$[[\xi]] = \xi_s - \xi_c = \xi_r \quad (3.16)$$

onde  $\xi_s$  e  $\xi_c$  são os deslocamentos do aço e do concreto, respectivamente. Vale lembrar que no modelo de aderência (Desir, 1998), todos os termos relacionados ao aço (barra de aço contínua) representam, neste presente trabalho, as fibras descontínuas. Na equação (3.16),  $[[\xi]] = \xi_r$  é o vetor de deslizamento da interface, ou seja, o vetor de deslocamentos relativos. O vetor de tensões  $T$  é a força que

origina o gradiente de deslocamento permanente  $d\xi_r^p$ . Para um comportamento elastoplástico da interface, escreve-se o vetor de tensão em função dos deslocamentos elásticos e permanentes na forma equivalente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_o + \mathbf{C} \cdot (\xi_r - \xi_r^p) \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{T}_o$  representa o vetor de tensões iniciais enquanto  $\mathbf{C}$  é um tensor de rigidez elástico de segunda ordem. No caso isotrópico, este último se escreve:

$$\mathbf{C} = D \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + G (\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) \quad (3.18)$$

em que  $D$  e  $G$  são constantes elásticas e  $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ .

## II - LEIS DE EVOLUÇÃO PLÁSTICA

Nesta formulação, os materiais experimentam deformações irreversíveis, sendo necessário trabalhar no campo da elasto-plasticidade. A evolução das variáveis plásticas é definida por uma lei de fluxo e outra de escoamento:

$$\begin{cases} d\xi_r^p = d\lambda \frac{\partial g(\mathbf{T}, \zeta)}{\partial \mathbf{T}} \\ d\chi = d\lambda \frac{\partial h(\mathbf{T}, \zeta)}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (3.19)$$

Nestas equações,  $d\lambda$ ,  $g = g(\mathbf{T}, \zeta)$  e  $h = h(\mathbf{T}, \zeta)$  são, respectivamente, o multiplicador plástico, o potencial plástico e o potencial de escoamento;  $\zeta$  é a força de escoamento. Estes parâmetros determinam as direções  $\partial g / \partial \mathbf{T}$  e  $\partial h / \partial \zeta$ , admissíveis, tomadas pelos incrementos plásticos  $d\xi_r^p$  e  $d\chi$ . Para uma interface com comportamento elastoplástico isotrópico, os critérios clássicos de plasticidade dos contínuos permitem estender o modelo plástico ao comportamento da interface. Para isso, consideram-se como invariantes a tensão normal  $\sigma$  e a norma do vetor de cisalhamento  $\tau$  existente na interface:

$$\begin{cases} \sigma = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \\ \tau = \sqrt{\mathbf{T}^2 - \sigma^2} = \sqrt{\tau_t^2 + \tau_b^2} \end{cases} \quad (3.20)$$

Nestas equações,  $\tau_t = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t}$  e  $\tau_b = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$  são tensões de cisalhamento nas direções  $t$  e  $b$ , respectivamente. A seguir, considera-se uma função de carga do tipo Ducker-Prager:

$$f(\mathbf{T}, \zeta) = \tau + \alpha \sigma - k + \zeta(\chi) \leq 0 \quad (3.21)$$

onde  $\alpha \geq 0$  é o ângulo de atrito e  $k$  é a coesão.

Sendo  $d\xi_r^p$  o deslocamento plástico,  $d\Gamma_t^p = d\xi_r^p \cdot \mathbf{t}$  e  $d\Gamma_b^p = d\xi_r^p \cdot \mathbf{b}$ , os deslizamentos irreversíveis nas direções  $t$  e  $b$ , respectivamente. O último está relacionado à abertura normal irreversível da interface  $d\Delta^p = d\xi_r^p \cdot \mathbf{n}$  mediante o coeficiente de dilatação  $\delta$ . De modo que considerando o multiplicador plástico,  $d\Delta^p$ ,  $d\Gamma_t^p$  e  $d\Gamma_b^p$  obtêm-se as expressões que compõem o módulo elasto-plástico, que na forma matricial é expresso por:

$$(C^{ep}) = \begin{bmatrix} D\left(1 - \alpha\delta\frac{D}{h}\right) & \frac{DG}{h}\delta\frac{\tau_t}{\tau} & -\frac{DG}{h}\delta\frac{\tau_b}{\tau} \\ \frac{DG}{h}\alpha\frac{\tau_t}{\tau} & G\left(1 - \frac{G}{h}\left(\frac{\tau_t}{\tau}\right)^2\right) & -\frac{G^2}{h}\frac{\tau_b\tau_t}{\tau^2} \\ -\frac{DG}{h}\alpha\frac{\tau_b}{\tau} & -\frac{G^2}{h}\frac{(\tau_t\tau_b)}{\tau^2} & G\left(1 - \frac{G}{h}\left(\frac{\tau_b}{\tau}\right)^2\right) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

sendo que  $(C^{ep})$  não é simétrico quando  $\alpha \neq \delta$ , isto é, quando a lei de fluxo plástico da interface é não-associada ( $f \neq g$ ). Esta representação matricial do tensor  $C^{ep}$  liga os incrementos de tensões e deformações por meio da lei constitutiva, sendo portanto:

$$\{dT\} = (C^{ep}) \{d\xi\} \quad (3.23)$$

### 3.3 - IMPLEMENTAÇÃO DA LEI CONSTITUTIVA DA INTERFACE NA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS.

Nesta seção, apresentam-se os procedimentos utilizados para a incorporação da lei constitutiva da interface na formulação de um elemento finito. Para a implementação desta lei que rege o comportamento da interface, desenvolveu-se a formulação incluindo um grau de liberdade de deslizamento (GLD), que permite determinar, de forma explícita, o salto de deslocamento na interface concreto-aço e que, neste presente trabalho, é considerado como a interface concreto-fibra. Para determinar este deslocamento relativo entre o aço e o concreto, foi utilizado um elemento de treliça de três nós acrescido de um grau de liberdade de deslizamento (GLD) por nó orientado na direção tangente. Este elemento representa tanto o comportamento do elemento aço (fibra) quanto o da interface, porém possui uma lei constitutiva diferente para cada material. Este conceito de grau de deslizamento pode ser entendido tomando como base uma configuração de referência, na qual dois pontos da interface (um pertencente ao concreto, e outro ao aço) são justapostos e definidos pelo mesmo vetor de posição  $X$ , de componentes  $X_i$ , numa base ortogonal  $e = (e_1, e_2, e_3)$ . Após a deformação do corpo (figura 3.3), duas novas posições definidas pelos vetores  $x_s$  e  $x_c$  são ocupadas por estes pontos e seus deslocamentos são:

$$\begin{cases} \xi_c = x_c - X \\ \xi_s = x_s - X \end{cases} \quad \text{ou também} \quad \xi_s = \xi_c + \xi_r \quad (3.24)$$

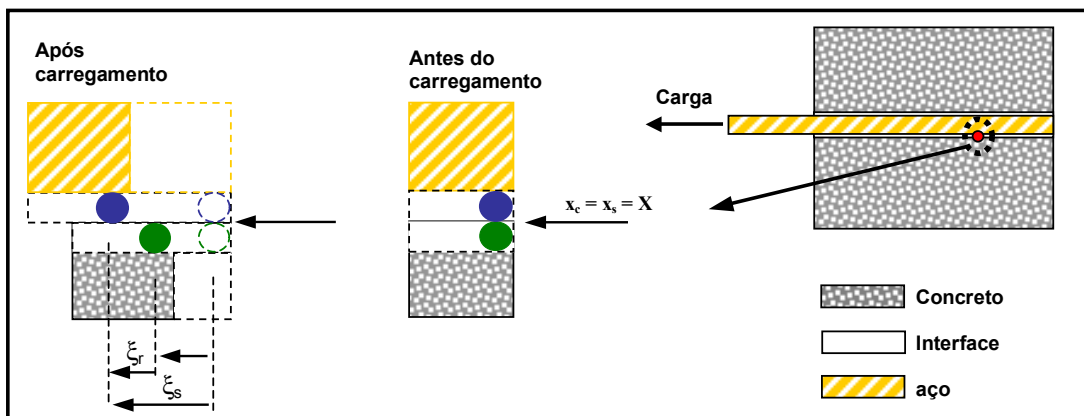


Figura 3.3: Deslocamento relativo na interface

Os índices s e c referem-se ao aço e ao concreto, respectivamente. As relações (3.24) definem o vetor deslocamento relativo:

$$[[ \xi ]] = \xi_s - \xi_c = \xi_r \quad (3.25)$$

Para incorporar este salto de deslocamento na formulação de um elemento finito, escreve-se o tensor de deformações do aço na seguinte forma:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\text{grad } \xi_s + {}^t\text{grad } \xi_s) \quad (3.26)$$

Substituindo  $\xi_s = \xi_c + \xi_r$  em (3.26), o tensor de deformação pode ser reescrito numa forma equivalente:

$$\varepsilon_s = \left[ \frac{1}{2}(\text{grad } \xi_c + {}^t\text{grad } \xi_c) + \frac{1}{2}(\text{grad } \xi_r + {}^t\text{grad } \xi_r) \right] \quad (3.27)$$

E considerando a linearização e simetrização do tensor de deformação do aço, tem-se:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c + \varepsilon_r \quad (3.28)$$

Portanto, a deformação do aço pode ser considerada como a soma da deformação obtida considerando a hipótese de continuidade ( $\varepsilon_r = 0$ , que corresponde a uma aderência perfeita, ou seja, o aço e o concreto se deslocam juntos) e uma deformação proveniente do deslocamento relativo ( $\varepsilon_r$ , salto de deslocamento na interface). Aplicando estes conceitos na formulação do método de elementos finitos, a equação (3.28) tem a seguinte notação vetorial, em relação aos deslocamentos:

$$\{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon_c\} + \{\varepsilon_r\} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \{\varepsilon_c\} = [B^c] \{\xi_c\} \\ \{\varepsilon_r\} = [B^r] \{\xi_r\} \end{cases} \quad (3.29)$$

onde  $[B^c]$  é a matriz deformação-deslocamento da hipótese de continuidade (concreto) e  $[B^r]$  é a matriz deformação-deslocamento considerando a hipótese do

salto de deslocamento na interface (deslocamento relativo). Aplicando os conceitos clássicos do método dos elementos finitos e considerando (3.29), o equilíbrio mecânico é dado por:

$$[K]\Delta\xi_s = F^{ext} - F^{int} \quad (3.30)$$

onde  $[K]$  representa a matriz de rigidez de um elemento com capacidade de deslizamento e pode ser escrita como a soma de várias matrizes genéricas:

$$[K_{mn}] = \int_v [B^m][C][B^n]dV \quad \text{com} \quad \begin{matrix} m = c, r \\ n = c, r \end{matrix} \quad (3.31)$$

onde cada  $[K_{mn}]$  representa tanto um material isolado quanto o acoplamento entre diferentes materiais dentro do contínuo. No membro direito da equação (3.30), o vetor de forças nodais  $F^{int}$  tem a seguinte forma:

$$\{F^{int}\} = \{F_m^{int}\} + \{F_n^{int}\} \quad (3.32)$$

onde:

$$\begin{cases} \{F_m^{int}\} = \int_v [B^m][\sigma]dV \\ \{F_n^{int}\} = \int_v [B^n][\sigma]dV \end{cases} \quad (3.33)$$

As equações (3.29) a (3.33) são consistentes para qualquer elemento finito com grau de liberdade de deslizamento. O conceito de grau de liberdade de deslizamento foi aplicado a elementos de treliça, pois, experimentalmente, a melhor maneira de estudar o fenômeno de aderência é por meio do ensaio de arrancamento. Em tal ensaio, o esforço de tração aplicado na barra de aço é dominante, o que justifica o uso de elementos de treliça para modelagem do aço. O elemento de treliça com o GLD pode ser perfeitamente utilizado para modelar o comportamento das fibras distribuídas aleatoriamente numa matriz de concreto, uma vez que, nas fibras, o esforço predominante é o esforço de tração. Com a utilização do elemento de treliça, é possível modelar o comportamento das fibras, bem como o

do material de interface e, desta forma, determinar o salto de deslocamento na interface como foi apresentado anteriormente. No sistema de referência do contínuo, o elemento de treliça com o GLD é descrito numa base ortogonal ( $e_x, e_y, e_z$ ) de coordenadas cartesianas, por meio de um vetor  $r$  cuja expressão é a função:

$$r(\eta) = x_i N_i(\eta) e_x + y_i N_i(\eta) e_y + z_i N_i(\eta) e_z \quad (3.34)$$

onde  $x_i, y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas do nó  $i$ ,  $N_i(\eta)$  são as funções de interpolação e  $\eta \in [1,-1]$ , uma coordenada natural. O aço é tratado como uma linha curva  $s$  orientada pelo vetor tangente  $t$ , tal que:

$$t = \frac{r'}{\|r'\|} = t_\alpha e_\alpha \quad (3.35)$$

sendo  $r'$  a derivada em relação a  $\eta$ . Além disso, um triedro móvel permite passar, ao longo de  $s$ , da base ( $e_x, e_y, e_z$ ) do contínuo à base local ( $t, b, n$ ) do elemento de treliça, como pode ser visto na figura 3.4. O vetor  $n$  pode ser escrito como:

$$n = \rho \frac{dt}{ds} = \frac{\rho}{r' \cdot r'} \left( r'' - \frac{r' \cdot r''}{r' \cdot r'} r' \right) \quad (3.36)$$

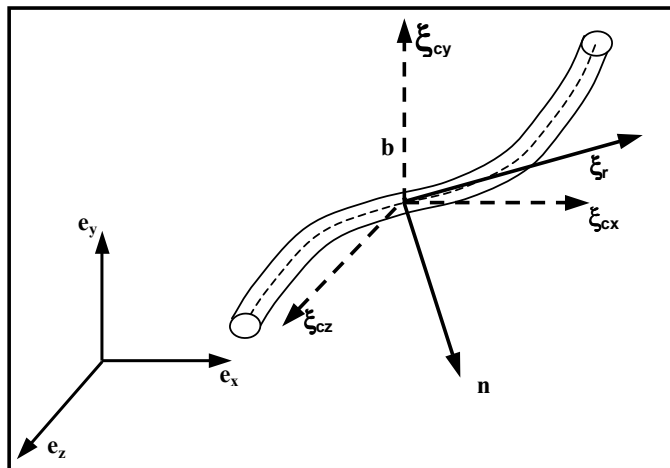


Figura 3.4: Deslocamentos nodais de um elemento de treliça com GLD

Assumindo que o deslizamento está orientado na direção  $t$ , para um elemento de treliça, o campo de deslocamentos do aço é dado por:

$$\xi_s = \xi_c + \xi_r = \xi_c + \xi_r \cdot t \quad (3.37)$$

sendo que  $\xi_s$  pode ser definido tanto na base  $(e_x, e_y, e_z)$  quanto na base  $(t, b, n)$ :

$$\begin{cases} \xi_s = (\xi_{cx} + \xi_r t_x) e_x + (\xi_{cy} + \xi_r t_y) e_y + (\xi_{cz} + \xi_r t_z) e_z \\ \xi_s = (\xi_c \cdot t + \xi_r) t + (\xi_c \cdot n) n + (\xi_c \cdot b) b \end{cases} \quad (3.38)$$

Usando-se as derivadas de Frénet, tem-se a deformação sobre  $s$  na direção  $t$  para um incremento  $\Delta\xi_s$  do vetor de deslocamento:

$$\Delta\epsilon_t = \frac{d(\Delta\xi_c)}{ds} \cdot t + \frac{d(\Delta\xi_r)}{ds} \quad (3.39)$$

Nesta análise, o elemento de treliça que representa tanto o aço como a interface possui três nós. As funções de interpolação usadas para aproximar o campo de deslocamentos (3.37) são do tipo quadrático. Estas funções  $(N_i(\eta))$  de interpolação permitem escrever:

$$\begin{cases} \xi_c = N_i(\eta) \xi_c^i \\ \xi_r = N_i(\eta) \xi_r^i \end{cases} \quad (3.40)$$

onde índice repetido indica soma.

Os vetores  $\xi_c$  e  $\xi_r$  são escritos, respectivamente, nas bases  $(e_x, e_y, e_z)$  e  $(t, b, n)$  e descrevem elementos de treliça de quatro graus de liberdade por nó.

$$\begin{cases} \xi_c^i = {}^t \{ \xi_{cx}^i, \xi_{cy}^i, \xi_{cz}^i, 0 \\ \xi_r^i = {}^t \{ 0, 0, 0, \xi_r^i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n^\circ \text{ de nós} \quad (3.41)$$



Para simplificar, omite-se  $\eta$  em (3.40) e substituindo (3.40) em (3.39):

$$\frac{d\Delta\xi_c}{ds} \cdot t = \frac{d(N_i \Delta\xi_c^i)}{ds} \cdot t = \frac{dN_i}{ds} \Delta\xi_c^i \cdot t \quad (3.42)$$

$$\frac{d\Delta\xi_r}{ds} = \frac{d(N_i \Delta\xi_r^i)}{ds} = \frac{dN_i}{ds} \Delta\xi_r^i \quad (3.43)$$

e como  $ds = \|r'\| d\eta$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \langle B^r \rangle &= \frac{dN_i}{ds} = \frac{dN_i}{d\eta} \frac{1}{\|r'\|} \\ \langle B^c \rangle &= \frac{dN_i}{ds} t \end{aligned} \quad (3.44)$$

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\xi_c}{ds} \cdot t &= \langle B^c \rangle \{\Delta\xi_c^i\} \\ \frac{d\Delta\xi_r}{ds} &= \langle B^r \rangle \{\Delta\xi_r^i\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Então, obtêm-se, para a equação (3.39), a notação vetorial (vide equação (3.29)):

$$\Delta\varepsilon_i = \langle B^c \rangle \{\Delta\xi_c^i\} + \langle B^r \rangle \{\Delta\xi_r^i\} \quad (3.46)$$

### 3.3.1 – PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

As equações de equilíbrio local constituem o ponto de partida para a dedução da forma fraca do equilíbrio mecânico do sistema, escrito da seguinte forma:

$$\text{Para o concreto} \quad \Rightarrow \quad \text{div}\sigma + \rho_o F = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_c \quad (3.47)$$

$$\text{Para o elemento de aço} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(Yt)}{ds} + f = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_s \quad (3.48)$$

onde  $\Omega_c$  e  $\Omega_s$  representam os volumes contínuos do concreto e do aço, respectivamente. Na eq. (3.48)  $Y = Y \cdot t$  representa o vetor de força normal atuando na direção tangente, com  $Y = A_s \sigma_t$ , sendo  $\sigma_t$  a tensão do aço, a qual é considerada constante na seção  $A_s$  e  $f(s) ds$  é o vetor de forças distribuídas atuando sobre um elemento  $ds$  do aço. O equilíbrio é escrito aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, para um incremento de carga de todas as forças considerando dois campos de velocidades, cinematicamente admissíveis, sendo um para o concreto e outro para o aço. No trabalho de Desir (1998), a dedução da forma fraca do equilíbrio mecânico do sistema conduz à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_c} \Delta \sigma : \hat{\varepsilon}_c d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \rho_o \Delta F \cdot \hat{v}_c d\Omega - \int_{\ell} \Delta Y \frac{d\hat{v}_s}{ds} \cdot t ds + \\
 & \sum_{i=1}^n \Delta Y_{(i)} \cdot \hat{v}_{s(i)} \cdot t_{(i)} - \phi \int_{\ell} \Delta \tau \hat{v}_r \cdot t ds = 0
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde os dois primeiros termos são relativos ao gradiente de trabalho provocado pelas forças atuando no domínio  $\Omega_c$  do contínuo. Os dois termos seguintes representam a contribuição da força atuando no aço. Em particular, o gradiente incremental  $\sum_{i=1}^n \Delta Y_{(i)} \cdot \hat{v}_{s(i)} \cdot t_{(i)}$  resulta das diferentes condições de contorno  $\Delta Y = \Delta Y_{(i)}$  no ponto (i) do aço. A última integral corresponde à força de aderência gerada na interface. Mediante a utilização das equações (3.39) a (3.46) apresentadas no item anterior, deduziu-se a expressão de deformação correspondente a um incremento do vetor de deslocamento:

$$\Delta \sigma = C : \Delta \varepsilon_c \quad \Delta Y = EA \Delta \varepsilon_t \quad \Delta \tau = G \Delta \xi_r \quad \varepsilon_t = \frac{d\hat{v}_s}{ds} \cdot t \tag{3.50}$$

a deformação (3.46) permite reescrever (3.49) na forma:

$$\int_{\Omega_c} \Delta \sigma : \hat{\varepsilon}_c d\Omega_c + \int_{\ell} \Delta Y \hat{\varepsilon}_t ds + \phi \int_{\ell} \Delta \tau \hat{v}_r \cdot t ds = \int_{\Omega_c} \rho_o \Delta F \cdot \hat{v}_c d\Omega + \sum_{i=1}^n \Delta Y_{(i)} \cdot \hat{v}_{s(i)} \cdot t_{(i)} \tag{3.51}$$

De modo genérico, tem-se, para um comportamento linear:

$$[K]\Delta\xi_s = F \quad (3.52)$$

Conforme apresentado no item anterior, para cada elemento,  $[K]$  é o somatório de várias matrizes  $[K_{mn}]$ , representando, cada uma, tanto o comportamento isolado de um material quanto o acoplamento entre diferentes materiais do meio contínuo. Usando a equação (3.31), o membro esquerdo da equação (3.52) escreve-se:

$$\sum [k_{mn}]\Delta\xi_s = \sum \int_v [B^m][C][B^n]dV \Delta\xi_s = \sum \int_v [\Delta B^m][\sigma]dV \quad (3.53)$$

onde  $\Delta\sigma = [C][B^n]\Delta\xi_s$  é o vetor de tensões admissíveis para um comportamento linear. Porém, o problema de aderência assume um comportamento não-linear e a tensão deve ser escrita como a soma:  $\Delta\sigma = \Delta\sigma_e + \Delta\sigma_p$  onde  $\sigma_e$  representa o comportamento linear, enquanto  $\Delta\sigma_p$  representa a correção de tensão necessária para o comportamento não-linear. Para considerar o incremento de tensão  $\Delta\sigma_p$ , deve-se somar, ao membro direito da equação (3.53), uma quantidade  $\int_v [B^n][\Delta\sigma_p]dV$  para todo material que exiba um comportamento não-linear.

Portanto, obtém-se:

$$\sum [K_{mn}]\Delta\xi_s = \sum \left( \int_v [B^m][\Delta\sigma_e]dV + \int_v [B^m][\Delta\sigma_p]dV \right) \quad (3.54)$$

O segundo termo do membro direito é o resíduo de força correspondente à correção plástica. Fazendo

$$R = \sum \left( \int_v [B^m][\Delta\sigma_p]dV \right) \quad (3.55)$$

pode-se reformular (3.52) para atender ao comportamento não-linear dos materiais:

$$\sum \int_v [B^m][\Delta\sigma_e]dV + R = F \quad (3.56)$$

que conduz a:

$$[K]\Delta\xi_s = F - R \quad (3.57)$$

$[B_m]$  e  $[B_n]$  são matrizes que contêm derivadas das funções de interpolação  $N_i$ . A equação (3.49) é verificada para qualquer estado físico admissível. Porém, quando ocorrem deslocamentos plásticos, o incremento do estado de tensões é uma função das variáveis internas. Tem-se, então:

$$\begin{cases} \Delta Y = EA(\Delta\varepsilon_s - \Delta\varepsilon_s^p) \\ \Delta\tau = G(\Delta\xi_r - \Delta\varepsilon_r^p) \end{cases} \quad (3.58)$$

onde  $\Delta\varepsilon_s^p$  e  $\Delta\xi_r^p$  representam a deformação plástica do aço e o deslocamento plástico relativo na interface, respectivamente. A determinação deste estado implica na integração dos deslocamentos plástico e este procedimento consiste em encontrar um estado  $\{\xi_r, \xi_r^p, \xi\}_{n+1}$  cinematicamente admissível.

### 3.4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

O modelo de aderência utilizado neste trabalho adota um método incremental iterativo para a resolução do problema de degradação de aderência na interface matriz-aço. O código elaborado para atender a formulação possui um programa principal que contém uma estrutura básica para análise por meio do método de elementos finitos. O programa principal controla a execução de um conjunto de blocos funcionais que permitem a consideração de uma série de aspectos fundamentais e específicos necessários para resolver o problema de interface, tais como:

- A aplicação de controle de deslocamentos (deslocamentos impostos), como também a aplicação de cargas.
- A utilização de um método incremental iterativo. A nível local, efetua-se um cálculo implícito onde as etapas de cargas são consideradas como incremento de tempo, pois o problema de aderência de interface é um problema não linear.

- A atribuição de números de graus de liberdade diferentes nos nós, ou seja, dois graus de liberdade para os nós que representam o concreto e três para os nós que representam os elementos de aço. Porém, se o nó representa tanto o elemento de aço quanto o de concreto, ele terá o grau máximo correspondente ao do elemento de aço, que no caso é três.
- A geração de informações locais relativas à plastificação dos materiais e a deterioração da aderência, entre outras.
- O uso de vários tipos de elementos, dependendo do comportamento de cada elemento e das propriedades de cada material.

Entretanto, para analisar o comportamento do concreto reforçado com fibras considerando uma distribuição aleatória, foi necessário o desenvolvimento de novas sub-rotinas que foram adicionadas ao programa principal. Uma delas realiza a contagem do número de lados diferentes da malha gerada para discretizar a superfície de concreto e, em seguida, insere nesta malha, de forma aleatória, o número de fibras determinado. Outras foram necessárias para condicionar os dados tanto na fase de pré-processamento quanto para o pós-processamento. No programa, a matriz de rigidez global é determinada como o somatório das matrizes de rigidez de cada elemento. Para o concreto utiliza-se um elemento quadrilateral quadrático isoparamétrico, cuja matriz de rigidez é definida por:

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi d\eta \quad (3.59)$$

Para o elemento de interface, a matriz de rigidez é constituída por partes: uma relativa ao comportamento do elemento aço e outra devida ao comportamento da interface. A contribuição do elemento aço é determinada por:

$$\{B\} = \{B_c\} + \{B_r\} + \{B_n\} \quad (3.60)$$

onde:

$$\{B_c\} = \frac{1}{\|r'\|} \frac{dN_i}{dr} \cdot t = \frac{1}{\|r'\|} \frac{dN_i}{dr} (t_1, t_2, 0) \quad (3.61)$$

$$\{B_r\} = \frac{1}{\|r'\|} \frac{dN_i}{dr} = \frac{1}{\|r'\|} \frac{dN_i}{dr} (0,0,1) \quad (3.62)$$

$$\{B_n\} = -\frac{N_i \cdot \mathbf{n}}{\rho} \quad (3.63)$$

Nas equações acima, o vetor tangente  $t$  e o normal  $n$  são calculados com (3.35) e (3.36). A matriz de rigidez do elemento é o somatório das matrizes calculadas nos três pontos de integração do elemento de aço:

$$K(ik, jk) = \sum_{i=1}^{np=3} m(ik, jk)_i \quad (3.64)$$

O termo  $m(ik, jk)$  inclui a contribuição da interface:

$$m(ik, jk) = B_{ik} B_{jk} c_i + f_i N_{ik} N_{jk} \quad \left\{ \begin{array}{l} ik, jk = 1, \dots, 9 \text{ GL, ou seja } 3 \text{ GL por nó} \\ i = 1, \dots, np \end{array} \right. \quad (3.65)$$

sendo:

$GL$  = graus de liberdade

$np$  = nº de pontos nodais

$$c_i = \|r'\| E_i A p_i \quad (3.66)$$

$$f_i = \sqrt{4\pi A} G_i \|r'\| p_i \quad (3.67)$$

onde  $E_i$  e  $A$  são o módulo de elasticidade e a seção do elemento de aço, respectivamente,  $G_i$  é o módulo de interface e  $p_i$  é o peso do ponto de integração  $i$ .

### 3.4.1 – MATRIZ TANGENTE

O equilíbrio de um sistema com comportamento plástico é obtido por meio da seguinte condição:

$$F^{\text{int}}(\xi_r^p, \zeta) - F^{\text{ext}} = 0 \quad (3.68)$$

na qual a força interna que equilibra a força externa é uma função implícita das variáveis internas de estado  $(\xi_r^p, \zeta)$ , usadas para atualizar as tensões. Na resolução de problemas elastoplásticos, utiliza-se um processo incremental, ou seja, para uma etapa  $n$  de carga, considerada como equilibrada, a tensão deve satisfazer a equação (3.68). A determinação do estado de tensões é realizada por meio de processo iterativo. Para um incremento  $\Delta\xi_{n+1}$ , o qual implica um deslocamento total  $\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta\xi_{n+1}$ , a tensão é atualizada nos pontos de integração. Caso o equilíbrio não seja verificado, um novo deslocamento deve ser calculado e, para isto, utiliza-se o estado tensional definido pelo último campo de deslocamentos por meio do qual realiza-se uma linearização da força interna com respeito ao estado atual. Esta operação é realizada em nível de elemento.

Para o elemento de interface, a linearização fornece uma equação onde  $\Delta\xi_{n+1}^k$  é a única incógnita para a iteração  $k$ :

$$F^{\text{int}}(\tau_{m+1}^k) - F_{n+1}^{\text{ext}} + \frac{\partial F^{\text{int}}(\tau_m^k)}{\partial \xi_{n+1}^k} \Delta\xi_{n+1}^k = 0 \quad (3.69)$$

A resolução desta última equação fornece o campo de deslocamentos que é utilizado na próxima iteração:

$$\Delta\xi_{n+1}^k = - \left[ \frac{\partial F^{\text{int}}(\tau_{m+1}^k)}{\partial \xi_{n+1}^k} \right]^{-1} (F^{\text{int}}(\tau_{m+1}^k) - F_{n+1}^{\text{ext}}) \quad (3.70)$$

onde  $\partial F^{\text{int}}(\tau_{m+1}^k) / \partial \xi_{n+1}^k$  representa o módulo tangente.

A matriz tangente do elemento de concreto é calculada derivando uma vez,  $d\sigma$  em função de  $d\xi$ :

$$C_{ep} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \quad (3.71)$$

Considerando-se o caso de um cálculo elastoplástico perfeito, no qual é possível escrever  $d\sigma$  como uma função  $d\xi$  por meio da equação:

$$d\sigma = C : [d\xi - d\xi^p] = C : \left[ d\xi - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] \quad (3.72)$$

onde  $C$  é o tensor de elasticidade e  $f$ , o critério de plasticidade. Substituindo a equação (3.72) em (3.71) obtém-se a matriz tangente elastoplástica do elemento de concreto:

$$C_{ep} = C - \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.73)$$

Esta expressão da matriz tangente clássica é obtida como a primeira derivada de (3.72) com respeito a  $d\xi$ . O termo  $\partial f / \partial \sigma$  é considerado independente de  $\chi$ . A matriz consistente, entretanto, considera derivadas de ordem maior. Em certos casos, o uso da matriz consistente permite uma convergência quadrática. Na equação (3.73), o termo  $d\lambda$  é definido como o multiplicador plástico, que é basicamente um algoritmo de cálculo implícito do tipo "Euler backward". O cálculo da matriz tangente, bem como do multiplicador plástico é apresentado em detalhe no trabalho de Desir (1998).

### 3.4.2 – CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA.

A resolução numérica é uma solução aproximada e, por este motivo, é necessário recorrer a algum critério de convergência para o controle do processo incremental iterativo. Por esta razão, o modelo original (Desir, 1998) utilizado neste



trabalho considera critérios usualmente utilizados, isto é, a norma dos deslocamentos, do resíduo e do trabalho no final de cada iteração K.

$$\|\{\delta \xi^k\}\| < \text{tol} \|\{\xi_n^k\}\| \quad (3.74)$$

$$\|\{\delta \mathfrak{R}^k\}\| < \text{tol} \|\{\mathfrak{R}_n^k\}\| \quad (3.75)$$

$$\|\{\delta \mathfrak{R}^k\}^t \{\delta \xi^k\}\| < \text{tol} \|\{\mathfrak{R}_n^k\}^t \{\xi_n^k\}\| \quad (3.75)$$

O processo iterativo é repetido até que se verifique uma tolerância predefinida (tol).

## CAPÍTULO 4

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

#### 4.1 - INTRODUÇÃO.

Neste capítulo, é apresentado um exemplo da aplicação do modelo proposto, na simulação do comportamento de uma viga feita com concreto reforçado com fibras. Este exemplo foi elaborado com base no programa experimental conduzido por Resende (2000), por meio do qual realizou-se uma análise com o propósito de avaliar a sensibilidade do modelo aos parâmetros que exercem grande influência no comportamento deste material, tais como: fração de volume de fibras, distribuição aleatória de fibras, comprimento das fibras utilizadas, diferentes orientações de fibras, diferentes concentrações locais de fibras, propriedades mecânicas da matriz e parâmetros relacionados com o fenômeno da aderência na interface concreto – fibra. Os resultados desta análise foram expressos em termos de curva carga versus deflexão.

Para simular o comportamento de vigas de concreto reforçado com fibras distribuídas aleatoriamente, três discretizações diferentes foram utilizadas para representar este compósito. Nas duas primeiras, o concreto reforçado com fibras é representado como um compósito bifásico (concreto + fibra) e na última o CRF é discretizado como um material monofásico. A diferença entre as duas primeiras propostas está no tipo de malha adotada para representar a distribuição aleatória das fibras. Na primeira, o concreto é representado por uma malha de elementos quadrilaterais retangulares quadráticos e as fibras aleatoriamente distribuídas são representadas por elementos cúbicos com geometria linear dispostos em todas as arestas dos elementos quadrilaterais, de forma alinhada ou normal à direção vertical do carregamento, como ilustra a figura 4.1a. A representação da aleatoriedade das fibras desta proposta segue o conceito formulado por Alwan e Naaman (1994).

Na segunda, as fibras estão dispostas nas arestas dos elementos quadrilaterais não retangulares, o que permite uma orientação aleatória mais “real” das fibras, conforme ilustrado na figura 4.1b. Na última discretização, simula-se o CRF como um material monofásico e, neste caso, a malha utilizada é a mesma da segunda proposta, porém os elementos quadrilaterais reúnem as características do compósito (concreto + fibra) e não apenas as do concreto como ocorre nas duas

primeiras propostas, figura 4.1b. O programa de elementos finitos GID foi utilizado como gerador de malhas e como visualizador gráfico, permitindo, desta forma, analisar os resultados numéricos do presente modelo.

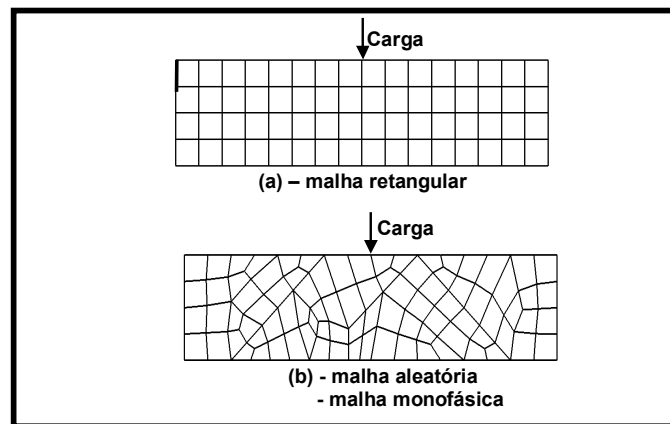


Figura 4.1: Quadro esquemático das discretizações propostas.

Para facilitar a identificação das malhas, adotou-se a seguinte convenção:

Discretização 1 = malha retangular = MR;

Discretização 2 = malha aleatória = MA;

Discretização 3 = malha monofásica = MM;

Para uma melhor compreensão, do exemplo numérico, optou-se por estruturar as informações necessárias em três itens, apresentados a seguir. No primeiro item, as características e os resultados do programa experimental são apresentados. O segundo item apresenta os procedimentos utilizados na análise numérica, bem como os resultados da análise de sensibilidade. No terceiro item, apresenta-se uma comparação entre os valores médios obtidos dos ensaios experimentais e os obtidos por meio das simulações numéricas realizadas no presente trabalho, para a validação do modelo proposto.

## 4.2 - PROGRAMA EXPERIMENTAL

O programa experimental realizado por Resende (2000) tinha como objetivo analisar a influência da adição de fibras de baixo e alto módulo de elasticidade no comportamento mecânico de vigas de concreto de resistência convencional (30 MPa) e de alto desempenho (65 MPa). Esta influência foi verificada por meio de

ensaios de compressão e ensaios de flexão, entre outros ensaios. As fibras utilizadas eram de aço, polipropileno e de sisal. No presente estudo, foram utilizados os resultados obtidos dos ensaios com concretos que receberam adição de fibra de aço com frações de volume iguais a 1,0% e 2,0%, que correspondem a 78,4 kg/m<sup>3</sup> e 156,8 kg/m<sup>3</sup>, respectivamente. Na tabela 4.1, são apresentadas as propriedades da fibra de aço utilizada no trabalho experimental, as quais tinham seção circular e extremidades em gancho, que aumentam a aderência ao arrancamento.

Entretanto, nas simulações, as fibras são consideradas retas, o que pode diminuir um pouco a rigidez ao deslocamento das fibras, mas de certa forma este efeito é compensado com o comprimento extra apresentado por algumas arestas das malhas, já que determinam o comprimento da fibra inserida na malha.

Tabela 4.1: Propriedades das fibras de aço utilizadas nos ensaios

| Propriedades                         | Aço   |
|--------------------------------------|-------|
| Comprimento (mm)                     | 30    |
| Diâmetro (mm)                        | 0,5   |
| Peso específico (g/cm <sup>3</sup> ) | 7,8   |
| Módulo de elasticidade (GPa)         | 200   |
| Resistência à tração (GPa)           | 1 a 2 |

O módulo de elasticidade foi determinado a partir da curva tensão de compressão versus deformação, utilizando-se a seguinte expressão:

$$E = \frac{(\sigma_{c2} - \sigma_{c1})}{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1})} \quad (4.1)$$

onde:

$\sigma_{c2}$  = tensão de compressão correspondente a 40 % da carga última;

$\sigma_{c1}$  = tensão de compressão correspondente à deformação axial,  $\varepsilon_{c1}$ , de 0,000050;

$\varepsilon_{c1}$  = deformação axial igual a 0,000050;

$\varepsilon_{c2}$  = deformação axial produzida pela tensão  $\sigma_{c2}$ ;

Os valores médios e os desvios padrão de resistência à compressão e do módulo de elasticidade, determinados a partir de três corpos de provas, são apresentados nas tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2: Valores médios de resistência à compressão e do módulo de elasticidade dos concretos especificados de C30.

| <b>Concreto</b> | <b>Tensão de compressão<br/>(MPa)</b> | <b>Módulo de elasticidade médio<br/>(GPa)</b> |
|-----------------|---------------------------------------|---|
| C30             | 29,89 ± 0,63                          | 20,13 ± 0,83                                  |
| C30A1           | 25,87 ± 0,13                          | 19,16 ± 0,12                                  |
| C30A2           | 35,93 ± 1,16                          | 20,88 ± 1,17                                  |

Tabela 4.3: Valores médios de resistência à compressão e do módulo de elasticidade dos concretos especificados de C65.

| <b>Concreto</b> | <b>Tensão de compressão<br/>(MPa)</b> | <b>Módulo de elasticidade médio<br/>(GPa)</b> |
|-----------------|---------------------------------------|---|
| C65             | 68,81 ± 2,28                          | 31,32 ± 0,87                                  |
| C65A1           | 71,01 ± 1,89                          | 33,33 ± 0,22                                  |
| C65A2           | 59,02 ± 1,96                          | 25,79 ± 1,13                                  |

Obs: os índices utilizados nas tabelas indicam:

C30 – concreto de resistência à compressão especificada de 30 MPa;

C65 – concreto de resistência à compressão especificada de 65 MPa;

A – fibra de aço; 1 e 2 - indica o volume de fibra em percentual.

Os ensaios de flexão seguiram o modelo a quatro pontos e, para tal ensaio, foram confeccionadas três vigas de dimensões (0,10 x 0,10 x 0,40 m) para cada tipo de concreto. As vigas foram submetidas a uma taxa de 0,05 mm/min de acordo com os procedimentos da norma ASTM C-1018. Neste ensaio, as vigas são simplesmente apoiadas e carregadas em dois pontos equidistantes de seu eixo de simetria, de forma a obter-se, na região central, flexão pura. Nos ensaios de Resende (2000), os carregamentos e os apoios estavam, respectivamente, a partir do meio do vão, a 0,05 e a 0,15 m à direita e à esquerda deste ponto. A figura 4.2 ilustra as condições de contorno do ensaio de flexão.

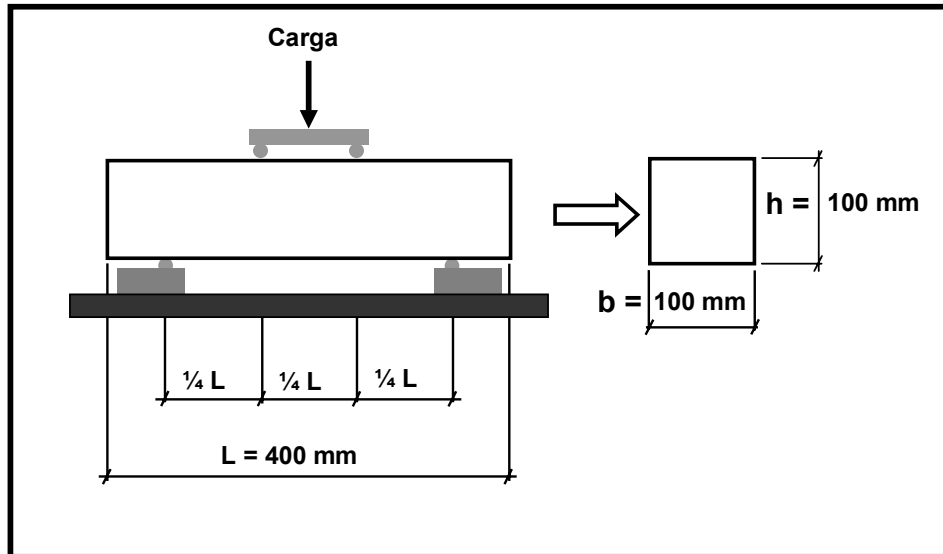


Figura 4.2: Condições de contorno do ensaio de flexão

Os resultados dos ensaios de flexão das vigas confeccionadas com concreto de resistência normal e de alto desempenho, em termos da curva tensão de flexão x deflexão, são apresentados na figuras 4.3 (Resende, 2000). As curvas são defasadas de 0,25 mm de sua antecessora para facilitar o entendimento. Contudo, vale salientar que todas as curvas apresentam flecha inicial de 0,00 mm.

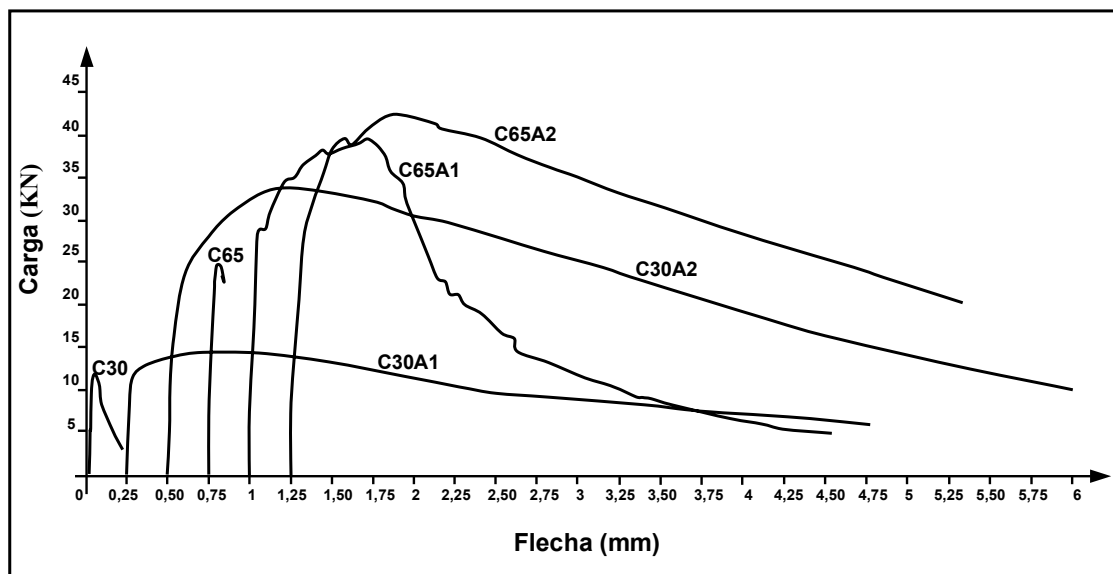


Figura 4.3: Curva carga x deflexão – concreto sem fibra (C30; C65) e concreto reforçado com fibras (C30A1; C30A2; C65A1; C65A2) adaptado de Resende (2000)

### 4.3 - ANÁLISE NUMÉRICA

Para avaliar o desempenho do modelo numérico proposto e implementado, utilizou-se a viga com adição de fibra de aço que foi simulada numericamente de acordo com as três discretizações mencionadas no item 4.1. Na modelagem numérica, foram utilizadas malhas de elementos quadrilaterais que possuíam lados com um comprimento médio próximo ao da fibra utilizada no trabalho experimental. A figura 4.4 apresenta as malhas utilizadas em cada discretização. As malhas das discretizações aleatória e monofásica são as mesmas. Porém, na monofásica, não ocorre a inclusão dos elementos de treliça para representar as fibras que são consideradas através da homogeneização, isto é, os elementos quadrilaterais reúnem as características do compósito e não mais apenas as do concreto, como ocorre nas duas primeiras propostas.

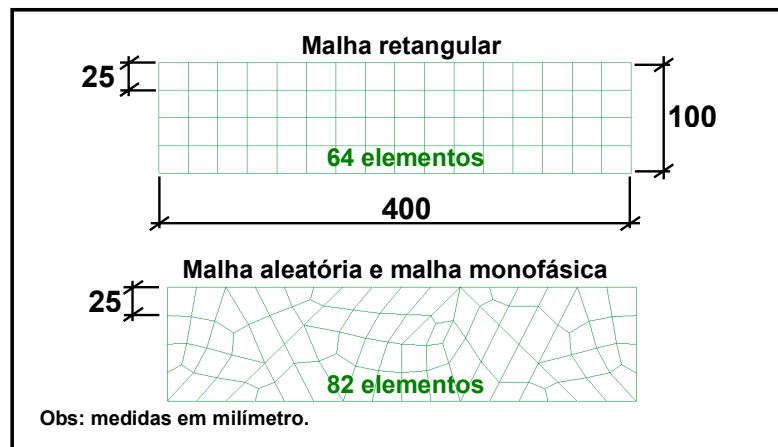


Figura 4.4: Definição da malha segundo as propostas de modelagem

Para a incorporação das fibras na malha, procurou-se definir um número equivalente de fibras para representar a fração de volume de fibras. O número de fibras inserido nas malhas foi determinado de acordo com um dos seguintes critérios:

#### 1 – Definição do número de fibras por meio do volume:

Uma viga com 0,10 x 0,10 x 0,40 m

$$\Rightarrow V_{viga} = 4,0 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Uma fibra com  $\phi_f = 0,5 \text{ mm}$  e  $l_f = 30 \text{ mm}$

$$\Rightarrow V_{fibra} = 5,8905 \text{ mm}^3$$

Uma adição de fibra igual a 1% do volume

$$\Rightarrow V_{total-fibra} = 4,0 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

Número de fibras na viga =  $(V_{total-fibra}) / V_{fibra}$

$$\Rightarrow N_{fibra} = 6791$$

## 2 – Definição do número de fibras pelo peso:

Para  $1,0 \text{ m}^3$  de concreto com adição 1,0% e 2,0% de fibra de aço, o ACI (American Concrete Institute) recomenda uma adição de 78,50 e 157,0  $\text{kg/m}^3$ , respectivamente.

|  |   |
|--|---|
| Peso específico da fibra de aço  | $\Rightarrow \gamma_{\text{aço}} = 7,8 \text{ g/cm}^3$      |
| Uma fibra com $\phi_f = 0,5 \text{ mm}$ e $l_f = 30 \text{ mm}$            | $\Rightarrow P_{\text{fibra}} = 4,6 \times 10^2 \text{ g}$  |
| Número de fibras para 1,0 % = $(78,50 \text{ kg}) / P_{\text{fibra}}$      | $\Rightarrow N_{\text{total-fibra}} = 1706521,0/\text{m}^3$ |
| Número de fibras na viga = $N_{\text{total-fibra}} \times V_{\text{viga}}$ | $\Rightarrow N_{\text{fibra}} = 6826,0$                     |

Como o número de fibras é semelhante nos dois casos apresentados acima, optou-se pelo primeiro método para minimizar uma possível inclusão de um maior número de fibras nas simulações, quando comparado com o experimental, uma vez que foi necessário fazer uma correção, em função das limitações das malhas de elementos finitos que possuíam elementos de fibras com um comprimento médio de 25 mm. Desta forma, foi realizada a seguinte correção:

|  |   |
|--|---|
| Uma viga com $0,10 \times 0,10 \times 0,40 \text{ m}$                    | $\Rightarrow V_{\text{viga}} = 4,0 \times 10^6 \text{ mm}^3$        |
| Uma fibra com $\phi_f = 0,5 \text{ mm}$ e $l_f = 25 \text{ mm}$          | $\Rightarrow V_{\text{fibra}} = 4,9087 \text{ mm}^3$                |
| Uma adição de fibra igual a 1% do volume                                 | $\Rightarrow V_{\text{total-fibra}} = 4,0 \times 10^4 \text{ mm}^3$ |
| Número de fibras na viga = $(V_{\text{total-fibra}}) / V_{\text{fibra}}$ | $\Rightarrow N_{\text{fibra}} = 8149$                               |

Para o volume de 2% de fibras foi utilizado o mesmo procedimento descrito neste item. Uma vez definido o número de fibras, o mesmo é incorporado aleatoriamente nas arestas dos elementos quadriláteros através de um algoritmo de distribuição presente no modelo numérico. Este algoritmo de distribuição permite que uma aresta seja escolhida várias vezes e este procedimento tenta reproduzir o caso real de uma mistura onde ocorrem superposição e amontoamento das fibras. Quando uma fibra é incorporada numa aresta, os nós da mesma passam a possuir o GLD. A figura 4.5a mostra um esquema desta distribuição utilizada, para os casos de modelagem com duas fases. Nesta figura, é possível observar fibras com cores diferentes, onde cada cor representa uma concentração diferente de fibras.

Em termos de incorporação de fibras, também é possível incluir, na malha de elementos finitos, concentrações diferentes de fibras, ou seja, a malha pode ser definida em regiões e cada região receber um percentual diferente do volume total e fibras. Porém, neste caso, as fibras de uma mesma região apresentam a mesma seção, conforme ilustrado na figura 4.5b.



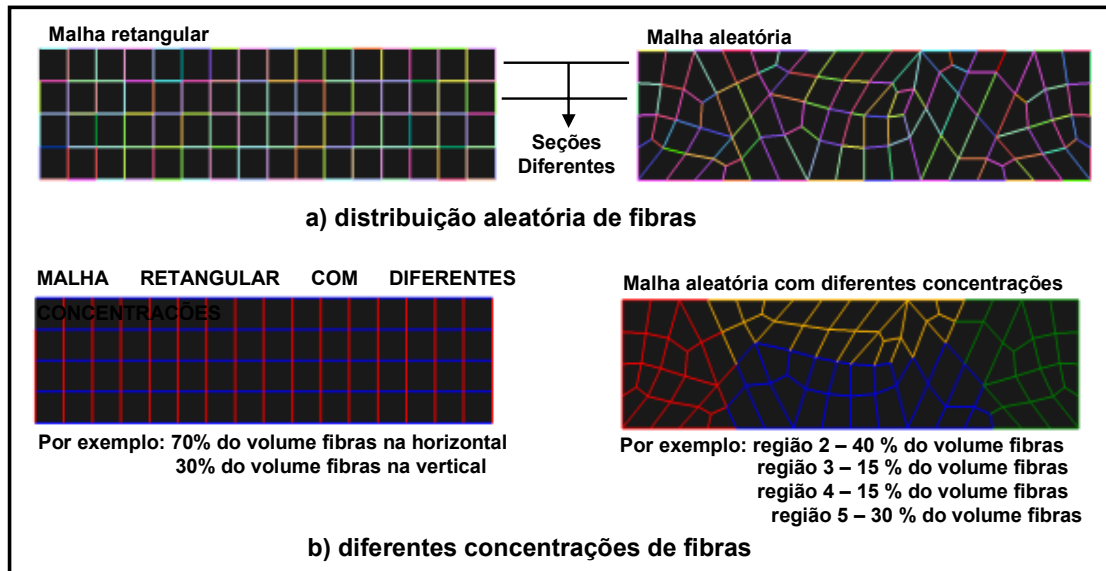


Figura 4.5: Disposição das fibras na matriz de concreto

Entretanto, em termos de modelagem, cada concentração é representada por uma fibra equivalente. Esta fibra equivalente possui uma seção similar a da respectiva concentração, isto é, representa a filosofia adotada neste estudo, a qual considera que as possíveis fissuras cruzam as arestas dos elementos quadrilaterais, fissuras estas atravessadas por um conjunto de fibras orientadas na direção dos lados dos elementos quadrilaterais, conforme ilustrado na figura 4.6.

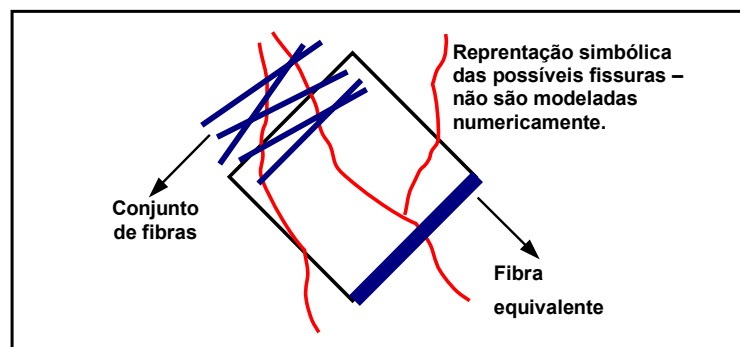


Figura 4.6: Representação da filosofia de fibra equivalente

Após a montagem das malhas, todas as informações relativas às características dos materiais, à malha de elementos finitos e às condições de contorno do ensaio de flexão são organizadas em um arquivo de entrada de dados para a realização das simulações. Para acessar o comportamento pós-pico, as simulações são realizadas com controle de deslocamento, ou seja, o problema é resolvido com um método incremental iterativo onde é possível optar tanto pela solução Newton Rapson

normal ou Newton Rapsom modificado. Nesta análise, as variáveis de controle são as tensões e as deformações. Considerando as noções de resistência dos materiais para determinar o valor da carga aplicada, utilizou-se a formulação apresentada a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{M \cdot Y}{I} = \frac{\left(\frac{F}{2} \cdot \frac{L}{4}\right) \cdot (h/2)}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{F \cdot h^2}{4bh^3} = \frac{F \cdot h^2}{4bh^3} \cdot \frac{12}{12} = \frac{3F}{bh} \\ F = \frac{bh \cdot \sigma}{3} \text{ (KN)} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

sendo:

$\sigma = \sigma_{\text{ponto-médio}}$  = tensão de tração na flexão  $\Rightarrow$  resultado da simulação;

$L / 4 = h$

A figura 4.7 apresenta um quadro que, resume os procedimentos utilizados na simulação do concreto reforçado com fibra especificado por C30A1, os quais, são válidos para os demais concretos reforçados com fibras analisados neste presente trabalho.

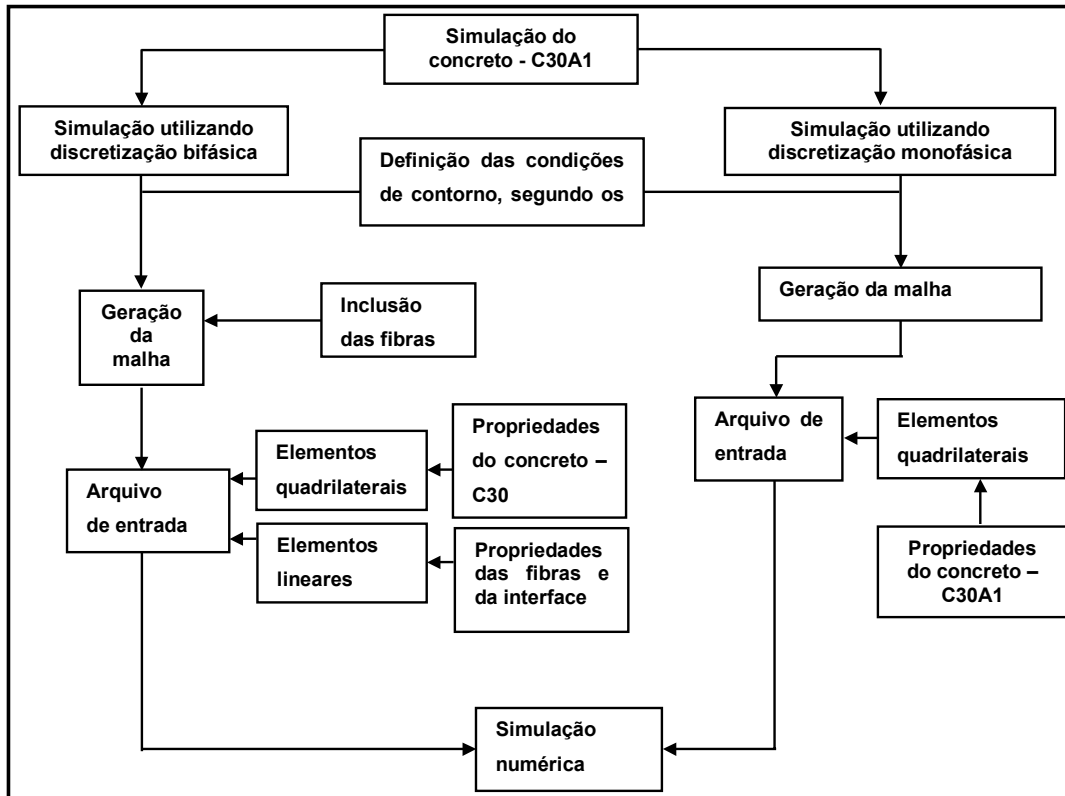


Figura 4.7: Esquema geral do procedimento numérico

Os parâmetros necessários à formulação do modelo numérico, mais especificamente no que diz respeito à definição da superfície de ruptura, bem como das propriedades das fibras e das características da interface entre os dois materiais, estão resumidos na tabela 4.4. É importante mencionar, que nas simulações das discretizações bifásicas, conforme apresentado na figura 4.7, são utilizadas características do concreto sem fibra, das fibras e da interface, as quais são relatadas na tabela 4.4, mas visando reproduzir o comportamento do conjunto, ou seja, do compósito concreto reforçado com fibras.

Porém, nas simulações da discretização monofásica são utilizadas apenas as características dos concretos reforçados com fibras. Na tabela 4.4, os valores da resistência à compressão e do módulo de elasticidade foram determinados experimentalmente por Resende (2000), já os valores da resistência à tração e resistência à compressão bi-axial, foram estimados por  $0,10 f_c$  e  $1,15 f_c$ , respectivamente. Os demais valores apresentados correspondem a valores determinados com base em resultados experimentais relativos ao assunto estudado neste trabalho.

Tabela 4.4: Parâmetros para o modelo numérico

| CONCRETO   | Propriedade dos materiais                | Valores utilizados     |
|--|--|------------------------|
| <b>C30 - sem fibra.</b>                          | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 30 MPa                 |
|  | Resistência à tração                     | 3,0 MPa                |
|  | Compressão bi-axial                      | 34,5 MPa               |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $2,0 \times 10^4$ MPa  |
|  | Coefficiente de Poisson                  | 0,2                    |
| <b>C30A1 – concreto C30 com 1 % fibra de aço</b> | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 26 MPa                 |
|  | Resistência à tração                     | 2,6 MPa                |
|  | Compressão bi-axial                      | 29,9 MPa               |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $1,92 \times 10^4$ MPa |
| <b>C30A2 – concreto C30 com 2% fibra de aço</b>  | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 35 MPa                 |
|  | Resistência à tração                     | 3,5 MPa                |
|  | Compressão bi-axial                      | 40,3 MPa               |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $2,1 \times 10^4$ MPa  |
| <b>C65 - sem fibra.</b>                          | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 69 MPa                 |
|  | Resistência à tração                     | 6,9 MPa                |
|  | Compressão bi-axial                      | 79,3 MPa               |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $3,15 \times 10^4$ MPa |

|  |  |                       |
|--|--|-----------------------|
| <b>C65A1 – concreto C65 com 1 % fibra de aço</b> | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 71 MPa                |
|  | Resistência à tração                     | 7,1 MPa               |
|  | Compressão bi-axial                      | 81,65 MPa             |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $3,3 \times 10^4$ MPa |
| <b>C65A2 – concreto C65 com 2% fibra de aço</b>  | Resistência à compressão (Resende, 2000) | 60 MPa                |
|  | Resistência à tração                     | 6,0 MPa               |
|  | Compressão bi-axial                      | 69,00 MPa             |
|  | Módulo do concreto (Resende, 2000)       | $2,6 \times 10^4$ MPa |
| <b>Fibras</b>                                    | Diâmetro / comprimento das fibras        | 0,5 / 30 mm           |
|  | Módulo de elasticidade da fibra          | 200 GPa               |
| <b>Interface</b>                                 | Tensão de aderência da interface         | 5 a 18 MPa            |
|  | Módulo da aderência da interface (G)     | 10 a 100 MPa/mm       |
|  | Módulo de escoamento da interface (H)    | 10 a 50 MPa/mm        |

O valor do coeficiente de Poisson utilizado para todos os concretos foi de 0,20.

A seguir, são apresentados os resultados das simulações com o objetivo de verificar a sensibilidade do modelo proposto aos parâmetros que exercem grande influência no comportamento do concreto reforçado com fibras. Esta análise de sensibilidade visa à elaboração de um modelo numérico que permita avaliar o comportamento do concreto reforçado com fibras e, desta forma, torná-lo uma ferramenta capaz de prever o comportamento mecânico de estruturas feitas com este material e, assim, evitar a realização de novos ensaios toda vez que algum parâmetro for alterado, como por exemplo: a fração de volume de fibras, as propriedades da matriz, entre outras.

### **I - Sensibilidade à fração de volume das fibras**

As figuras 4.8 e 4.9 mostram a sensibilidade do modelo à diferentes frações de volumes de fibras, utilizando as malhas MA e MR, respectivamente.

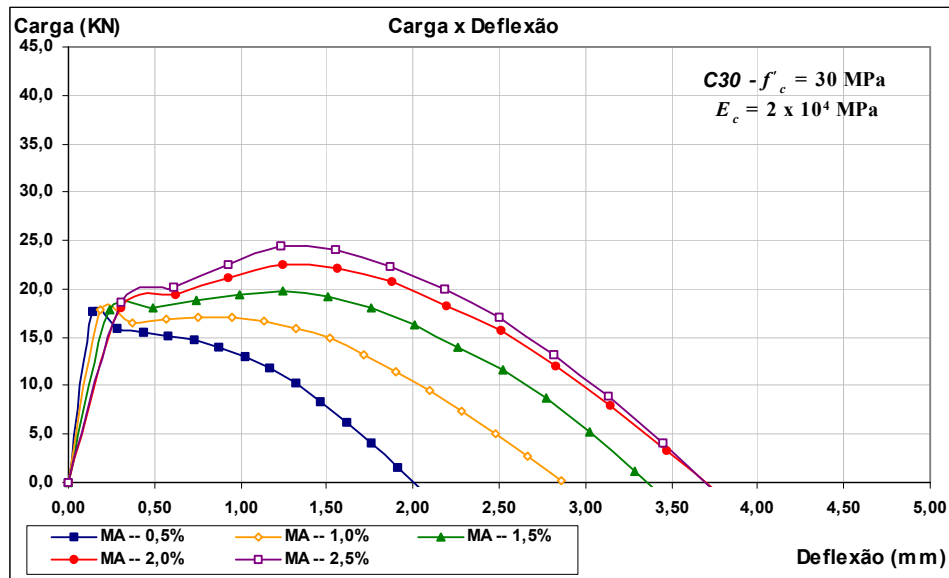


Figura 4.8: Malha aleatória com diferentes volumes de fibras – concreto C30

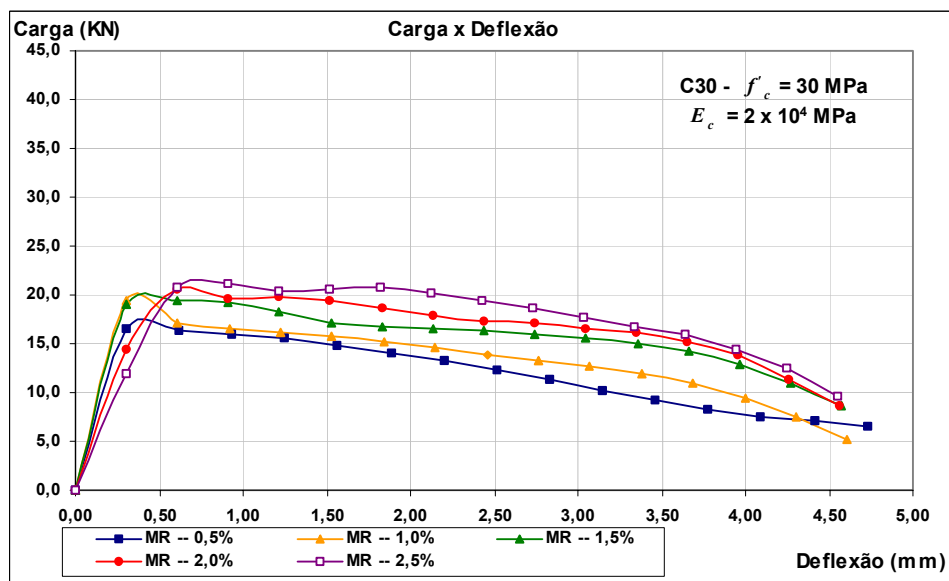


Figura 4.9: Malha retangular com diferentes volumes de fibras – concreto C30

As duas malhas mostraram-se sensíveis à fração de volume das fibras. Entretanto, a malha retangular (MR) reproduziu melhor o ganho de tenacidade produzido pela adição de fibras, enquanto que a malha aleatória (MA) foi capaz de reproduzir melhor o ganho de resistência oferecido com a adição de fibras. Este comportamento observado na malha MR está relacionado ao fato de possuir mais fibras na direção vertical, na qual a fibra menos contribui com a resistência do conjunto. Entretanto, o número considerável de fibras na horizontal permitiu a MR

expressar melhor a tenacidade. É importante mencionar que nos gráficos, os valores dos módulos G e H que, caracterizam a interface, quando não registrados, assumem os valores médios de 60 e 10 MPa/mm, respectivamente.

## II - Sensibilidade à distribuição aleatória de fibras

Nas figuras 4.10 e 4.11 é apresentada a sensibilidade do modelo à diferentes distribuições aleatórias de um mesmo volume de fibras, utilizando as malhas MA e MR, respectivamente

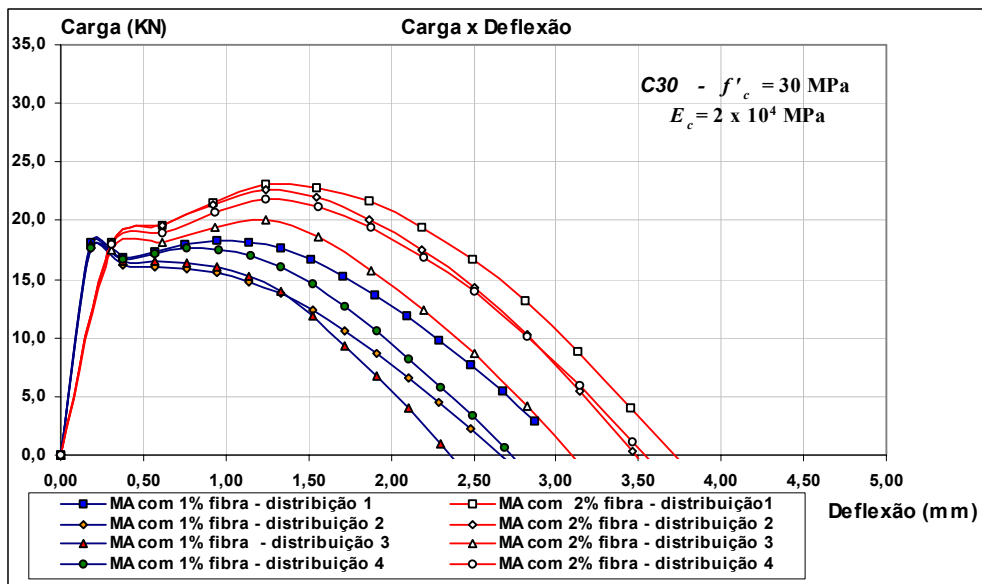


Figura 4.10: Malha aleatória com diferentes distribuições – concreto C30

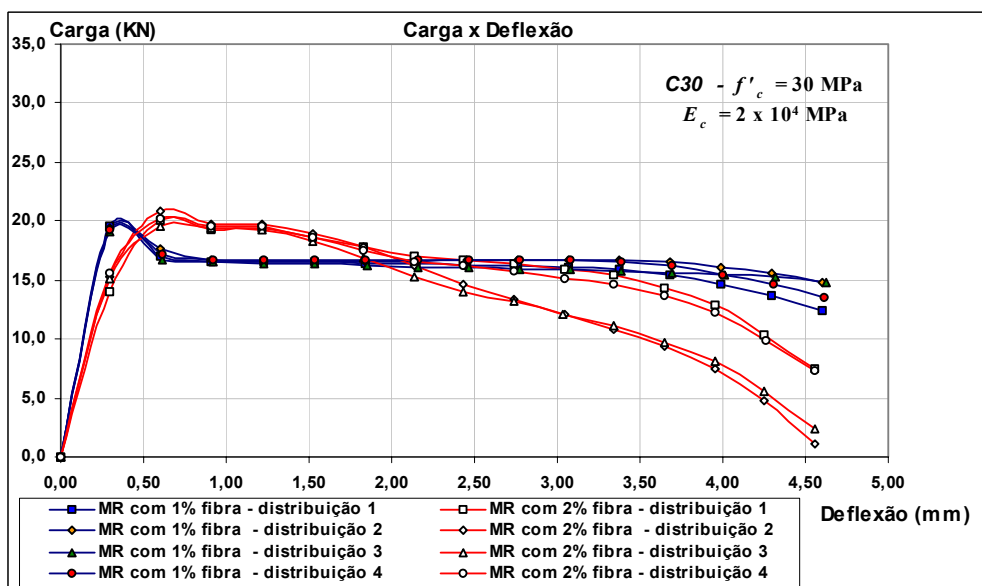


Figura 4.11: Malha retangular com diferentes distribuições – concreto C30

Em termos de distribuição aleatória de fibras, os resultados obtidos com a malha aleatória foram mais expressivos, uma vez que a mesma oferece uma variabilidade de orientação maior, parâmetro este que influencia bastante a eficiência das fibras em transmitir tensões.

### III - Sensibilidade ao refinamento da malha - comprimento das fibras

Para analisar a sensibilidade ao refinamento da malha do modelo retangular, utilizou-se uma malha com os elementos de fibras com comprimento médio igual a 25 mm (malha 1), como a utilizada nas demais análises de sensibilidade do modelo bifásico retangular, e uma malha com elementos de fibras com comprimento médio igual a 12,5 mm (malha 2), conforme ilustrado na figura 4.12. Entretanto, para que as malhas possuíssem a mesma seção total de aço (fibras), utilizou-se o mesmo critério apresentado no início deste item, no qual o comprimento da fibra é considerado de maneira que, na malha 2, o número de fibras fosse o dobro do utilizado na malha 1.

Portanto, na malha 2, o número de fibras que representa um volume de 1% de fibra é exatamente o dobro do número que representa este mesmo volume de fibras quando inserido na malha 1, o mesmo ocorre para um volume de 2% de fibra. Isto permitiu que cada elemento de fibra da malha 2 apresentasse uma seção da mesma ordem de grandeza que na malha 1, o que não seria possível, pois a malha 2 apresenta um número maior de elementos de fibra e, com isso, a concentração de fibra representada por cada elemento de fibra seria menor, ou seja, uma seção menor.

Malha 1

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|
| 64 | 60 | 56 | 52 | 48 | 44 | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 63 | 59 | 55 | 51 | 47 | 43 | 39 | 35 | 31 | 27 | 23 | 19 | 15 | 11 | 7 | 3 |
| 62 | 58 | 54 | 50 | 46 | 42 | 38 | 34 | 30 | 26 | 22 | 18 | 14 | 10 | 6 | 2 |
| 61 | 57 | 53 | 49 | 45 | 41 | 37 | 33 | 29 | 25 | 21 | 17 | 13 | 9  | 5 | 1 |

Malha 2

256

Figura 4.12: Malhas 1 e 2, refinamento da malha retangular

Na malha aleatória, a análise de sensibilidade ao refinamento da malha foi realizada por meio de três malhas, sendo que a primeira destas foi utilizada nas demais análises de sensibilidade do modelo bifásico aleatório. Embora o refinamento tenha produzido malhas com um número maior de elementos na segunda e terceira malhas e que nas mesmas alguns elementos de fibras possuíam um comprimento inferior a 25 mm, a maioria dos elementos possuíam um comprimento médio de 25 mm, conforme apresentado na figura 4.13. Em função disto, não foi realizada a correção do número de fibras considerando o comprimento de fibra, ou seja, as três malhas receberam o mesmo número de fibras que, no caso, são 8149 e 16298 e representam uma fração de volume de fibras de 1% e 2%, respectivamente.

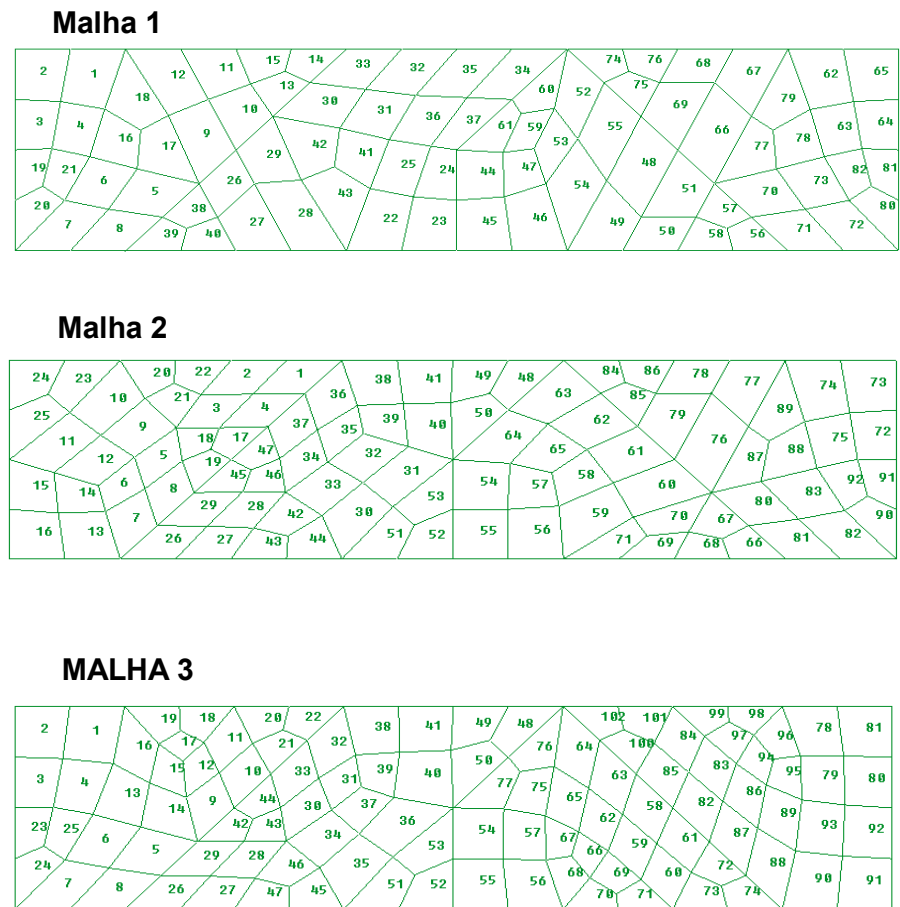


Figura 4.13: Refinamento das malhas aleatórias



As figuras 4.14 e 4.15 mostram a sensibilidade do modelo ao refinamento das malhas MR e MA, respectivamente.

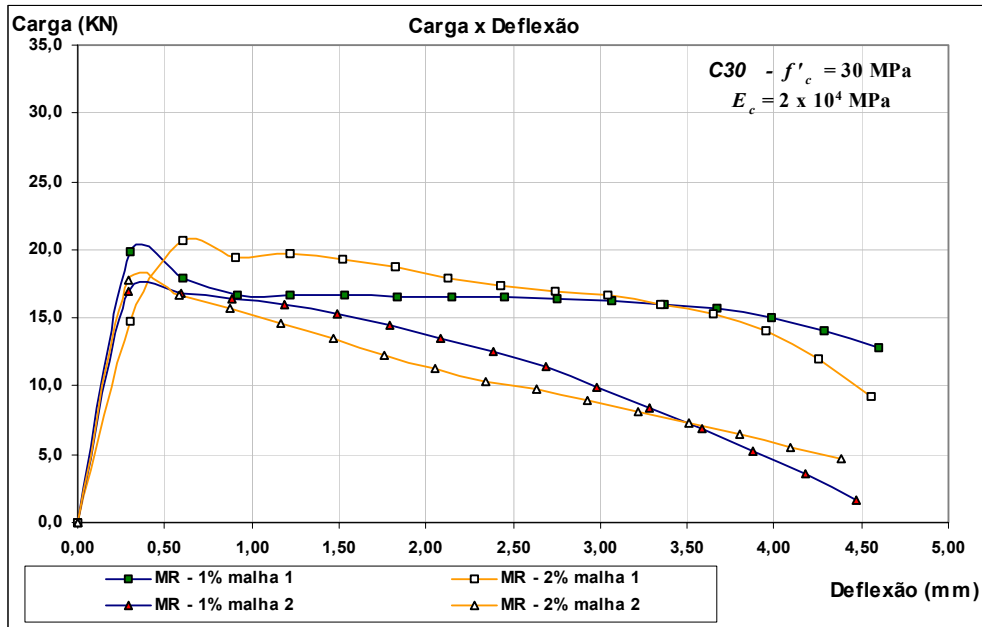


Figura 4.14: Malha retangular com refinamento – concreto C30

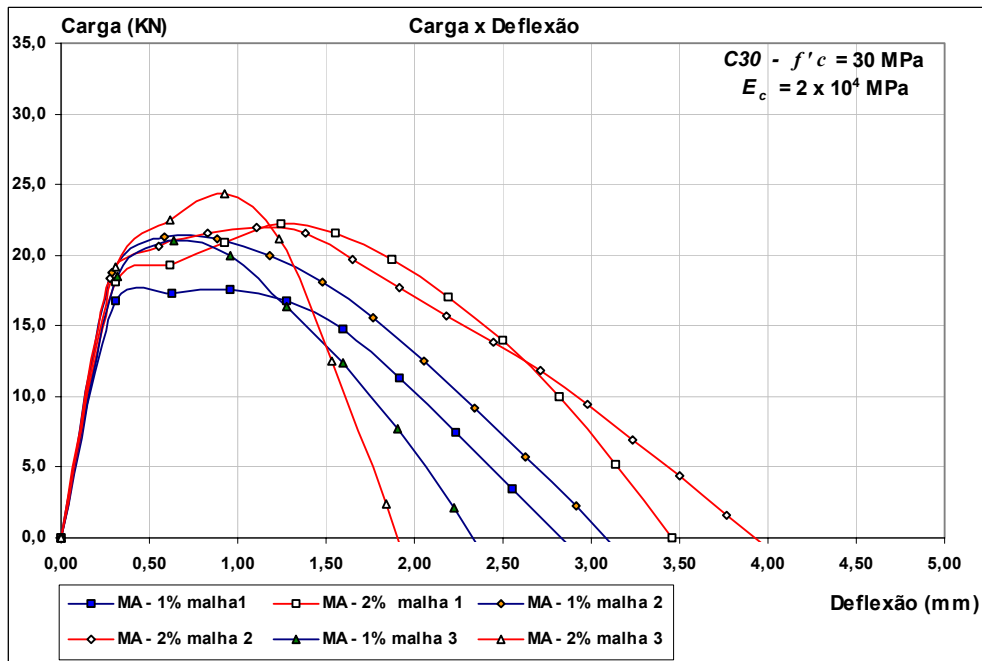


Figura 4.15: Malha aleatória com refinamento – concreto C30

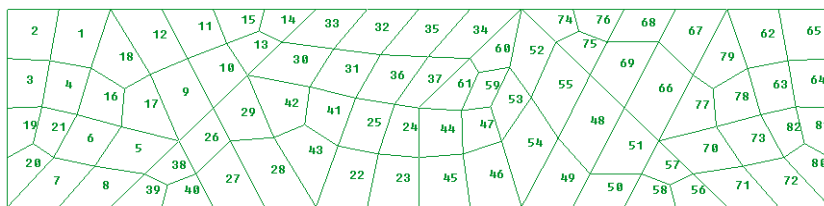
Analisando os resultados dos modelos, percebe-se a influência do comprimento das fibras, a qual se traduz numa redução de tenacidade à medida que

o comprimento da fibra utilizada diminui. Este padrão de comportamento é semelhante aos resultados observados em vários trabalhos experimentais relativos ao assunto em questão. Nestes trabalhos, a principal diferença obtida com a utilização de fibras de comprimentos diferentes foi a redução da tenacidade, uma vez que os níveis de resistência foram praticamente os mesmos.

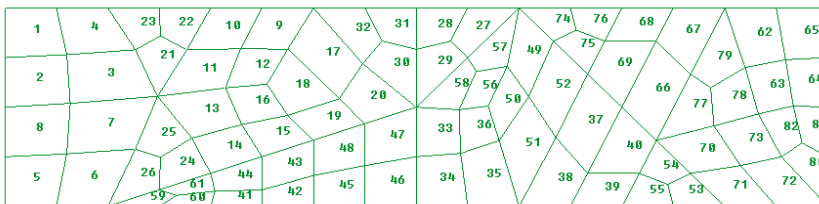
**IV - Sensibilidade à diferentes orientações aleatórias das fibras**

A análise de sensibilidade do modelo a diferentes orientações aleatórias foi realizada por meio de três malhas aleatórias diferentes, sendo que, a primeira destas, foi utilizada nas demais análises de sensibilidade do modelo bifásico aleatório. Nesta análise, para evitar o efeito das concentrações locais de fibras, utilizou-se malhas que tivessem o mesmo número de elementos quadrilaterais, também em cada malha, o volume de fibras igual a 1% foi distribuído igualmente nas arestas, de modo que, todos os elementos de geometria linear apresentassem a mesma seção. Esta estratégia foi aplicada também para o volume de fibras igual a 2%. A figura 2.16 apresenta as três malhas adotadas nesta análise.

**Malha 1**



**Malha 4**



**Malha 5**

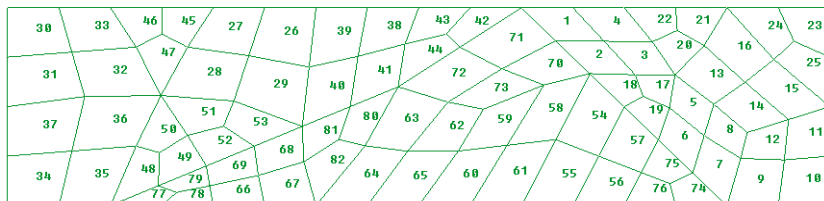


Figura 4.16: Diferentes malhas aleatórias - diferentes orientações de fibras

Nas figuras 4.17 e 4.18 são apresentadas as influências de diferentes orientações das fibras, obtidas para volumes de fibras iguais a 1 e 2%, respectivamente.

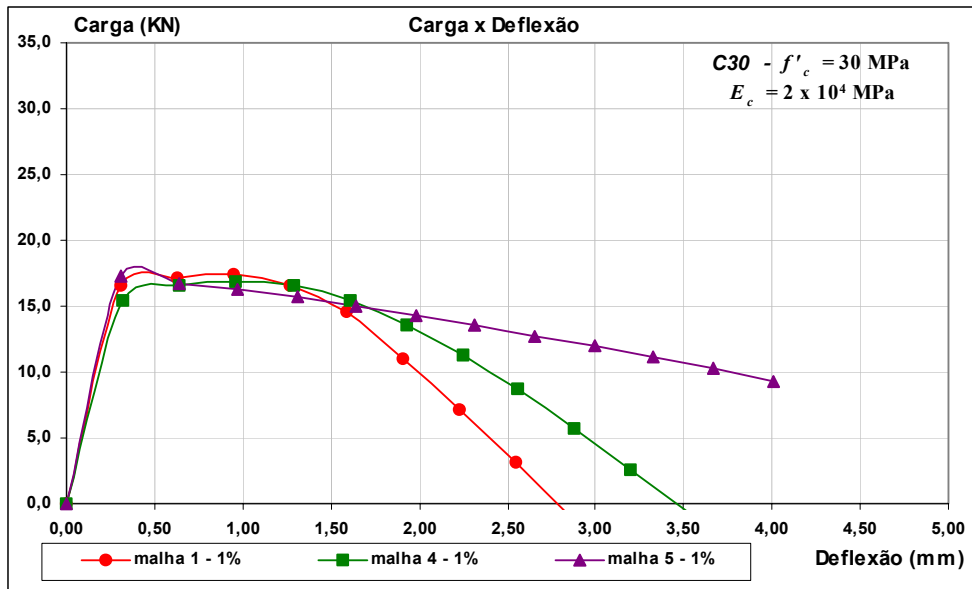


Figura 4.17: Malhas aleatórias com 1% de fibras – concreto C30

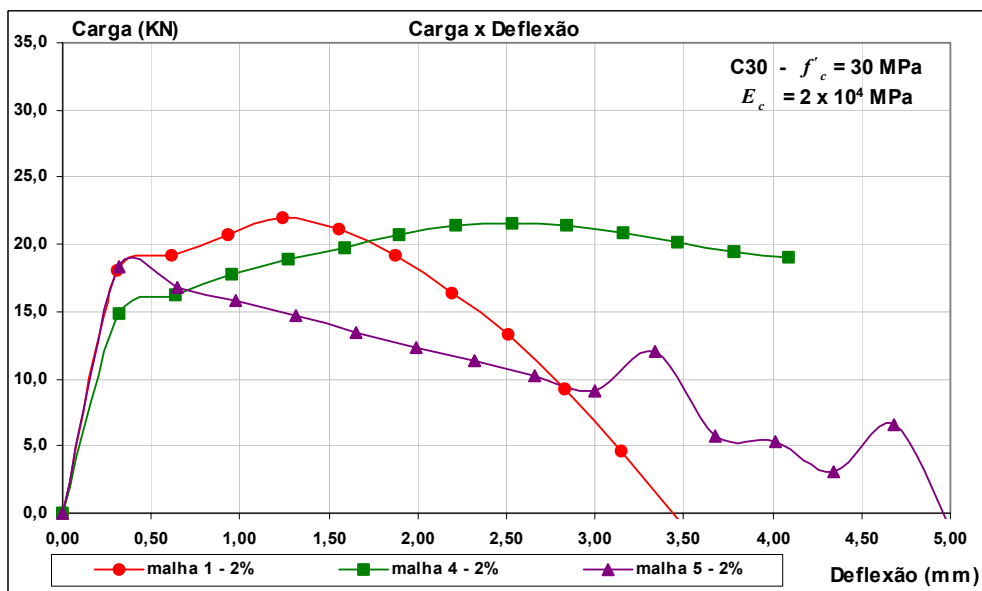


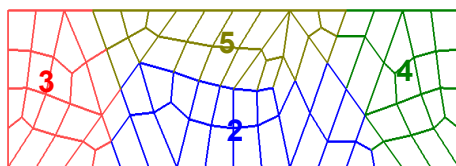
Figura 4.18: Malhas aleatórias com 2% de fibras – concreto C30

Analisando os resultados, obtidos com estas diferentes malhas aleatórias, percebe-se a sensibilidade do modelo às variações de orientação das fibras. Observa-se também que, para um volume de 2% fibras, as malhas produzem resultados bem

diferentes. Este comportamento era esperado, uma vez que, em função das limitações de geração de malhas, as mesmas continuam apresentando concentrações locais de fibras diferentes. Apesar, da utilização de uma distribuição homogênea de fibras na malhas, com o objetivo de evitar a influência deste parâmetro, neste item em específico.

**V - Sensibilidade às diferentes concentrações de fibras**

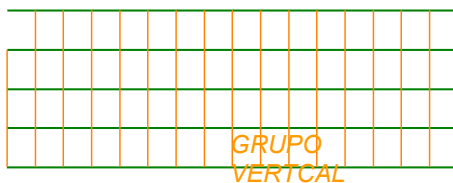
Nesta análise, a malha aleatória foi dividida em 4 regiões, as quais podem receber diferentes percentuais da fração de volume de fibras. Porém, como foi mencionado anteriormente, o percentual de cada região é distribuído igualmente entre todos os elementos da região, de maneira que os elementos de uma mesma região apresentam seções iguais. Vale ressaltar que elementos de regiões diferentes apresentam seções diferentes, conforme ilustrado na figura 4.19a. Para a malha retangular, aplicou-se um raciocínio similar, no qual a fração de volume de fibras foi dividida entre dois grupos, o grupo de fibras horizontais e o de fibras verticais. Estes grupos podem receber percentuais da fração de volume de fibras iguais ou diferentes. Entretanto, neste caso, os elementos de um mesmo grupo apresentam a mesma seção, como ilustra a figura 4.19b.



| %              | PORCENTAGEM DO GRUPO |         |         |         |
|----------------|----------------------|---------|---------|---------|
|                | GRUPO 2              | GRUPO 3 | GRUPO 4 | GRUPO 5 |
| Distribuição 1 | 25 %                 | 25 %    | 25 %    | 25 %    |
| Distribuição 2 | 30 %                 | 25 %    | 25 %    | 20 %    |
| Distribuição 3 | 35 %                 | 25 %    | 25 %    | 15 %    |
| Distribuição 4 | 40 %                 | 20 %    | 20 %    | 20 %    |
| Distribuição 5 | 40 %                 | 15 %    | 15 %    | 30 %    |

(a) – distribuição de diferentes concentrações na malha aleatória

GRUPO HORIZONTAL



| %              | PORCENTAGEM DO GRUPO |                |
|----------------|----------------------|----------------|
|                | GRUPO HORIZONTAL     | GRUPO VERTICAL |
| Distribuição 1 | 50                   | 50             |
| Distribuição 2 | 60                   | 40             |
| Distribuição 3 | 70                   | 30             |

(b) – distribuição de diferentes concentrações no modelo bifásico retangular

Figura 4.19: Distribuição de diferentes concentrações de fibras nas malhas bifásicas

As figuras 4.20 e 4.21 mostram a influência de diferentes concentrações locais de fibras nas malhas aleatória e retangular, respectivamente.

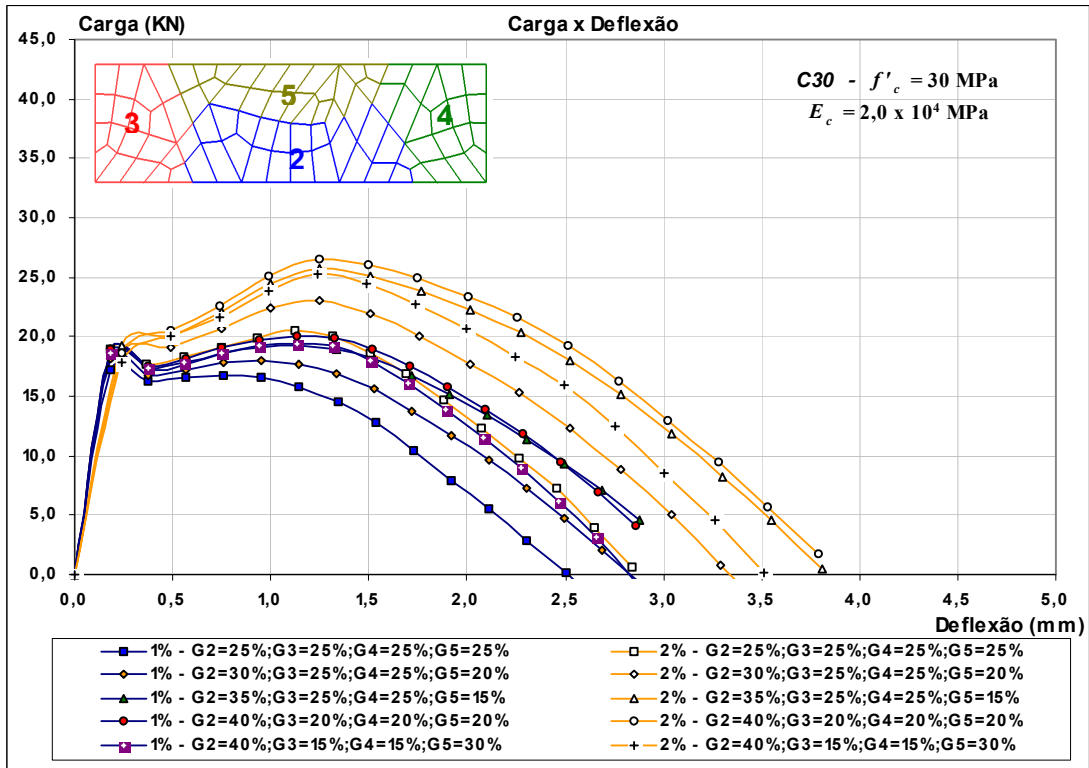


Figura 4.20: Malha aleatória com diferentes concentrações – concreto C30

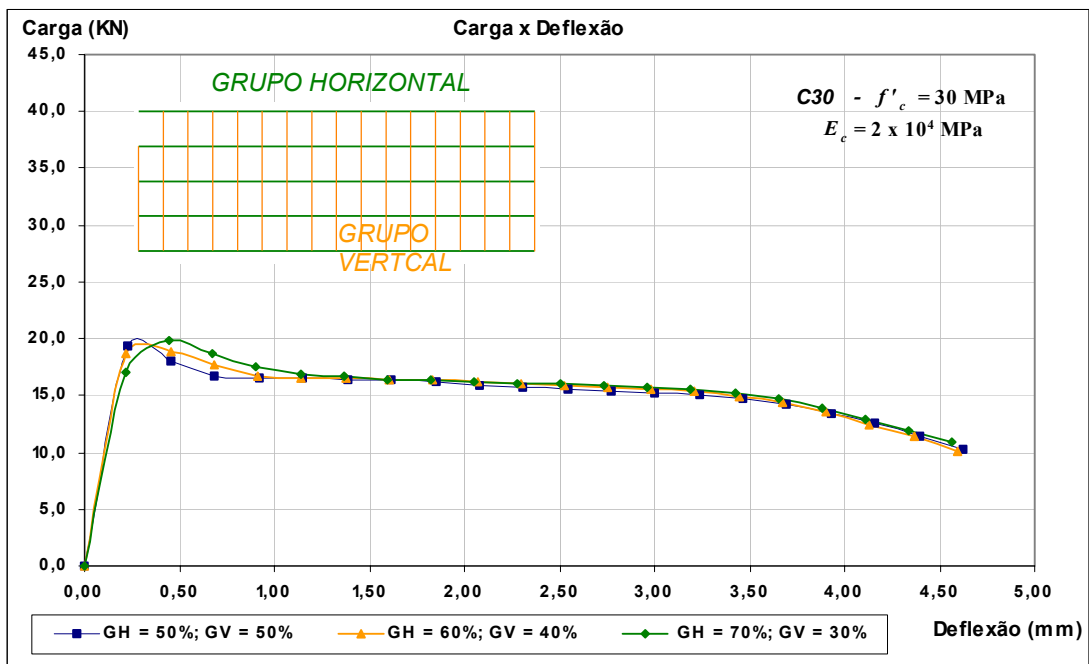


Figura 4.21: Malha retangular com diferentes concentrações – concreto C30

Observando os resultados da malha aleatória, constata-se a grande influência das diferentes concentrações de fibras, como por exemplo: no último arranjo para 1 e 2%, nos quais o percentual de fibras dos grupos G3 e G4 foi diminuído para 15%, reduzindo desta forma a quantidade de fibras presentes nas bielas de compressão (ponto de aplicação das cargas – apoios). Na malha retangular, esta influência não foi considerável, fato este intimamente ligado ao considerável número de fibras na vertical, posição esta onde a fibra menos contribui para o ganho de resistência.

## VI - Sensibilidade aos parâmetros relacionados com o fenômeno da aderência na interface concreto

O fenômeno da aderência na interface de materiais é um parâmetro complexo e que exerce uma influência significativa no comportamento de materiais, principalmente materiais multifásicos. Para descrever numericamente este fenômeno, inúmeras leis de comportamento foram propostas. Entretanto, neste trabalho, o fenômeno da aderência é modelado por uma lei simplificada que tenta reproduzir os dois estágios bem nítidos deste fenômeno, onde o primeiro é caracterizado por uma rigidez inicial que perdura até o limite de proporcionalidade, e o segundo é caracterizado por deformações plásticas irreversíveis. Esta lei simplificada é do tipo bi-linear local, conforme ilustrado na figura 4.22. Desta lei, são estabelecidos o módulo de aderência da interface ( $G$ ) e o módulo de escoamento da interface ( $H$ ). Os módulos  $G$  e  $H$  são utilizados nesta análise para descrever o comportamento da interface, ou seja, o deslizamento relativo entre as fibras e o concreto, determinado na formulação de elementos finitos por meio do GLD, acoplado ao elemento de treliça. Analisando uma série de resultados experimentais, verifica-se que estes parâmetros apresentam uma variabilidade considerável, podendo variar de 10 a 100 para ambos.

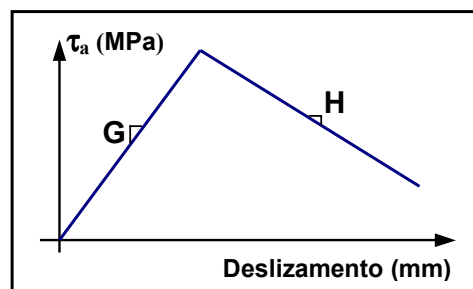


Figura 4.22: Lei bi-linear local para aderência na interface concreto-fibra

Os gráficos 4.23 e 4.24 mostram a influência das características da interface nas malhas aleatória e retangular, respectivamente.

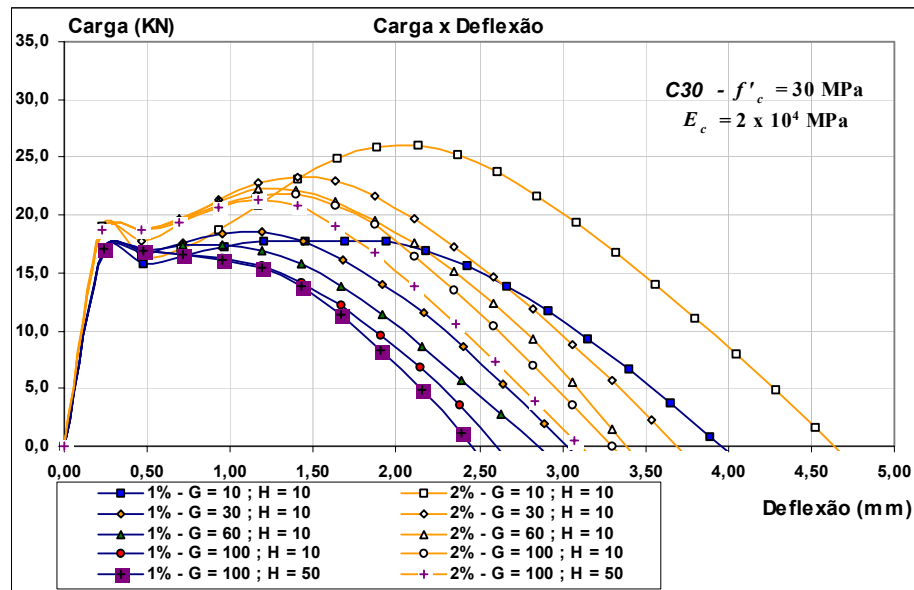


Figura 4.23: Malha aleatória com diferentes interfaces – concreto C30

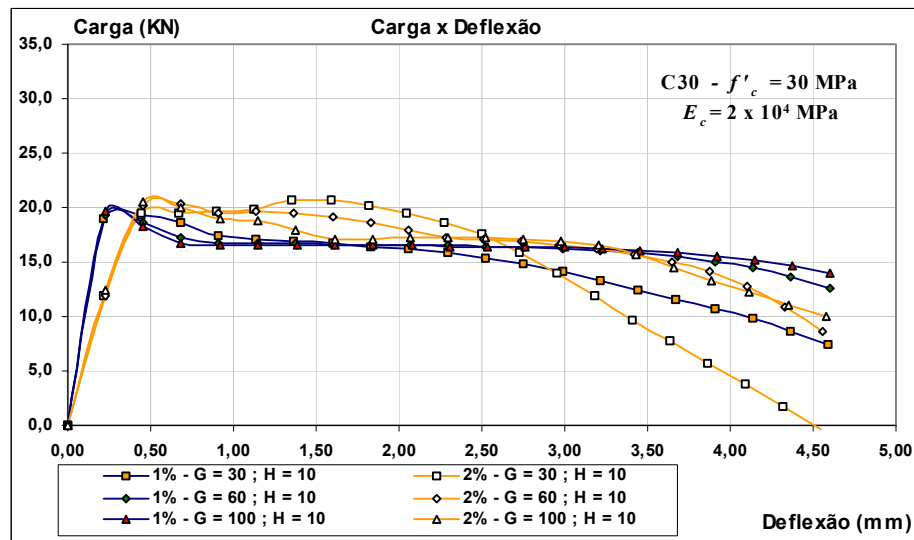


Figura 4.24: Malha retangular com diferentes interfaces – concreto C30

Os gráficos 4.23 e 4.24 mostram bem a influência do módulo de aderência da interface (G), influência esta mais acentuada imediatamente após o fim do limite de proporcionalidade. Neste estágio, as fibras são mais solicitadas. Contudo, existe uma redistribuição de esforços e o conjunto readquire rigidez. A transferência de uma parcela significativa de esforços depende da qualidade da interface que, neste trabalho, é definida pelo módulo G. Para valores baixos de G, tem-se pouca

aderência, facilitando o arrancamento das fibras e, portanto, comprometendo a resistência global da peça.

**VII - Sensibilidade às propriedades mecânicas da matriz – influência da resistência de pico.**

As figuras 4.25 e 4.26 mostram a influência das diferentes matrizes de concreto nas malhas retangular e aleatória, respectivamente.

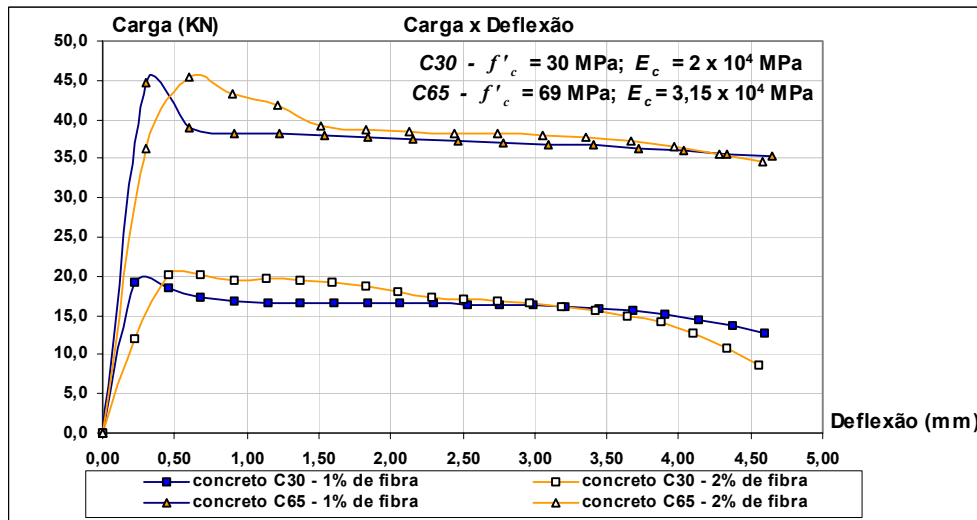


Figura 4.25: Malha retangular – concreto C30 e C65

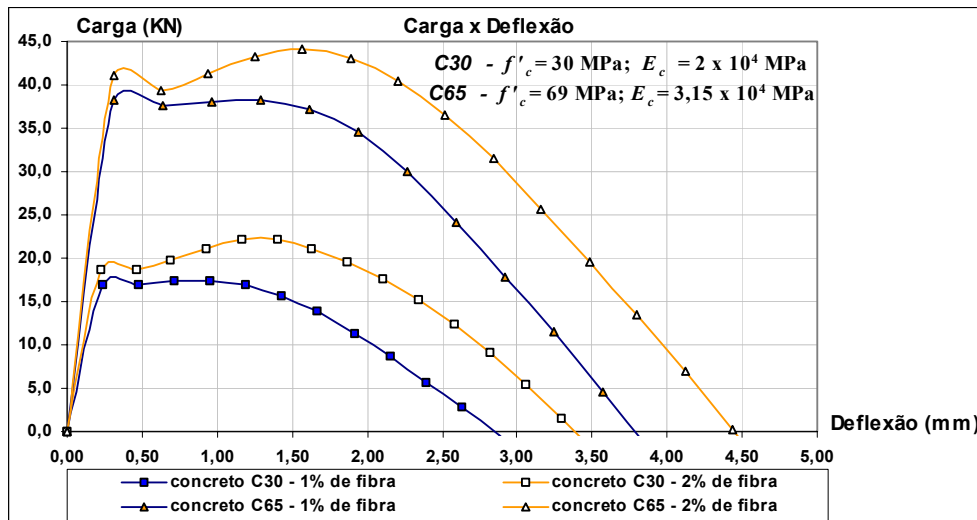


Figura 4.26: Malha aleatória – concreto C30 e C65

Analisando os resultados das malhas aleatória e retangular, percebe-se que o modelo foi capaz de captar a influência das propriedades mecânicas da matriz.



### 4.4 – COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste item realiza-se a comparação entre os resultados numéricos e os experimentais para validar a eficiência do modelo proposto em descrever o comportamento do concreto reforçado com fibras. As figuras 2.27 e 2.28 apresentam a comparação entres os resultados experimentais do concreto C30 com adições de 1 e 2% de fibras e os resultados numéricos obtidos, com as malhas aleatória e retangular, respectivamente.

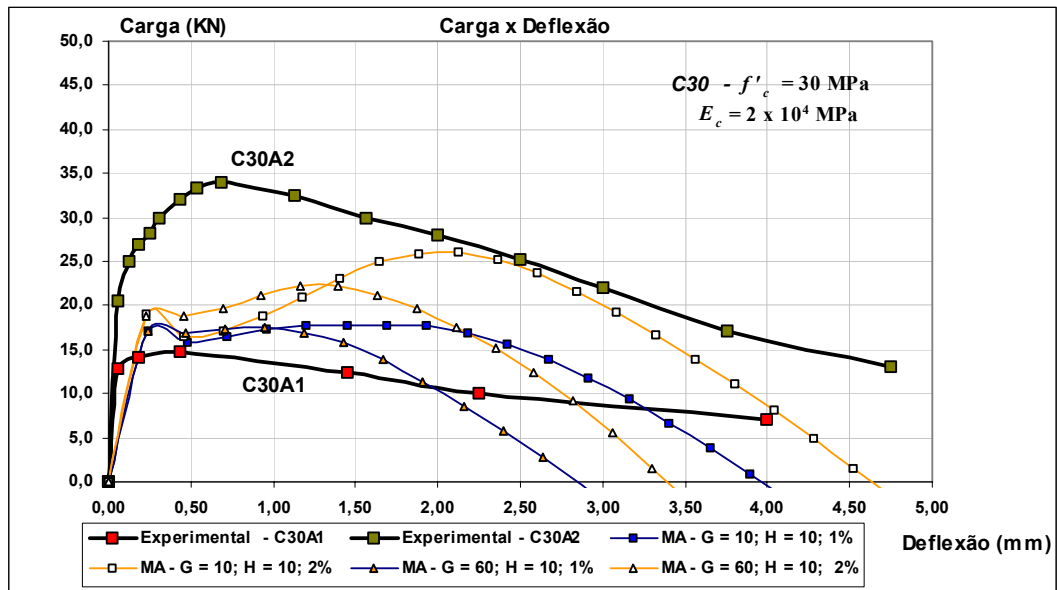


Figura 4.27: Malha aleatória versus experimental - concreto C30

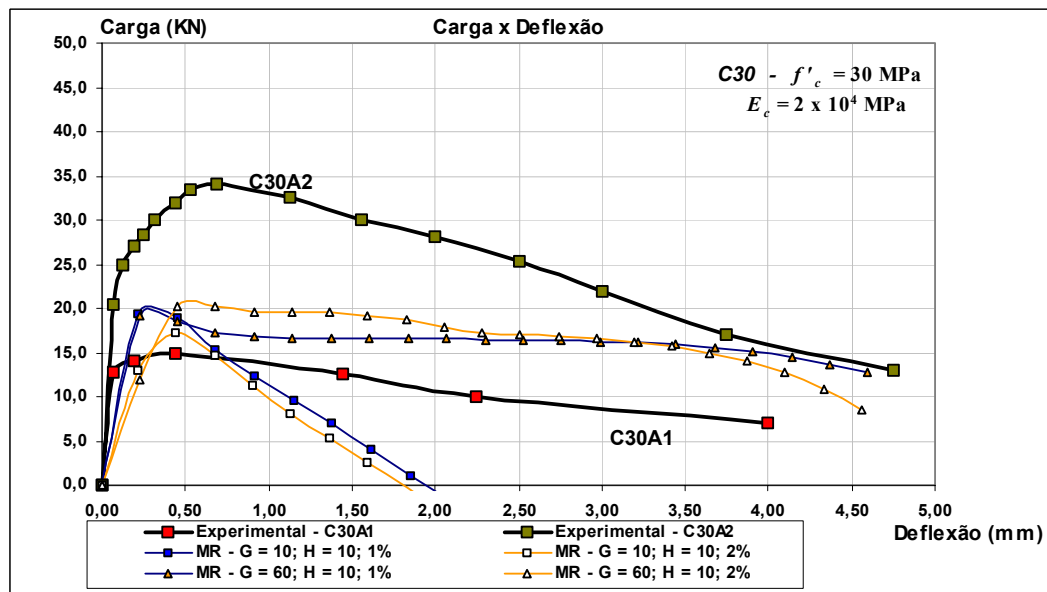


Figura 4.28: Malha retangular versus experimental – concreto C30

Os gráficos 4.27 e 4.28 exibem um melhor desempenho da malha aleatória, apesar da perda de resistência após o fim do limite de proporcionalidade, sendo mais evidente para uma adição de fibras de 2%, fato que pode estar relacionado com uma rigidez inicial ao deslocamento das fibras e que, em função da simplicidade da lei de aderência adotada não foi captada. A seguir, as figuras 2.29 e 2.30 apresentam a comparação entres os resultados experimentais do concreto C65 com adições de 1 e 2% de fibras e os resultados numéricos obtidos, com as malhas aleatória e retangular, respectivamente.

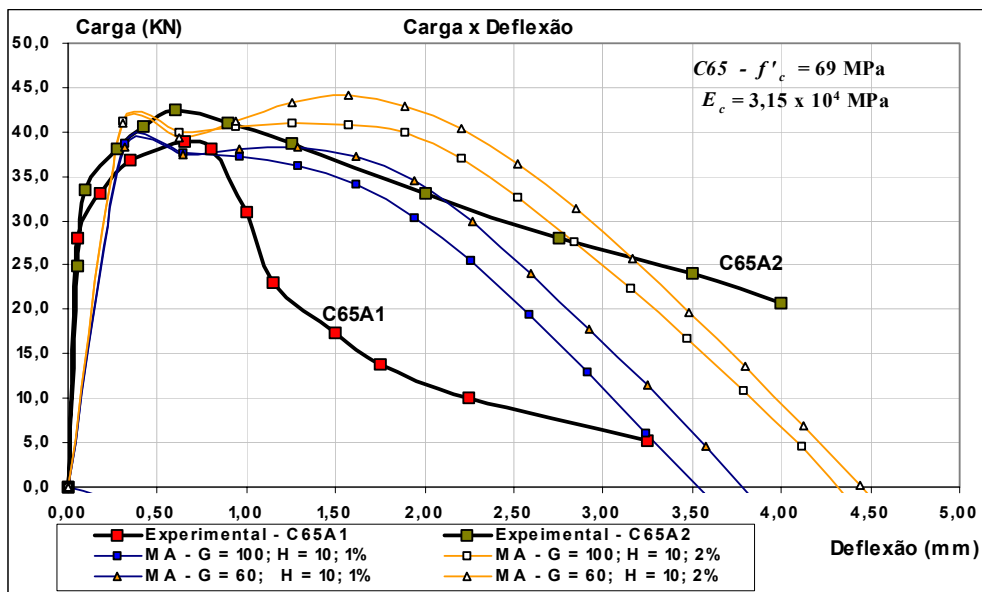


Figura 4.29: Malha aleatória versus experimental - concreto C65

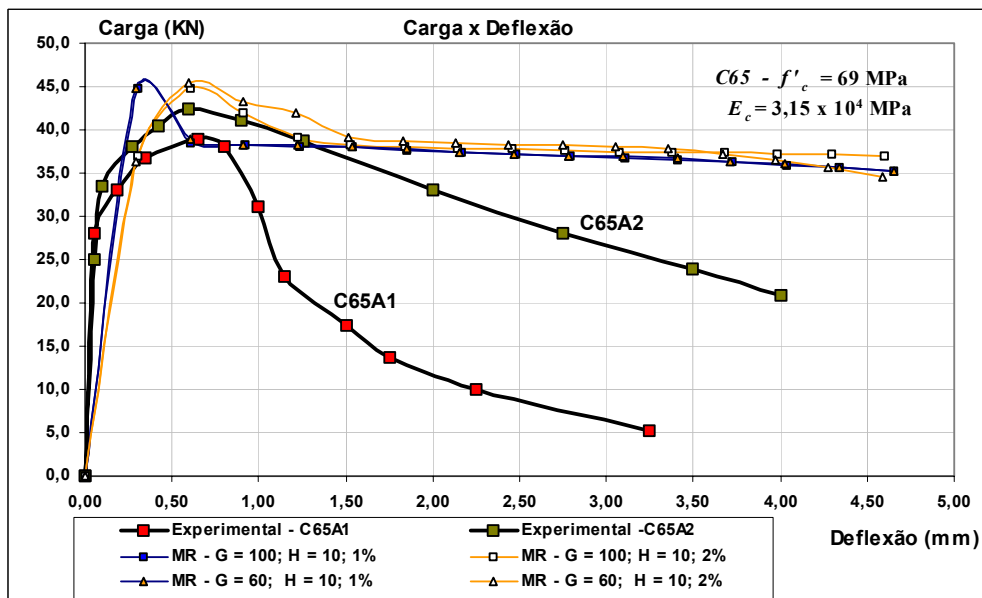


Figura 4.30: Malha retangular versus experimental - concreto C65

Os resultados das malhas aleatória e retangular para um concreto de resistência de 69 MPa apresentaram um comportamento similar aos verificados para os concreto de 30 MPa, onde, mais uma vez, a malha aleatória exibiu uma melhor reprodução dos resultados experimentais quando comparada à da malha retangular. Na figura 4.31 é apresentada uma comparação entre os resultados experimentais do concreto C30 com adições de 1 e 2% de fibras e os resultados numéricos, obtidos com as três discretizações utilizadas neste trabalho.

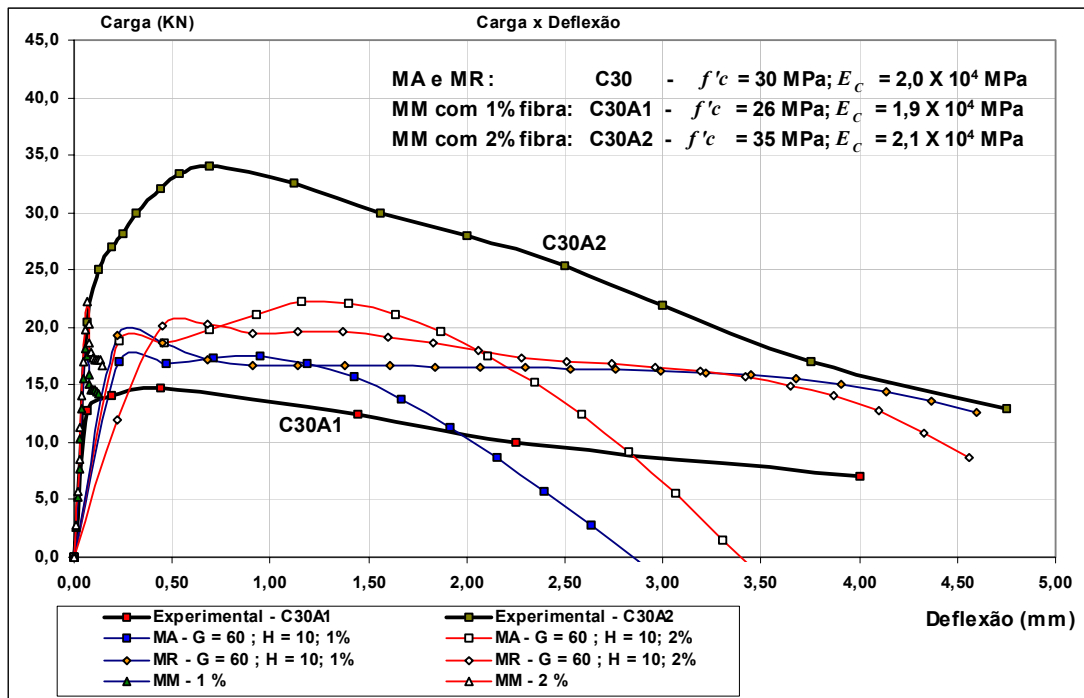


Figura 4.31: Comparação das três discretizações – malha aleatória, malha retangular e malha monofásica – concreto C30

Os resultados apresentados no gráfico 4.31 demonstram que a proposta do modelo monofásico representou bem o trecho inicial, ou seja, até o limite de proporcionalidade. Entretanto, não foi capaz de reproduzir uma das principais contribuições da adição de fibras, que é o ganho de tenacidade. De fato, as características do concreto com fibras (monofásico) mostram uma resistência à tração maior, porém o compósito não tem o módulo de deformação do aço, parâmetro importante para a tenacidade.

De acordo com este gráfico, a discretização aleatória foi a que melhor reproduziu o comportamento do concreto reforçado com fibras, apesar de não apresentar os mesmos níveis de resistência verificados experimentalmente. Algumas simulações de concentrações locais de fibras mostram resultados ainda mais

próximos dos experimentais. Coincidência ou não, é comum ocorrer concentrações locais das fibras durante uma concretagem. A figura 4.32 ilustra o caso de uma fração de volume de 2% com concentrações locais.

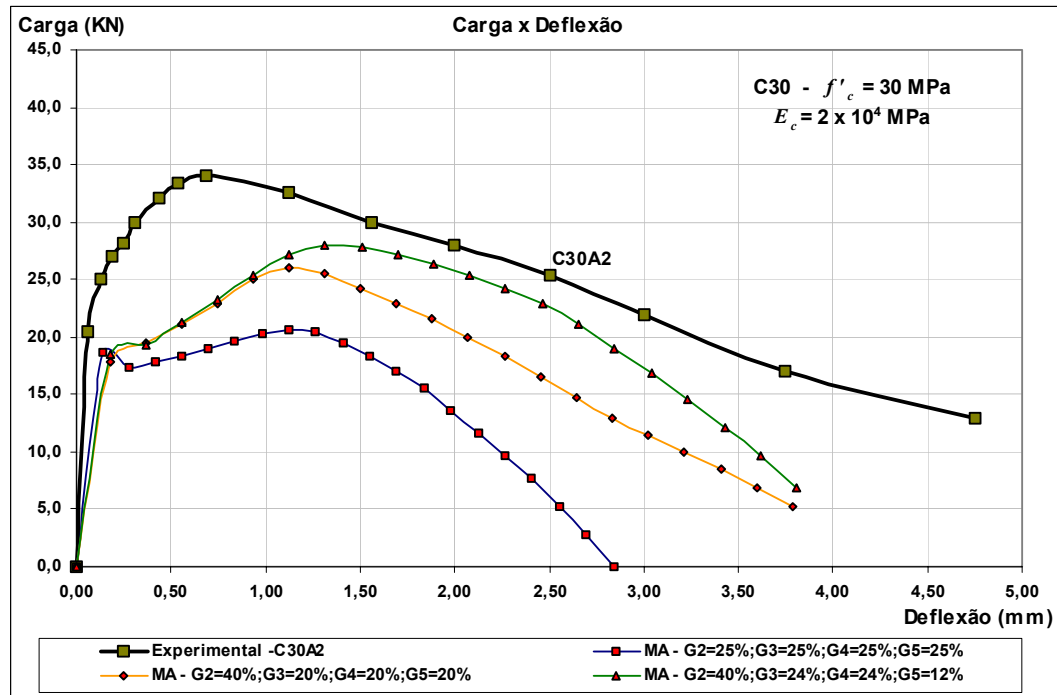
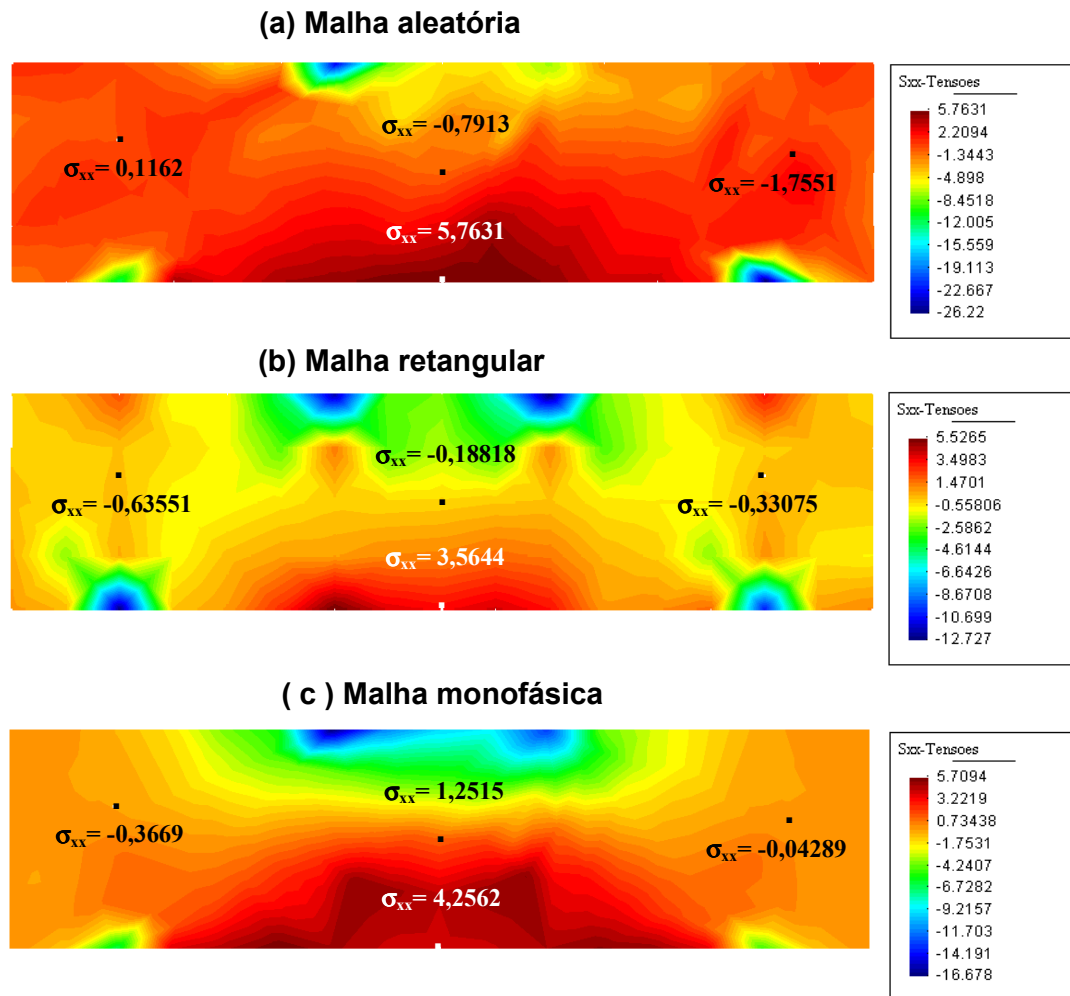


Figura 4.32: Malha aleatória com diferentes concentrações versus experimental – concreto C30

Os campos de tensões obtidos nas simulações do comportamento da matriz reforçada com 1% de fibras quando sofre um deslocamento imposto de 0,125 mm na direção do atuador são mostrados na figura 4.33. Nesta figura, observa-se que todas as estratégias apresentaram resultados semelhantes e que possuem coerência nos campos de tensões. De uma maneira geral, a malha aleatória consegue captar melhor o efeito produzido pela adição de fibras, ou seja, propiciar uma distribuição mais homogênea de tensões, evitando concentrações de tensões, o que desacelera o processo de fissuração da matriz. Em função disto, evita a formação de uma fissura grande num determinado ponto e conduz a um processo de múltiplas fissuras menores em toda a matriz.

No entanto, cada estratégia contribui para um determinado aspecto da distribuição de tensão. A figura 4.33c exibe uma distribuição típica de um material monofásico com um eixo neutro bem definido e valores de tensões gradualmente

distribuídos ao longo da altura da seção. Ao contrário do que acontece na figura 4.33a, onde aparece uma distribuição mais uniforme, apesar de apresentar concentrações de tensões nos apoios e nos pontos de deslocamentos impostos.



Porém, no resto da malha, os níveis de tensões são mais baixos.

Figura 4,33: Campo de tensões das três discretizações (tensões em MPa)

A figura 4.33b exibe um comportamento de reticulado onde aparecem claramente as bielas comprimidas, isto provavelmente se deve à forma da distribuição das fibras, que se comportaram como uma armadura longitudinal com estribos verticais. Os banzos resistem à tensões maiores enquanto uma faixa intermediária bem larga apresenta valores baixos de tensão quando comparados com os valores correspondentes aos banzos

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 5.1 – CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se um modelo numérico para o estudo do concreto reforçado com fibras de aço e baseado no trabalho desenvolvido originalmente por Desir (1998) para o problema de aderência aço-concreto. Os resultados das simulações confirmaram a capacidade do modelo de reproduzir certos aspectos do comportamento do concreto reforçado com fibras, o mais importante sendo o acréscimo da capacidade de absorver energia de deformação, propriedade conhecida como tenacidade, no regime pós-pico, quando solicitado até a ruptura. O decréscimo na inclinação do trecho descendente da curva carga-deflexão da figura 4.8 ilustra bem este fato.

As simulações onde a aleatoriedade de orientação e a concentração local de fibras foram consideradas como variáveis do sistema para levar em conta a possível formação de nódulos mostram também boa coerência na descrição da influência destes parâmetros no comportamento global da peça. A estratégia utilizada neste trabalho para levar em conta esta aleatoriedade de orientação depende da malha adotada para a representação da matriz de concreto. Pelo observado nas simulações, a malha retangular, que só permite duas orientações, apresenta resultados menos expressivos porque limita a distribuição das fibras na matriz.

Este estudo permitiu também constatar de forma indireta a influência do comprimento das fibras no comportamento do CRF. Este parâmetro é fundamental tanto nas propriedades mecânicas quanto nos aspectos relativos ao fenômeno de aderência na interface aço-concreto. No que tange à lei constitutiva proposta, de uma maneira geral, mostrou-se consistente. No entanto, vale ressaltar mais uma vez que a modelagem de um fenômeno tão complexo como a degradação da aderência exige algumas simplificações para poder isolar os parâmetros realmente relevantes. O comprimento das fibras define o comprimento de aderência, do qual depende a capacidade de transferência de forças de uma fibra para o concreto e vice-versa.

Em princípio, a qualidade dos resultados depende do refinamento da malha. Porém, quando se tenta reduzir os lados dos elementos quadrilaterais para valores abaixo do comprimento da fibra, aparecem desvios em relação aos resultados

experimentais que poderiam ser atribuídos à redução do comprimento de aderência. Se, por um lado, esta restrição parece configurar uma limitação do método, a sua simplicidade de implementação justifica sua utilização para o estudo de sensibilidade que se quer realizar no escopo deste trabalho.

A figura 4.15 ilustra bem a situação, mostrando claramente o papel do comprimento da fibra. De fato, para uma mesma fração de volume de fibras, porém com comprimento diferente, a fibra de maior comprimento apresenta uma maior tenacidade no pós-pico onde ocorre o arrancamento das fibras. Por outro lado, é interessante notar que antes do deslizamento, quando ainda predomina a resistência de ponta, não há grande diferença, a tal ponto destes casos exibirem níveis de resistência máxima semelhante.

A validação de um modelo numérico é necessariamente a sua comparação com resultados experimentais. Porém, todo modelo numérico depende da calibração dos parâmetros de entrada que, em geral, são determinados experimentalmente. Neste sentido, todo trabalho de modelagem precisa a tendência do comportamento em função da variação dos parâmetros, o que conduz a uma análise paramétrica de parâmetros isolados ou combinações dos mesmos.

Estas simulações, quando comparadas com resultados experimentais, apresentam discrepâncias que podem ser atribuídas a diferentes fatores. Considerando este presente estudo, observou-se que uma distribuição em duas direções, mesmo mostrando uma boa tendência, apresenta resultados menos próximos dos experimentais do que uma distribuição aleatória que, por sua vez, se revela melhor quando o comprimento da fibra é respeitado. A consideração simultânea de todos os aspectos de um problema pode muitas vezes inviabilizar a sua modelagem ou gerar um esforço computacional enorme para pouca melhoria na eficiência do modelo ou qualidade dos resultados.

Analisando os resultados das simulações, aparece certa diferença entre os valores calculados e os obtidos experimentalmente. Entretanto, o importante é o quanto estes valores divergem. No caso da resistência máxima, os resultados calculados estão sempre menores do que os experimentais. A causa pode ser tanto uma deficiência nas leis de comportamento utilizadas para os materiais quanto a exatidão dos valores utilizados como parâmetros de entrada. Considerando o concreto, por exemplo, cuja lei constitutiva é definida com três resistências: tração, compressão e compressão biaxial, tiradas de ensaios realizados aos 28 dias, o

desvio dos valores utilizados em relações aos do concreto da viga constitui necessariamente uma fonte de discrepância que não deve ser imputada à modelagem em si, que mostra boa coerência na reprodução do padrão de comportamento.

Esta consideração é ainda mais evidente no que diz respeito ao material de interface. Simplificou-se a representação da interface adotando uma lei que trata a degradação da aderência através de um comportamento de mola. Se, por um lado, é fácil interpretar a degradação de aderência com um deslizamento, determinar a melhor lei para traduzir este comportamento é bem mais complicado. Utiliza-se, neste estudo, uma lei local bi-linear por tratar-se de elementos de treliça com um grau de liberdade tangente em cada ponto para expressar o deslocamento relativo. Contudo, os módulos característicos desta lei de comportamento: o módulo de aderência da interface ( $G$ ) e o módulo de escoamento da interface ( $H$ ) não são bem conhecidos e os valores disponíveis na literatura apresentam muitas discrepâncias de um autor para outro. Os resultados de ensaio de arrancamento revelam uma rigidez inicial muito grande, típico de um comportamento rígido-plástico com um patamar de tensão de aderência  $\tau_0$  antes de ocorrer qualquer deslizamento. A incorporação deste aspecto na lei de interface pode aumentar a exatidão dos resultados. A figura 4.23 evidencia a influência destes módulos, que foram classificados em alto e baixo, no comportamento global.

Outro assunto que merece algumas observações é o tipo de modelo utilizado. Este estudo foi realizado com um modelo 2D e isso dificulta a distribuição das fibras para frações de volume altas e há uma superposição das fibras. Por outro lado, quando se procura reproduzir o caráter aleatório da distribuição das fibras, assim como da orientação das mesmas, sempre haverá certa discrepância em relação ao caso real. Assim, os resultados correspondem à resposta macroscópica para uma possível distribuição. Procurou-se um algoritmo de distribuição que mantivesse a aleatoriedade dentro dos critérios de uma boa mistura. Neste caso, o perímetro de aderência a ser considerado merece maiores investigações porque existe agrupamento das fibras. Um modelo 3D, com elementos tetraédricos, deve suprir esta deficiência, uma vez que, no modelo 3D, a maior aleatoriedade de orientação e distribuição das fibras, permitirá reproduzir melhor a contribuição das fibras.

Finalmente, é importante salientar que as limitações que foram mencionadas são fontes de discrepâncias que não afetam a estratégia de modelagem, uma vez



que não impediu este estudo atingir o seu objetivo inicial, ou seja, avaliar a sensibilidade de um modelo numérico em relação aos principais parâmetros que governam o comportamento do CRF. Os exemplos estudados com o presente modelo mostram o potencial da formulação, independentemente dos ajustes de calibração necessários para garantir maior exatidão nos resultados. O modelo proposto neste trabalho apresentou mostrou-se eficiente na descrição do comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras. Entretanto, tem-se a consciência que todo modelo numérico possui limitações. Este modelo não tem a pretensão de esgotar o problema do comportamento do concreto reforçado, mas este fato não desmerece o seu potencial de análise, o que permite, desde já, considerá-lo um passo importante na elaboração de uma ferramenta eficiente de análise.

## **5.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

No item anterior, foram apresentadas as conclusões do trabalho ressaltando as limitações e as possíveis fontes de discrepâncias em relação a valores experimentais. Como sugestões para futuros trabalhos relacionados ao assunto, apontam-se alguns aspectos que merecem ser estudados com mais profundidade.

A primeira sugestão é com respeito às malhas a serem utilizadas, levando em conta a estratégia de distribuição das fibras nas arestas. Seria necessário o desenvolvimento de malhas que assegurem o mesmo comprimento para todas as fibras e, na medida do possível, que possibilitem uma maior variabilidade de orientação para a inserção das fibras. Em termos de aleatoriedade de distribuição e de variabilidade de orientação, cabe ressaltar que também podem ser pesquisas técnicas de distribuição mais refinadas, capazes de garantir distribuições mais realísticas.

A segunda sugestão é estender o modelo 2D um modelo 3D, o que permitirá uma aleatoriedade de orientação de distribuição das fibras ainda maior, aproximando o modelo da condição real encontrada nos elementos estruturais de concreto reforçado com fibras.

Implementar uma lei de aderência que leve em consideração a rigidez inicial ao deslocamento apresentado pelas fibras, ou seja, introduzir um novo trecho na lei bi-linear local utilizado neste trabalho, constitui a terceira sugestão para futuros

trabalhos, sobre este assunto. A implementação desta lei, do tipo rígida bi-linear, permitirá representar melhor o fenômeno da aderência.

Outra sugestão relevante é verificar a influência nas leis constitutivas de parâmetros como a resistência à compressão do concreto da matriz, o efeito de confinamento em função do nível de resistência do concreto.

Por fim, a última sugestão é aplicar o modelo a outros tipos de estruturas, tais como: pilares, lajes e ligações viga-pilar, onde, nesta última, os esforços de cisalhamento são relevantes para a ruptura.

### 5.3 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**Absi, E., and Naaman, A. E. (1986)**, Modele Rheologique pour les Betons de Fibras, Proceedings of the The Third International Symposium on Fiber Reinforced Cement and Concrete, R. N. Swamy, R. L. Wagstaffe and D. R. Oakley, Ed., Sheffield, England.

**Alwan, J. M., Naaman, A. E. (1994)**, New formulation of Elastic Modulus of Fiber-Reinforced, Quasibrittle Matrices. ASCE Journal of Engineering Mech., Vol. 120, No. 11, Nov., pp. 2443-2460.

**Alwan, J. M. (1994)**, Modeling of the mechanical behavior of fiber reinforced cement based composites under tensile loads. Ph. D Thesis, Dept. of Civill and Envir. Engineering, University of Michigan ,Ann Arbor, 1994.

**Ashour, S. A.; Hasanain, G. S. and Wafa, F. F. (1992)**, Shear Behaviour of High Strength Fiber Reinforced Concrete Beams, ACI Structural Journal, V. 89, No. 2, March-April.

**ASTM - American Society for Standard Testing and Materials (1997)**, Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber Reinforced Concrete (Using Beam with Third-Point Loading), ASTM C-1018, West Conshohocken, PA.

**Baalbaki, w.; Aitcin, P. C. and Ballivy, G. (1992)**, On predicting modulus of elasticity in high-strength concrete, ACI Materials Journal, sep-oct, vol. 89, no. 5, pp 517-520.

**Balaguru, P. N.; Narahari, R. and Patel, M. (1992)**, Flexural Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete. ACI Materials Journal, Nov-Dec, Vol. 89, No. 6, pp. 541-546.

**Barr, B. (1987)**, The fracture characteristics of FRC materials in shear, Fiber Reinforced Concrete – Properties and Applications, SP – 105, American Institute, Detroit, MI, PP. 27 – 53

**Bathe, K. J. (1982)**, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall, 1982.

**Bentur, A., Mindess, S. (1990)**, Fiber reinforced cementitious composites. Elsevier Applied Science, New York, N.Y.

**Bolander, J. E. and Saito, S. (1997)**, Discrete Modeling of Short Fiber Reinforcement in Cementitious Composites. Elsevier Science Ltd.

**Carreira, D. J. And Chu, K. H. (1985)**, Stress - strain relationship for plain concrete in compression. ACI Journal; 82(6): 797 - 804.

**Chen, W. F. (1982)**, Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill Book Company, New-York.

**Chen, W. F. (1988)**, Plasticity for structural Engineers. Editora Springer-Verlag, New-York.

**Coussy, O. (1995)**, Mechanics of porous continua. J. Wiley & Sons, Chichester, UK.

**Cox, H. L. (1952)**, The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. Br. J. Appl. Phys., 3 72-9. Apud – Bentur, A., Mindess, S. (1990), Fiber reinforced cementitious composites. Elsevier Applied Science, New York, N.Y.

**Desir, J. M. (1998)**, Interface Aço-concreto: reformulando os modelos constitutivos e numéricos. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

**Ezeldin, A. S. and Balaguru, P. (1992)**, Normal and High-Strength Fiber-Reinforced Concrete under Compression, ASCE Materials Engineering Journal, V. 4, No. 4, Nov., pp. 415-429.

**Fanella, D. A. and Naaman, A. E., (1985)**, Stress-Strain Properties of Fiber Reinforced Mortar in Compression, ACI Journal, V.82, No. 4, Jul.-Aug., pp. 475-483.

**Figueiredo, A. D. (2000)**, concreto com fibras de aço, boletim técnico- BT/PCC/260, 68p. Escola politécnica da universidade de São Paulo.

**Gasparini, D. A.; Verna, D. and Abdallah, A. (1989)**, Post Cracking Tensile Strength of Fiber Reinforced Concrete. ACI Materials Journal, Jan-Feb, pp 10-15.

**Guedes, J. M., (1990)**, Nonlinear Computational Models For Composite Materials Using Homogenization, Ph.D Thesis, Department of Applied Mechanics, University of Michigan.

**Hannat, D. J. (1978)**, Fiber Cements and Fiber Concretes, Wiley, Chicester, U. K., 219 pp.

**Hannant, D. J. (1978)**, Fibre cements and fibre concretes, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 53pp.

**Homrich, j. and Naaman, A. E. (1987)**, Stress – strain properties of SIFCON in compression, in Fiber Reinforced Concrete Properties and Applications, ACI, SP – 105, Detroit, MI.

**Hsu, L. S. and Hsu, C. T. T. (1994)**, Stress-Strain Behavior of Steel-Fiber High-Strength Concrete under Compression, ACI Structural Journal, V. 91, No.4, Jul.-Aug., pp. 448-457.

**Huges, B. P. (1981)**, Experimental tests results for flexure and direct tension of fibre cement composites. Int. J. Cement Composites and Lightweight Concrete, 3 pp. 13-18.

**Imam, M.A. (1995)**, Shear - Moment interaction of Steel Fiber High Strength Concrete, Doctoral thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

**Jindal, R. L. (1984)**, Shear and moment capacities of steel fiber reinforced concrete beams, Fiber Reinforced Concrete International Symposium, SP-81, American Concrete Institute, Detroit, MI, pp. 1 – 16.

**Johnston, C. D. (1974)**, Steel fiber reinforced mortar and concrete - A review of mechanical properties, Fiber reinforced concrete, SP- 44, ACI, Detroit, MI, pp. 127-142

**Kawai, T. (1978)**, Nucl. Eng. Design, 48, pp. 207-229

Kullaa, J. (1993), Constitutive modelling of fibre reinforced concrete under uniaxial tensile loading. VTT (Technical Research Centre of Finland).

**Lim, T. Y.; Paramavisam, P. and Lee, S. L. (1987)**, Analytical Model for Tensile Behavior of Steel Fiber Concrete. ACI Materials Journal, Jul-Aug, Vol. 84, No. 4, pp. 286-298.

**Naaman, A. E. (1987)**, High Performance Fiber Reinforced Cement Composites, Concrete Structures for the Future. IABSE Symposium, Paris, pp 371-376.

**Naaman, A. E. (1999)**, Fibers with slip-hardeningbond. Third international workshop on High performance fiber reinforced cement composites (HPFRCC3).

**Naaman, A. E. and Homrich, j. (1989)**, Tensile stress – strain properties of SIFCON, ACI Materials Journal, Vol. 86, No 3, pp. 244-251.

**Naaman, A. E.; Moavenzadeh, F. and McGarry, F. (1974)**, Probabilistic Analysis of Fiber Reinforced Concrete. Journal of Engineering Mechanics, Apr, Vol. 100, No. EM2, pp. 397-413.

**Naaman, A. E. And Reinhardt, H. W., (1995)**, High Performance Reinforced Cement Composite 2 (HPFRCC2). E & FN Spon, an imprint of Chapman & Hall, 2-6 Boundary Row, London SE18HN, UK.

**Naraynan, R. and Darwish, I. Y. S. (1987)**, Use of steel fiber as shear reinforcement, ACI Structural Journal, May-June, pp. 216-227.

**PakotigraphA, B.; Pama, R. P. and Lee, S. L. (1974)**, Mechanical Properties of Cement Mortar with Randomly Oriented Short Steel Wires, Magazine of Concrete Research, V. 26, No. 86, Mar. 1974, pp. 3-15.

**Resende, F. M. (2000)**, Influência das fibras de aço, polipropileno e sisal no amortecimento de concretos de resistência normal e de alto desempenho. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

**Romuald, J. P., Batson, G. B., (1963)**, Mechanics of cracks arrests in concrete, ASCE, J. Eng. Mech., Div., 89, pp. 147-168.

**Romuald, J. P., Mandel, J. A. (1964)**, Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed closely spaced short lengths of wire reinforcement, J. American Concrete Institute, 61, pp. 657-671.

**Rossi, R. and Wu, X. (1992)**, Dimensioning and Numerical Modelling of Metal - Fibre Reinforced Concrete (MFRC) Structures. Cement & Concrete Composites 14, pp. 195 –198.

**Sargin, M. (1971)**, Stress-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections, Study No. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, 167pp.

**Shah, S. P. (1990)**, Determination of Fracture Parameters of Plain Concrete Using Three Point Tests, Materials and Structures, V. 23, pp. 457-460.

**Shah, S. P. and Rangan, B. V. (1971)**, Fiber Reinforced Concrete Properties. ACI Journal, Feb, Vol. 68, No. 2, pp. 126-135.

**Shah, P.; Stroeven, P.; Dalhuisen, D. and Stekelenburg, P. Van. (1978)**, Complete Stress-Strain Curves for Steel Fiber Reinforced concrete in Uniaxial Tension and Compression. Testing and Test Methods of Fibre Cement Composites. RILEM Symposium. The Construction Press, Lancaster, England, pp. 399-408.

**Simões, L. C. (1998)**, Um modelo constitutivo para concreto com fibras. Tese (Mestrado em Engenharia Civil – Estruturas) – Rio de Janeiro – RJ, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC - RIO.

**Swamy, R. N. and Bahia, H. M. (1985)**, The Effectiveness of Steel Fibers as Shear Reinforcement”, Concrete International, ACI, V. 7, No. 3, pp. 35-40.

**Swamy, R. N., Bencardino, F. and Spadea, G. (2000)**, Optimizing the performance characteristics of beams strengthened with bonded CFRP laminates, RILEM Materials and Structures, V.33, N°226, pp.119-126, Mar.

**Swamy, R. N.; Mangat, P. S. and C. Rao, V. S. K. (1974)**, The Mechanics of Fiber Reinforcement of Cement Matrices. Fiber-Reinforced Concrete. American Concrete Institute, Detroit, MI, pp. 1-28. (ACI SP-44)

**Swedish Concrete Association (S. C. A.), (1995)**, Stålfiberbetong - rekommendationer för konstruktion, utförande och provning (Steel fibre reinforced concrete - Recommendations for design, construction and testing , Betongrapport nr 4, Stockholm.

**Voo, J. Y. L. and Foster, S. J. (2003)**, Variable engagement model for fibre reinforced concrete in tension. School of Civil and Environmental Engineering –The University of New South Wales, UNSW Sydney, Australia, 2052.

**Wang, M. L. (1995)**, Shear properties of slurry infiltrated fiber concrete (SIFCON). Construction and Building Materials.



**Williamson, G. R. (1974)**, The Effect of Steel Fibers on the Compressive Strength of Concrete. Fiber Reinforced Concrete, American Concrete Institute, Detroit, MI, pp. 195-207. (ACI SP-44).

**Williamson, G. R. (1978)**, Steel fibers as web reinforcement in reinforced concrete proceedings, US Army Science Conference, West Point, Vol. 3, pp. 363-377.

**Zia, P. et al. (1996)**, High-performance concretes - A state-of-art report (1989–1994). Published by Federal Highway Administration (Publication No. FHWA-RD-96).