

**O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE  
REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO PASTERNAK**

**MÔNICA ALTOÉ**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ  
DEZEMBRO – 2009**



# **O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO PASTERNAK**

**MÔNICA ALTOÉ**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para a obtenção de título de Mestre em Engenharia Civil.

**ORIENTADORA: VÂNIA JOSÉ KARAM**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ**

**DEZEMBRO – 2009**

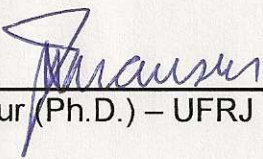
# O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO PASTERNAK


MÔNICA ALTOÉ

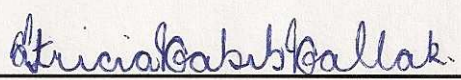
Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

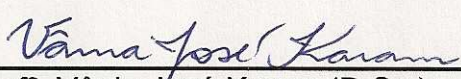
Aprovada em 14 de dezembro de 2009.

Comissão Examinadora:

  
Prof. Webe João Mansur (Ph.D.) – UFRJ

  
Prof. Gines Arturo Santos Falcon (D.Sc.) – UENF

  
Prof<sup>a</sup>. Patrícia Habib Hallak (D.Sc.) – UENF

  
Prof<sup>a</sup>. Vânia José Karam (D.Sc.) – UENF

Orientadora

## AGRADECIMENTOS

A Deus pelo Dom da vida.

Aos meus pais Álvaro Altoé e Therezinha Lachini Altoé, pelo amor, carinho e apoio em todos os momentos da minha vida.

Ao meu marido, Laélcio Scolforo, por todo amor, apoio e pela compreensão de minhas ausências.

À professora Orientadora Vânia José Karam, pela orientação deste trabalho, pela sua colaboração e apoio durante todo o mestrado.

Aos meus irmãos, Arcângelo, Alaôr (in memoriam), Rita, Maria Gorete, Romário, Roberto e Rosana pelo apoio, carinho e amizade.

Aos amigos do LECIV, pelo convívio.

Ao secretário de curso de pós-graduação Fábio Rangel Duarte, pela atenção e informações prestadas.

À amiga quase irmã Natália Souza Ribeiro, pelas altas horas de estudo e por dividir comigo todas as angústias e saudades por estar distante de minha família.

À amiga de todos os momentos Silda Morelli.

À amiga Zélia Maria Peixoto Chispim pelo incentivo, compreensão, atenção e amizade.

Aos amigos Felipe Fraga, Fábio Araújo, Sérgio Brum, Jair Ferreira, Aliny Tebaldi e Pauliene Maia pelos momentos de descontração.

Às amigas de República Jocarla Ambrosim Crevelari, Kelly Lana Araújo e Gisele Pessin pelos bons e inesquecíveis momentos de convivência.

Aos professores Gines Arturo Santos Falcon, Patrícia Habib Hallak e Webe João Mansur que gentilmente aceitaram o convite para participar da Banca.

A todos os professores do LECIV por todos os ensinamentos.

A todos os demais colegas, professores e funcionários que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

## ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
PRINCIPAIS NOTAÇÕES UTILIZADAS NO TEXTO .....	ix
RESUMO.....	xii
ABSTRACT .....	xiii
CAPÍTULO 1 .....	1
INTRODUÇÃO .....	1
1.1- Considerações iniciais.....	1
1.2- Revisão Bibliográfica .....	3
CAPÍTULO 2 .....	8
TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS COM MODELO DE FUNDAÇÃO DE PASTERNAK.....	8
2.1- Considerações iniciais .....	8
2.2- Modelos Elásticos .....	9
2.2.1- Modelo elástico de um parâmetro – Modelo de Winkler .....	9
2.2.2- Modelos elásticos de dois parâmetros – Modelo de Pasternak.....	10
2.3- Expressões das tensões:.....	11
2.4- Esforços resultantes .....	11
2.5- Equações de equilíbrio .....	13
2.6- Deslocamentos generalizados .....	14
2.7- Deformações específicas generalizadas .....	14
2.8- Expressões dos esforços: .....	15
2.9- Sistema de equações de Reissner .....	15
2.10- Condições de contorno .....	16
CAPÍTULO 3 .....	18
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A TEORIA DE REISSNER.....	18
3.1- Considerações iniciais .....	18
3.2- Equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio .....	21

3.3- Equações integrais para deslocamentos em pontos do contorno.....	25
3.4- Transformação das integrais de forças de domínio em integrais de contorno	27
3.5- Expressões para deslocamentos e esforços nos pontos internos .....	32
3.5.1- Deslocamentos.....	32
3.5.2- Momentos e esforços cortantes.....	32
3.6- Expressões integrais para as derivadas dos deslocamentos transversais nos pontos internos .....	39
3.6.1- Primeiras derivadas das expressões integrais dos deslocamentos transversais .....	40
3.6.2- Segundas derivadas das expressões integrais dos deslocamentos transversais .....	41
CAPÍTULO 4 .....	43
IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	43
4.1- Introdução.....	43
4.2- Sistema de equações discretizadas para pontos do contorno.....	44
4.3- Sistema de equações discretizadas para pontos do domínio .....	47
4.3.1- Primeiro processo.....	47
4.3.2- Segundo processo.....	49
4.4- Calculo dos Deslocamentos e Esforços em um Ponto Interno Qualquer.....	50
4.4.1- Deslocamentos.....	50
4.4.2- Momentos e esforços cortantes nos pontos internos.....	51
CAPÍTULO 5 .....	52
APLICAÇÕES .....	52
5.1- Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada.....	52
5.2- Exemplo 2: Placa circular engastada.....	55
5.3- Exemplo 3: Placa retangular simplesmente apoiada .....	58
CAPÍTULO 6 .....	60
CONCLUSÕES .....	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	62

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Sistema de coordenadas.....	8
Figura 2.2 Modelo de Pasternak:.....	10
Figura 2.3a e 2.3b: Esforços resultantes: momentos esforços cortantes.....	12
Figura 2.4: Elemento de placa em equilíbrio.....	13
Figura 3.1: Região $\Omega^* + \Gamma^*$ contendo a placa $\Omega + \Gamma$ .....	19
Figura 5.1 – Placa quadrada simplesmente apoiada.....	53
Figura 5.2: Discretizações do contorno e do domínio da placa quadrada.....	53
Figura 5.3: Variação do deslocamento transversal $u_3$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ ..	54
Figura 5.4: Variação dos momentos fletores $M_{11}$ e $M_{22}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ , considerando $\bar{k}_1 = 5$ , para a placa quadrada .....	55
Figura 5.5: Variação dos momentos fletores $M_{11}$ e $M_{22}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ , considerando $\bar{k}_1 = 20$ para a placa quadrada.....	55
Figura 5.6: Discretização do contorno e do domínio da placa circular	56
Figura 5.7: Variação do deslocamento transversal $u_3$ ao longo do eixo $x_1$ para a placa circular.....	57
Figura 5.8: Variação dos momento fletor $M_{rr}$ ao longo do eixo $x_1$ , considerando $\bar{k}_1 = 5$ , para a placa circular.....	57
Figura 5.9: Variação dos momento fletor $M_{rr}$ ao longo do eixo $x_1$ considerando $\bar{k}_1 = 5$ , para a placa circular.....	57
Figura 5.10 – Placa retangular simplesmente apoiada no contorno.....	58
Figura 5.11: Discretização do contorno e do domínio da placa retangular.....	59
Figura 5.12: Variação do deslocamento transversal $u_3$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para a placa retangular.....	59
Figura 5.13: Variação dos momentos fletores $M_{11}$ e $M_{22}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para a placa retangular.....	59



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1. Resultados para deslocamento e momento fletor no centro da placa retangular.....	54
Tabela 5.2: Resultados para deslocamento e momento fletor no centro da placa circular.....	56

## PRINCIPAIS NOTAÇÕES UTILIZADAS NO TEXTO

Índices:	latinos	→	variam de 1 a 3
	gregos	→	Variam de 1 a 2
$w$		→	Flecha (deslocamento transversal)
$\phi_\alpha$		→	rotações
$P$		→	força exercida pela fundação (base elástica) na estrutura
$k$		→	constante de proporcionalidade (módulo de fundação)
$k_1$		→	módulo de cisalhamento da fundação
$w_{,11}, w_{,22}$		→	derivadas segunda do deslocamento transversal de um ponto da placa em relação aos eixos $x_1$ e $x_2$ , respectivamente.
$\sigma_{\alpha\beta}$		→	componentes do tensor de tensões
$\chi_{\alpha\beta}$		→	componentes do tensor de deformações específicas de flexão
$\psi_\alpha$		→	componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais
$M_{\alpha\beta}$		→	momentos fletores e torsores por unidade de comprimento
$Q_\alpha$		→	esforços cortantes por unidade de comprimento
$x_i$		→	eixos coordenados
$u_k$		→	componentes dos deslocamentos generalizados
$p_k$		→	componentes das forças de superfície generalizadas
$u_{ij}^*$		→	componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental
$p_{ij}^*$		→	componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental
$v_i^*$		→	funções que satisfazem determinada equação de Poisson
$u_{i\beta k}^*$		→	componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos
$p_{i\beta k}^k$		→	componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos
$w_{i\beta}^*$		→	componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos

$h$	→	espessura
$E$	→	módulo de elasticidade
$\nu$	→	coeficiente de Poisson
$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$	→	rigidez à flexão da placa
$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$	→	constante característica das equações de Reissner
$q$	→	carga transversal por unidade de área
$\xi$	→	ponto fonte ou ponto carga
$x$	→	ponto campo
$r$	→	distância do ponto $\xi$ ao ponto $x$
$r_{,\alpha}$	→	derivada de $r$ em relação à coordenada $x_\alpha$
$n_\beta$	→	cosseno diretor da normal em relação ao eixo $x_\beta$
$K_0$ e $K_1$	→	funções de Bessel modificadas de ordem inteira
$\delta_{ij}$	→	delta de Kronecker
$\delta(x-\xi)$	→	delta de Dirac
$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$	→	operador de Laplace
$\tilde{A}$	→	matriz do sistema de equações
$\tilde{U}$ e $\tilde{P}$	→	vetores que contém os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície respectivamente
$\tilde{B}$	→	vetor que contém a carga distribuída
$\tilde{M}$	→	vetor que contém a parcela de reação do solo
$\tilde{H}$ e $\tilde{G}$	→	matrizes que contém as integrais sobre os elementos de contorno
$\left  \tilde{J} \right $	→	jacobiano
$\Omega$	→	domínio da região analisada
$\Omega^*$	→	domínio da região que contém $\Omega$ e cujo contorno está infinitamente distante da placa
$\Gamma$	→	contorno da região definida por $\Omega$

- $\Gamma^*$  → contorno da região definida por  $\Omega^*$
- $\Gamma_u$  → parte do contorno  $\Gamma$  onde os deslocamentos generalizados são prescritos
- $\Gamma_p$  → parte do contorno  $\Gamma$  onde as forças de superfície generalizadas são prescritas

## RESUMO

Neste trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análise de placas apoiadas sobre fundações do tipo Pasternak, considerando a teoria de Reissner. A abordagem feita utiliza a solução fundamental já empregada na análise de placas pelo MEC sem a consideração da base elástica. São apresentadas as equações integrais que serão usadas para a solução do problema. Para a solução numérica são usados elementos de contorno quadráticos, contínuos e descontínuos e células internas constantes. Devido ao fato de as reações do solo constituírem também incógnitas para o problema, e de estas serem escritas em função de deslocamentos transversais e de derivadas destes, consideram-se equações adicionais escritas para pontos do domínio que situado sobre a fundação. Esta região é discretizada em células internas constantes e as integrais correspondentes são transformadas em integrais sobre os contornos das células. Foram consideradas e implementadas duas abordagens diferentes para definir equações adicionais ao sistema original. Na primeira, são adicionadas as equações integrais correspondentes aos deslocamentos transversais e as segundas derivadas de deslocamentos que se encontram nas expressões das forças de reação do solo escritas em função de deslocamentos de pontos das células, considerando-se fórmulas de diferenças. Na segunda abordagem, são adicionadas, além das equações integrais dos deslocamentos transversais nos pontos internos, as equações integrais das segundas derivadas dos deslocamentos transversais desses pontos, ficando estas segundas derivadas também como incógnitas. Para comprovar a validade das formulações, apresentam-se alguns exemplos numéricos, cujos resultados são comparados com resultados obtidos por outros autores.

**Palavras-Chave:** Teoria de Reissner, Método dos elementos de contorno, Fundação de Pasternak.

## ABSTRACT

The Boundary Element Method (BEM) is used in this work for the analysis of plates resting on Pasternak-type foundations, considering Reissner's theory. The used employs considers the fundamental solution already used in the analysis of plates by the BEM without the consideration of elastic foundation. Integral equations that are used to solve the problem are presented. For the numerical solution, quadratic, continuous and discontinuous boundary elements and constant internal cells are used. Due to the fact that the reactions of the soil are also unknowns and that these forces are written in terms of the transverse displacement field and its derivatives, additional equations written for the transverse displacements of the domain points that is situated on the foundation are considered. This region is discretized into constant internal cells and the corresponding integrals are transformed into integrals over the boundary of the cells. Two approaches are considered and implemented in order to define additional equations to the original system. In the first one, integral equations corresponding to transverse deflections are added and the second derivatives of the transverse deflections that appears in the expressions of the soil reactions are written in terms of displacements of cell points, considering finite difference formulas. In the second approach, integral equations for transverse displacements at internal points and for the second derivatives of these integral equations are added to the system and the derivatives of transverse displacements are also considered unknowns to this system. To prove the validity of the formulations, numerical examples are presented and results are compared with the results obtained by other authors.

**Keywords:** Reissner's Theory, Boundary Element Method, Pasternak Foundation.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1- Considerações iniciais

Placas são elementos estruturais representados por superfícies planas, utilizados nos mais variados tipos de estruturas. A análise de flexão de placas através do Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi desenvolvida inicialmente com formulações baseadas na teoria de Kirchhoff-Love. Posteriormente, o método foi desenvolvido também para análise de placas pela teoria de Reissner.

Em 1850, Kirchhoff apresentou a chamada teoria clássica para flexão de placas, aplicável a placas delgadas com pequenos deslocamentos (Timoshenko, 1970). A formulação leva a uma equação diferencial de quarta ordem e não são consideradas nesta teoria as deformações por cisalhamento transversal, assumindo que retas normais ao plano médio da placa permanecem retas e normais à superfície média após deformação. Para o caso de placas espessas, esta teoria conduz a resultados inexatos, tanto nos bordos e cantos da placa como próximo a furos com diâmetro da ordem de grandeza da espessura.

Mais tarde, em 1944, Reissner apresentou uma formulação para análise de placas tanto finas quanto espessas, assumindo determinada variação das tensões internas ao longo da espessura e considerando o efeito das deformações cisalhantes transversais, levando a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem, que satisfaz três condições de contorno por bordo. Em comparação à teoria de Kirchhoff, a teoria de Reissner apresenta melhores resultados nos bordos e cantos das placas espessas.

O Método dos Elementos de Contorno considera a divisão do contorno da região a ser estudada em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis são aproximadas por funções de interpolação que são definidas em função de pontos escolhidos em cada elemento, denominados pontos nodais. O Método dos Elementos de Contorno destaca-se de outros métodos numéricos por requerer a discretização, em geral, apenas o contorno da região a ser analisada; no caso de placas homogêneas, são discretizadas apenas as linhas de contorno que circundam a superfície média.

O solo pode ser modelado de várias formas, sendo uma dessas formas o modelo de Winkler, de um parâmetro, que consiste na representação do solo por um conjunto de molas discretas. Uma limitação deste modelo é que este não considera a existência de interações entre as molas, usando apenas um parâmetro para expressar a resistência específica da base elástica. Existem modelos que contêm mais de um parâmetro para descrever o comportamento da base elástica como um contínuo, como o que foi proposto por Pasternak.

O modelo de Pasternak é um modelo elástico de dois parâmetros definido por duas constantes elásticas independentes. Neste modelo, admite-se que a superfície de deslocamentos não se desenvolve apenas imediatamente abaixo da região carregada, mas também dentro de zonas limitadas fora da área carregada; também introduz hipóteses de restrições ou simplificações na distribuição de tensão e deslocamento.

No presente trabalho, é aplicado o Método dos Elementos de Contorno como ferramenta de resolução numérica para analisar esforços e deslocamentos em placas apoiadas sobre base elástica, considerando a teoria de Reissner, por ser mais consistente que a teoria de Kirchhoff, e a reação do solo com um modelo tipo Pasternak.

Inicialmente, é apresentado um resumo da teoria de Reissner para a flexão de placas, incluindo a consideração da reação da fundação sobre a placa.

Em seguida, é desenvolvido o Método dos Elementos de Contorno aplicado a essa formulação, deduzindo-se as equações integrais básicas pelo Método dos Resíduos Ponderados e apresentando-se os tensores da solução fundamental. A abordagem feita neste trabalho utiliza a solução fundamental empregada anteriormente na análise de placas pelo Método dos Elementos de Contorno (Van der Weeën, 1982a e 1982b; Karam & Telles, 1988). Os procedimentos adotados na implementação numérica da referida formulação também são apresentados. No contorno, são usados elementos quadráticos, podendo ser contínuos ou descontínuos e a região situada sobre a base elástica é dividida em células constantes, podendo ser triangulares ou retangulares. Além dos deslocamentos e forças de superfície, a reação da base elástica sobre a placa também constitui uma incógnita; portanto, são consideradas equações adicionais ao sistema de equações original, escritas para os pontos situados nos centros geométricos das células.



Considerando que a força de reação do solo é função dos deslocamentos transversais e de suas segundas derivadas em relação aos eixos da superfície média, são desenvolvidos dois procedimentos distintos no presente trabalho para a consideração das equações adicionais ao sistema. O primeiro admite, como equações adicionais, equações integrais escritas para os deslocamentos transversais dos pontos situados nos centros geométricos das células e procede ao cálculo das derivadas segundas das flechas nesses pontos por fórmulas de diferenças finitas, escritas em função de pontos da própria célula e de células vizinhas. O segundo procedimento considera, como equações adicionais, as equações integrais do deslocamento transversal e as equações integrais das segundas derivadas da flecha em relação aos eixos cartesianos.

As integrais de domínio relacionadas com o carregamento transversal são transformadas em integrais de contorno para cargas uniformemente distribuídas e as integrais correspondentes às forças de reação da fundação em cada célula são transformadas em integrais sobre os contornos das células.

Resultados obtidos com os dois procedimentos são comparados entre si e com resultados de outros autores.

No decorrer do texto, será utilizada a notação indicial, sendo que os índices indicados com letras gregas variam de 1 a 2 e os indicados com letras romanas, de 1 a 3.

## **1.2- Revisão Bibliográfica**

Existem vários trabalhos que abordam o método dos elementos de contorno para resolução numérica e a análise de flexão de placas sobre base elástica ou rígida, dos quais alguns são destacados a seguir.

Jianguo *et al.* (1982) apresentaram uma formulação do MEC para placas de Reissner com dois parâmetros de fundação. A solução fundamental é desenvolvida utilizando o método de Hörmander e a consideração de funções auxiliares. As equações integrais de contorno são obtidas empregando o método dos resíduos ponderados.

A formulação apresentada por Paiva e Venturini (1985) dedica-se particularmente à análise de construção de pavimentos. Utilizando o método dos elementos de contorno, modelam um pavimento completo, com todas as restrições impostas por colunas, empregando malhas muito simples e computando os valores de todas as flexões e esforços, incluindo aqueles pontos localizados em áreas de apoio ou cargas descontinuas. As integrais de domínio para considerar carregamentos aplicados na placa são transformadas em integrais de contorno incluindo aquelas usadas para modelar as áreas de apoio.

Paiva (1989) apresentou uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas apoiadas parcial ou totalmente em base elástica tipo Winkler. Nesta formulação a região da placa apoiada na base elástica é dividida em células triangulares sobre as quais adota-se para a reação da base elástica uma aproximação linear, que é escrita em função dos deslocamentos transversais dos nós da célula. Os resultados obtidos foram comparados com os fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos.

Silva e Venturini (1990) apresentam um processo de análise de placas com condições de vinculação em seu domínio utilizando a Teoria de Reissner e o Método dos Elementos de Contorno. O sistema inicial de equações é alterado à medida que a presença de carregamentos ou deslocamentos prescritos em pontos internos produz reações internas, que são tratadas como cargas distribuídas em suas áreas de contato. Os termos de domínio envolvendo estas áreas internas são integrados diretamente e transformados em integrais sobre seus respectivos contornos.

Sapountzakis e Katsikadelis (1992) desenvolveram uma solução de elementos de contorno para problemas de contato unilateral de placa fina sobre fundações homogêneas ou não-homogêneas. A reação do solo pode depender linearmente ou não-linearmente da deflexão da placa. A superfície de solo não precisa ser necessariamente plana e o contato entre a placa e o solo devido a um afastamento inicial é determinado. O procedimento de solução é baseado na representação integral da deflexão para a equação bi-harmônica correspondente, no qual a reação da fundação, que é incógnita, é tratada como termo de carregamento. A partir dessas considerações, os autores utilizam o Método dos Elementos de Contorno e integração de Gauss para as integrais de domínio envolvendo as incógnitas de domínio e isso fornece um sistema de equações algébricas não linear

a partir do qual as deflexões da superfície média são calculadas por um processo iterativo.

Fadhil e El-Zafrany (1994) apresentam, baseados na teoria de Reissner, uma formulação para análise de placas espessas com um ou dois parâmetros em fundações elásticas com o Método dos Elementos de Contorno. Soluções fundamentais são obtidas como combinação de dois grupos; o primeiro representa o caso de fundações para um parâmetro e o segundo considera o efeito adicional da fundação para dois parâmetros. Isso conduz a uma inclusão eficiente de casos de um e dois parâmetros em um único programa computacional. Termos de carregamentos da integral de domínio têm sido reduzidos para casos de carregamentos com distribuição uniforme e linear e forças e momentos fletores concentrados. Segundo os autores, estudos de casos com diferentes carregamentos e condições de contorno têm sido analisados e os resultados fornecidos pelo método dos elementos de contorno têm confirmado a precisão da teoria desenvolvida.

Paiva e Butterfield (1997) utilizam uma formulação para o método dos elementos de contorno para analisar problemas de interação solo-estrutura onde a interface solo-estrutura é dividida em elementos triangulares, no qual os deslocamentos e a reação do solo variam linearmente. O contorno da placa é dividido em elementos lineares. A integral de domínio desses elementos é transformada em integral de contorno, evitando a singularidade  $r^{-1}$  da solução fundamental do solo.

Rashed *et al.* (1998) apresentam uma aplicação do Método de Elementos de Contorno para placas espessas sobre fundação de Winkler. A teoria de Reissner é usada para modelar o comportamento da placa. O modelo de fundação de Winkler é representado por molas contínuas, as quais são diretamente incorporadas nas equações diferenciais que regem o modelo. As soluções fundamentais são construídas usando uma técnica de desacoplamento do operador. Essas soluções fundamentais representam três diferentes casos dependendo das constantes do problema.

Rashed *et al.* (1999) utilizam a formulação de elementos de contorno com a teoria de Reissner para placas de fundação do tipo Pasternak. A solução fundamental usada nessa formulação foi desenvolvida por Rashed e Aliabadi (1997). Essa formulação tem a mesma ordem de singularidade que os problemas elásticos de duas dimensões. As formas explícitas das funções relativas à solução

fundamental para os pontos internos são apresentadas para os três casos da solução fundamental. São usados elementos quadráticos isoparamétricos para aproximar as incógnitas do contorno. Uma discussão sobre o sistema de equações do método dos elementos de contorno é feita, particularmente para o caso de condições de contorno de bordos livres.

Mendonça e Paiva (2000) apresentam uma formulação do método dos elementos de contorno para análise estática de fundação em estacas unidas por placa, no qual todas as interações entre a placa, a estaca e o solo são simultaneamente considerados. Nessa abordagem, o solo é tratado como um semi-espaço elástico linear homogêneo, representado por equações integrais, é usada a solução fundamental de Mindlin. A placa é considerada delgada e representada por equações integrais. Cada estaca é representada por um elemento singular com três pontos nodais e a força cisalhante ao longo da estaca é aproximada por um polinômio do segundo grau. Nas partes superior e inferior da estaca, a força é assumida constante através da seção transversal e um ponto nodal é localizado lá. Com esta aproximação, apenas algumas incógnitas são associadas com cada estaca. Para a análise da interação solo-estrutura, a interface é dividida em elementos triangulares com um ponto nodal em cada vértice e a reação do solo varia linearmente sobre cada elemento. Os deslocamentos verticais de cada nó na placa e na estaca são representados por equações integrais, a fim de se obter um sistema de equações lineares envolvendo as forças e os deslocamentos de todos os pontos nodais em todas as interfaces e de que, a partir dessas equações, os deslocamentos nodais e a rigidez global do sistema possam ser calculados.

No trabalho de Rashed e Aliabadi (2000), o método dos elementos de contorno é usado para realizar a análise estrutural através de uma aplicação simples e prática. A formulação utilizada é baseada na formulação de Rashed *et al.* (1998), no qual o efeito do solo é incorporado diretamente na solução fundamental do problema. Por essa razão, a representação do solo é independente da discretização do problema. São utilizados, nesse trabalho, elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. As integrais de contorno são calculadas e, de acordo com a formulação utilizada, somente o contorno da placa precisa ser discretizado.

Auatt (2002) abordou a análise de contato de uma placa com uma base rígida pelo método dos elementos de contorno, utilizando a teoria de Reissner. Considerou

equações de deslocamentos em pontos internos acrescentadas ao sistema original para placas sem a consideração da base rígida.

Karam e Auatt (2003) apresentaram uma análise de placas de Reissner com suportes internos pelo método dos elementos de contorno, considerando células internas nas partes da placa que se encontram sobre esses suportes. Usaram equações adicionais para resolver o problema.

Rashed (2005) desenvolveu uma nova formulação com o método dos elementos de contorno/domínio para placas sobre fundações elásticas. A formulação desenvolvida tem aplicação em análises de fundações de edifícios. Considerou placa espessa com condições de contorno livre nos bordos. O solo ou a fundação elástica foi representado como um meio contínuo. O método dos elementos de contorno foi empregado para modelar a placa e o solo foi modelado considerando células internas constantes. A integral de domínio associada ao solo foi representada por integrais de contorno definidas para os contornos de cada célula. Uma vantagem dessa formulação é a possibilidade de análise de fundações em solos não-homogêneos.

## CAPÍTULO 2

### TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS COM MODELO DE FUNDAÇÃO DE PASTERNAK

#### 2.1- Considerações iniciais

A Teoria de Reissner para flexão de placas baseia-se na Teoria da Elasticidade e no princípio Hellinger-Reissner, constituindo um problema de integração de sexta ordem que satisfaz a três condições de contorno por bordo. As fórmulas básicas para o cálculo de placas quando se utiliza a teoria de Reissner são apresentadas a seguir (Reissner, 1945).

Admite-se uma placa linearmente elástica, homogênea e isotrópica, com espessura  $h$  constante e sujeita a um carregamento transversal  $q$  por unidade de área.

Considerando que a placa encontra-se sobre base elástica do tipo Pasternak, incorpora-se, na formulação, a força  $p$ , por unidade de área, exercida pela fundação na estrutura.

Considera-se, ainda,  $x_i$  as coordenadas cartesianas, onde  $x_\alpha$  estão na superfície média e  $x_3$  na direção transversal da placa (Ver Figura 2.1).

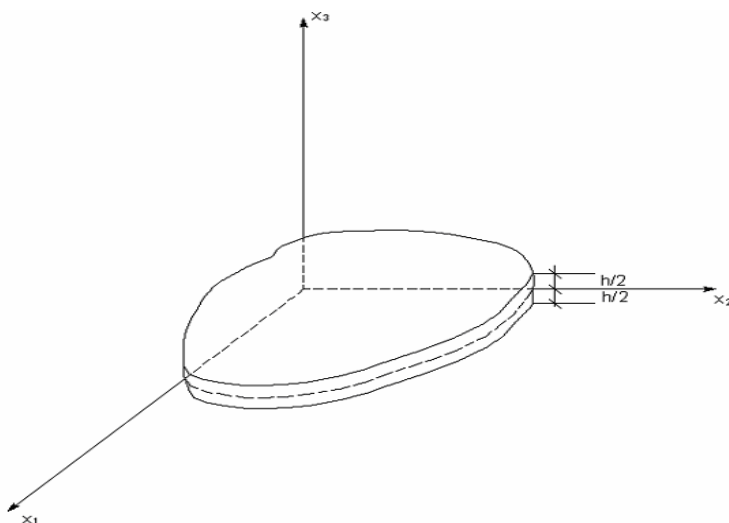


Figura 2.1: Sistema de coordenadas

## 2.2- Modelos Elásticos

Um material ou meio perfeitamente elástico se deforma quando submetido a um sistema de forças externas, mas, cessando o carregamento, o material ou o meio recupera totalmente sua forma original, não havendo deformações permanentes.

### 2.2.1- Modelo elástico de um parâmetro – Modelo de Winkler

Um modelo simples e bastante utilizado para o estudo do comportamento estrutural sobre base elástica é o modelo de Winkler. Neste modelo, assume-se que o deslocamento  $w$  de qualquer ponto situado na superfície do solo é diretamente proporcional ao carregamento  $q$  aplicado no ponto e independe de outros carregamentos externos, com uma constante de proporcionalidade,  $k$ , chamado módulo de fundação, cujo valor numérico depende largamente das propriedades do solo.

Neste caso,  $k$  é o único parâmetro e a equação que representa o modelo é dada por:

$$p = kw \quad (2.1)$$

sendo:

$p =$  força exercida pela fundação (base elástica) na estrutura

$k =$  constante de proporcionalidade (módulo de fundação)

$w =$  deslocamento transversal de um ponto da estrutura

Fisicamente, o modelo de Winkler consiste em um sistema mutuamente independente de molas com constante  $k$ . Assume-se a hipótese de que os deslocamentos são determinados para pontos imediatamente abaixo da região carregada, sendo considerados nulos os deslocamentos fora dessa área.

## 2.2.2 - Modelos elásticos de dois parâmetros – Modelo de Pasternak

Os modelos de dois parâmetros são definidos por duas constantes elásticas independentes. Vários autores elaboraram diferentes modelos de dois parâmetros e a definição deste tipo de modelo tem seguido duas abordagens distintas. A primeira delas parte do modelo de Winkler e elimina as descontinuidades pela incorporação da interação das molas individuais. Já a segunda metodologia utiliza os conceitos do modelo de meio contínuo, que mostra que a superfície de deslocamentos não se desenvolve apenas imediatamente abaixo da região carregada, mas também dentro de zonas limitadas fora da área carregada. A segunda metodologia também introduz hipóteses de restrições ou simplificações na distribuição de tensão e deslocamento.

O modelo de Pasternak (Figura 2.2) utilizado no presente trabalho, enquadra-se na segunda metodologia.

A equação que representa o modelo de Pasternak é dada por:

$$p = kw - k_1( w_{,11} + w_{,22} ) \quad (2.2)$$

onde:

$p$  = força exercida pela fundação (base elástica) sobre a estrutura

$w$  = deslocamento transversal de um ponto da estrutura

$k$  = módulo de fundação

$k_1$  = módulo de cisalhamento da fundação

$w_{,11}$  e  $w_{,22}$  = segundas derivadas do deslocamento transversal de um ponto da placa em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.



Figura 2.2: Modelo de Pasternak



### 2.3- Expressões das tensões:

Consideram-se as seguintes condições de carregamento nas faces da placa:

$$\text{Para } x_3 = \frac{h}{2}, \sigma_{33} = \frac{q}{2} \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0.$$

$$\text{Para } x_3 = -\frac{h}{2}, \sigma_{33} = \frac{q}{2} - p \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0$$

As tensões variam ao longo da espessura e podem ser escritas em função dos esforços solicitantes, como:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{33} = \frac{p}{2} + \frac{qx_3}{2h} \left[ 3 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

As tensões normais  $\sigma_{33}$ , que atuam na direção transversal, são consideradas desprezíveis em relação às demais.

### 2.4- Esforços resultantes

Os momentos fletores e torsões por unidade de comprimento são obtidos integrando-se as componentes de tensão  $\sigma_{\alpha\beta}$  multiplicadas por  $x_3$  ao longo da espessura da placa:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.4a)$$

Da mesma forma, integrando-se as tensões  $\sigma_{\alpha 3}$ , obtém-se os esforços cortantes por unidade de comprimento

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.4b)$$

Os sentidos positivos dos esforços solicitantes são mostrados nas Figuras 2.3a e 2.3b.

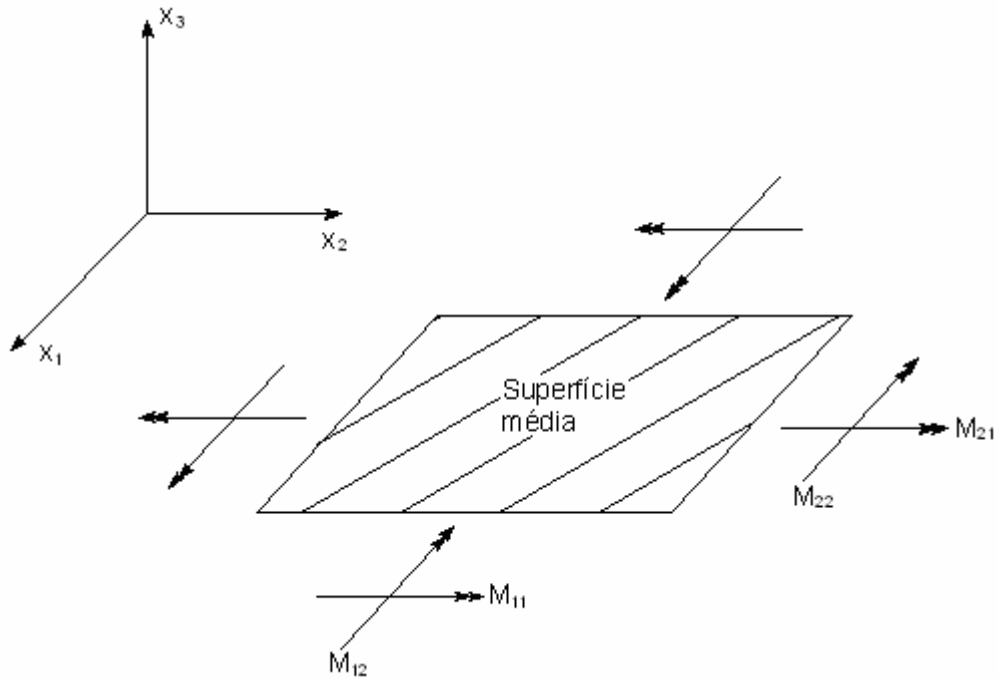


Figura 2.3a: Esforços resultantes: momentos

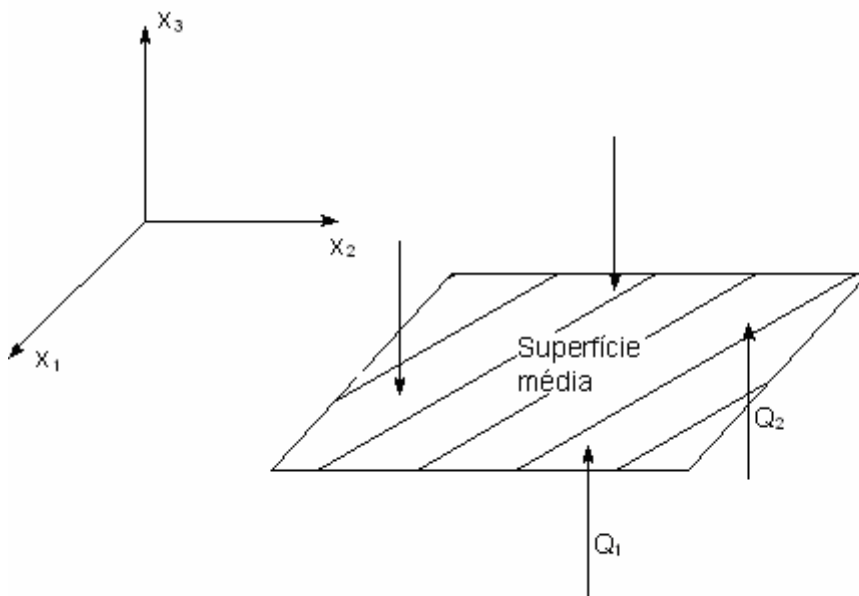


Figura 2.3b: Esforços resultantes: esforços cortantes

## 2.5- Equações de equilíbrio

O equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa, conforme pode ser observado na Figura 2.4, considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos, gera as equações dadas a seguir.

- Pelo equilíbrio de forças na direção  $x_3$ :

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - p = 0 \quad (2.5a)$$

- Pelo equilíbrio de momentos em relação aos eixos  $x_\alpha$ :

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.5b)$$

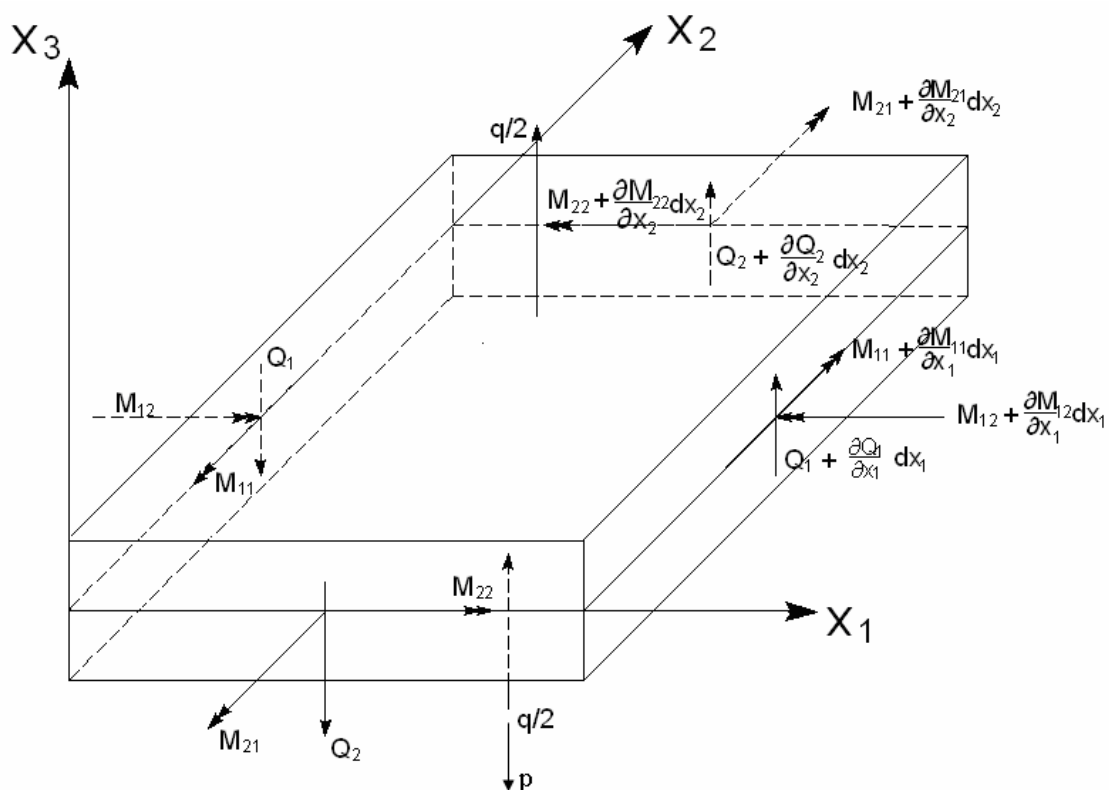


Figura 2.4: Elemento de placa em equilíbrio

## 2.6- Deslocamentos generalizados

Os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$ , considerados para pontos da superfície média da placa, representam a média ponderada dos deslocamentos  $v_i$  de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados. Suas expressões são apresentadas a seguir.

- Rotação da normal à superfície média nos planos  $x_\alpha - x_3$ :

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.6a)$$

- Deslocamento transversal (flecha):

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.6b)$$

## 2.7- Deformações específicas generalizadas

Quando utilizada a teoria linear, as expressões das deformações específicas generalizadas em função dos deslocamentos generalizados da placa são da forma que se segue.

- Deformações específicas de flexão:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (2.7a)$$

- Deformações específicas cisalhantes transversais:

$$\Psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha} \quad (2.7b)$$

## 2.8- Expressões dos esforços:

As expressões dos momentos e esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados, quando utilizada a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos aliada a princípios variacionais são apresentadas a seguir.

- Momentos:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\nu p}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.8a)$$

- Esforços cortantes:

$$Q_{\alpha} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\phi_{\alpha} + w_{,\alpha}) \quad (2.8b)$$

onde:

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \text{rigidez à flexão da placa} \quad (2.9)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} = \text{constante característica das equações de Reissner} \quad (2.10)$$

$\delta_{\alpha\beta}$  = delta de Kronecker

## 2.9- Sistema de equações de Reissner

As três equações de equilíbrio (2.5), acrescidas das cinco expressões dos esforços (2.8), formam um sistema com oito equações diferenciais parciais, onde as oito incógnitas são os esforços e os deslocamentos generalizados. Este sistema forma a base da teoria de Reissner para flexão de placas com pequenos deslocamentos, satisfazendo a três condições físicas em cada ponto do contorno

Substituindo as expressões dos esforços nas equações de equilíbrio, obtém-se o sistema dado por:

$$Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} (q_{,\alpha} - p_{,\alpha}) = -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\nabla^2 w)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 (q-p) = q-p$$
(2.11)

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \text{operador de Laplace}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$$

## 2.10- Condições de contorno

Devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo, podendo prescrever, em cada uma das três direções generalizadas, o deslocamento ou a força de superfície correspondente.

Considerando  $\Gamma$  o contorno total da placa,  $\Gamma_u$  o contorno onde os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$  são prescritos e  $\Gamma_p$  onde as forças de superfície generalizadas  $p_\alpha$  e  $p_3$  são prescritas, tem-se:

$$\text{Em } \Gamma_u : \phi_\alpha = \bar{\phi}_\alpha$$

$$w = \bar{w}$$
(2.12)

$$\text{Em } \Gamma_p : p_\alpha = \bar{p}_\alpha$$

$$p_3 = \bar{p}_3$$
(2.13)

sendo:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$p_3 = Q_\beta n_\beta$$
(2.14)

e

$$\bar{p}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$\bar{p}_3 = \bar{Q}_\beta n_\beta \tag{2.15}$$

onde  $n_\beta$  são os co-senos diretores da normal exterior ao contorno.

## CAPÍTULO 3

### O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A TEORIA DE REISSNER

#### 3.1- Considerações iniciais

São desenvolvidas, neste capítulo, as equações integrais de placas apoiadas sobre base elástica, utilizando a teoria de Reissner de flexão de placas e considerando o modelo de fundação de Pasternak, visando à formulação do problema de flexão de placas através do MEC.

No método dos elementos de contorno, a partir das equações diferenciais governantes do problema, são obtidas equações integrais correspondentes. Através do Teorema Divergente ou de Gauss-Green, estas equações integrais, envolvendo integrais de domínio e de contorno, são transformadas em equações integrais de contorno apenas, sempre que possível. Estas equações integrais envolvem certas soluções conhecidas, chamadas soluções fundamentais, para a equação diferencial do problema. As equações integrais são então substituídas por um conjunto de equações integrais discretizadas. Para isto, considera-se o contorno dividido em elementos de contorno e o domínio em células internas. As funções em cada elemento são representadas em termos dos valores nodais por meio de funções de interpolação.

Considera-se uma placa definida por um domínio  $\Omega$  representado pela sua superfície média e um contorno  $\Gamma$ , representado pela linha que a circunda, em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento transversal  $q$  atuando em  $\Omega$  e possuindo uma espessura constante  $h$ . Considera-se ainda, a região de domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$ , contendo a placa assim definida, conforme mostrado na Figura 3.1. No decorrer deste e dos próximos capítulos, os deslocamentos generalizados  $\phi_a$  e  $w$  definidos em (2.6) serão representados por  $u_\alpha$  e  $u_3$ , ou ainda, genericamente, como  $u_k$ .



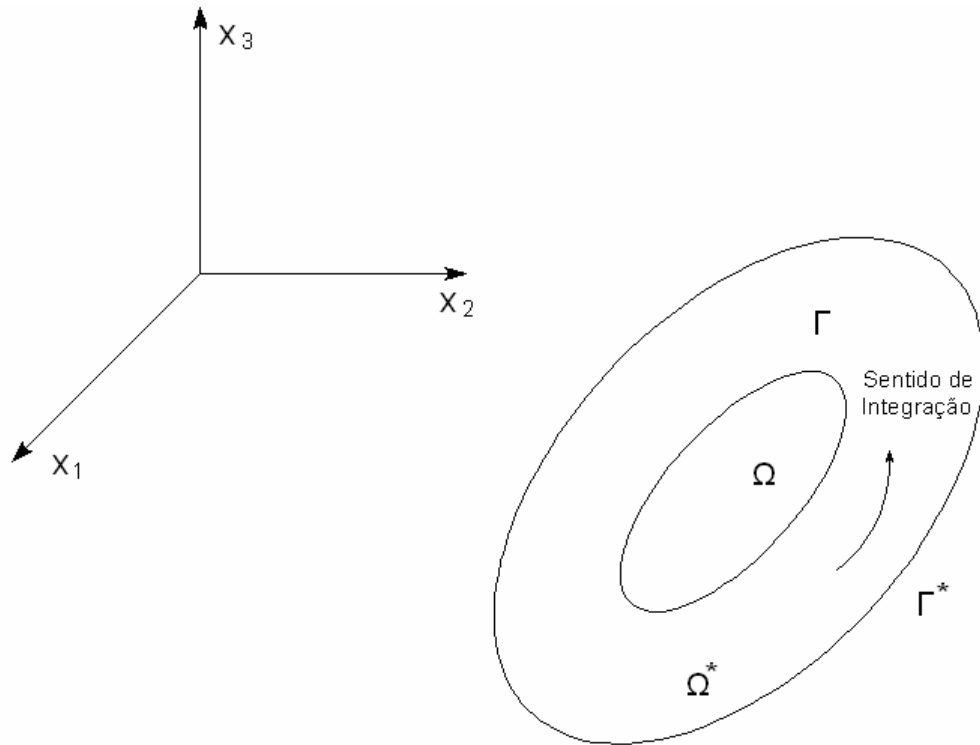


Figura 3.1: Região  $\Omega^* \cup \Gamma^*$  contendo a placa  $\Omega \cup \Gamma$

A formulação da teoria de Reissner para flexão de placas que será utilizada na dedução das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados é mostrada a seguir:

Condições de contorno:

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{em } \Gamma_u$$

$$p_k = \bar{p}_k \quad \text{em } \Gamma_p$$

(3.1)

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$$

Considerando a região  $(\Omega \cup \Gamma)$ , tem-se:

Deslocamentos:  $u_k$

Forças de superfície:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (3.2)$$

$$p_3 = Q_\alpha n_\alpha$$

Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}}{2} \quad (3.3)$$

$$\psi_\alpha = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) + \frac{\nu(q-p)}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha + u_{3,\alpha})$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (3.5)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - p = 0$$

Considerando a região  $(\Omega^* \cup \Gamma^*)$ , tem-se:

Deslocamentos:  $u_k^*$

Forças de superfície:  $p_k^*$

Deformações específicas

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*}{2} \quad (3.6)$$

$$\Psi_{\alpha}^* = u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*$$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.7)$$

$$Q_{\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*)$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + F_{\alpha}^* = 0 \quad (3.8)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

onde  $F_k^*$  são as componentes das forças de domínio definidas a fim de se obter a solução fundamental.

A seguir, apresenta-se dedução das equações integrais básicas a partir do Método dos Resíduos Ponderados.

### 3.2- Equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio

Utilizando-se o método dos resíduos ponderados, considerando a força  $p$ , exercida pelo solo, como expressa em (2.2) e utilizando as equações de equilíbrio (3.5) com as condições de contorno (3.1), pode-se escrever a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^*)u_{\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha}^* + q - p)u_3^*] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (3.9)$$

Integrando o primeiro termo por partes e considerando as expressões (3.2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} (q - p) d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (q - p) u_3^* d\Omega = \\
 & = - \int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Considerando as expressões (3.3), (3.4), (3.6) e (3.7), e considerando que:

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^* \tag{3.12}$$

o que não implica em  $u_{\alpha,\beta}^* = \chi_{\alpha\beta}^*$  e usando a reciprocidade:

$$M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* = M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} \tag{3.13}$$

tem -se:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega \tag{3.14}$$

Logo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} (q-p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Integrando novamente por partes e utilizando as expressões (3.5) e (3.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha} \cos \beta d\Gamma + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^* u_3 \cos \alpha d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} (q-p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = \\
& = - \int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Para  $\alpha = \beta$ , tem-se  $\delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = u_{\alpha,\alpha}^*$ . Dessa forma:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} (q-p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Reagrupando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} (q-p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = \\
& = - \int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} p_k^* u_k d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Assim, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} F_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} (u_k p_k^* - p_k u_k^*) d\Gamma = \int_{\Omega} (q - p) \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \quad (3.19)$$

As forças de domínio  $F_k^*$  são forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região  $\Omega^*$ , o qual será chamado de ponto carga ou fonte e representado por  $\xi$ .

Essas forças podem ser representadas por:

$$F_k^* = \delta(x - \xi) P_k \quad (3.20)$$

onde

$$P_k = 1 \quad (3.21)$$

$$\delta(x - \xi) = \text{Função generalizada delta de Dirac com singularidade em } \xi. \quad (3.22)$$

A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x - \xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \quad (3.23)$$

Considerando (3.20) e (3.23), a primeira integral em (3.19) fica como mostrado a seguir, sendo agora  $\xi$  pertencente a região  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} F_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} u_k(\xi) P_k d\Omega \quad (3.24)$$

E, considerando (3.21), tem-se:

$$\int_{\Omega} F_k^* u_k d\Omega = \sum_{k=1}^3 u_k(\xi) \quad (3.25)$$

Considerando agora cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente, pode-se escrever:

$$u_k^* = u_{ik}^*(\xi, x) P_i \quad (3.26)$$

$$p_k^* = p_{ik}^*(\xi, x) P_i$$

sendo  $x$  chamado ponto campo. Então:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ik}^*(\xi, x) p_k(x) - p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x)] d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) -$$

$$- \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.27)$$

A equação (3.27) representa três equações para os deslocamentos generalizados de um ponto fonte  $\xi$  situado no domínio.

### 3.3- Equações integrais para deslocamentos em pontos do contorno

Para se considerar a equação (3.27) para um ponto  $\xi$  situado no contorno, deve-se escrever:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_{\xi} + \bar{\Gamma}_{\xi}} u_{ik}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_{\xi} + \bar{\Gamma}_{\xi}} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_{\xi}} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) -$$

$$- \int_{\Omega_{\xi}} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.28)$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral de (3.28) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A segunda integral em (3.28) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde a primeira integral à direita pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) [u_k(x) - u_k(\xi)] d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_k(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

A primeira integral à direita na equação anterior se anula devido à continuidade de  $u_k(x)$  e a segunda integral à direita, juntamente com o lado esquerdo da equação (3.28), fornece:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_k(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} + u_i(\xi) = u_i(\xi) + u_k(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.31)$$

$$C_{ik}(\xi) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

A segunda integral à direita em (3.29) deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se  $u_k(x)$  satisfaz à condição de Hölder:

$$|u_k(x) - u_k(\xi)| \leq Br^\alpha \text{ onde } B \text{ e } \alpha \text{ são constantes positivas.}$$



As integrais restantes em (3.28) não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas.

Assim, pode-se escrever, para um ponto  $\xi$  do contorno:

$$C_{ik}(\xi)u_k(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ik}^*(\xi, x)p_k(x) - p_{ik}^*(\xi, x)u_k(x)]d\Gamma(x) + \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) - \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.32)$$

De acordo com Van der Weeën (1982a), Van der Weeën (1982b), para o caso de contorno suave, tem-se  $C_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{2}$ .

Em geral, pode-se considerar a equação (3.32) escrita para um ponto  $\xi$  qualquer, onde:

$$C_{ik} = \delta_{ik} \text{ quando } \xi \text{ é ponto do interior}$$

$$C_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{2} \text{ quando } \xi \text{ é ponto do contorno suave}$$

### 3.4- Transformação das integrais de forças de domínio em integrais de contorno

As integrais de domínio que aparecem em (3.32) representam a contribuição da carga transversal  $q(x)$  e da reação do solo  $p(x)$ .

A integral de domínio que representa a contribuição da carga transversal  $q(x)$  pode ser transformada em integral de contorno para vários tipos de carregamento.

Será considerada, na formulação seguinte, a carga  $q(x)$  como um carregamento uniformemente distribuído.

Tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.33)$$

Considerando a equação de Poisson seguinte, para a qual  $v_i^*$  é uma solução:

$$v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (3.34)$$

tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[ v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega \quad (3.35)$$

e aplicando o teorema da divergência obtém-se, sendo  $q(x) = q = \text{cte}$ , obtém-se:

$$I_i(\xi) = q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) \quad (3.36)$$

Considerando a divisão do domínio em células a segunda integral de domínio em (3.32) pode ser escrita como uma soma de integrais sobre o domínio de cada célula e estas integrais podem ser transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

Seja:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.37)$$

Considerado a equação de Poisson (3.34), pode-se escrever:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} \left[ v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.38)$$

Sejam:

$N_c$  = Número total de células

$\Gamma_c$  = Contorno da célula  $c$

$\Omega_c =$  Domínio da célula  $c$

Logo:

$$H_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} \left[ v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] p(x) d\Omega(x) \quad (3.39)$$

Transformando a integral de domínio em integral de contorno usando o teorema da divergência e considerando  $p(x) = p = \text{cte}$ , em cada célula, tem-se:

$$H_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.40)$$

Assim, as equações (3.32) podem ser escritas na forma seguinte, envolvendo apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned} C_{ik}(\xi) u_k(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ u_{ik}^*(\xi, x) p_k(x) - p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) \right] d\Gamma(x) + \\ &+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) - \\ &- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde as componentes do tensor deslocamento da solução fundamental, de acordo com Vander Weeën (1982), são dadas respectivamente, por:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\} \\ u_{\alpha 3}^* &= -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha} \\ u_{33}^* &= \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[ (1-\nu)z^2(\ln z - 1) - 8\ln z \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo  $r$  a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$ .

As expressões de  $A(z)$  e  $B(z)$  encontram-se em Abramowitz e Stegun (1965).

As componentes de  $r$  e as derivadas na direção de  $x_\alpha$  são dadas por:

$$r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha} = \text{distância entre o ponto fonte e o ponto campo.} \quad (3.43)$$

$$r_\alpha = x_\alpha(x) - x_\alpha(\xi) \quad (3.45)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)} = -\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_\alpha}{r} \quad (3.46)$$

As derivadas de  $A(z)$ ,  $B(z)$  e  $r_{,\alpha}$  são dadas por (Karam, 1986):

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(x)} = \lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r} \quad (3.47)$$

As componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental são dadas por:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_{,\gamma}) + (4A + 1 + \nu) r_{,\gamma} n_{,\alpha}] -$$

$$-\frac{1}{4\pi r} [2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n}]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B n_{,\gamma} - A r_{,\gamma} r_{,n}]$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_{,\alpha} + 2 r_{,\alpha} r_{,n} \right]$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n} \quad (3.48)$$

sendo:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = \frac{\partial r}{x_{,\alpha}(x)} \frac{\partial x_{,\alpha}(x)}{\partial n} = r_{,\alpha} n_{,\alpha} \text{ derivada de } r \text{ em rela\c{c}\~{a}o \~{a} normal no ponto } x.$$

As express\~{o}es de  $v_{i,\alpha}^*$  s\~{a}o dadas por:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta}]$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D (1-\nu) \lambda^2} [32(2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5)] \quad (3.49)$$

### 3.5- Expressões para deslocamentos e esforços nos pontos internos

#### 3.5.1- Deslocamentos

Os deslocamentos nos pontos internos são obtidos através da expressão (3.41) com  $C_{ik} = \delta_{ik}$ .

Logo, para um ponto interno  $\xi$  qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i\beta}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\beta}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x) - \\
 & - \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i\beta}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\beta}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

#### 3.5.2- Momentos e esforços cortantes

O cálculo dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos é realizado através das expressões (3.4), onde os deslocamentos e as derivadas de deslocamentos que nelas aparecem são substituídos pelas expressões (3.50) e suas respectivas derivadas em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ .

Neste caso, de acordo com Karam (1986), tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = -\lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha(\xi)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_0 + K_1)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r}$$

$$\frac{\partial r_{,n}}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,n} - n_\alpha}{r} \quad (3.51)$$

Resultam então expressões da seguinte forma:

a) Momentos

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) \delta_{\alpha\beta} - \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.52)$$

b) Cortantes

$$Q_\beta(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.53)$$

A determinação dos tensores  $u_{i\beta k}^*$ ,  $p_{i\beta k}^*$  e  $w_{i\beta}^*$  foi feita considerando-se que são os termos que multiplicam, respectivamente, as forças de superfície  $p_k(x)$ , os deslocamentos  $u_k(x)$ , a carga distribuída  $q$  e a reação do solo  $p$  quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços.

a) Para  $u_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ u_{\alpha 3,\beta}^* + u_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{13,1}^* + u_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.54a)$$

Na expressão dos cortantes:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (u_{\beta 3}^* + u_{33,\beta}^*) \quad (3.54b)$$

Derivando as expressões (3.42) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left[ (4A + 4z_1 + 1 - \nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2(8A + 2ZK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left[ (4A + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right]$$

$$u_{\alpha 3,\beta}^* = \frac{-1}{8\pi D} \left[ \delta_{\alpha\beta} (2 \ln z - 1) + 2 r_{,\beta} r_{,\alpha} \right]$$



$$u_{3\alpha,\beta}^* = -u_{\alpha3,\beta}^*$$

$$u_{33,\alpha}^* = \frac{-r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} \left[ (1-\nu)z^2(2\ln z - 1) - 8 \right] \quad (3.55)$$

A substituição de (3.42) e (3.55) em (3.54) fornece, após reagrupar os termos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ (4A + 2ZK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - 2(8A + 2ZK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r} \left[ (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right]$$

$$u_{\alpha\beta3}^* = \frac{-(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right]$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[ B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{,\gamma} r_{,\beta} \right]$$

$$u_{3\beta3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (3.56)$$

b) Para  $p_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha\gamma,\beta}^* + p_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{1\gamma,1}^* + p_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha 3,\beta}^* + p_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{13,1}^* + p_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.57a)$$

Na expressão dos cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma,\beta}^*)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (p_{\beta 3}^* + p_{33,\beta}^*) \quad (3.57b)$$

Derivando as expressões (3.48) em relação as coordenadas do ponto  $\xi$  tem-se:

$$p_{\gamma\alpha,\beta}^* = \frac{1}{4\pi r^2} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} r_{\gamma}) + (4A + 1 + \nu)\delta_{\gamma\beta} n_{\alpha} -$$

$$- 2(8A + 4zK_1 + z^2 K_0 + 1 - \nu)(n_{\gamma} r_{,\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,n}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu).$$

$$\cdot (n_{\beta} r_{,\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,n}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)n_{\alpha} r_{,\gamma} r_{,\beta} + 4(24A + 8zK_1 +$$

$$+ z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}]$$

$$\begin{aligned}
p_{\gamma 3, \beta}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left[ (z K_1 + A) r_{, \beta} n_{\gamma} + A r_{, \gamma} n_{\beta} - (4A + z K_1) r_{, \gamma} r_{, \beta} r_{, n} + A \delta_{\gamma \beta} r_{, n} \right] \\
p_{3\alpha, \beta}^* &= \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} n_{\alpha} r_{, \beta} - 2r_{, \alpha} r_{, \beta} r_{, n} + r_{, \alpha} n_{\beta} + \delta_{\alpha \beta} r_{, n} \right] \\
p_{33, \beta}^* &= \frac{1}{2\pi r^2} \left[ n_{\beta} - 2r_{, \beta} r_{, n} \right] \tag{3.58}
\end{aligned}$$

A substituição de (3.48) e (3.58) em (3.57), após reagrupar os termos, fornece:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha \beta \gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma \alpha} n_{\beta} + \delta_{\gamma \beta} n_{\alpha}) + (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha \beta} n_{\gamma} - \\
&\quad - (16A + 6zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) [(n_{\alpha} r_{, \beta} + n_{\beta} r_{, \alpha}) r_{, \gamma} + (\delta_{\gamma \alpha} n_{, \beta} + \delta_{\gamma \beta} n_{, \alpha}) r_{, n}] - \\
&\quad - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha \beta} r_{, \gamma} r_{, n} + n_{\gamma} r_{, \alpha} r_{, \beta}) + \\
&\quad + 4(24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{, \alpha} r_{, \beta} r_{, \gamma} r_{, n} \}
\end{aligned}$$

$$p_{\alpha \beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + z K_1) r_{, \beta} n_{\alpha} + r_{, \alpha} n_{\beta} - 2(4A + z K_1) r_{, \alpha} r_{, \beta} r_{, n} + 2A \delta_{\alpha \beta} r_{, n} \right]$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{-D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + z K_1)(\delta_{\gamma \beta} r_{, n} + r_{, \gamma} n_{\beta}) + 2A n_{\gamma} r_{, \beta} - 2(4A + z K_1) r_{, \gamma} r_{, \beta} r_{, n} \right]$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2 B + 1)n_\beta - (z^2 A + 2)r_{,\beta} r_{,n}] \quad (3.59)$$

c) Para  $w_{i\beta}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} [v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*))] n_\gamma \quad (3.60a)$$

Na expressão dos cortantes:

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 [v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*)] n_\gamma \quad (3.60b)$$

Considerando as expressões (3.54), podem-se escrever as expressões (3.60) como:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} [v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*)] n_\gamma - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 [v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^*] n_\gamma - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.61)$$

Derivando-se as expressões (3.49) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$v_{\alpha,\beta\gamma}^* = \frac{-r}{64\pi D} \left\{ \left[ \delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 3) + 4 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] r_{,\gamma} + (4 \ln z - 3) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right\}$$

$$v_{3,\beta\gamma}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ \delta_{\gamma\beta} \left[ (4 \ln z - 2) - \frac{z^2}{16} (1-\nu)(4 \ln z - 5) \right] + \right.$$

$$\left. + r_{,\beta} r_{,\gamma} \left[ 4 - \frac{z^2}{8} (1-\nu)(4 \ln z - 3) \right] \right\} \quad (3.62)$$

A substituição de (3.54) e (3.62) em (3.61) fornece, após reagrupar os termos:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \left\{ (4 \ln z - 3) [(1-\nu)(r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,\alpha} n_{\beta}) + (1-3\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,n}] + \right.$$

$$\left. + 4[(1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta}] r_{,n} \right\} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma}$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2 \ln z - 1) n_{\beta} + 2 r_{,\beta} r_{,n}] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.63)$$

### 3.6- Expressões integrais para as derivadas dos deslocamentos transversais nos pontos internos

As expressões das segundas derivadas dos deslocamentos transversais de pontos internos em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  serão usadas no próximo Capítulo,

para considerar equações adicionais ao sistema de equações original e, portanto, são apresentadas a seguir.

### 3.6.1- Primeiras derivadas das expressões integrais dos deslocamentos transversais

As primeiras derivadas da expressão integral do deslocamento transversal de um ponto interno em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , obtidas derivando-se a terceira das equações representadas pela equação (3.50) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , são expressas por:

$$u_{3,1}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3j,1}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3j,1}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{3\beta,1}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,1}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x) - \quad (3.64)$$

$$- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{3\beta,1}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,1}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x)$$

$$u_{3,2}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3j,2}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3j,2}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{3\beta,2}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,2}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x) - \quad (3.65)$$

$$- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{3\beta,2}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,2}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x)$$

onde as expressões das derivadas que nelas se apresentam são obtidas das duas últimas equações (3.55), das duas últimas equações (3.58) e da última equação (3.62).

### 3.6.2- Segundas derivadas das expressões integrais dos deslocamentos transversais

As segundas derivadas da expressão integral do deslocamento transversal de um ponto interno em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  são obtidas derivando-se a equação (3.64) em relação a  $x_1$  e a equação (3.65) em relação a  $x_2$ , considerando as derivadas em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtendo-se:

$$u_{3,11}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3j,11}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3j,11}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{3,\beta 11}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,11}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x) - \quad (3.66)$$

$$- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{3,\beta 11}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,11}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x)$$

$$u_{3,22}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3j,22}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3j,22}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{3,\beta 22}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,22}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x) - \quad (3.67)$$

$$- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{3,\beta 22}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta,22}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x) d\Gamma(x)$$

onde as expressões das derivadas que nelas se apresentam são obtidas a partir das expressões apresentadas a seguir, as quais foram determinadas derivando-se expressões dadas em (3.55), (3.58) e (3.62) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , considerando-se as expressões (3.51).

Derivando-se as duas últimas expressões de (3.55), tem-se:

$$u_{3\alpha,\beta\phi}^* = \frac{1}{4\pi D r} [2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\phi} - r_{,\alpha} \delta_{\phi\beta} - r_{,\beta} \delta_{\phi\alpha} - r_{,\phi} \delta_{\alpha\beta}]$$

$$u_{33,\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2 r^2} \{ [(1-\nu)z^2(2\ln z - 1) - 8] \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} [(1-\nu)z^2 + 8] \} \quad (3.68)$$

Derivando-se as duas últimas expressões de (3.58), tem-se:

$$p_{3\alpha,\beta\gamma}^* = \frac{(1-\nu)}{4\pi r^2} \left[ 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} n_{\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} - n_{\beta} \delta_{\alpha\gamma} - n_{\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\beta\gamma} + 2r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\gamma} + \right. \\ \left. + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} n_{\gamma} + 2r_{,\alpha} r_{,\gamma} n_{\beta} + 2r_{,\gamma} r_{,\beta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{1-\nu} n_{\alpha} \delta_{\beta\gamma} - 8r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\beta} \right]$$

$$p_{33,\beta\alpha}^* = \frac{1}{\pi r^3} [r_{,\alpha} n_{\beta} + r_{,\beta} n_{\alpha} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\beta}] \quad (3.69)$$

Derivando-se a última expressão de (3.62), tem-se:

$$v_{3,\beta\gamma\phi}^* = \frac{1}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2 r} \left\{ \left[ \frac{z^2}{8} (1-\nu)(4\ln z - 3) - 4 \right] (\delta_{\beta\phi} r_{,\gamma} + \delta_{\gamma\phi} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\phi}) + \right. \\ \left. + r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\phi} \left[ \frac{z^2}{2} (1-\nu) + 8 \right] \right\} \quad (3.70)$$



## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

#### 4.1- Introdução

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos usados na implementação numérica das equações integrais do Capítulo 3. O contorno da placa é discretizado em elementos quadráticos contínuos e descontínuos e são usadas células internas constantes no domínio.

Inicialmente, é montado um sistema de equações com as três equações integrais de deslocamentos generalizados escritas para cada ponto nodal do contorno. Forma-se, assim, um sistema com número de equações igual a 3 vezes o número de nós.

As incógnitas do problema são, neste caso, os deslocamentos ou forças de superfície generalizados em cada ponto nodal e também as forças de reação da fundação nos pontos internos localizados nos centros geométricos das células.

Portanto, como o número de equações é menor do que o de incógnitas, são consideradas equações adicionais ao sistema.

Tendo em vista que a força de reação da fundação depende do deslocamento transversal e das segundas derivadas deste deslocamento em relação aos eixos coordenados, são considerados dois procedimentos distintos para a solução, ambos considerando células internas constantes.

O primeiro considera a divisão do domínio em células retangulares constantes e, como equações adicionais, as equações integrais dos deslocamentos transversais dos pontos localizados no centro geométrico de cada célula. As segundas derivadas de deslocamentos transversais são calculadas por fórmulas de diferenças finitas, considerando o deslocamento transversal do ponto da célula onde as derivadas são calculadas e deslocamentos transversais de células vizinhas. Neste procedimento, as forças de reação do solo ficam escritas apenas em função dos deslocamentos transversais e apenas esses deslocamentos transversais dos pontos das células são adicionados como incógnitas ao sistema.

O segundo procedimento desenvolvido neste trabalho considera tanto o deslocamento transversal como suas segundas derivadas como incógnitas nos pontos das células e são adicionadas ao sistema tanto as equações integrais dos deslocamentos transversais destes pontos como as equações integrais das segundas derivadas destes deslocamentos em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ . Neste caso, foram empregadas células triangulares e retangulares.

#### 4.2- Sistema de equações discretizadas para pontos do contorno

Para a resolução numérica do problema, considera-se o contorno  $\Gamma$  dividido em elementos, nos quais  $u_j$  e  $p_j$  são calculados por interpolação dos valores nodais.

A equação (3.41) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal  $\xi$  de  $\Gamma$ , substituindo-se as integrais em  $\Gamma$  por somatórios de integrais em  $\Gamma_j$ , sendo  $\Gamma_j$  o contorno do elemento  $j$ . Além disso, as integrais em  $\Gamma_c$  são também substituídas por integrais em  $\Gamma_{cj}$ , sendo  $\Gamma_{cj}$  o contorno do elemento  $j$  pertencente ao contorno da célula.

Assim obtém-se um sistema de  $N$  equações algébricas envolvendo  $N$  valores nodais de deslocamentos e  $N$  valores nodais de forças de superfície.

Para um ponto qualquer do elemento  $j$ , serão consideradas as expressões seguintes para interpolar os deslocamentos e forças de superfície em função dos valores nodais:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^j &= \tilde{N} \tilde{U}^n \\ \tilde{P} &= \tilde{N} \tilde{P}^n \end{aligned} \quad (4.1)$$

Logo, a equação (3.41) pode ser escrita na seguinte forma discretizada:

$$C_i \tilde{U}_i = \sum_{j=1}^e \left( \int_{\Gamma_j} \tilde{U}_i^* \tilde{N} d\Gamma \right) \tilde{P}^n - \sum_{j=1}^e \left( \int_{\Gamma_j} \tilde{P}_i^* \tilde{N} d\Gamma \right) \tilde{U}^n + \sum_{j=1}^e \left( q \int_{\Gamma_j} \tilde{S}_i^* d\Gamma \right) - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} p \left( \int_{\Gamma_{cj}} \tilde{S}_i^* d\Gamma \right) \quad (4.2)$$

onde:

$\tilde{C}_i$  = matriz cujos elementos são os  $C_{ij}$  que aparecem na equação (3.41);

$\tilde{U}$  = vetor deslocamento do ponto fonte;

$e$  = número de elementos de contorno;

$\tilde{N}$  = matriz que contém as funções de interpolação;

$N_e$  = número de elementos no contorno de uma célula interna

$\tilde{U}_i^*$  e  $\tilde{P}_i^*$  = matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

$\tilde{U}^n$  e  $\tilde{P}^n$  = vetores que contem as componentes dos deslocamentos e forças de superfície respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento considerado.

$\tilde{S}_i^*$  = vetor cujas componentes são expressas por:

$$S_k^* = \left[ v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha} \right] n_\alpha \quad (4.3)$$

Torna-se necessário transformar a diferencial de contorno  $d\Gamma$  para esse sistema. Sendo  $\left| \tilde{J} \right|$  o jacobiano da transformação, será usada a seguinte expressão:

$$d\Gamma = \left| \tilde{J} \right| d\eta \quad (4.4)$$

Considerando:

$$\tilde{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \tilde{U}_i^* \tilde{N} d\Gamma \quad (4.5)$$

$$\hat{\tilde{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \tilde{P}_i^* \tilde{N} d\Gamma \quad (4.6)$$

$$\tilde{B}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \tilde{S}_i^* d\Gamma \quad (4.7)$$

$$M_{ij}^c = p \int_{\Gamma_{cj}} S_i^* d\Gamma \quad (4.8)$$

a equação (4.1) pode ser escrita como:

$$C_i U_i = \sum_{j=1}^e G_{ij} P_j - \sum_{j=1}^e \hat{H}_{ij} U_j + \sum_{j=1}^e B_{ij} - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} M_{ij}^c \quad (4.9)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^e \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^e G_{ij} P_j + \sum_{j=1}^e B_{ij} - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} M_{ij}^c \quad (4.10)$$

se tem:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \hat{H}_{ij} \text{ para } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} &= \hat{H}_{ij} + C_i \text{ para } i = j \end{aligned} \quad (4.11)$$

As expressões (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) foram resolvidas utilizando a quadratura de Gauss, como mostrado a seguir.

Utilizou-se a expressão (4.4) para substituir a diferencial de contorno. Assim, as integrais obtidas foram substituídas pelos somatórios indicados nas expressões seguintes:

$$\int_{\Gamma_j} U_i^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 U_i^* N |J| d\eta = \sum_{k=1}^K (U_i^* N)_k |J| \omega_k \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_j} P_i^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 P_i^* N |J| d\eta = \sum_{k=1}^K (P_i^* N)_k |J| \omega_k \quad (4.13)$$

$$\int_{\Gamma_j} S_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 S_i^* |J| d\eta = \sum_{k=1}^K (S_i^*)_k |J| \omega_k \quad (4.14)$$

$$\int_{\Gamma_{cj}} \tilde{S}_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \tilde{S}_i^* |J| d\eta = \sum_{K=1}^K (\tilde{S}_i^*)_k |J| \omega_k \quad (4.15)$$

onde se tem:

$K$  = número de pontos de integração

$\omega_k$  = fator de peso referente ao ponto de integração  $k$

Quando se aplica a equação (4.10) para todos os pontos nodais  $\xi$  do contorno obtém-se um sistema com um número de equações igual a três vezes o número de nós, da seguinte forma:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{B} - \tilde{M} \quad (4.16)$$

onde:

$\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  = vetores que contêm os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície respectivamente.

$\tilde{B}$  = vetor que contém a carga distribuída.

$\tilde{M}$  = vetor que contém a parcela de reação do solo.

$\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  = matrizes que contêm as integrais sobre os elementos de contorno.

#### 4.3- Sistema de equações discretizadas para pontos do domínio

##### 4.3.1- Primeiro processo

Considera-se o domínio  $\Omega$  dividido em células retangulares constantes.

Aplicando a terceira das equações (3.41) a todos os pontos situados no centro geométrico de cada célula em que existe o contato com a fundação elástica, tem-se, após a discretização:

$$\overset{\wedge}{I} \underset{\sim}{U} + \overset{\wedge}{H} \underset{\sim}{U} = \overset{\wedge}{G} \underset{\sim}{P} + \overset{\wedge}{B} \underset{\sim}{P} - \overset{\wedge}{M} \underset{\sim}{P} \quad (4.17)$$

sendo que o índice  $i$  indica que os vetores e matrizes correspondentes referem-se aos pontos internos.

Agrupando as equações (4.16) e (4.17) em um sistema único, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \overset{\wedge}{H} & 0 \\ \overset{\wedge}{H} & \overset{\wedge}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{\wedge}{G} \\ \overset{\wedge}{G}^1 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} + \begin{Bmatrix} \overset{\wedge}{B} \\ \overset{\wedge}{B}^1 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} - \begin{Bmatrix} \overset{\wedge}{S} \\ \overset{\wedge}{S}^1 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} \quad (4.18)$$

Considerando  $p_r = k u_3 - k_1(u_{3,11} + u_{3,22})$  como as componentes de  $\left\{ \underset{\sim}{P} \right\}$  e sendo  $u_3$  incógnita, tem-se a seguinte forma para o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \overset{\wedge}{H} & 0 + \overset{\wedge}{S} k \\ \overset{\wedge}{H} & \overset{\wedge}{I} + \overset{\wedge}{S}^1 k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{\wedge}{G} \\ \overset{\wedge}{G}^1 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} + \begin{Bmatrix} \overset{\wedge}{B} \\ \overset{\wedge}{B}^1 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} \quad (4.19)$$

sendo que as derivadas segundas da flecha  $u_3$  de um ponto de uma célula, em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , são calculadas numericamente, considerando o ponto da respectiva célula e também pontos de células vizinhas, por meio de fórmulas de diferenças finitas.

Os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície estão contidos, respectivamente, nos vetores  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{P}$ . Para cada direção nodal, deve-se ter um dos dois valores prescrito e o outro como incógnita. Além disso, são incógnitas os valores de deslocamentos transversais nos pontos internos das células, contidos em  $\underset{\sim}{U}^2$ .

Pode-se reordenar o sistema (4.19) de forma que todas as incógnitas de  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{P}$  sejam colocadas num vetor  $\underset{\sim}{X}$  e todos os valores conhecidos no vetor  $\underset{\sim}{F}$ . Obtém-se, assim, um sistema da forma a seguir:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F} \quad (4.20)$$

sendo:

$\underset{\sim}{A}$  = matriz dos coeficientes que multiplicam as incógnitas

Com a resolução deste sistema, obtêm-se os valores dos deslocamentos e forças de superfície incógnitas.

#### 4.3.2- Segundo processo

Considera-se o domínio dividido em células triangulares ou retangulares, ambas constantes.

Aplicando as equações (3.66), (3.67) e a terceira das equações (3.41) a todos os pontos situados no centro geométrico de cada célula em que existe o contato com a fundação elástica, tem-se, após a discretização:

$$\underset{\sim}{I} \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}^{\wedge 2} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G}^2 \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{B}^2 - \underset{\sim}{M}^2 \quad (4.21)$$

sendo que o índice  $i$  indica que os vetores e matrizes correspondentes referem-se aos pontos internos.

Agrupando as equações (4.16) e (4.21) em um sistema único, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{H} & 0 \\ \underset{\sim}{H}^{\wedge 2} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{G}^2 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P} \right\} + \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{B}^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{S} \\ \underset{\sim}{S}^2 \end{Bmatrix} \left\{ \underset{\sim}{P}_r \right\} \quad (4.22)$$

Considerando  $p_r = k u_3 - k_1 (u_{3,11} + u_{3,22})$  como as componentes de  $\left\{ \underset{\sim}{P}_r \right\}$  e sendo  $u_3$ ,

$u_{3,11}$  e  $u_{3,22}$  incógnitas, tem-se a seguinte forma para o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & 0 + \tilde{S} & \tilde{k} \\ \tilde{H} & I + \tilde{S} & \tilde{k} \\ \tilde{i} & \tilde{r} & \tilde{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^2 \\ \tilde{i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}^2 \\ \tilde{i} \end{Bmatrix} \{ \tilde{P} \} + \begin{Bmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{B}^2 \\ \tilde{i} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície são dados, respectivamente, pelos vetores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$ . Para cada direção nodal deve-se ter um dos dois valores prescrito e o outro como incógnita. Além disso, são incógnitas os valores de deslocamentos transversais das segundas derivadas do deslocamento transversal em relação aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  contidos de  $\tilde{U}^2$ .

Pode-se reordenar o sistema como no item anterior, chegando-se a uma equação da forma da equação (4.20).

Resolvendo este sistema, são obtidos os valores de deslocamentos, forças de superfície e segundas derivadas de deslocamentos incógnitos.

#### 4.4- Cálculo dos Deslocamentos e Esforços em um Ponto Interno Qualquer.

##### 4.4.1- Deslocamentos

Para calcular os deslocamentos em um ponto interno qualquer a equação (3.50) discretizada ao longo do contorno, análogo ao que foi feito na equação (3.41). Obtém-se então, para cada ponto  $\xi_i$  do interior da região  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\tilde{i}} = & \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} \tilde{U}_{\tilde{i}}^* N d\Gamma \right) \tilde{P}^n - \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} \tilde{P}_{\tilde{i}}^* N d\Gamma \right) \tilde{U}^n + \sum_{k=1}^e \left( q \int_{\tilde{\Gamma}_k} \tilde{S}_{\tilde{i}}^* d\Gamma \right) - \\ & - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} \left( p \int_{\tilde{\Gamma}_{ck}} \tilde{S}_{\tilde{i}}^* d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$



#### 4.4.2- Momentos e esforços cortantes nos pontos internos

São utilizadas as equações (3.52) e (3.53) discretizadas ao longo do contorno para o cálculo dos esforços resultantes nos pontos internos.

Para cada ponto interno  $\xi_i$ , tem-se:

i) Momentos

$$M_{\tilde{i}} = \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} U_{\tilde{i}}^{*'} N d\Gamma \right) P^n + \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} P_{\tilde{i}}^{*'} N d\Gamma \right) U^n + \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} q W_{\tilde{i}}^{*'} d\Gamma \right) - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} \left( p \int_{\tilde{\Gamma}_{ck}} W_{\tilde{i}}^{*'} d\Gamma \right) + \frac{(q-p)\delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \quad (4.25)$$

ii) Cortantes

$$Q_{\tilde{i}} = \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} U_{\tilde{i}}^{*''} N d\Gamma \right) P^n + \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} P_{\tilde{i}}^{*''} N d\Gamma \right) U^n + \sum_{k=1}^e \left( \int_{\tilde{\Gamma}_k} q W_{\tilde{i}}^{*''} d\Gamma \right) - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} p \left( \int_{\tilde{\Gamma}_{ck}} W_{\tilde{i}}^{*''} d\Gamma \right) + \frac{(q-p)\delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \quad (4.26)$$

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÕES

#### 5.1- Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada.

Uma placa quadrada de lado  $a$  é considerada, simplesmente apoiada nos quatro bordos e sobre base elástica no domínio (Figura 5.1). Admite-se que a placa tem uma relação  $h/a$  igual a 0,005, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$  e módulo de reação do solo  $k = \bar{k}D/a^4$ , considerando-se  $\bar{k} = 200$ . Para o módulo de cisalhamento da fundação,  $k_1 = \bar{k}_1 D/a^2$ , foram considerados dois valores para  $\bar{k}_1$ : 5 e 20.

Neste exemplo, os dois processos de solução apresentados no Capítulo 4 são considerados e os resultados de ambos são apresentados.

Na Tabela 5.1, estão indicados os resultados obtidos no presente trabalho para o deslocamento transversal,  $u_3 = 10^2 \bar{u}_3 D / qa^4$ , e para os momentos fletores,  $M_{11} = 10^2 \bar{M} / qa^2$ ,  $M_{22} = 10^2 \bar{M} / qa^2$ , no centro da placa, considerando o domínio discretizado em 25 e em 81 células retangulares constantes (Figura 5.2), sendo o contorno discretizado, respectivamente, com 20 e com 36 elementos.

Para comprovar a validade da formulação, os resultados obtidos foram comparados com os resultados numéricos de Jianguo *et al.* (1992), que desenvolveram uma formulação com o MEC para placas de Reissner apoiadas sobre fundação do tipo Pasternak, considerado o contorno dividido em 32 elementos, podendo ser contínuos ou descontínuos. Os resultados são comparados também com a solução analítica de placas finas obtida pelo método das séries trigonométricas e apresentada em Jianguo *et al.* (1992). Conforme pode ser observado na Tabela 5.1, os valores possuem boa concordância.

Na Figura 5.3, pode-se verificar a variação do deslocamento transversal ao longo da reta  $x_2 = a/2$  considerando os dois processos de solução e, nas Figuras 5.4 e 5.5, considerando  $\bar{k}_1 = 5$  e  $\bar{k}_1 = 20$ , respectivamente, observa-se a variação dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  ao longo da mesma reta, também considerando os dois métodos de solução, para a discretização em 25 células.

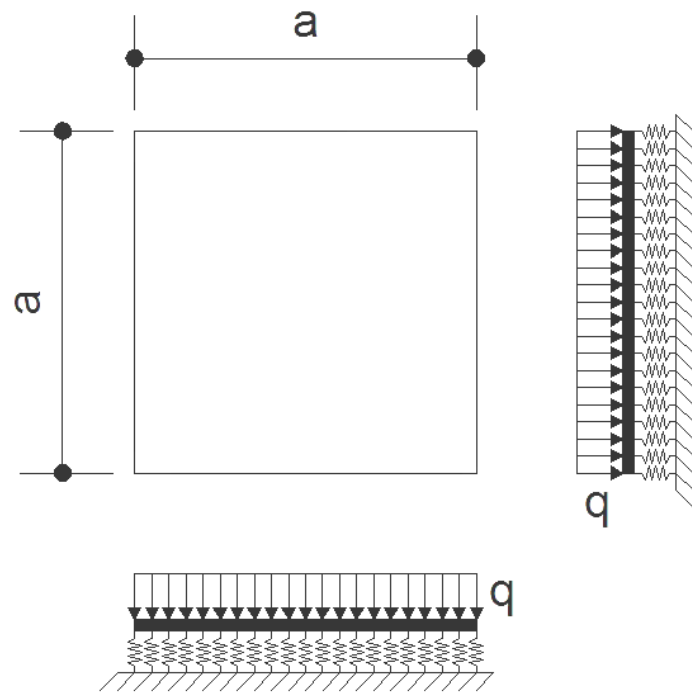


Figura 5.1 – Placa quadrada simplesmente apoiada

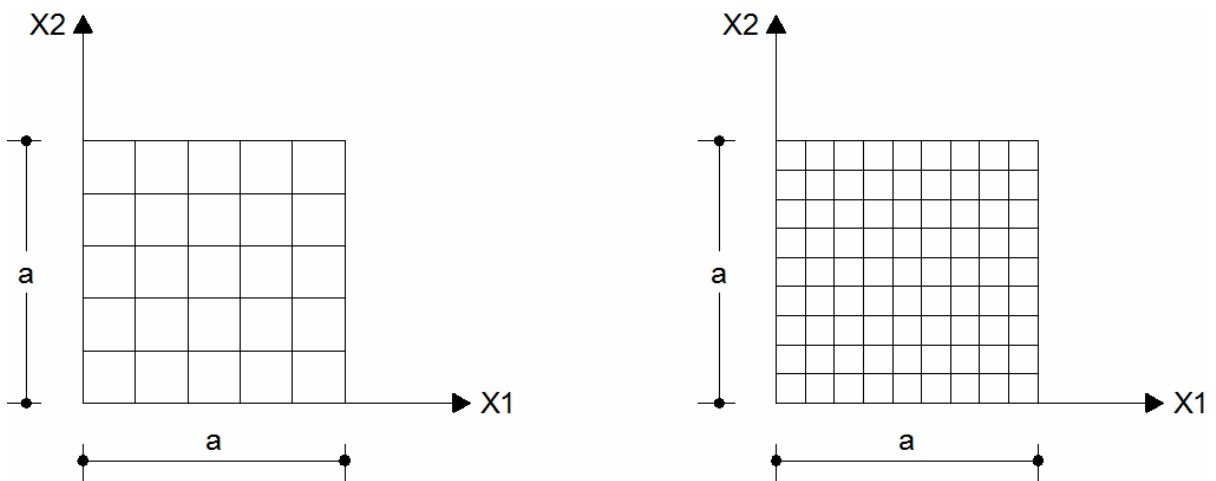
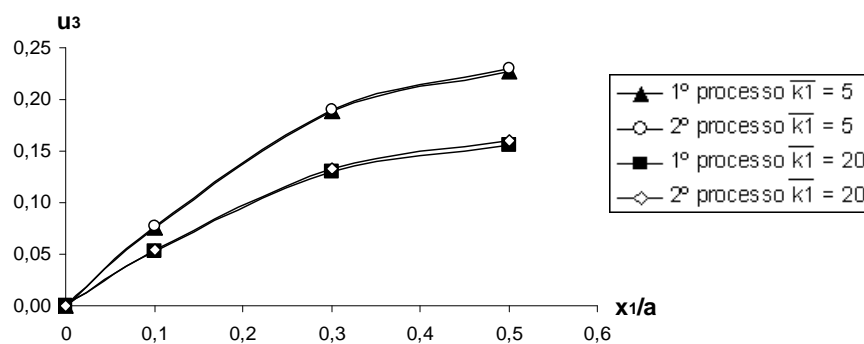


Figura 5.2: Discretizações do contorno e do domínio da placa quadrada

Tabela 5.1: Resultados para deslocamento e momento fletor no centro da placa

	$\bar{k}_1 = 5$		$\bar{k}_1 = 20$	
	$\frac{10^2 \bar{u}_3 D}{qa^4}$	$\frac{10^2 \bar{M}_{11}}{qa^2} = \frac{10^2 \bar{M}_{22}}{qa^2}$	$\frac{10^2 \bar{u}_3 D}{qa^4}$	$\frac{10^2 \bar{M}_{11}}{qa^2} = \frac{10^2 \bar{M}_{22}}{qa^2}$
Presente trabalho com primeiro processo 25 células	0,2276978	2,439470	0,1556257	1,619708
Presente trabalho com primeiro processo 81 células	0,2270714	2,427157	0,1568845	1,618086
Presente trabalho com segundo processo 25 células	0,2297529	2,45149	0,1598019	1,639542
Presente trabalho com segundo processo 81 células	0,2274332	2,428827	0,1577075	1,621456
Jianguo <i>et al.</i> (1992)	0,2249633	2,406552	0,1559777	1,606397
Solução analítica para placas finas	0,2263888	2,417870	0,1567556	1,612893

Figura 5.3: Variação do deslocamento transversal  $u_3$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para a placa quadrada

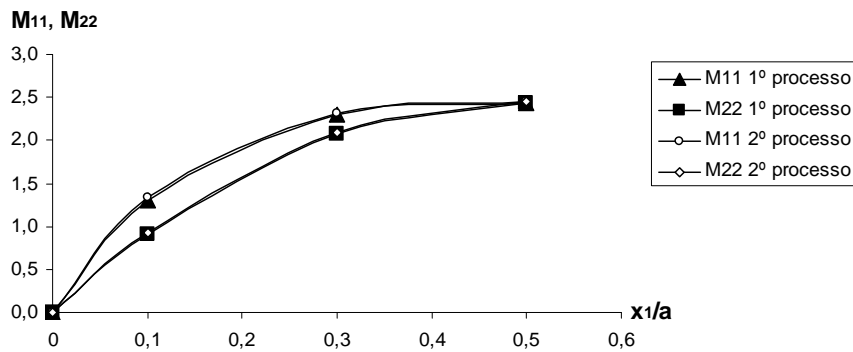


Figura 5.4: Variação dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$ , considerando  $\bar{k}_1 = 5$  para a placa quadrada

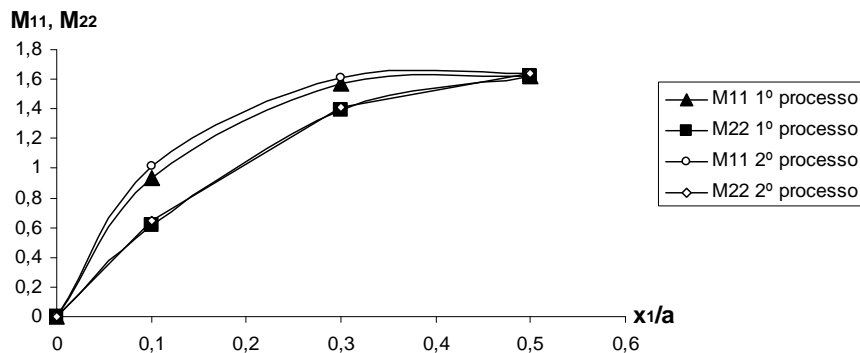


Figura 5.5: Variação dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$ , considerando  $\bar{k}_1 = 20$  para a placa quadrada

## 5.2- Exemplo 2: Placa circular engastada

Neste exemplo, considera-se uma placa circular engastada no contorno e sobre base elástica no domínio, sendo o contorno discretizado em 36 elementos e o domínio em 81 células triangulares constantes (Figura 5.6). Admite-se a placa com raio externo  $a$ , relação  $h/a$  igual a 0,005, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e módulo de reação do solo  $k = \bar{k}D/a^4$ , considerando  $\bar{k} = 200$ . Para o módulo de cisalhamento da fundação,  $k_1 = \bar{k}_1 D/a^2$ , foram considerados dois valores para  $\bar{k}_1$ : 5 e 20. Neste caso, considerou-se o segundo processo de solução.

Para comprovar a validade da formulação, os resultados obtidos no presente trabalho foram comparados com os resultados numéricos de Jianguo et al. (1992) e

também com a solução analítica para placas delgadas obtida por Yu (1957) e apresentada em Jianguo *et al.* (1992), conforme pode ser observado na Tabela 5.2, que apresenta os valores obtidos para o deslocamento transversal  $u_3 = 10^2 \bar{u}_3 D / qa^4$  e os momentos fletores  $M_{rr} = 10^2 \bar{M}_{rr} / qa^2 = M_{tt} = 10^2 \bar{M}_{tt} / qa^2$ , no centro da placa. Verifica-se que os resultados mostraram-se próximos.

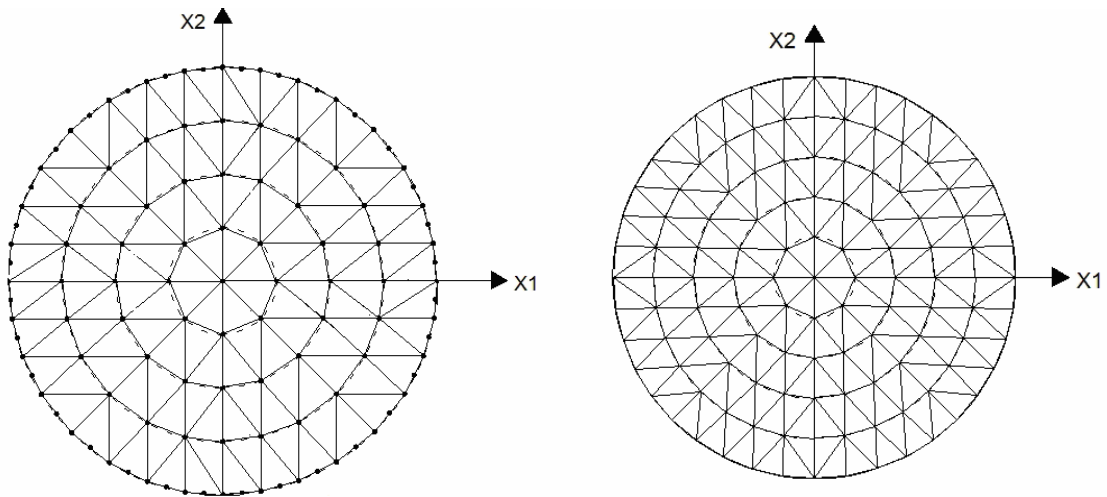


Figura 5.6: Discretizações do contorno e do domínio da placa circular

Tabela 5.2: Resultados para deslocamento e momento fletor no centro da placa circular

	$\bar{k}_1 = 5$		$\bar{k}_1 = 20$	
	$\frac{\bar{u}_3 D 10^2}{qa^4}$	$\frac{\bar{M}_{rr} 10^2}{qa^2} = \frac{\bar{M}_{tt} 10^2}{qa^2}$	$\frac{\bar{u}_3 D 10^2}{qa^4}$	$\frac{\bar{M}_{rr} 10^2}{qa^2} = \frac{\bar{M}_{tt} 10^2}{qa^2}$
Presente trabalho 128 células	0,4490297	1,72084	0,3426192	1,18525
Presente trabalho 200 células	0,4474958	1,7077	0,3410063	1,1807
Jianguo <i>et al.</i> (1992)	0,4447239	1,676206	0,3383348	1,162126
Solução analítica para placas finas	0,4448609	1,675682	0,3384423	1,161785

Na Figura 5.7, pode-se verificar a variação do deslocamento transversal ao longo de um raio e, nas Figuras 5.8 e 5.9. considerando  $\bar{k}_1 = 5$  e  $\bar{k}_1 = 20$ ,

respectivamente, observa-se a variação do momento fletor  $M_{rr}$ , na direção radial, também ao longo de um raio.

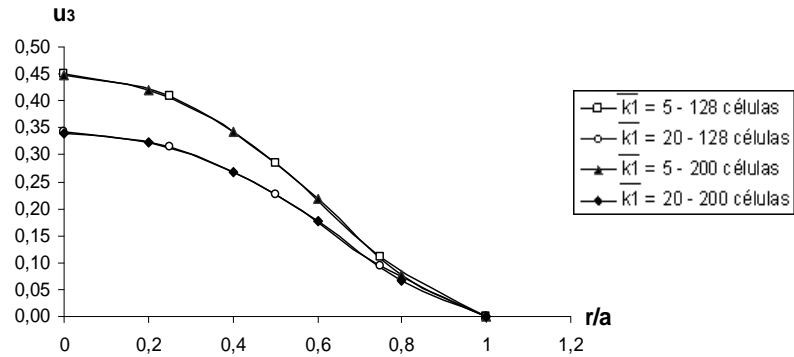


Figura 5.7: Variação do deslocamento transversal  $u_3$  ao longo do eixo  $x_1$  para a placa circular

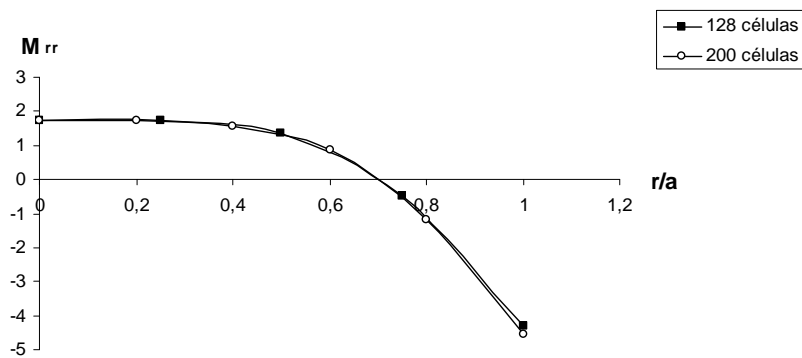


Figura 5.8: Variação do momento fletor  $M_{rr}$  ao longo do eixo  $x_1$ , considerando  $\bar{k}_1=5$ , para a placa circular

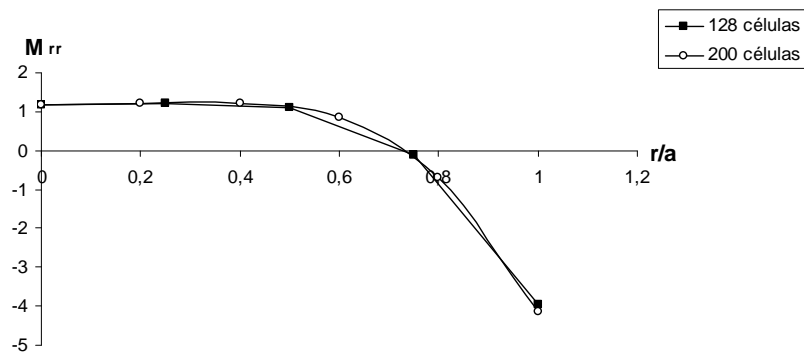


Figura 5.9: Variação do momento fletor  $M_{rr}$  ao longo do eixo  $x_1$ , considerando  $\bar{k}_1=20$ , para a placa circular

### 5.3- Exemplo 3: Placa retangular simplesmente apoiada

Neste exemplo, considera-se uma placa retangular simplesmente apoiada no contorno e sobre base elástica no domínio, sendo que o módulo de fundação,  $k$ , e o módulo de cisalhamento da fundação,  $k_1$ , variam no domínio da placa (Figura 5.10). O contorno é discretizado em 12 elementos e o domínio em 32 células triangulares constantes (Figura 5.11). Admite-se que a placa tem relação  $h/a$  igual a 0,05, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e módulo de reação do solo  $k = (\bar{k}D/a^4)$ , considerando-se  $\bar{k} = 100$  e  $\bar{k} = 200$ . Para o módulo de cisalhamento da fundação,  $k_1 = (\bar{k}_1 D/a^2)$ , foram considerados  $\bar{k}_1 = 20$  e  $\bar{k}_1 = 50$ . Neste caso, considerou-se o segundo processo de solução.

Na Figura 5.12, pode-se verificar a variação do deslocamento transversal ao longo da reta  $x_2 = a/2$  e, na Figura 5.13, a variação dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  ao longo da mesma reta.

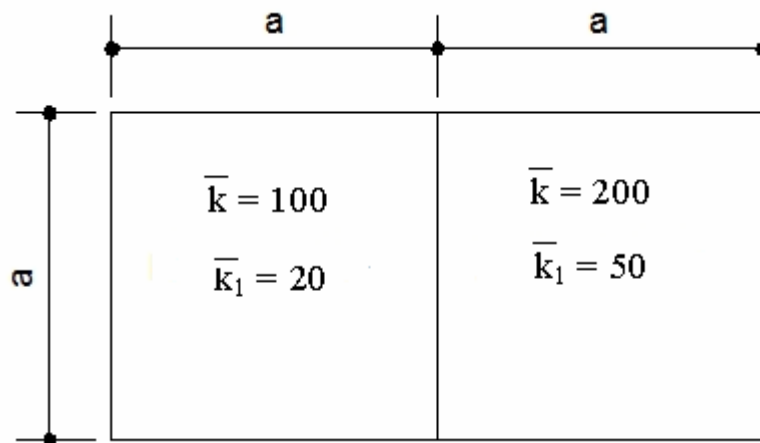


Figura 5.10 – Placa retangular simplesmente apoiada no contorno



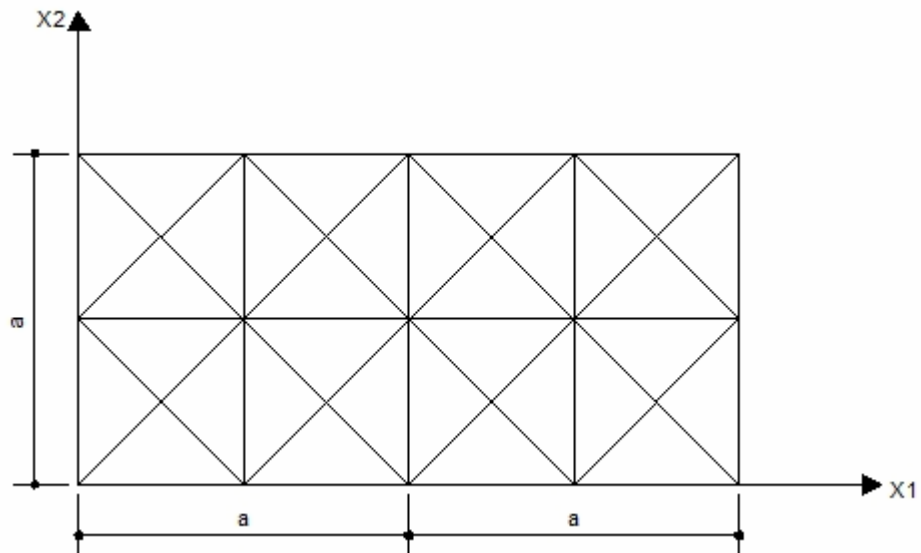


Figura 5.11: Discretização do contorno e do domínio da placa retangular

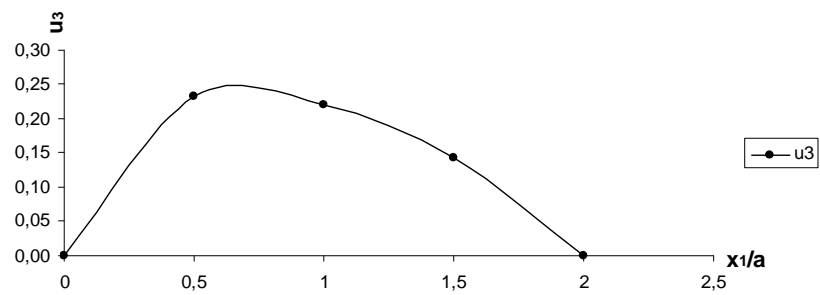


Figura 5.12: Variação do deslocamento transversal  $u_3$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$

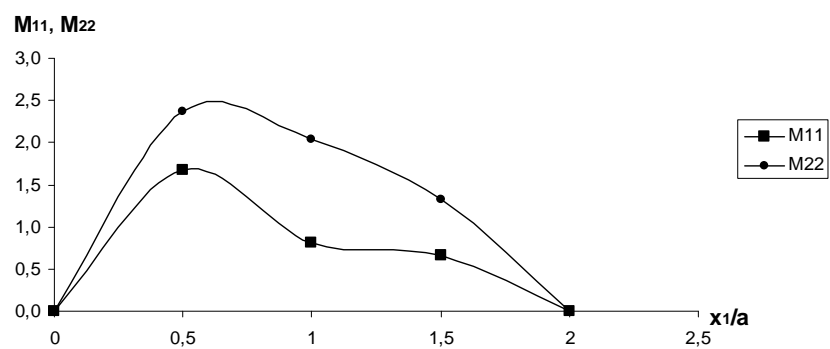


Figura 5.13: Variação dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para a placa retangular

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se uma formulação do MEC para análise de placas apoiadas sobre base elástica considerando a teoria de Reissner para flexão de placas e o modelo de fundação de Pasternak. A abordagem feita utilizou a solução fundamental já empregada na análise de placas pelo MEC. Tendo em vista que as forças de reação da fundação também são incógnitas e que dependem dos deslocamentos transversais e das segundas derivadas destes deslocamentos em relação aos eixos coordenados, foram escritas equações adicionais ao sistema original, considerando dois procedimentos distintos para a solução, ambos considerando células internas constantes na região situada sobre a base elástica.

O primeiro considerou a divisão do domínio em células retangulares constantes e, como equações adicionais, as equações integrais dos deslocamentos transversais dos pontos localizados no centro geométrico das células. As segundas derivadas de deslocamentos foram calculadas por fórmulas de diferenças finitas, considerando os deslocamentos dos pontos das células consideradas e de células vizinhas. Neste procedimento, as forças de reação do solo ficam escritas apenas em função dos deslocamentos transversais e apenas os deslocamentos transversais dos pontos localizados no centro geométrico das células são adicionados como incógnitas ao sistema.

O segundo procedimento que foi desenvolvido neste trabalho considera o deslocamento transversal e suas segundas derivadas como incógnitas nos pontos das células e são adicionadas ao sistema tanto as equações dos deslocamentos transversais destes pontos como as equações das segundas derivadas destes deslocamentos em relação aos eixos coordenados. Neste caso, foram empregadas células triangulares e retangulares.

As integrais correspondentes às forças de reação do solo foram transformadas em integrais sobre o contorno das células. Deve-se observar que a divisão em células permitiu a consideração de casos em que o módulo de reação da fundação elástica e o módulo de cisalhamento da mesma variam no domínio.

Pode-se observar ainda que, por economia de memória e de tempo computacional, caso não haja interesse na obtenção dos valores das derivadas

segundas do deslocamento transversal, as equações integrais dessas derivadas podem ser somadas, obtendo-se o Laplaciano do deslocamento transversal, e adotar este último como incógnita nos pontos das células, juntamente com o deslocamento transversal.

Resultados obtidos neste trabalho foram comparados entre si e também com resultados numéricos e analíticos obtidos por outros autores, mostrando-se muito próximos, podendo-se verificar a validade da formulação apresentada.

Como continuação deste trabalho, sugere-se:

- implementação de células com aproximação linear ou quadrática;
- implementação de outros tipos de carregamento transversal;
- consideração da condição de contorno de bordo livre;
- consideração de interação solo-estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1965) *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1046p.
- Auatt, S. S. M. (2002) *Análise de Flexão de Placas pelo MEC Considerando Elastoplasticidade com Multicamadas e Contato Unilateral*, Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, 122p.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. e Wrobel, L.C., (1984) *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 464p.
- Fadhil, S., El-Zafrany, A. (1994) Boundary element analysis of thick Reissner plates on two-parameter foundation. *International Journal of Solids and Structures*. 31:2901-2917.
- Iwamoto, R.K. (2000) *Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda*. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Karam, V. J. (1986) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para flexão de Placas*. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 142p.
- Karam, V.J., Telles, J. C. F. (1988) On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*. 5 (1): 21-27.
- Karam, V. J., Auatt, S. S. M. (2003) Boundary Elements for the Analysis of Plates with Supports Inside the Domain Using Reissner's Theory, *XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto, MG, p. 1-9.

- Jianguo, W., Xiuxi, W., Maokuang, H. (1992) Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for Reissner's Plates on Two Parameter Foundations, *International Journal of Solids and Structures*, 29: 1233-1239.
- Mendonça, A.V., Paiva, J.B.de.(2000) A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 24:237-247.
- Paiva, J.B.de. (1989) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à análise de placas apoiadas em fundação elástica. *X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia. II Encontro Nacional de Mecânica Computacional. Porto, Portugal. Vol 1. 47-58.*
- Paiva, J. B.de (1989) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à análise de placas apoiadas em base elástica. *X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Portugal. p. A47 – A59.*
- Paiva, J.B.de, Butterfield, R. (1997) Boundary element analysis of plate-soil interaction. *Computers & Structures*. 64:319-328.
- Paiva, J.B.de., Venturini, W.S.(1985) Boundary element algorithm for building floor slab analysis. *First Boundary Element Technology Conference, Adelaide, Austrália: p. 201-209.*
- Rashed, Y.F. (2005) A boundary/domain element method for analysis of building raft foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 29: 859-877.
- Rashed, Y.F., Aliabadi. M.H. (2000) Boundary element analysis of foundation plates in building. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 24: 201-206.
- Rashed, Y.F., Aliabadi. M.H., Brebbia, C.A. (1999) A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation. *Computers & Structures*. 70: 515 - 532.

- Rashed, Y.F., Aliabadi. M.H., Brebbia, C.A. (1998) The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation. *International Journal for Numerical methods in Engineering*.41: 1435-1462.
- Reissner, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 12: A69-A77
- Sapountzakis, E.J., Katsikadelis, J.T. (1992) Unilaterally supported plates on elastic foundations by the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics*. 59: 580 - 586.
- Silva, N.A., Venturini, W.S. (1990) Aplicação do MEC à análise de placas com vinculação interna utilizando a teoria de Reissner. *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*: p. 925-935.
- Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger (1970) *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 580p.
- Van der Weeën, F. (1982a) Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 18:1-10.
- Van der Weeën, F. (1982b) Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. *Boundary Elements in Engineering*. p. 487-499.
- Yu, Y. Y. (1957) Axisymmetric bending of circular plates under simultaneous action of lateral load, Force in the Middle Plane and Elastic Foundation, *Journal of Applied Mechanics*, 24:141-143.