

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
PLACAS DE REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO WINKLER

**NATÁLIA SOUZA RIBEIRO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

Dezembro – 2009

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO WINKLER

**NATÁLIA SOUZA RIBEIRO**

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Centro de Ciência e Tecnologia da  
Universidade Estadual do Norte  
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte  
das exigências para a obtenção de  
título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadora: Vânia José Karam

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

Dezembro – 2009

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER SOBRE FUNDAÇÕES DO TIPO WINKLER

**NATÁLIA SOUZA RIBEIRO**

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Centro de Ciência e Tecnologia da  
Universidade Estadual do Norte  
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte  
das exigências para a obtenção de  
título de Mestre em Engenharia Civil.

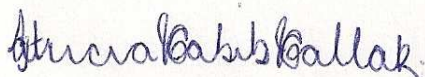
Aprovada em 15 de dezembro de 2009.

Comissão Examinadora:




---

Prof. José Antônio Fontes Santiago (D.Sc.) - UFRJ



---

Prof.ª Patrícia Habib Hallak (D.Sc.) - UENF



---

Prof. Gines Arturo Santos Falcon (D.Sc.) - UENF



---

Prof.ª Vânia José Karam (D.Sc.) - UENF

(Orientadora)

À minha família  
Ao meu namorado

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, minha habitação forte, à qual posso recorrer continuamente, pois é a minha rocha e fortaleza.

À minha orientadora Vânia José Karam, pela orientação, paciência e incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, irmãos e namorado, minha família que tanto amo. Sem o incentivo deles jamais chegaria até aqui.

A minha amiga Mônica Altoé que desde a graduação é como uma irmã para mim, cujo apoio e compreensão foram fundamentais durante esses seis anos de estudo.

Aos amigos que conquistei no convívio desses anos, em especial, Aliny, Fábio, Jair, Sérgio e Zélia.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“Aprender não é memorizar fatos e nem repetí-los, é desenvolver novas maneiras de pensar e ”ver“ a realidade”.

Terezinha Nunes

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS.....	xi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
CAPÍTULO 1.....	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1 – Considerações Iniciais.....	1
1.2 – Revisão Bibliográfica.....	3
1.3 – Objetivos.....	8
1.4 – Organização da Dissertação.....	8
CAPÍTULO 2.....	9
TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS CONSIDERANDO O MODELO DE WINKLER.....	9
2.1 – Introdução.....	9
2.2 – Formulação Básica.....	9
2.2.1 – Reação do solo através do modelo de Winkler.....	10
2.2.2 – Expressões da tensões.....	11
2.2.3 – Momentos e esforços resultantes das tensões.....	12
2.2.4 – Deslocamentos generalizados.....	13
2.2.5 – Momentos e esforços cortantes.....	13
2.2.6 – Deformações específicas.....	14
2.2.7 – Equações de equilíbrio.....	14
2.2.8 – Condições de contorno.....	16

<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>18</b>
<b>O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER E AO MODELO DE WINKLER</b> .....	<b>18</b>
3.1 – Introdução .....	18
3.2 – Equações Integrais .....	18
3.2.1 – Dedução das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados .....	21
3.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno.....	27
3.4 – Solução Fundamental.....	30
3.4.1 – Deslocamentos generalizados.....	30
3.4.2 – Forças de superfície generalizadas.....	32
3.5 – Transformação das Integrais de Forças de Domínio em Integral de Contorno.....	33
3.6 – Expressões para Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos .....	35
3.6.1 – Deslocamentos.....	35
3.6.2 – Momentos e esforços cortantes .....	36
 <b>CAPÍTULO 4</b> .....	 <b>43</b>
<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</b> .....	<b>43</b>
4.1 – Introdução .....	43
4.2 – Discretização das Equações Integrais .....	43
4.2.1 – Sistema de equações.....	43
4.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos .....	49
4.2.3 – Momentos e esforços cortantes nos pontos internos.....	50
4.3 – Elementos de Contorno.....	50
4.3.1 – Elemento quadrático contínuo.....	50
4.3.2 – Elemento quadrático descontínuo .....	51
4.4 – Nó Duplo .....	52
 <b>CAPÍTULO 5</b> .....	 <b>53</b>
<b>APLICAÇÕES</b> .....	<b>53</b>
5.1 – Introdução .....	53
5.2 – Exemplo 1: Placa Quadrada Simplesmente Apoiada.....	53



5.3 – Exemplo 2: Placa Circular Engastada.....	56
5.4 – Exemplo 3: Placa Retangular Simplesmente Apoiada.....	60
CAPÍTULO 6.....	67
CONCLUSÕES.....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	68

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema de coordenadas.....	10
Figura 2.2 – Solo representado pelas molas.....	11
Figura 2.3 – Esforços Resultantes: momentos e esforços cortantes.....	12
Figura 3.1 – Placa com ponto $\xi$ no contorno.....	27
Figura 4.1 – Placa dividida em células internas.....	44
Figura 5.1 – Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno.....	53
Figura 5.2 – Placa quadrada: discretizações do contorno e do domínio.....	54
Figura 5.3 – Placa quadrada: deslocamento transversal $u_3$ ao longo do eixo $x_1$ .....	55
Figura 5.4 – Placa quadrada: momento fletor $M_{22}$ ao longo do eixo $x_1$ .....	55
Figura 5.5 – Placa quadrada: deslocamento transversal $u_3$ ao longo do eixo $x_1$ .....	57
Figura 5.6 – Placa quadrada: momento fletor $M_{22}$ ao longo do eixo $x_1$ .....	57
Figura 5.7 – Placa circular: discretizações do contorno e do domínio.....	58
Figura 5.8 – Placa circular: deslocamento transversal $u_3$ .....	59
Figura 5.9 – Placa circular: momentos fletores $M_{rr}$ e $M_{tt}$ .....	60
Figura 5.10 – Placa retangular simplesmente apoiada no contorno.....	60
Figura 5.11 – Placa retangular: discretizações do contorno e do domínio.....	61
Figura 5.12 – Placa retangular: deslocamento $u_3$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 100$ e $k_B = 200$ .....	62
Figura 5.13 – Placa retangular: momento $M_{11}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 100$ e $k_B = 200$ .....	62
Figura 5.14 – Placa retangular: momento $M_{22}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 100$ e $k_B = 200$ .....	63
Figura 5.15 – Placa retangular: discretizações do contorno e do domínio.....	64
Figura 5.16 – Placa retangular: deslocamento $u_3$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 200$ e $k_B = 0$ .....	65
Figura 5.17 – Placa retangular: momento $M_{11}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 200$ e $k_B = 0$ .....	65
Figura 5.18 – Placa retangular: momento $M_{22}$ ao longo da reta $x_2 = a/2$ para $k_A = 200$ e $k_B = 0$ .....	66

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Resultados para a placa quadrada simplesmente apoiada no contorno.....	55
Tabela 5.2 – Resultados para a placa quadrada simplesmente apoiada no contorno.....	56
Tabela 5.3 – Resultados para a placa circular engastada no contorno.....	59

## LISTA DE SÍMBOLOS

Índices: gregos	→	variam de 1 a 2
latinos	→	variam de 1 a 3
$w$	→	flecha
$\phi_\alpha$	→	rotações
$\sigma_{\alpha\beta}$	→	componentes do tensor de tensões
$\chi_{\alpha\beta}$	→	componentes do tensor de deformações específicas de flexão
$\psi_\alpha$	→	componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais
$M_{\alpha\beta}$	→	momentos fletores e torsões por unidade de comprimento
$Q_\alpha$	→	esforços cortantes por unidade de comprimento
$x_i$	→	eixos coordenados cartesianos
$u_i$	→	componentes dos deslocamentos generalizados
$p_i$	→	componentes das forças de superfície generalizadas
$b_i$	→	componentes das forças de domínio
$\Delta_{ij}^*$	→	componentes do operador de Navier
$u_{ij}^*$	→	componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental
$p_{ij}^*$	→	componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental
$v_i^*$	→	funções que satisfazem determinada equação de Poisson
$u_{i\beta k}^*$	→	componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos
$p_{i\beta k}^*$	→	componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos
$w_{i\beta}^*$	→	componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos
$h$	→	espessura

$E$	→	módulo de elasticidade longitudinal
$\nu$	→	coeficiente de Poisson
$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$	→	rigidez à flexão da placa
$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$	→	constante característica das equações de Reissner
$q$	→	carga transversal por unidade de área
$p$	→	reação do solo
$k$	→	módulo de reação do solo
$\xi$	→	ponto fonte ou ponto carga
$x$	→	ponto campo
$r$	→	distância do ponto $\xi$ ao ponto $x$
$r_{,\alpha}$	→	derivada de $r$ em relação à coordenada $x_\alpha$
$z$	→	produto expresso por $\lambda^* r$
$n_\beta$	→	co-seno diretor da normal em relação ao eixo $x_\beta$
$K_0$ e $K_1$	→	funções de Bessel modificadas de ordem inteira
$\delta_{ij}$	→	delta de Kronecker
$\delta(x-\xi)$	→	delta de Dirac
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$	→	operador de Laplace
$\mathbf{x}$	→	vetor de incógnitas
$\mathbf{f}$	→	vetor correspondente aos valores prescritos
$\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$	→	vetores que contém os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície respectivamente
$\mathbf{b}$	→	vetor que contém a parcela da carga distribuída
$\mathbf{l}$	→	vetor que contém a parcela da reação do solo
$\mathbf{A}$	→	matriz do sistema de equações $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f}$
$\mathbf{N}$	→	matriz que contém as funções de interpolação
$\mathbf{U}_i^*$ e $\mathbf{P}_i^*$	→	matrizes que contém os deslocamentos e forças de superfície da solução fundamental respectivamente
$\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$	→	matrizes que contém as integrais sobre os elementos de contorno

$ \mathbf{J} $	→ jacobiano para integração nos elementos de contorno
$\Omega$	→ domínio da região analisada
$\Omega^*$	→ domínio da região que contém $\Omega$ e cujo contorno está infinitamente distante da placa
$\Omega_c$	→ domínio da célula $c$
$\Gamma$	→ contorno da região definida por $\Omega$
$\Gamma^*$	→ contorno da região definida por $\Omega^*$
$\Gamma_u$	→ parte do contorno $\Gamma$ onde os deslocamentos generalizados são prescritos
$\Gamma_p$	→ parte do contorno $\Gamma$ onde as forças de superfície generalizadas são prescritas
$\Gamma_c$	→ contorno da célula $c$
$N_c$	→ número total de células da placa
$e$	→ número de elementos do contorno
$N_e$	→ número de elementos no contorno de cada célula interna

## RESUMO

Este trabalho trata da análise de placas apoiadas numa fundação elástica tipo Winkler, utilizando a teoria de flexão de placas de Reissner com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Nesta formulação, utiliza-se a mesma solução fundamental já empregada na análise de placas pelo MEC, considerando equações adicionais escritas para pontos da região do domínio situada sobre a base elástica, já que as reações do solo acrescentam incógnitas ao problema. Esta região é discretizada em células triangulares constantes e, para considerar a reação do solo, são admitidos apoios elásticos com o modelo de Winkler nos pontos situados no centro geométrico das células, sendo esta reação escrita em função dos deslocamentos transversais dos nós da célula. Para a discretização do contorno, são empregados elementos com aproximação quadrática, podendo ser contínuos ou descontínuos. Resultados obtidos com a formulação apresentada são comparados com resultados analíticos e de outras soluções numéricas encontradas na literatura.

**Palavras-Chave:** Teoria de Reissner, Método dos Elementos de Contorno, Modelo de Winkler.

## ABSTRACT

This work deals with the analysis of plates layered on a Winkler type elastic foundation, using Reissner's theory for plate bending with the Boundary Element Method (BEM). In this formulation the fundamental solution already employed in the analysis of plates by the BEM is used, considering additional equations written for points of the region over the elastic foundation, since the reactions of the soil add unknowns to the problem. This region is discretized into constant triangular cells and, to consider the reaction of the soil, elastic support with the model of Winkler in points in the geometric center of cells are allowed. This reaction is written in terms of transverse displacements of the nodes of the cell. For the discretization of the boundary, elements are used with quadratic approximation, and may be continuous or discontinuous. Results obtained with the presented formulation are compared with analytical results and with ones obtained from other numerical solutions found in literature.

**Keywords:** Reissner's theory; Boundary Element Method; Winkler's model



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 – Considerações Iniciais

A análise de placas apoiadas sobre fundação elástica tem alcançado larga aplicação no campo da Engenharia Estrutural.

A primeira equação descrevendo a flexão de placas foi proposta por Navier, em 1823. Em 1828, Poisson prescreveu três condições de contorno como necessárias para o problema de placas. Percebendo que as três condições de contorno propostas por Poisson não eram compatíveis com a equação diferencial de quarta ordem obtida para placas, Kirchhoff, em 1850, reduziu de três para duas as condições de contorno apresentadas por Poisson, desprezando o efeito de cisalhamento na deformação e tornando compatíveis a equação diferencial de quarta ordem por ele encontrada com as duas condições de contorno propostas. Assim, a principal hipótese desta teoria consiste em que segmentos de reta normais à superfície média, antes da flexão, permanecem retos, normais à superfície média e inalterados no comprimento, após a flexão, acarretando deformações cisalhantes transversais nulas. Desta forma, a teoria clássica de Kirchhoff (Timoshenko, 1970) é limitada a placas delgadas com pequenos deslocamentos.

Além disso, a teoria clássica (teoria de Kirchhoff) lida com certas simplificações, o que conduz a resultados imprecisos tanto nos bordos e cantos da placa como próximo a furos com diâmetro pequeno em comparação com a espessura da placa, fatos que levaram Reissner, em 1944, a formular sua teoria, introduzindo o efeito das deformações cisalhantes, obtendo um sistema de equações diferenciais de sexta ordem que atende às três condições de contorno apresentadas por Poisson. A teoria refinada de Reissner (Reissner, 1945) possibilita modelar tanto placas delgadas quanto espessas. A principal hipótese desta teoria é que segmentos de reta normais à superfície média antes da deformação da placa permanecem retos, mas não necessariamente normais a esta superfície após a deformação.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) constitui uma alternativa importante no conjunto das técnicas numéricas mais utilizadas, onde a solução de

problemas físicos é calculada em pontos discretos (nós) que são definidos sobre o contorno para os casos em que uma solução fundamental é conhecida. De acordo com Barbirato (1999), a necessidade de utilização de uma solução fundamental, que genericamente pode ser classificada como uma desvantagem, na verdade proporciona precisão ao método.

Em relação ao Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (Brebbia et al., 1984) possui algumas vantagens. Uma delas é a possibilidade de redução de uma unidade na dimensão do problema, considerando-se a discretização em elementos apenas ao longo do contorno da região a ser analisada. No caso do MEF, necessita-se discretizar todo o domínio. Em particular, no caso da análise de placas pelo MEC, são discretizadas apenas as linhas de contorno que circundam a sua superfície média.

Uma outra vantagem de se utilizar o MEC é que todos os valores calculados nos pontos internos, tanto os deslocamentos como os momentos e esforços cortantes, possuem a mesma precisão, visto que derivam-se os tensores da chamada solução fundamental, não acarretando perda de precisão. Sabe-se que, no Método dos Elementos Finitos, os esforços ou tensões possuem precisão inferior aos deslocamentos, devido à derivação destes para a obtenção dos esforços ou tensões.

Devido à complexidade do comportamento da fundação, vários modelos simplificados foram idealizados e podem ser encontrados na literatura. O modelo de Winkler, modelo de um parâmetro, consiste na substituição do solo por um conjunto de molas contínuas, no qual não se considera a interação entre as molas. Há modelos de dois parâmetros, um destes o modelo de Pasternak, no qual se supõe uma interação da força cisalhante entre as molas, o que conduz a resultados mais exatos.

Neste trabalho, o Método dos Elementos de Contorno será utilizado como ferramenta numérica para analisar deslocamentos e esforços em placas, utilizando a teoria refinada de Reissner, já que esta permite a análise de placas delgadas e espessas. O comportamento do solo será considerado pelo modelo de Winkler, devido a sua simplicidade.

Inicialmente, é apresentado um resumo da teoria refinada de Reissner para análise de flexão de placas incluindo a consideração da reação do solo pelo modelo de Winkler.

Em seguida, as equações integrais básicas são deduzidas para um ponto do domínio a partir do Método dos Resíduos Ponderados e, posteriormente, escritas para um ponto do contorno.

Os tensores da solução fundamental também são apresentados, assim como, obtidas as equações que permitem o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

As integrais de forças de domínio relativas às cargas aplicadas na placa são desenvolvidas para cargas uniformemente distribuídas e transformadas em integrais sobre o contorno da placa.

Considera-se o domínio sobre a base elástica dividido em células e as integrais de domínio relativas à reação do solo são transformadas em integrais sobre o domínio de cada célula interna e, posteriormente, transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

O contorno da placa é discretizado em elementos de contorno quadráticos, podendo ser contínuos ou descontínuos, pois representam satisfatoriamente tanto a geometria como as funções envolvidas. A parte do domínio da placa que encontra-se apoiada na base elástica é dividida em células internas triangulares constantes.

As equações integrais são discretizadas formando um sistema de equações algébricas. São escritas três equações para cada ponto nodal do contorno, uma para cada uma das três direções generalizadas. Como as forças de reação da base elástica também são incógnitas, são escritas equações adicionais ao sistema original, constituídas pelas equações dos deslocamentos transversais dos pontos situados nos centros geométricos das células.

Observa-se que a divisão do domínio em células permite a análise nos casos em que o módulo da base elástica varia no domínio da placa.

É importante enfatizar que, neste trabalho, é utilizada a notação cartesiana indicial, onde os índices gregos variam de 1 a 2 e os latinos, de 1 a 3.

## **1.2 – Revisão Bibliográfica**

Existem vários trabalhos que abordam o Método dos Elementos de Contorno para análise de placas sobre base elástica ou rígida, dos quais alguns são destacados a seguir:

Paiva e Venturini (1985) mostraram uma formulação para análise de placas do solo de um edifício. Inicialmente introduzem a formulação usual de elemento de contorno para problemas de flexão de placas e, para considerar cargas aplicadas nas placas, as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno. A validade da formulação é comprovada a partir da análise de três exemplos, sendo dois destes de aplicações simples e o terceiro através de um algoritmo desenvolvido do elemento de contorno demonstrando confiabilidade, mesmo com discretizações grosseiras.

Baseado na teoria clássica de Kirchhoff, Paiva (1989) apresentou uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas apoiadas numa base elástica tipo Winkler, onde a solução fundamental não incorpora o efeito da base elástica. A fim de obter as contribuições da base elástica, nesta formulação, a parte do domínio da placa que se encontra apoiada na base elástica foi dividida em células triangulares. Em cada célula, adotou uma aproximação linear para a reação da base elástica, sendo esta escrita em função dos deslocamentos transversais dos pontos das células. Os resultados fornecidos por esta formulação são próximos dos obtidos por outros processos numéricos, mesmo para um pequeno número de células.

Silva e Venturini (1990) utilizaram a teoria refinada de Reissner para a análise de placas com vinculação interna. O sistema de equações iniciais é alterado à medida que os carregamentos ou deslocamentos prescritos em pontos internos produzem reações internas, sendo estas tratadas como cargas distribuídas nas áreas de contato. Foram consideradas células internas na parte do domínio com vinculação interna. A integral de domínio correspondente à região sobre a vinculação interna foi transformada em uma soma de integrais sobre o contorno de cada célula. Compararam, através de um exemplo numérico, os resultados obtidos pelo MEC com a teoria de Reissner aos valores teóricos e aos da teoria de Kirchhoff, mostrando a sua validade e confiabilidade.

Sapountzakis e Katsikadelis (1992) propuseram uma solução de elementos de contorno para o problema unilateral do contato de uma placa elástica delgada apoiada numa fundação elástica em que a placa pode ter a forma arbitrária e estar sujeita a qualquer condição de contorno de carregamento. O modelo consiste em molas espaçadas independentes e sua reação pode depender linearmente (modelo de Winkler) ou não linearmente da deflexão. O procedimento da solução é baseado

na representação integral da deflexão em que a reação desconhecida do contato é tratada como termo de carregamento. Um sistema de equações algébricas envolvendo tais incógnitas é obtido através do Método dos Elementos de Contorno, onde a deflexão da superfície média é calculada a partir de um processo iterativo.

Jianguo et al. (1993) apresentaram uma formulação de equações integrais de contorno e a solução fundamental para placas espessas apoiadas em uma fundação elástica de Winkler. Utilizaram o método de Hörmander para transformar o sistema de equações diferenciais do problema, a fim de obter as soluções fundamentais do problema. As soluções fundamentais de placas espessas em uma fundação de Winkler foram expressas por uma combinação linear de funções auxiliares e de suas derivadas. As equações integrais de contorno foram obtidas usando o método dos resíduos ponderados. Os resultados numéricos mostram que a formulação tem boa precisão.

Já Fadhil e El-Zafrany (1994) introduziram uma teoria para análise de placas espessas apoiadas em uma fundação elástica com um ou dois parâmetros, baseada na teoria de Reissner e utilizando o Método dos Elementos de Contorno, na qual os termos das integrais de domínio foram reduzidos para casos com cargas uniforme e linearmente distribuídas e forças de cisalhamento e momentos fletores concentrados, o que conduziu a uma análise com boa precisão para placas com condições de contorno e cargas diferentes. Utilizaram também contornos imaginários para superar problemas de integrais divergentes, o que confirmou as vantagens dos modelos de fundações de dois parâmetros.

Um ano após, Fadhil e El-Zafrany (1995) introduziram uma abordagem do método dos elementos de contorno para análise de placas delgadas apoiadas em uma fundação de Winkler. A equação integral do contorno foi derivada considerando três graus de liberdade por nó para placas com forma e condições de contorno arbitrárias. Uma solução fundamental foi obtida considerando as funções modificadas de Kelvin e os termos de domínio relativos ao carregamento foram reduzidos para casos de carga uniformemente distribuída e concentrada.

Paiva e Butterfield (1997) apresentaram uma formulação do MEC para a análise da interação entre uma placa e o solo, onde a região de interação placa-solo é dividida em elementos triangulares, nos quais os deslocamentos e a reação de contato variam linearmente. As integrais sobre os elementos da interface são transformadas em integrais sobre seus respectivos contornos, o que evita a

singularidade  $r^{-1}$ . Os resultados obtidos foram comparados com os de outros autores e mostraram-se próximos, confirmando, assim, a validade do modelo.

Rashed et al. (1998) derivaram a solução fundamental para placas de Reissner apoiadas numa fundação de Winkler, onde a solução fundamental tem três casos diferentes, dependendo das constantes da fundação. Elementos quadráticos foram usados para modelar a geometria e os termos desconhecidos do contorno. As integrais com singularidade forte foram avaliadas através de uma expansão em série de Taylor. Os resultados foram satisfatórios e mostram que, do ponto de vista computacional, é mais apropriado modelar placas moderadamente espessas numa fundação elástica com o modelo apresentado do que com um modelo tridimensional.

Um ano depois, Rashed et al. (1999) apresentaram uma formulação com elementos de contorno para placas de Reissner sobre fundação de Pasternak. A formulação tem três casos diferentes, dependendo dos parâmetros da fundação, onde elementos isoparamétricos quadráticos são utilizados para aproximar a distribuição dos termos desconhecidos do contorno e possuem a mesma ordem de singularidade que em problemas da elasticidade de duas dimensões. Os resultados mostram que a formulação é uma alternativa aos métodos numéricos existentes para análise de aplicações práticas.

Posteriormente, Rashed e Aliabadi (2000) apresentaram um método numérico baseado na teoria de Reissner e no modelo de fundações de Winkler, no qual o solo é representado por molas e a exatidão do modelo depende do número de molas usadas. A formulação baseou-se no fato de que o efeito do solo é incorporado diretamente nas soluções fundamentais do problema. Duas aplicações práticas foram desenvolvidas e os resultados comparados aos diferentes métodos, tais como: MDF, MEF, e MEC, mostrando que o modelo proposto para análise da interação solo-placa tem boa precisão, mesmo com discretização grosseira, e que a modelagem do solo é independente da discretização do problema.

Mendonça e Paiva (2000) apresentaram uma formulação de elementos de contorno para análise estática de interação solo-fundação-placa em que todas as interações entre a placa, a fundação e o solo são consideradas simultaneamente. O solo é representado por um semi-espaço homogêneo linear elástico. A placa é suposta ser fina e cada fundação é representada por um único elemento com três pontos nodais, onde a força cisalhante ao longo da mesma é aproximada por um polinômio do segundo grau. Assim, as contribuições das forças das fundações e do

solo são transferidas à placa. Comparando os resultados com os de outros autores, justifica-se que as diferenças nos resultados provêm das diferenças de abordagem das interações entre placa-fundação-solo.

Auatt (2002) apresentou uma análise para o problema de contato de uma placa elástica ou elastoplástica com um obstáculo rígido pelo método dos elementos de contorno. Utilizou a mesma solução fundamental empregada para o caso sem contato e usou células no domínio. Considerou equações adicionais ao sistema original, escritas para deslocamentos em pontos internos.

Karam e Auatt (2003) apresentaram uma análise de placas com apoios internos pelo MEC, com a teoria de Reissner, considerando células internas nas partes da placa que se encontram sobre os apoios. Consideraram as reações nesses apoios como forças distribuídas nas células e usaram equações adicionais ao sistema original para resolver o problema.

Almeida (2003) analisou a interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF, onde desenvolveu as formulações para a estrutura através do método dos elementos finitos, utilizando a teoria de Kirchhoff, e as formulações para o solo e a subestrutura através do Método dos Elementos de Contorno. O MEC é bastante apropriado para análise do solo pelo fato de as funções envolvidas já contemplarem as restrições a grandes distâncias. Os resultados encontrados mostraram boa concordância com os resultados de outros trabalhos, sendo que alguns exemplos não foram comparados em virtude de escassez de referências sobre o assunto.

Rashed (2005) desenvolveu uma nova formulação com o método de elementos de contorno/domínio para análise de placas espessas sobre fundações elásticas. Utilizou a teoria de Reissner e o MEC para modelar a placa e considerou condições de contorno livres nos bordos. O solo ou a fundação elástica foi representado como um meio contínuo, usando o modelo de Winkler, e foi modelado usando células internas constantes. A integral de domínio relacionada ao solo foi transformada em integrais de contorno equivalentes aos contornos das células. Conseqüentemente, para a implementação numérica da formulação, o domínio e o contorno da placa foram discretizados. Dois exemplos foram utilizados para análise, incluindo um considerando solo não-homogêneo. Das análises, concluiu que a referente formulação é mais abrangente que a desenvolvida por Rashed e Aliabadi (2000), pois é válida para todo tipo de solo.

### **1.3 – Objetivos**

O objetivo deste trabalho é a análise de placas apoiadas em base elástica pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando a teoria refinada de Reissner e o modelo de fundação de Winkler.

### **1.4 – Organização da Dissertação**

Esta dissertação é apresentada em 6 capítulos. O trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica sobre as teorias de placas, o Método dos Elementos de Contorno e os modelos para consideração de reações do solo. Apresentam-se também os objetivos e organização desta dissertação.

Em seguida, no Capítulo 2, é apresentada, de forma sucinta, a teoria de Reissner para análise de flexão de placas aplicada ao modelo de Winkler, em que são mostradas as expressões para a reação do solo, as tensões, os esforços resultantes das tensões, os deslocamentos generalizados, as deformações específicas, as equações de equilíbrio e as condições de contorno.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação utilizada no Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de Reissner e ao modelo elástico de Winkler, onde são deduzidas as equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Mostra-se ainda a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno e as expressões dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

No capítulo seguinte, Capítulo 4, é mostrada a implementação numérica, onde são discretizadas as equações integrais do capítulo anterior, a fim de se obter um sistema de equações algébricas.

No Capítulo 5 são apresentados três exemplos, assim como as respectivas análises dos resultados. Os resultados obtidos neste trabalho são comparados com resultados numéricos de trabalhos de outros autores e com soluções analíticas.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões sobre o estudo realizado neste trabalho.



## CAPÍTULO 2

### TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS CONSIDERANDO O MODELO DE WINKLER

#### 2.1 – Introdução

A teoria de Reissner é uma teoria mais refinada do que a teoria clássica de flexão de placas ou teoria de Kirchhoff e permite a consideração de três condições de contorno por bordo, obtendo-se, assim, um problema de integração de sexta ordem. A teoria clássica, que considera apenas duas condições de contorno por bordo, em vez das três condições físicas do problema, conduz a uma equação diferencial de quarta ordem.

O modelo de Winkler (Winkler, 1867) é um modelo utilizado para análise de fundação elástica, no qual o solo é representado por molas contínuas, ou seja, o modelo considera que a fundação funciona como um sistema de elementos de mola independentes e que a reação do solo é assumida como sendo uma função linear do deslocamento da estrutura em cada ponto.

Neste capítulo, as fórmulas básicas da teoria refinada de Reissner (Reissner, 1945) para flexão de placas são apresentadas, nas quais, incorpora-se a reação do solo usando-se o modelo de Winkler.

#### 2.2 – Formulação Básica

Placa é um elemento estrutural utilizado em diversos tipos de estruturas, caracterizado por apresentar duas das três dimensões muito grandes em comparação com a terceira e cujo carregamento é transversal à sua superfície média.

Considera-se, então, uma placa linearmente elástica, homogênea e isotrópica, com espessura  $h$  constante e sujeita a um carregamento transversal  $q$  por unidade de área. Considera-se, ainda, um carregamento  $p$ , também por unidade de área, representando a reação do solo.

Além disso, representa-se por  $x_i$  as coordenadas cartesianas, onde  $x_\alpha$  estão na superfície média e  $x_3$  na direção transversal da placa (Figura 2.1).

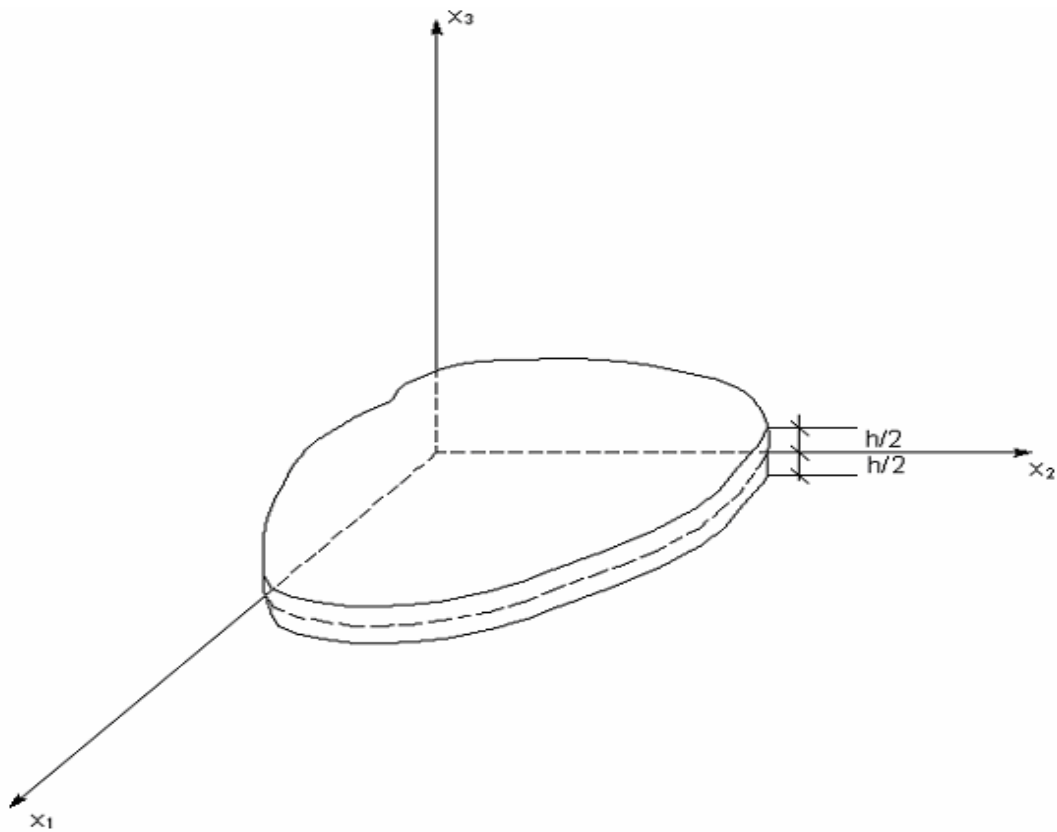


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas

### 2.2.1 – Reação do solo através do modelo de Winkler

O modelo de comportamento do solo proposto por Winkler admite que o deslocamento  $w$  de qualquer ponto situado na superfície do solo é diretamente proporcional ao carregamento  $p$  aplicado no ponto e independe de outros carregamentos externos, aplicados em outros pontos do solo (Figura 2.2). Assim, a reação do solo é dada por:

$$p = k w \quad (2.1)$$

onde:

$k$  = módulo de reação do solo

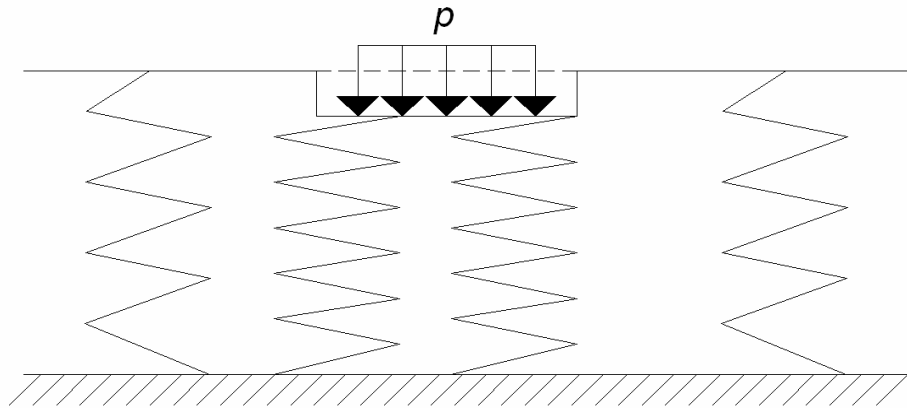


Figura 2.2 – Solo representado pelas molas

Uma das hipóteses assumidas no modelo é que os deslocamentos são determinados para pontos imediatamente abaixo da região carregada, sendo nulos os deslocamentos fora dessa área. Assim, tal simplificação pode, dependendo do problema analisado, produzir desvios de respostas.

### 2.2.2 – Expressões da tensões

As condições de carregamento consideradas nas faces da placa são:

$$\sigma_{33} = \frac{q}{2} \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0 \text{ para } x = \frac{h}{2} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = \frac{q}{2} - p \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0 \text{ para } x = -\frac{h}{2}$$

As tensões são dadas em função dos esforços resultantes e variam ao longo da espessura na seguinte forma:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{33} = \frac{p}{2} + \frac{(q-p)x_3}{2h} \left[ 3 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

As tensões normais  $\sigma_{33}$ , que atuam na direção transversal, são consideradas desprezíveis em relação às demais.

### 2.2.3 – Momentos e esforços resultantes das tensões

As expressões dos momentos fletores e torsões  $M_{\alpha\beta}$  e dos esforços cortantes  $Q_\alpha$ , por unidade de comprimento, atuando na superfície média da placa, são obtidas por integração das tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{\alpha 3}$  ao longo da espessura, sendo:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.4a)$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.4b)$$

Os sentidos positivos desses esforços estão indicados na Figura 2.3.

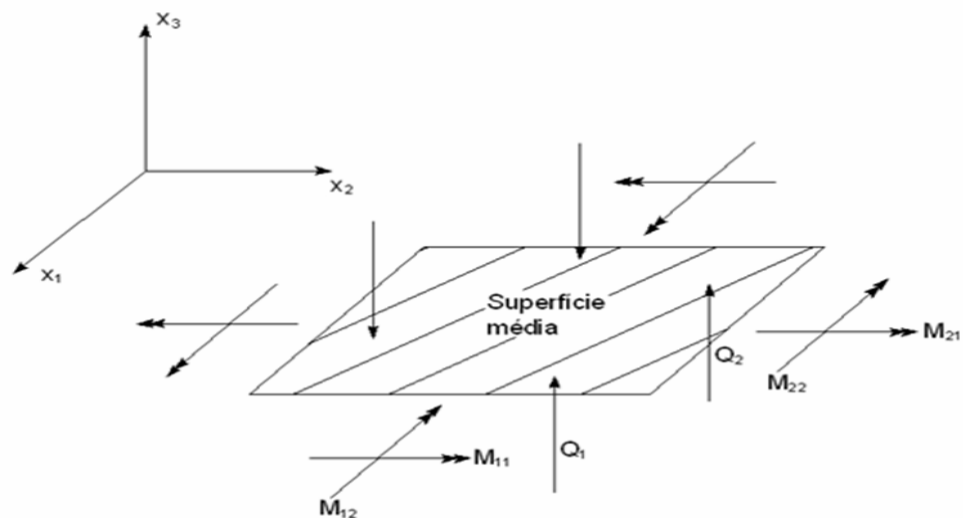


Figura 2.3 – Esforços Resultantes: momentos e esforços cortantes

### 2.2.4 – Deslocamentos generalizados

Os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$ , que representam, respectivamente, as rotação da normal à superfície média nos planos  $x_\alpha - x_3$  e o deslocamento transversal (flecha) considerados para pontos da superfície média da placa, são dados a seguir, e representam a média ponderada dos deslocamentos  $v_i$  de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados.

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.5a)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} v_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.5b)$$

### 2.2.5 – Momentos e esforços cortantes

Os momentos e esforços cortantes são expressos a seguir, em função dos deslocamentos generalizados, e são obtidos utilizando-se a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos e princípios variacionais.

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu(q-p)}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.6a)$$

$$Q_\alpha = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \left( \phi_\alpha + w_{,\alpha} \right) \quad (2.6b)$$

onde:

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$\delta_{\alpha\beta}$  = delta de Kronecker

$w$  = deslocamento transversal (flecha) de um ponto da superfície média

$\phi_\alpha$  = rotações da normal à superfície média nos planos  $x_\alpha - x_3$

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = \text{rigidez à flexão da placa} \quad (2.7)$$

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} = \text{constante característica das equações de Reissner} \quad (2.8)$$

### 2.2.6 – Deformações específicas

As expressões das deformações específicas de flexão  $\chi_{\alpha\beta}$  e cisalhantes transversais  $\psi_\alpha$ , em função dos deslocamentos generalizados da placa, são:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ( \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} ) \quad (2.9a)$$

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha} \quad (2.9b)$$

Cabe observar que, na teoria clássica de Kirchhoff, as deformações cisalhantes transversais são consideradas desprezíveis e tem-se, assim,  $\psi_\alpha = 0$ . Conseqüentemente, as rotações  $\phi_\alpha$  são obtidas através de derivadas da flecha, o que não ocorre na teoria refinada de Reissner, já que as deformações cisalhantes transversais não são desprezadas.

### 2.2.7 – Equações de equilíbrio

Fazendo-se o equilíbrio de um elemento de placa e considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos, são obtidas as seguintes equações de equilíbrio:

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - p = 0 \quad (2.10a)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.10b)$$

Substituindo as expressões (2.6) em (2.10), obtém-se o seguinte sistema de três equações diferenciais lineares:

$$\Delta_{ij}^* u_j + b_i = 0 \quad (2.11)$$

onde  $\Delta_{ij}^*$  representa as componentes do operador de Navier e suas expressões são mostradas a seguir:

$$\Delta_{\alpha\beta}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[ (\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \quad (2.12)$$

$$\Delta_{\alpha 3}^* = -\Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (2.13)$$

$$\Delta_{33}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla^2 \quad (2.14)$$

sendo:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \text{operador de Laplace} \quad (2.15)$$

e  $b_i$  representa as componentes das forças de domínio que, neste caso, são:

$$b_\alpha = \frac{\nu (q-p)_{,\alpha}}{\lambda^2 (1-\nu)} \quad (2.16)$$

$$b_3 = q - p \quad (2.17)$$

### 2.2.8 – Condições de contorno

Seja uma placa, onde devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo. Considerando  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ , podem ser definidas as seguintes condições de contorno em  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_u : \phi_\alpha &= \bar{\phi}_\alpha \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_p : p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ p_3 &= Q_\beta n_\beta \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \\ \bar{p}_3 &= \bar{Q}_\beta n_\beta \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde:

$\Gamma$  = contorno total da placa

$\Gamma_u$  = parte do contorno onde há deslocamentos prescritos

$\Gamma_p$  = parte do contorno onde há forças generalizadas prescritas

$p_\alpha$  e  $p_3$  = forças de superfície generalizadas

$n_\beta$  = co-senos diretores da normal exterior ao contorno



Vale ressaltar que o traço em cima dos símbolos indica que os valores correspondentes são prescritos.

## CAPÍTULO 3

### O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER E AO MODELO DE WINKLER

#### 3.1 – Introdução

Para aplicar o Método dos Elementos de Contorno, as equações diferenciais que governam o problema são utilizadas para a obtenção de equações integrais em que as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno, sempre que possível. Para a obtenção das equações integrais que possibilitem a análise do problema, o MEC necessita de uma solução fundamental. Tais equações podem ser obtidas através do Método dos Resíduos Ponderados, utilizando a solução fundamental como função ponderadora.

Neste capítulo, são deduzidas as expressões das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados, apresentados os tensores da solução fundamental e obtidas as equações para a resolução do problema no contorno e para o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos, segundo Karam e Telles (1988) e Karam (1992).

Por maior conveniência, daqui em diante, os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$  definidos em (2.5) serão representados, respectivamente, por  $u_\alpha$  e  $u_3$ , ou ainda, genericamente, como  $u_k$ .

Cabe ressaltar ainda que os índices latinos variam de 1 a 3 e os gregos, de 1 a 2.

#### 3.2 – Equações Integrais

Seja uma placa definida por um domínio  $\Omega$ , representado por sua superfície média e um contorno  $\Gamma$ , representado pela linha que a circunda. Considere-se ainda que a placa se encontre em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento transversal  $q$  atuando em  $\Omega$  e possuindo uma espessura constante  $h$ .

As condições de contorno consideradas para as três direções generalizadas da placa são:

$$\begin{aligned} u_j &= \overline{u_j} \text{ em } \Gamma_u \\ p_j &= \overline{p_j} \text{ em } \Gamma_p \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$$

Seja a reação do solo dada por:

$$p = k u_3 \quad (3.2)$$

Seja ainda um domínio  $\Omega^*$  com um contorno  $\Gamma^*$ , que contenha a placa de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , e que também esteja em estado de equilíbrio.

Considerando as equações apresentadas no capítulo anterior, têm-se o que se segue:

**a) Para a região ( $\Omega \cup \Gamma$ ):**

- Deslocamentos:  $u_k$
- Forças de superfície:  $p_k$

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (3.3)$$

$$p_3 = Q_\alpha n_\alpha$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}}{2} \quad (3.4)$$

$$\psi_\alpha = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha + u_{3,\alpha})$$

- Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (3.6)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - p = 0$$

**b) Para a região  $(\Omega^* \cup \Gamma^*)$ :**

- Deslocamentos:  $u_k^*$
- Forças de superfície:  $p_k^*$

$$p_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^* n_\beta \quad (3.7)$$

$$p_3^* = Q_\alpha^* n_\alpha$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta}^* = \frac{u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*}{2} \quad (3.8)$$

$$\psi_\alpha^* = u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (3.9)$$

$$Q_{\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*)$$

- Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + F_{\alpha}^* = 0 \quad (3.10)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

onde:

$F_k^*$  = componentes das forças de domínio definidas a fim de se obter a solução fundamental, sendo que estas se distribuem ao longo da espessura como mostrado a seguir:

$$f_{\alpha}^* = \frac{12 x_3}{h^3} F_{\alpha}^* \quad (3.11)$$

$$f_3^* = \frac{3 F_3^*}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2 x_3}{h} \right)^2 \right]$$

### 3.2.1 – Dedução das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados

Utilizando as equações de equilíbrio (3.6) e as condições de contorno (3.1), pode-se então distribuir o erro da forma seguinte, para uma solução aproximada composta de  $u_{\alpha}$  e  $u_3$ :

$$\int_{\Omega} \left[ (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha}) u_{\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q - p) u_3^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma_p \quad (3.12)$$

Integrando a primeira parcela do primeiro membro de (3.12) por partes e considerando as expressões (3.3), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha}) u_{\alpha}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega \quad (3.13)$$

Integrando a segunda parcela do primeiro membro de (3.12) por partes e considerando as expressões (3.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} (Q_{\alpha,\alpha} + q - p) u_3^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{3,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q - p) u_3^* d\Omega \quad (3.14)$$

Desta forma, o lado esquerdo da equação (3.12), considerando as expressões (3.1), (3.3), (3.13) e (3.14), pode ser escrito na forma seguinte:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (q - p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\ - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando que:

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* \quad (3.16)$$

ressaltando que isto não significa que  $u_{\alpha,\beta}^* = \chi_{\alpha\beta}^*$ , e usando a reciprocidade de Betti:

$$M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* = M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

então:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega \quad (3.18)$$

Desta forma, utilizando (3.5) e (3.9), obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega \quad (3.19)$$

Considerando, ainda, as expressões (3.4), (3.5), (3.8) e (3.9) em (3.15), tem-se:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \\ + \int_{\Gamma_u} (\overline{u_j} - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.20)$$

Integrando novamente por partes a primeira parcela do primeiro membro de (3.20) e utilizando (3.3), fica:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega \quad (3.21)$$

Integrando por partes a segunda parcela do primeiro membro de (3.20) e considerando (3.7), obtém-se:

$$\int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{3,\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega \quad (3.22)$$

Sabe-se que:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{para } \alpha = \beta \\ 0 & \text{para } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (3.23)$$

Então, tem-se  $\delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = u_{\alpha,\alpha}^*$  para  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ .

Logo, considerando (3.21), (3.22), (3.23) em (3.20), fica:

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = -\int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \\ & + \int_{\Gamma_u} (\overline{u_j} - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou ainda, utilizando (3.1) e (3.10), obtém-se :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q-p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega + \int_{\Omega} (q-p) u_3^* d\Omega = -\int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\ & - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p \end{aligned} \quad (3.25)$$

A expressão (3.1) fornece:

$$\int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u \quad (3.26)$$

Então:

$$\int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p = \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma \quad (3.27)$$



Logo, a equação (3.25) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega - \int_{\Omega} p \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \quad (3.28)$$

As forças de domínio  $F_j^*$  são forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região  $\Omega^*$ , o qual será chamado de ponto carga ou ponto fonte e representado por  $\xi$ .

Essas forças podem ser representadas por:

$$F_j^* = \delta(x - \xi) P_j \quad (3.29)$$

onde:

$$P_j = 1 \quad (3.30)$$

$\delta(x - \xi)$  = função generalizada delta de Dirac com singularidade em  $\xi$ .

A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x - \xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \quad (3.31)$$

Sendo agora  $\xi$  pertencente à região  $\Omega$  e considerando (3.29), a primeira integral de (3.28) fica:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) P_j u_j d\Omega \quad (3.32)$$

ou ainda, considerando (3.31):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) P_j \quad (3.33)$$

E, considerando (3.30):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi) \quad (3.34)$$

Seja, agora, cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente. Então, pode-se escrever:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (3.35)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i$$

onde:

$\xi$  = ponto fonte, ou seja, ponto onde são aplicadas as cargas concentradas generalizadas unitárias

$x$  = ponto campo, ou seja, ponto onde são observados os efeitos das cargas concentradas generalizadas unitárias aplicadas

$u_{ij}^*(\xi, x)$  = deslocamento generalizado na direção  $j$  do ponto campo correspondente a uma força unitária aplicada na direção  $i$  do ponto fonte

$p_{ij}^*(\xi, x)$  = força de superfície generalizada na direção  $j$  do ponto campo correspondente a uma força unitária aplicada na direção  $i$  do ponto fonte

Considerando as cargas unitárias atuando em cada uma das três direções generalizadas, pode-se então escrever três equações da forma seguinte, sendo válidas para um ponto  $\xi$  qualquer situado no interior da região  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} \left[ u_{ij}^* (\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^* (\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{i\alpha,\alpha}^* (\xi, x) \right] d\Omega(x) - \\
& - \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{i\alpha,\alpha}^* (\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

### 3.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno

A equação (3.36) fornece os deslocamentos em qualquer ponto contido no interior da placa desde que os valores das forças de superfície e deslocamentos de todos os pontos do contorno sejam conhecidos. Para a obtenção dos valores incógnitos, é necessário escrever essa equação integral para pontos do contorno, utilizando-se um artifício que consiste em transformar, inicialmente, o ponto do contorno em um ponto de domínio. Então, aumenta-se o domínio e o contorno da placa, acrescentando a esta o contorno  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  de uma região semi-circular de domínio  $\bar{\Omega}_\varepsilon$ , com centro no ponto do contorno  $\xi$  e de raio  $\varepsilon$ , conforme indicado na Figura 3.1.

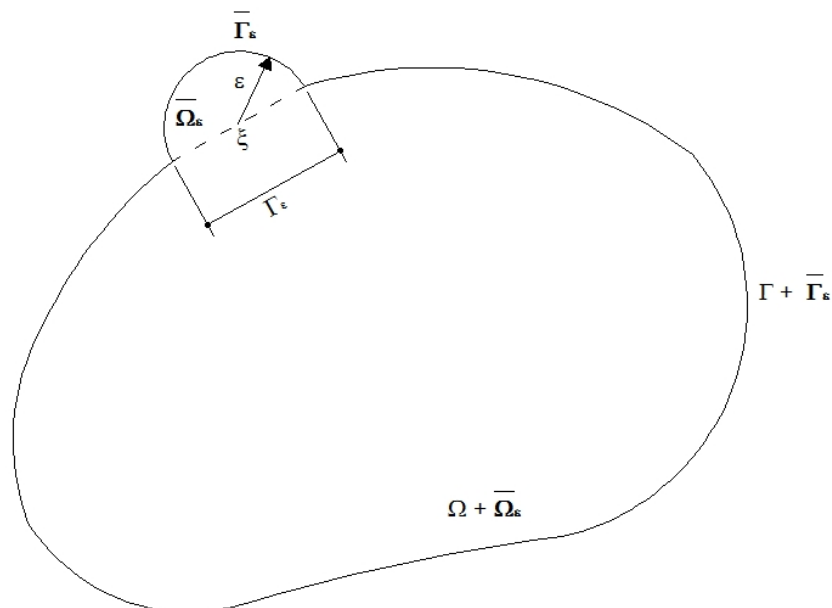


Figura 3.1 – Placa com ponto  $\xi$  no contorno

Neste caso, a equação integral (3.36) para os deslocamentos no ponto  $\xi$  fica:

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) = & \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\overline{\Gamma_\varepsilon}} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Omega+\overline{\Omega_\varepsilon}} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) - \\
& + \int_{\Omega+\overline{\Omega_\varepsilon}} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral de (3.37) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A segunda integral em (3.37) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (3.38)
\end{aligned}$$

onde a primeira integral à direita pode ser representada por:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \\
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

A primeira integral à direita na equação (3.39) se anula devido à continuidade de  $u_j(x)$  e a segunda integral à direita, juntamente com o lado esquerdo da equação (3.37), fornece:

$$u_i(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} = u_j(\xi) \left[ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.40)$$

pois:

$$u_i(\xi) + u_j(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = u_j(\xi) \left[ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.41)$$

Então:

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.42)$$

A segunda integral à direita em (3.38) deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se  $u_j(x)$  satisfaz a condição de Hölder:

$$\left| u_j(x) - u_j(\xi) \right| \leq B r^\alpha \quad (3.43)$$

onde  $B$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

As integrais restantes em (3.37) não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas.

Assim, pode-se escrever, para um ponto  $\xi$  do contorno:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) - \\ &- \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde a primeira integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{ij}(\xi)$  definido em (3.42) depende da geometria do contorno no ponto  $\xi$ .

Assim, pode-se considerar a equação (3.44) escrita para um ponto  $\xi$  qualquer, onde:

$$c_{ij} = \delta_{ij} \text{ quando } \xi \text{ é ponto do interior} \quad (3.45)$$

$$c_{ij} = \delta_{ij}/2 \text{ quando } \xi \text{ é ponto de contorno suave}$$

### 3.4 – Solução Fundamental

Para desenvolver uma formulação que permita aplicação do Método dos Elementos de Contorno, é necessária uma solução fundamental.

Esta solução representa a solução das equações diferenciais do problema nas direções generalizadas consideradas para um ponto campo  $x$  devido a forças concentradas generalizadas unitárias aplicadas em um ponto  $\xi$ .

#### 3.4.1 – Deslocamentos generalizados

Sejam as equações (2.11) para cargas concentradas unitárias na direção  $k$  no ponto  $\xi$ , aplicadas separadamente. Neste caso, as equações (2.11) podem ser representadas como:

$$\Delta_{ij}^* u_{kj}^* + b_{ki}^* = 0 \quad (3.46)$$

sendo:

$$b_{ki}^* = \delta(x - \xi) \delta_{ki} \quad (3.47)$$

onde  $\delta(x - \xi)$  é definida no item 3.2.1.

O campo de deslocamentos  $u_{kj}^*$  representa a solução da equação (3.46) e é chamada de solução fundamental.

Segundo Van der Weeën (1982b), uma solução que satisfaz as equações (3.46) foi obtida pelo método de Hörmander, dadas por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$u_{\alpha 3}^* = - u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r_{,\alpha}$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu) \lambda^2} \left[ (1-\nu) z^2 (\ln z - 1) - 8\ln z \right]$$

(3.48)

onde:

$$r = \sqrt{r_{\alpha} r_{\alpha}} = \text{dist\~{a}ncia entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (3.49)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(x)} = \frac{r_{\alpha}}{r} \quad (3.50)$$

sendo:

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(x) - x_{\alpha}(\xi) \quad (3.51)$$

$$z = \lambda r \quad (3.52)$$

$$A(z) = K_0(z) + 2z^{-1} [K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.53)$$

$$B(z) = K_0(z) + z^{-1} [K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.54)$$

onde  $K_0$  e  $K_1$  são funções de Bessel modificadas, calculadas através das expansões polinomiais dadas por Abramowitz e Stegun (1965).

### 3.4.2 – Forças de superfície generalizadas

Substituindo as derivadas de (3.48) em (3.5) e, em seguida, substituindo as expressões resultantes em (3.3), resultam:

$$p_{\gamma\alpha}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_{\gamma}) + \right. \\ \left. + (4A + 1 + \nu) r_{,\gamma} n_{\alpha} - 2 (8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n} \right]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B n_{\gamma} - A r_{,\gamma} r_{,n}]$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_{\alpha} + 2 r_{,\alpha} r_{,n} \right]$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n}$$

(3.55)

onde  $r_{,n}$  é a derivada de  $r$  em relação à normal no ponto  $x$ , sendo expressa por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \quad (3.56)$$

e considerou-se que:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}(x)} = \lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2 A)$$



$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(x)} = - \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r}$$

(3.57)

Vale ressaltar que as derivadas de  $u_{ij}^*$  são em relação às coordenadas do ponto  $x$  (ponto campo).

Assim, são obtidas as expressões dos tensores  $p_{ij}^*$  da equação (3.36), que representam as forças de superfície da solução fundamental.

### 3.5 – Transformação das Integrais de Forças de Domínio em Integral de Contorno

A primeira integral de domínio à direita que aparece em (3.44) representa a contribuição da carga transversal  $q(x)$  e a segunda integral de domínio à direita representa contribuição da reação do solo  $p(x)$ .

A primeira integral de domínio à direita pode ser transformada em integral de contorno para vários tipos de carregamento.

Neste trabalho, será considerado que a carga  $q(x)$  é um carregamento uniformemente distribuído.

Tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.58)$$

Considerando a equação de Poisson seguinte, para a qual  $v_i^*$  é uma solução:

$$v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (3.59)$$

e aplicando o teorema da divergência em (3.58), tem-se, sendo  $q(x) = q = \text{cte}$ :

$$I_i(\xi) = q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.60)$$

sendo, de acordo com Van der Weeën (1982a) e Karam (1986):

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128 \pi D} \left[ \delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + 2 (4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.61)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128 \pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left[ 32 (2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5) \right]$$

Seja o domínio da placa dividido em células, onde:

$\Gamma_c$  = contorno da célula  $c$

$\Omega_c$  = domínio da célula  $c$

$N_c$  = número total de células da placa

A segunda integral de domínio à direita em (3.44) pode ser escrita como uma soma de integrais sobre o domínio de cada célula e estas integrais podem ser transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

Tem-se:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^* (\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.62)$$

Considerando a equação de Poisson (3.59), pode-se escrever:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} p(x) \left[ v_{i,\alpha\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^* (\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.63)$$

Admitindo-se a divisão do domínio em células, tem-se:

$$II_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} p(x) \left[ v_{i,\alpha\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^* (\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.64)$$

Aplicando o teorema da divergência, tem-se, sendo  $p(x) = p = \text{cte}$ :

$$II_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_\alpha d\Gamma(x) \quad (3.65)$$

Assim, as equações (3.44) podem ser escritas como mostradas a seguir, contendo apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ u_{ij}^* (\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^* (\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\ &+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) - \\ &- \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.66) \end{aligned}$$

### 3.6 – Expressões para Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos

Os deslocamentos e esforços nos pontos internos também podem ser calculados através de equações integrais.

#### 3.6.1 – Deslocamentos

Os deslocamentos nos pontos internos são obtidos através da expressão (3.66) com  $c_{ij} = \delta_{ij}$ .

Tem-se, para um ponto interno  $\xi$  qualquer:

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} \left[ u_{ij}^* (\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^* (\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\
& + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) - \\
& - \sum_{c=1}^{N_c} p \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^* (\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu) \lambda^2} u_{i\alpha}^* (\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) \quad (3.67)
\end{aligned}$$

### 3.6.2 – Momentos e esforços cortantes

Os momentos e esforços cortantes nos pontos internos são calculados através das expressões (3.5) onde os deslocamentos e as derivadas de deslocamentos que nela aparecem são substituídas pelas expressões (3.67) e suas respectivas derivadas em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ .

Considerando (3.50) e (3.51), tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = - \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(x)} = - r_{,\alpha} \quad (3.68)$$

Conseqüentemente, de (3.56), (3.57) e (3.68), vem:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = - \lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2 A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_0 + K_1)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_{\alpha}(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r}$$

$$\frac{\partial r_n}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,n} - n_\alpha}{r} \quad (3.69)$$

Resultam, então, expressões da seguinte forma para os momentos e esforços cortantes:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \sum_{c=1}^{Nc} p \int_{\Gamma_c} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \\ & + \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 (q-p) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} Q_\alpha(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \sum_{c=1}^{Nc} p \int_{\Gamma_c} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Será mostrada a seguir, a determinação dos tensores  $u_{i\beta k}^*$ ,  $p_{i\beta k}^*$  e  $w_{i\beta}^*$ , considerando-se que são os termos que multiplicam, respectivamente, as forças de superfície  $p_k(x)$ , os deslocamentos  $u_k(x)$  e a carga distribuída  $q$  ou a reação do solo  $p$ , quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços.

a) Para  $u_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (3.72a)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha 3,\beta}^* + u_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} (u_{13,1}^* + u_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right)$$

Na expressão dos cortantes:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \quad (3.72b)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta 3}^* + u_{33,\beta}^*)$$

Considerando as expressões (3.48) e derivando em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta,\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left[ (4A + 4zK_1 + 1 - \nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2(8A + 2zK_1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + (4A + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right] \\ u_{\alpha 3,\beta}^* &= -u_{3\alpha,\beta}^* = -\frac{1}{8\pi D} \left[ \delta_{\alpha\beta} (2\ln z - 1) + 2 r_{,\beta} r_{,\alpha} \right] \\ u_{33,\alpha}^* &= \frac{-r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} \left[ (1-\nu) z^2 (2\ln z - 1) - 8 \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

A substituição de (3.48) e (3.73) em (3.72) fornece, após reagrupar-se os termos:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi r} \left[ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - \right. \\ &\quad \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right] \\ u_{\alpha\beta 3}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \end{aligned}$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - A r_{,\gamma} r_{,\beta}]$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta}$$

(3.74)

b) Para  $p_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha\gamma,\beta}^* + p_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{1\gamma,1}^* + p_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

(3.75a)

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha 3,\beta}^* + p_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{13,1}^* + u_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Na expressão dos cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma,\beta}^*)$$

(3.75b)

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta 3}^* + p_{33,\beta}^*)$$

Considerando as expressões (3.55) e derivando em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned} p_{\gamma\alpha,\beta}^* = & \frac{1}{4\pi r^2} \left[ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\gamma} n_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} n_{\gamma}) + \right. \\ & + (4A + 1 + \nu) \delta_{\gamma\beta} n_{\alpha} - 2 (8A + 4zK_1 + z^2 K_0 + 1 - \nu) * \\ & * (n_{\gamma} r_{,\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,n}) - 2 (8A + 2zK_1 + 1 - \nu) * \\ & * (n_{\beta} r_{,\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,n}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 (8A + 2zK_1 + 1 + \nu) n_\alpha r_{,\gamma} r_{,\beta} + \\
& + 4 (24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} ] \\
p_{\gamma 3, \beta}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left[ (zK_1 + A) r_{,\beta} n_\gamma + A r_{,\gamma} n_\beta - \right. \\
& \left. - (4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} + A \delta_{\gamma\beta} r_{,n} \right] \\
p_{3\alpha, \beta}^* &= \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} n_\alpha r_{,\beta} - 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + r_{,\alpha} n_\beta + \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right] \\
p_{33, \beta}^* &= \frac{1}{2\pi r^2} [n_\beta - 2 r_{,\beta} r_{,n}]
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Substituindo (3.55) e (3.76) em (3.75) são obtidas, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\alpha} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + \right. \\
& + (4A + 1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} n_\gamma - (16A + 6zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) * \\
& * \left[ (n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha}) r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha}) r_{,n} \right] - \\
& - 2 (8A + 2zK_1 + 1 + \nu) (\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_\gamma r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\
& \left. + 4 (24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \right\} \\
p_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + zK_1) (r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) - \right. \\
& \left. - 2 (4A + zK_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
p_{3\beta\gamma}^* &= -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + zK_1) (r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) + \right. \\
&\quad \left. + 2A n_{,\gamma} r_{,\beta} - 2(4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} \right] \\
p_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[ (z^2 B + 1) n_\beta - (z^2 A + 2) r_{,\beta} r_{,n} \right]
\end{aligned} \tag{3.77}$$

c) Para  $w_{i\beta}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha\beta}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left( u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \right) \right] n_\gamma \tag{3.78a}
\end{aligned}$$

Na expressão dos cortantes:

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[ v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \right] n_\gamma \tag{3.78b}$$

Considerando as expressões (3.72), podem-se escrever as expressões (3.78) como:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha\beta}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) \right] n_\gamma - \\
&\quad - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma
\end{aligned}$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[ v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* \right] n_\gamma - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.79)$$

Derivando-se as expressões (3.61) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$v_{\alpha,\beta\gamma}^* = -\frac{r}{64\pi D} \left\{ \left[ \delta_{\alpha\beta} (4\ln z - 3) + 4 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \eta_{,\gamma} + (4\ln z - 3) \left( \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} \right) \right\} \quad (3.80)$$

$$v_{3,\beta\gamma}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ \delta_{\gamma\beta} \left[ (4\ln z - 2) - \frac{z^2}{16} (1-\nu) (4\ln z - 5) \right] + r_{,\beta} r_{,\gamma} \left[ 4 - \frac{z^2}{8} (1-\nu) (4\ln z - 3) \right] \right\}$$

A substituição de (3.61) e (3.80) em (3.79) fornece, após reagrupar os termos:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \left\{ (4\ln z - 3) \left[ (1-\nu) (r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) + (1-3\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right] + 4 \left[ (1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \right] r_{,n} \right\} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.81)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} \left[ (2\ln z - 1) n_\beta + 2 r_{,\beta} r_{,n} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma$$

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

#### 4.1 – Introdução

Neste capítulo, são mostrados os procedimentos utilizados na implementação numérica, considerando a formulação do capítulo anterior. Para isto, as equações integrais são escritas em forma discretizada, a partir da consideração da discretização em elementos de contorno e células internas.

As integrações são efetuadas numericamente e monta-se um sistema de equações composto de três equações para cada ponto nodal do contorno, sendo uma para cada uma das três direções nodais generalizadas, e uma equação para cada ponto considerado nas células. Aplicando-se as condições de contorno, o sistema pode ser resolvido, encontrando-se todos os valores desconhecidos nos pontos nodais.

Mostram-se, ainda, as equações discretizadas que permitem o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

#### 4.2 – Discretização das Equações Integrais

A fim de se proceder a resolução numérica das equações integrais apresentadas no capítulo anterior, o contorno  $\Gamma$  da placa é dividido em elementos, cada um possuindo um contorno  $\Gamma_j$ . Além disso, o contorno  $\Gamma_c$  de cada célula é dividido em elementos de contorno  $\Gamma_{c_j}$ .

Neste trabalho são utilizados elementos quadráticos, podendo ser contínuos ou descontínuos e células internas triangulares constantes, como mostrado na Figura 4.1. Nos cantos da placa, podem ser considerados nós duplos.

##### 4.2.1 – Sistema de equações

A equação (3.66) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal  $\xi$  de  $\Gamma$ , substituindo-se as integrais em  $\Gamma$  por somatórios de integrais em  $\Gamma_j$ , sendo

$\Gamma_j$  o contorno do elemento  $j$ . Além disso, as integrais escritas para o contorno  $\Gamma_c$  de cada célula são substituídas por somatórios de integrais em  $\Gamma_{cj}$ .

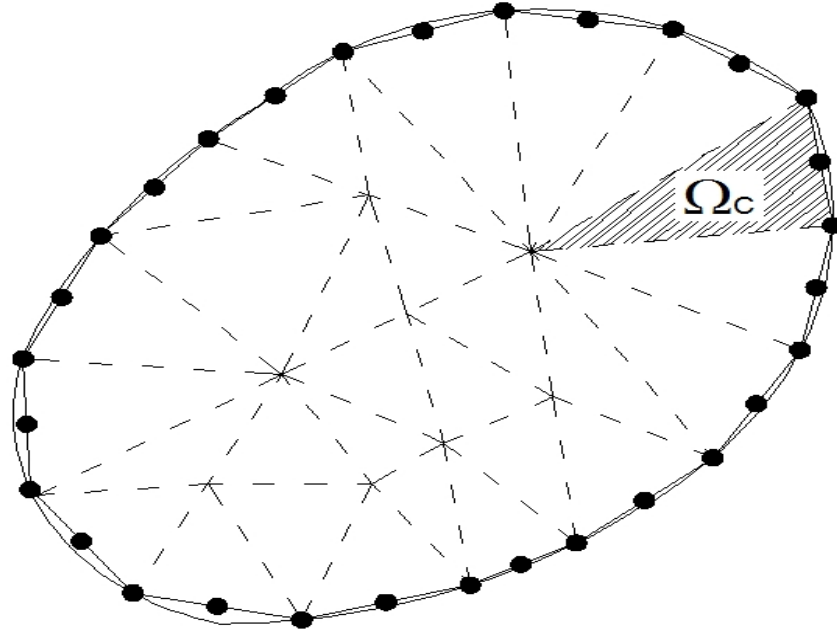


Figura 4.1 – Placa dividida em células internas

Para um ponto qualquer do elemento  $j$ , serão consideradas as expressões seguintes para interpolar os deslocamentos e forças de superfície em função dos valores nodais:

$$\mathbf{u}^j = \mathbf{N} \mathbf{u}^n \quad (4.1)$$

$$\mathbf{p}^j = \mathbf{N} \mathbf{p}^n$$

sendo:

$\mathbf{N}$  = matriz que contém as funções de interpolação

$\mathbf{u}^n$  e  $\mathbf{p}^n$  = vetores que contém as componentes dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento considerado

Admitindo o contorno  $\Gamma$  discretizado em elementos de contorno  $\Gamma_j$  e considerando a equação (4.1), a equação (3.66) pode ser escrita na seguinte forma discretizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{u}_i = & \sum_{j=1}^e \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{j=1}^e \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \\ & + \sum_{j=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} \left[ p \int_{\Gamma_{c_j}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

$\mathbf{C}_i$  = matriz cujos elementos são os  $c_{ij}$  que aparecem na equação (3.45)

$\mathbf{u}_i$  = vetor deslocamento do ponto fonte

$e$  = número de elementos do contorno

$\mathbf{U}_i^*$  e  $\mathbf{P}_i^*$  = matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente

$\mathbf{s}_i^*$  = vetor cujas componentes são expressadas por:

$$\mathbf{s}_k^* = \left( v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{k\alpha} \right) n_\alpha \quad (4.3)$$

$N_e$  = número de elementos no contorno de cada célula interna

$N_c$  = número total de células da placa

As funções de interpolação são escritas, em função de uma coordenada intrínseca adimensional  $\eta$  (ver item 4.3) e, portanto, torna-se necessário transformar a diferencial de contorno  $d\Gamma$  para esse sistema. Sendo  $|\mathbf{J}|$  o jacobiano da transformação, será usada a expressão:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.4)$$

Chamando:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.6)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \quad (4.7)$$

$$\mathbf{I}_{ij}^c = p \int_{\Gamma_{c,j}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \quad (4.8)$$

a equação (4.2) pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^e \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j - \sum_{j=1}^e \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^e \mathbf{b}_{ij} - \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{I}_{ij}^c \quad (4.9)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^e \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^e \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{j=1}^e \mathbf{b}_{ij} - \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{I}_{ij}^c \quad (4.10)$$

onde:

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} \text{ para } i \neq j \quad (4.11)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{C}_i \text{ para } i = j$$

No caso de integrais regulares (quando o ponto  $\xi$  não pertencente a  $\Gamma_j$ ), a integração numérica das expressões (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) foi resolvida através da quadratura de Gauss.

Deste modo, para  $\xi \notin \Gamma_j$ , a expressão (4.4) foi utilizada para substituir a diferencial do contorno e as integrais assim obtidas foram então substituídas por somatórios, como indicados nas seguintes expressões:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K \left( \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} \right)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K \left( \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} \right)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.13)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{s}_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K \left( \mathbf{s}_i^* \right)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.14)$$

$$\int_{\Gamma_{e,j}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{s}_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K \left( \mathbf{s}_i^* \right)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.15)$$

onde:

$K$  = número total de pontos de integração

$\omega_k$  = fator de peso associado a cada ponto de integração  $k$

Para o caso de integrais singulares, que ocorrem quando o ponto  $\xi$  pertence a  $\Gamma_j$ , estas integrais também são calculadas numericamente, porém, utilizam-se procedimentos especiais.

Escrevendo a equação (4.10) para todos os pontos nodais  $\xi$  do contorno, monta-se um sistema de equações, no qual o número total de equações é igual a três vezes o número de nós, da seguinte forma:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} + \mathbf{b} - \mathbf{l} \quad (4.16)$$

onde:

$\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  = vetores que contêm os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente

$\mathbf{b}$  = vetor que contém a parcela da carga distribuída

$\mathbf{l}$  = vetor que contém a parcela da reação do solo

$\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  = matrizes que contêm as integrais sobre os elementos de contorno

Vale ressaltar que, nos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$ , deve-se ter, para cada direção nodal, um dos dois valores como incógnita e o outro prescrito. Cabe observar ainda que, na matriz  $\mathbf{H}$  está incluída a parcela que contém o termo  $c_{ij}$ .

O sistema representado pela equação (4.16) poderia ser resolvido se as incógnitas fossem apenas deslocamentos e forças de superfície no contorno. Como as forças de reação da base elástica também são incógnitas, equações adicionais a este sistema são necessárias. Serão, então, consideradas as equações dos deslocamentos transversais dos pontos situados nos centros geométricos das células.

Aplicando a terceira das equações (3.66) a todos os pontos considerados nas células em que existe o contato com a fundação elástica, tem-se, após a discretização:

$$\mathbf{I} \mathbf{u}_i + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i + \mathbf{b}_i - \mathbf{l}_i \quad (4.17)$$

onde o índice  $i$  indica que os vetores e matrizes correspondentes referem-se aos pontos internos.

Agrupando as equações (4.16) e (4.17) em um sistema único, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{H}}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{ri} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Considerando  $p_r = k u_3$  as componentes de  $\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_r \end{Bmatrix}$  e sendo  $u_3$  incógnita,

tem-se a seguinte forma para o sistema de equações:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} + \mathbf{s}_r \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{H}}_i & \mathbf{I} + \mathbf{s}_{ri} \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Reordenando o sistema de equações dado em (4.19) e colocando-se todas as incógnitas num único vetor  $\mathbf{x}$  e todos os valores conhecidos num vetor  $\mathbf{f}$ , obtém-se um sistema na forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (4.20)$$

onde:

$\mathbf{A}$  = matriz do sistema, cheia e não-simétrica

$\mathbf{x}$  = vetor que contém as incógnitas (deslocamentos ou forças de superfície em cada direção nodal generalizada)

$\mathbf{f}$  = vetor que contém os valores conhecidos

O sistema (4.20) é resolvido, sendo, assim, obtidos os valores dos deslocamentos e forças de superfície incógnitos.

#### 4.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos

Analogamente ao que foi feito quando da discretização da equação (3.66), discretiza-se a equação (3.67) ao longo do contorno a fim de se proceder ao cálculo dos deslocamentos nos pontos internos.

Então, para cada ponto  $\xi_i$  do interior da região  $\Omega$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_{kj}} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] - \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{N_e} \left[ p \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

### 4.2.3 – Momentos e esforços cortantes nos pontos internos

As expressões dos momentos e dos esforços cortantes nos pontos internos na forma discretizada são obtidas a partir das equações (3.70) e (3.71).

Assim, para cada ponto interno  $\xi_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^{*'} \mathbf{N} \, d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}_i^{*'} \mathbf{N} \, d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{W}_i^{*'} \, d\Gamma \right] - \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Ne} \left[ p \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{W}_i^{*'} \, d\Gamma \right] + \frac{(q-p) \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu) \lambda^2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^{*''} \mathbf{N} \, d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}_i^{*''} \mathbf{N} \, d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \\ & + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{W}_i^{*''} \, d\Gamma \right] - \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Ne} \left[ p \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{W}_i^{*''} \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{U}_i^{*'}$ ,  $\mathbf{U}_i^{*''}$ ,  $\mathbf{P}_i^{*'}$ ,  $\mathbf{P}_i^{*''}$ ,  $\mathbf{W}_i^{*'}$  e  $\mathbf{W}_i^{*''}$  são matrizes que contêm os tensores apresentados anteriormente.

## 4.3 – Elementos de Contorno

Neste trabalho, é utilizado o elemento quadrático, contínuo ou descontínuo.

### 4.3.1 – Elemento quadrático contínuo

Um elemento é contínuo quando os pontos nodais são comuns entre os elementos adjacentes, havendo continuidade das funções envolvidas nesses pontos.

As funções de interpolação, dadas em função da coordenada adimensional  $\eta$  são:

$$N_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1)$$

$$N_2 = (1 - \eta) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1)$$

(4.24)

e possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois.

#### 4.3.2 – Elemento quadrático descontínuo

No elemento descontínuo, existem pontos nodais afastados das extremidades do elemento e, portanto, não há continuidade das funções envolvidas entre elementos adjacentes. Este elemento permite a modelagem de contorno onde existem descontinuidades de forças de superfície ou de geometria, ou seja, quando há descontinuidade da normal e as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes.

Suas funções de interpolação são:

$$N_1 = \frac{l\eta(l\eta - l + 2b)}{2(l - a - b)(l - 2a)}$$

$$N_2 = \frac{l\eta(2(a - b) - l\eta)}{(l - 2a)(l - 2b)} + 1$$

$$N_3 = \frac{l\eta(l\eta + l - 2a)}{2(l - a - b)(l - 2b)}$$

(4.25)

onde:

$l$  = comprimento total do elemento

$a$  = afastamento do primeiro nó do elemento à extremidade

$b$  = afastamento do último nó do elemento à extremidade

#### **4.4 – Nó Duplo**

O nó duplo é utilizado quando, em uma determinada direção nodal generalizada do ponto de interseção de dois elementos onde exista descontinuidade da normal ou da condição de contorno, as forças de superfície são conhecidas nos dois elementos adjacentes ou o deslocamento é conhecido num elemento e a força de superfície é conhecida no outro. Considera-se como se houvesse dois pontos nodais no mesmo ponto geométrico, cada um pertencendo a um elemento diferente.

## CAPÍTULO 5

### APLICAÇÕES

#### 5.1 – Introdução

Neste capítulo, são apresentados três exemplos numéricos utilizando o Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de flexão de placas de Reissner e ao modelo de fundação de Winkler, objetivando mostrar a validade da formulação desenvolvida.

Os resultados são comparados com resultados de outros trabalhos e com a solução analítica.

#### 5.2 – Exemplo 1: Placa Quadrada Simplesmente Apoiada

Analisa-se uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e, em seu domínio, apoiada numa base elástica, conforme indica a Figura 5.1, submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída  $q$ . Nesta análise, considera-se que a placa tem lado  $a$ ,  $h/a = 0,05$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e módulo de reação do solo  $kD/a^4 = 50D/a^4$ .

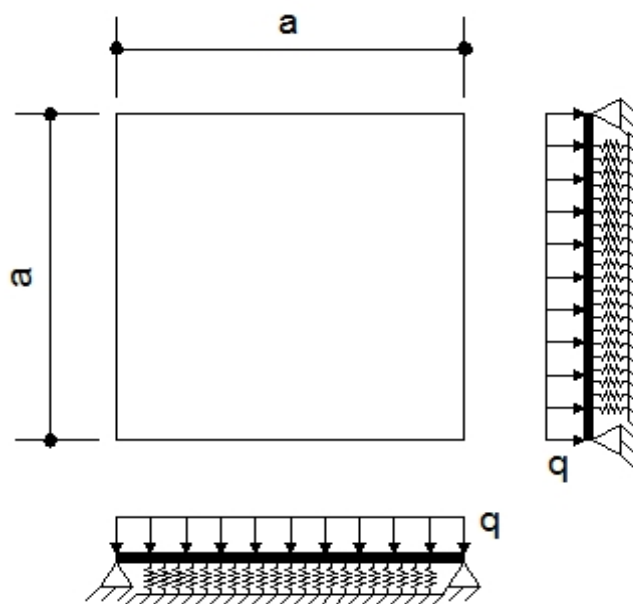


Figura 5.1 – Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno

Devido à simetria existente, discretizou-se apenas a quarta parte da placa. A primeira discretização consiste em 8 elementos de contorno quadráticos e em 16 células internas triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.2a.

Na segunda discretização, utilizaram-se 16 elementos de contorno quadráticos e 32 células internas triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.2b.

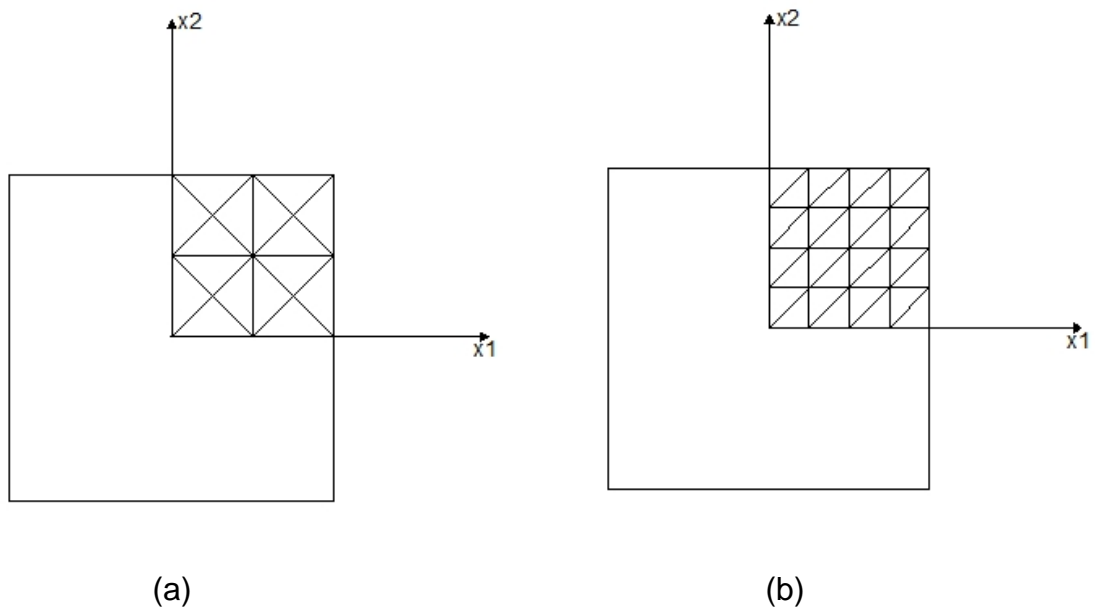


Figura 5.2 – Placa quadrada: discretizações do contorno e do domínio

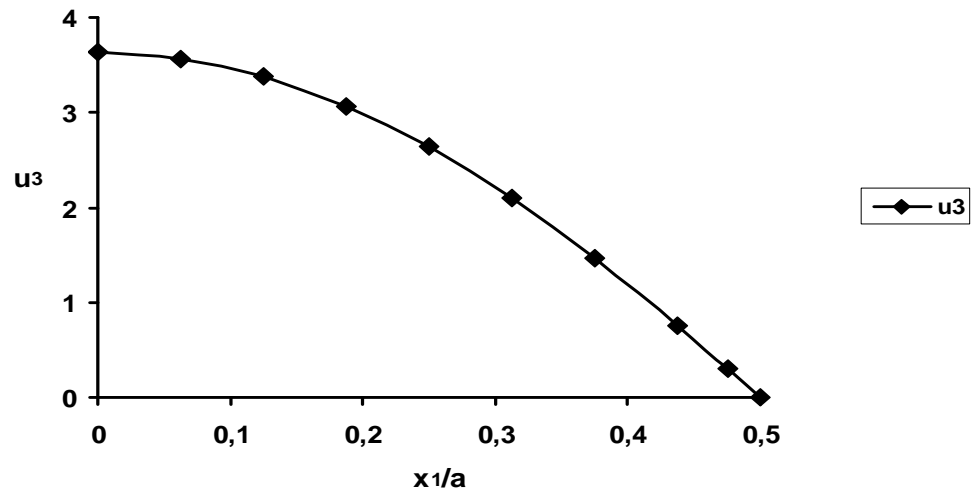
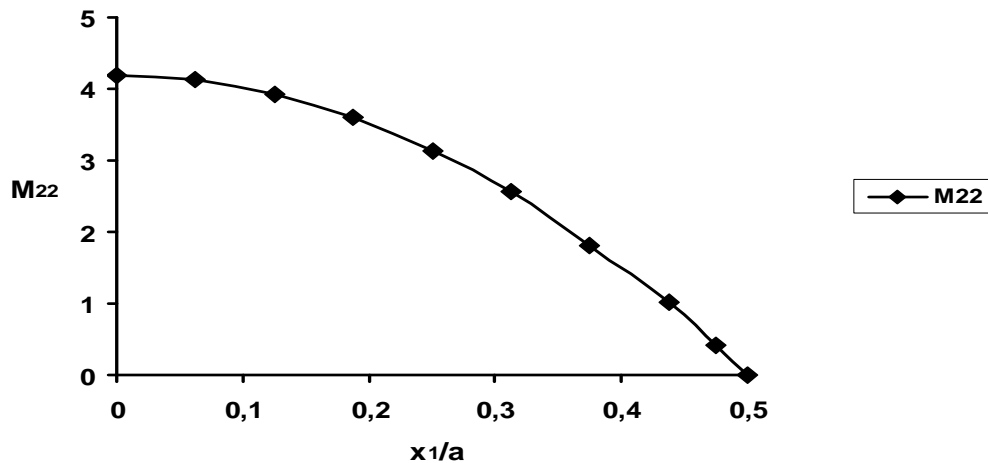
Na Tabela 5.1, estão indicados os resultados obtidos com essas duas discretizações, assim como os resultados obtidos por Paiva (1989). Os deslocamentos transversais estão escritos em função dos fatores adimensionais  $u_3 D 10^3 / qa^4$  e os momentos, em função de  $M_{11} 10^2 / qa^2$  e  $M_{22} 10^2 / qa^2$ . Os valores adimensionais encontrados no presente trabalho para o ponto situado no centro da placa para o deslocamento transversal  $u_3$  e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  estão em excelente concordância com os obtidos por Paiva (1989) e com resultados obtidos pelo MEF e também apresentados em Paiva (1989).

O número de células indicado na Tabela 5.1 para cada malha do presente trabalho está multiplicado por quatro, para se fazer a correspondência com o número de células considerados nas referências para a placa inteira.

Tabela 5.1 – Resultados para a placa quadrada simplesmente apoiada no contorno

Deslocamentos e momentos fletores	Paiva (1989) 50 células	Presente trabalho 64 células	Presente trabalho 128 células	MEF 576 elementos
$u_3 D 10^3 / qa^4$	3,607	3,635	3,630	3,589
$M_{11} 10^2 / qa^2$	4,211	4,134	4,184	4,185
$M_{22} 10^2 / qa^2$	4,211	4,134	4,184	4,185

Nas Figuras 5.3 e 5.4, estão indicadas, respectivamente, as variações da flecha e do momento fletor  $M_{22}$  ao longo do eixo  $x_1$ , correspondentes à discretização em 32 células.

Figura 5.3 – Placa quadrada: deslocamento transversal  $u_3$  ao longo do eixo  $x_1$ Figura 5.4 – Placa quadrada: momento fletor  $M_{22}$  ao longo do eixo  $x_1$

Este exemplo foi também analisado com o valor do módulo de reação do solo  $kD/a^4 = 200D/a^4$ , utilizando as mesmas discretizações.

Na Tabela 5.2, estão indicados os resultados obtidos considerando as duas discretizações, assim como os resultados obtidos por Jianguo et al. (1993), que considerou a análise de placas sobre base elástica pelo MEC com a teoria de Reissner, e resultados analíticos. Nesta tabela, são apresentados resultados da solução analítica para este problema pela teoria de Kirchhoff obtidos de Timoshenko (1970) e apresentados em Jianguo et al. (1993) e, também, resultados da solução analítica pela teoria de Reissner obtidos de Frederick (1957) e apresentados em Rashed et al. (1998). Os deslocamentos transversais estão escritos em função dos fatores adimensionais  $u_3 D 10^3 / qa^4$  e os momentos, em função de  $M_{11} 10^2 / qa^2$  e  $M_{22} 10^2 / qa^2$ .

Tabela 5.2 – Resultados para a placa quadrada simplesmente apoiada no contorno

Deslocamentos e momentos fletores	Número de elementos de contorno			Solução Analítica pela teoria de Kirchhoff	Solução Analítica pela teoria de Reissner
	Jianguo et al. (1993) 32	Presente trabalho 16	Presente trabalho 32		
$u_3 D 10^3 / qa^4$	2,658	2,688	2,683	2,653	2,670
$M_{11} 10^2 / qa^2$	2,962	2,958	2,994	2,992	---
$M_{22} 10^2 / qa^2$	2,962	2,958	2,994	2,992	---

Os valores adimensionais encontrados no presente trabalho para o ponto situado no centro da placa para o deslocamento transversal  $u_3$  e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  estão em excelente concordância com os obtidos por Jianguo et al. (1993) e com resultados das soluções analíticas, calculados pelas teorias de Kirchhoff e de Reissner.

Nas Figuras 5.5 e 5.6, estão indicadas, respectivamente, as variações da flecha e do momento fletor  $M_{22}$  ao longo do eixo  $x_1$ , correspondentes à discretização em 32 células.



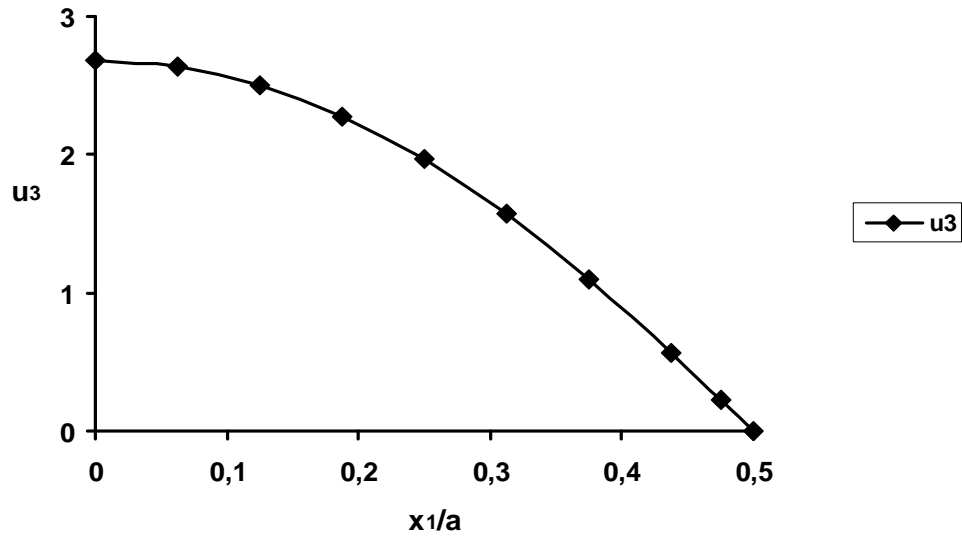


Figura 5.5 – Placa quadrada: deslocamento transversal  $u_3$  ao longo do eixo  $x_1$

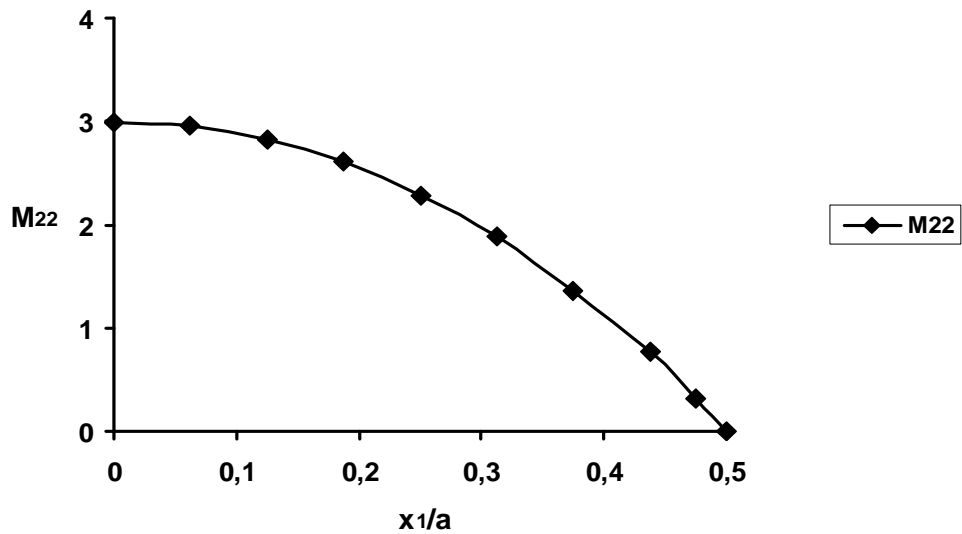


Figura 5.6 – Placa quadrada: momento fletor  $M_{22}$  ao longo do eixo  $x_1$

### 5.3 – Exemplo 2: Placa Circular Engastada

Neste exemplo, analisa-se uma placa circular engastada no contorno e, em seu domínio, apoiada numa base elástica, sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído  $q$ . Esta placa é considerada com raio  $a$ ,  $h/a = 0,1$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e módulo de reação do solo  $kD/a^4 = 20D/a^4$ .

Primeiramente, discretizou-se a quarta parte da placa em 16 elementos de contorno quadráticos e 32 células internas triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.7a.

Na segunda discretização, também considerando a quarta parte da placa, utilizaram-se 20 elementos de contorno quadráticos e 50 células internas triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.7b.

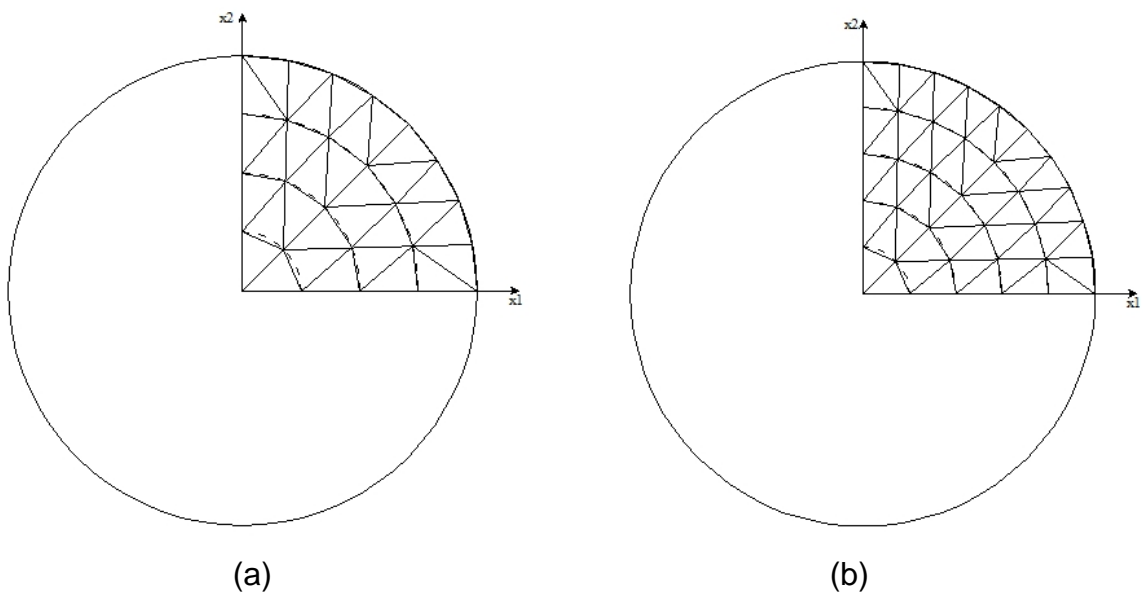


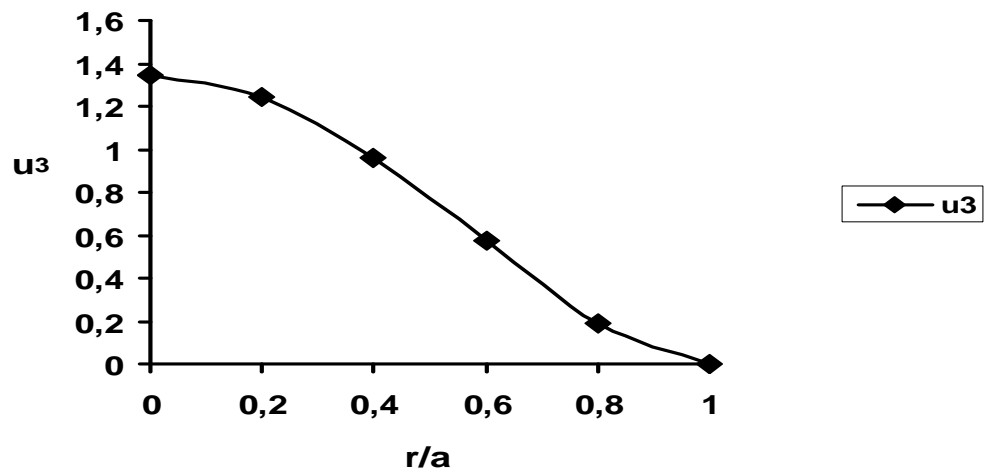
Figura 5.7 – Placa circular: discretizações do contorno e do domínio

Na Tabela 5.3, estão indicados os resultados obtidos com essas duas discretizações, assim como os resultados obtidos por Rashed et al. (1998), que utilizou uma discretização em 16 elementos de contorno quadráticos para todo o contorno da placa, e os resultados da solução analítica pela teoria de Kirchhoff, obtidos a partir de Ng (1969) e apresentados em Costa e Brebbia (1985) e Jianguo et al. (1993). Os deslocamentos transversais estão escritos em função dos fatores  $u_3 D 10^3 / qa^4$  e os momentos, em função de  $M_{11} 10^2 / qa^2$  e  $M_{22} 10^2 / qa^2$ . Observa-se que os valores adimensionais encontrados no presente trabalho no ponto situado no centro da placa para o deslocamento transversal  $u_3$  e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  estão em excelente concordância com os obtidos por Rashed et al. (1998), que utilizou uma discretização com 16 elementos de contorno na placa inteira e com os resultados da solução analítica.

Tabela 5.3 – Resultados para a placa circular engastada no contorno

Deslocamentos e momentos fletores	Número de elementos de contorno			Solução Analítica
	Rashed et al. (1998)	Presente trabalho	Presente trabalho	
	16	16	20	
$u_3 D 10^3 / qa^4$	1,347	1,339	1,343	1,301
$M_{11} 10^2 / qa^2$	6,525	6,500	6,519	6,590
$M_{22} 10^2 / qa^2$	6,525	6,500	6,519	6,590

Nas Figuras 5.8 e 5.9, estão indicadas as variações da flecha e dos momentos fletores  $M_{rr} 10^2 / qa^2$  e  $M_{tt} 10^2 / qa^2$ , sendo  $r$  e  $t$  os eixos nas direções radial e tangencial, respectivamente, calculadas ao longo de um raio  $a$  a um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x_1$ , considerando a discretização em 50 células.

Figura 5.8 – Placa circular: deslocamento transversal  $u_3$

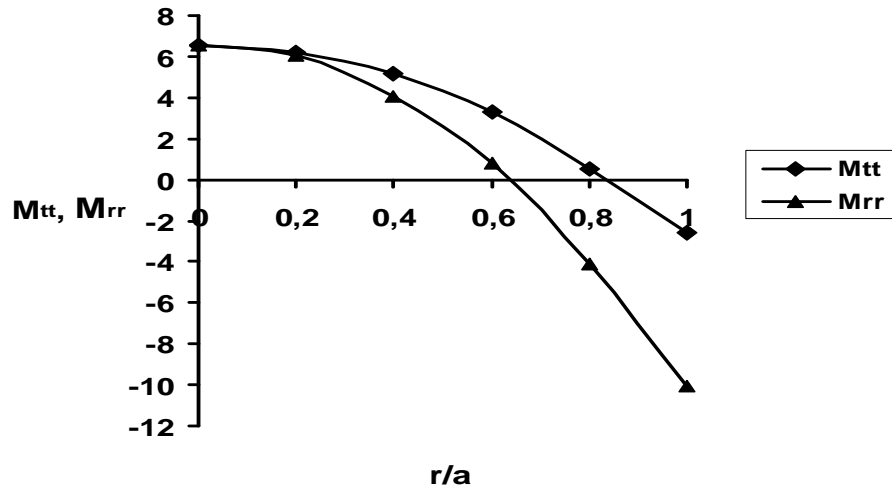


Figura 5.9 – Placa circular: momentos fletores  $M_{rr}$  e  $M_{tt}$

### 5.4 – Exemplo 3: Placa Retangular Simplesmente Apoiada

Analisa-se uma placa retangular simplesmente apoiada no contorno e, em seu domínio, apoiada total ou parcialmente em base elástica, com diferentes valores do módulo  $k$  em duas diferentes regiões do domínio, podendo, inclusive, ter regiões que não estejam sobre base elástica. Nesta análise, considera-se uma carga transversal uniforme  $q$  em todo o domínio,  $h/a = 0,05$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e módulos de reação do solo  $k_A D/a^4$  e  $k_B D/a^4$ , respectivamente, para as regiões A e B indicadas na Figura 5.10.

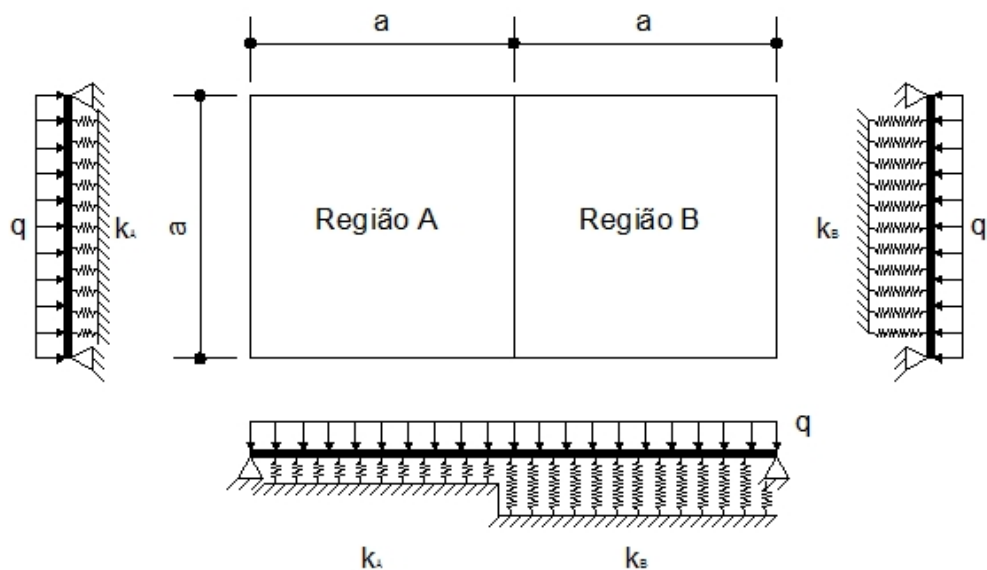
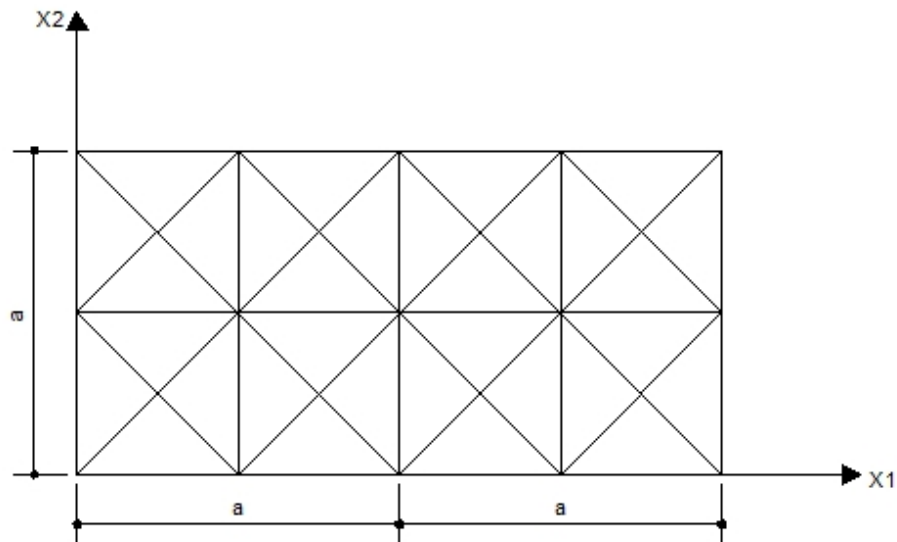


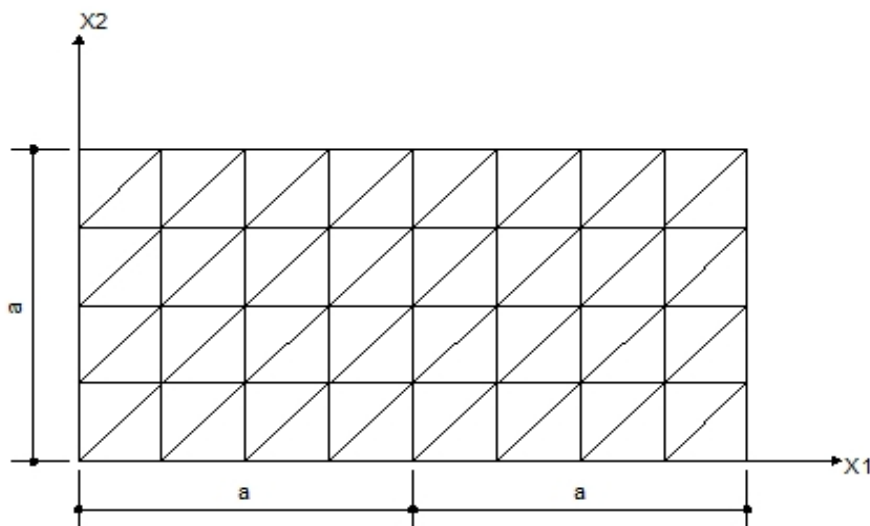
Figura 5.10 – Placa retangular simplesmente apoiada no contorno

Primeiramente, considerou-se  $k_A = 100$  e  $k_B = 200$  e a placa foi discretizada em 12 elementos de contorno quadráticos e 32 células internas triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.11a.

Na segunda discretização, também considerando  $k_A = 100$  e  $k_B = 200$ , utilizaram-se 24 elementos de contorno quadráticos e 64 células triangulares constantes, conforme indica a Figura 5.11b.



(a)



(b)

Figura 5.11 – Placa retangular: discretizações do contorno e do domínio

Na Figura 5.12, estão indicadas as variações da flecha  $e$ , nas Figuras 5.13 e 5.14, as variações dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$ , respectivamente, calculados ao longo da reta  $x_2 = a/2$ , considerando a discretização em 64 células, assim como os resultados obtidos por Paiva (1989) e pelo MEF. Os deslocamentos transversais estão escritos em função dos fatores  $u_3 D 10^3 / qa^4$  e os momentos, em função de  $M_{11} 10^2 / qa^2$  e  $M_{22} 10^2 / qa^2$ . Observa-se que os valores adimensionais encontrados no presente trabalho para o deslocamento transversal  $u_3$  e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  estão em excelente concordância com os obtidos por Paiva (1989) que utilizou uma discretização com 48 células e com resultados obtidos pelo MEF e também apresentados em Paiva (1989).

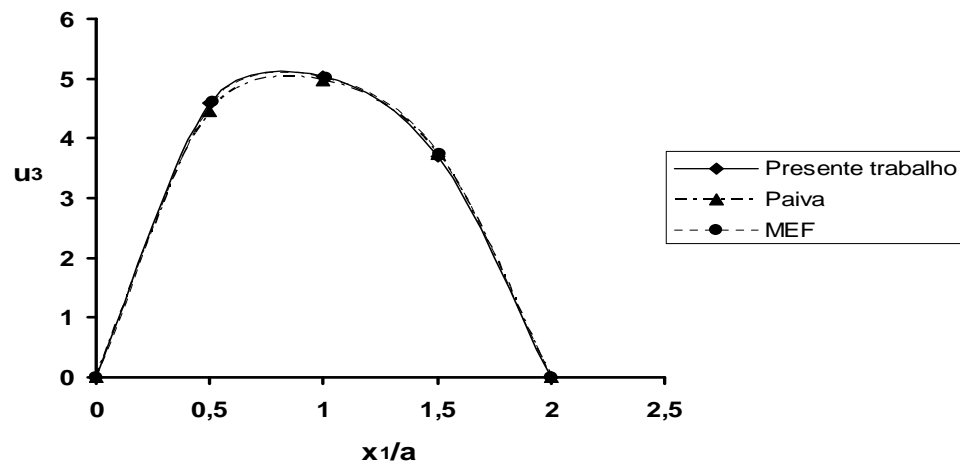


Figura 5.12 – Placa retangular: deslocamento  $u_3$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 100$  e  $k_B = 200$

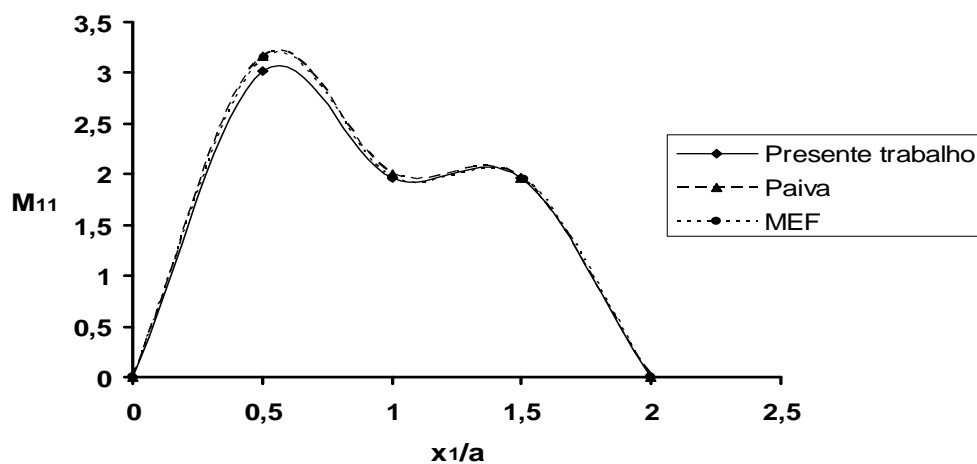


Figura 5.13 – Placa retangular: momento  $M_{11}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 100$  e  $k_B = 200$

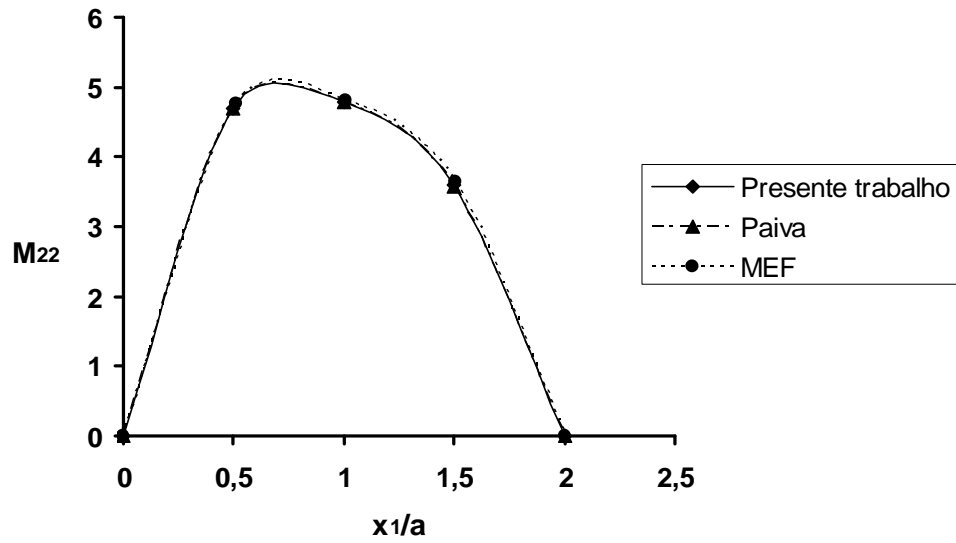
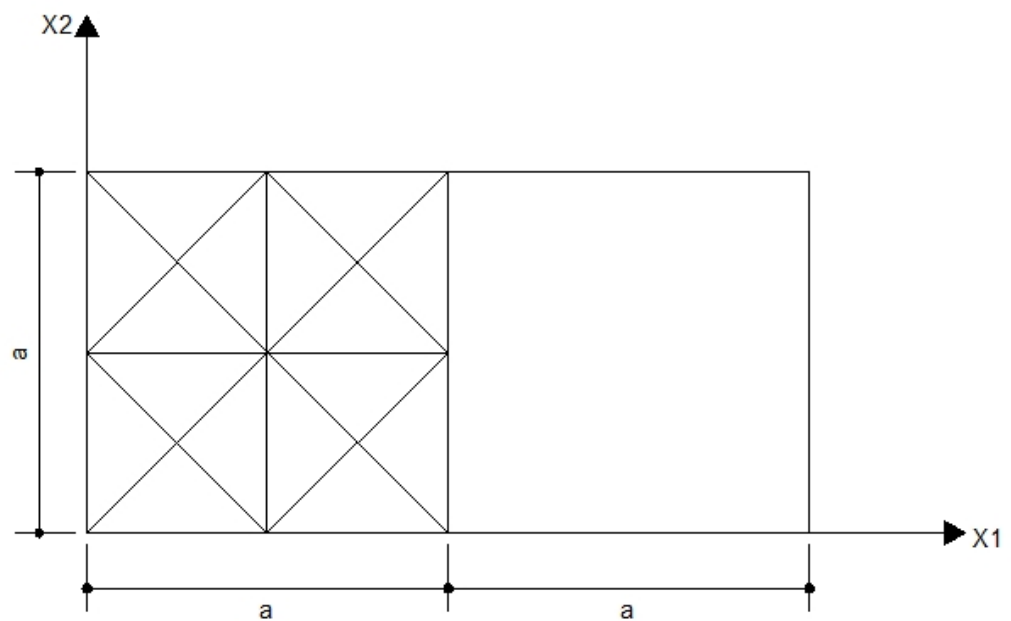


Figura 5.14 – Placa retangular: momento  $M_{22}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 100$  e  $k_B = 200$

Este exemplo também foi analisado para  $k_A = 200$  e  $k_B = 0$ , utilizando as discretizações indicadas nas Figuras 5.15.



(a)

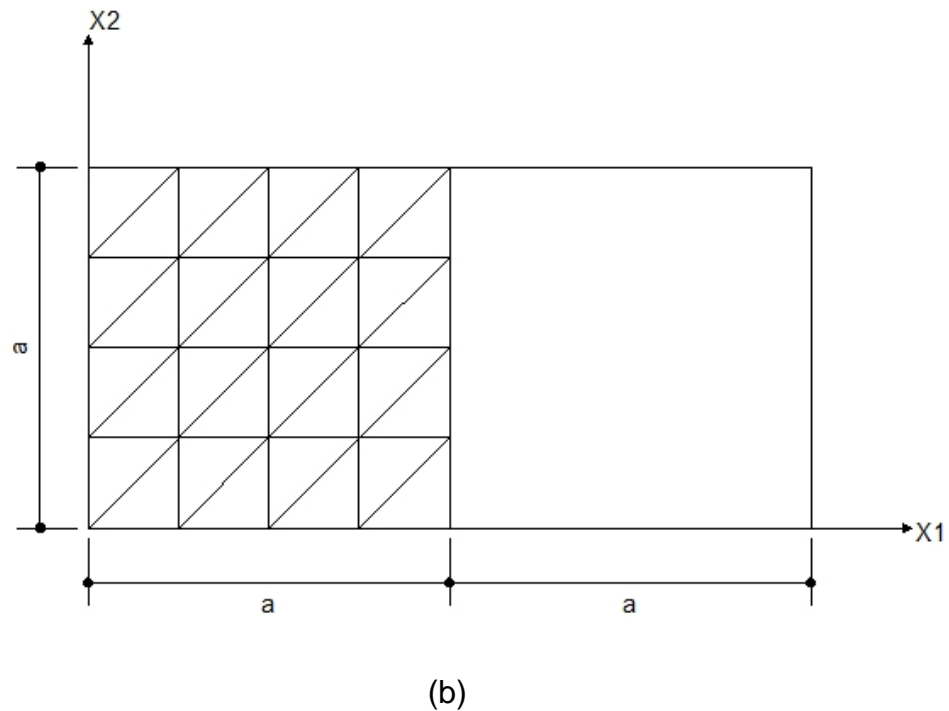


Figura 5.15 – Placa retangular: discretizações do contorno e do domínio

Na Figura 5.16, estão indicadas as variações da flecha  $e$ , nas Figuras 5.17 e 5.18, dos momentos fletores  $M_{11}$  e  $M_{22}$  calculados ao longo da reta  $x_2 = a/2$ , considerando a discretização em 64 células, assim como os resultados obtidos por Paiva (1989) e pelo MEF. Os resultados de Paiva (1989) são para uma discretização da base elástica em 24 células e os do MEF para uma discretização da metade da placa em 144 elementos triangulares. Observa-se que os deslocamentos transversais estão escritos em função dos fatores  $u_3 D 10^3 / qa^4$  e os momentos, em função de  $M_{11} 10^2 / qa^2$  e  $M_{22} 10^2 / qa^2$ . Observa-se, ainda, que os valores adimensionais encontrados no presente trabalho para o deslocamento transversal  $u_3$  e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  estão em excelente concordância com os obtidos por Paiva (1989) e com resultados obtidos pelo MEF e também apresentados em Paiva (1989).



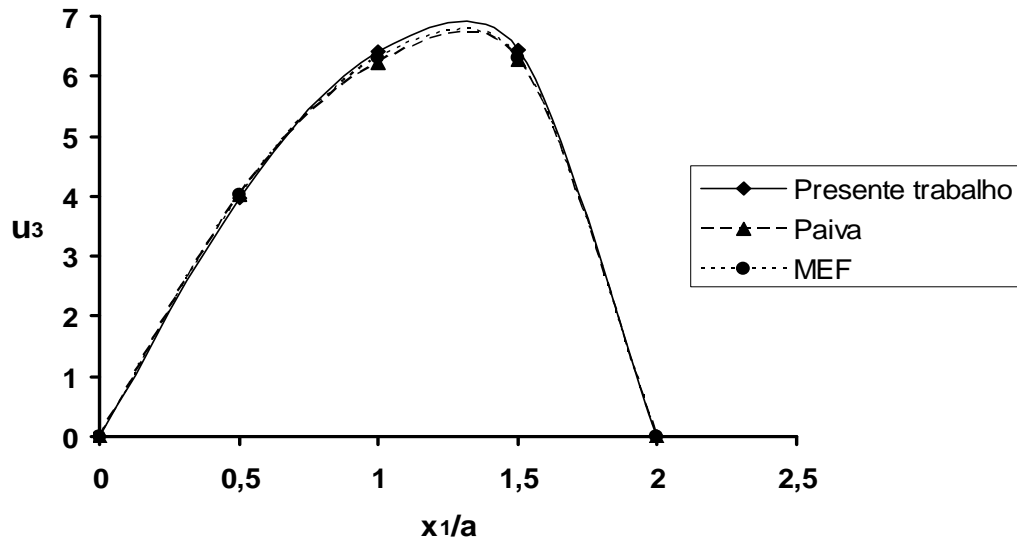


Figura 5.16 – Placa retangular: deslocamento  $u_3$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 200$  e  $k_B = 0$

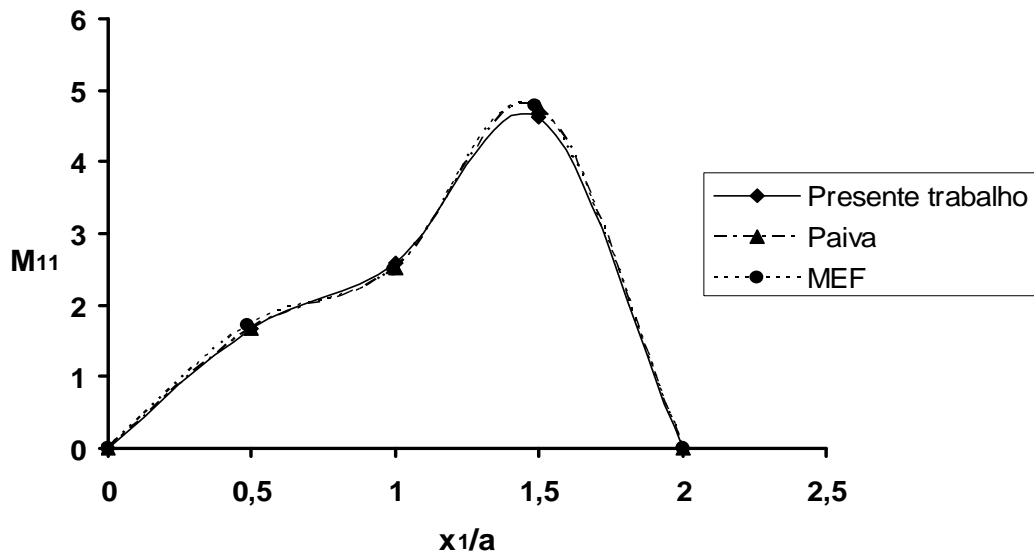


Figura 5.17 – Placa retangular: momento  $M_{11}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 200$  e  $k_B = 0$

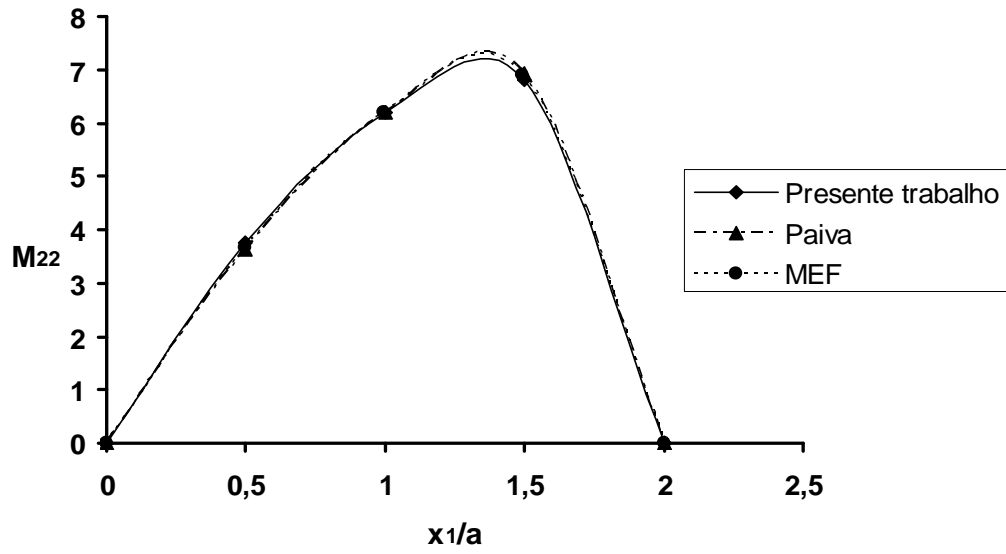


Figura 5.18 – Placa retangular: momento  $M_{22}$  ao longo da reta  $x_2 = a/2$  para  $k_A = 200$  e  $k_B = 0$

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi a análise de flexão de placas utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de Reissner e ao modelo de fundação de Winkler.

A reação do solo foi incorporada nas equações da teoria de Reissner e, conseqüentemente, nas equações integrais usadas para análise pelo MEC. Adotou-se a mesma solução fundamental empregada em trabalhos anteriores para análise de placas de Reissner pelo MEC.

O domínio da placa situado sobre a base elástica foi considerado dividido em células e as integrais de domínio correspondentes às forças de reação da fundação foram transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

Como as forças de reação da base elástica acrescentam incógnitas ao sistema de equações original e são expressas em função dos deslocamentos transversais, foram consideradas equações adicionais ao sistema, constituídas pelas equações dos deslocamentos transversais de pontos das células.

Esta divisão do domínio em células permite a consideração de valores diferentes do módulo de fundação em diferentes regiões do domínio.

Comparando-se os resultados obtidos com os de Paiva (1989) e Rashed et al (1998), pode-se verificar que os resultados do presente trabalho apresentaram-se bem próximos dos obtidos pelos autores citados, mostrando a validade da formulação desenvolvida.

Em continuação a este trabalho, sugere-se:

- consideração de células com funções lineares ou quadráticas;
- consideração de outros tipos de carregamento transversal, além do uniformemente distribuído;
- consideração de interação solo-estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., Stegun I.A. (1965) *Handbook of Mathematical Functions* – Dover Publications, New York, 1046p.
- Almeida, V. S. (2003) *Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo – USP, 192p.
- Auatt, S. S. M. (2002) *Análise de Flexão de Placas pelo MEC Considerando Elastoplasticidade com Multicamadas e Contato Unilateral*, Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, 122p.
- Barbirato, J.C.C. (1999) *Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do faturamento*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo – USP, 245p.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. (1984) *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 464p.
- Costa Jr, J. A., Brebbia, C. A. (1985) The Boundary Element Method applied to plates on elastic foundation. *Engineering Analysis*. 174-183.
- Fadhil, S., El-Zafrany, A. (1994) Boundary Element Analysis of thick Reissner plates on two-parameter foundation. *International Journal of Solids and Structures*. 31(22): 2901-2917.
- Fadhil, S., El-Zafrany, A. (1995) A new fundamental Solution for Boundary Element Analysis of thin plates on a Winkler Foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38: 887-903.

- Jianguo, W. J., Xiuxi, W., Maokuang, H. (1993). (1992 A Boundary Integral Equation F-ormulation for thick plates on a Winkler foundation. *Computers & Structures*. 49: 179-185.
- Karam, V. J. (1986) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno á Teoria de Reissner para flexão de placas*. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 142p.
- Karam, V.J., Telles, J. C. F. (1988) On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory. *Engineering Analysis*. 5 (1): 21-27.
- Karam, V. J. (1992) *Análise de flexão de placas pelo MEC incluindo não-linearidade física*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 158p.
- Karam, V. J., Auatt, S. S. M. (2003) Boundary Elements for the Analysis of Plates with Supports Inside the Domain Using Reissner's Theory, *XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Ouro Preto, MG, p. 1-9.
- Mendonça, A. V., Paiva, J. B. de (2000) A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. p. 237-247.
- Ng, S. S. F. (1969) Influence of elastic support on the behaviour of clamped plates, developments in mechanics. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> Midwestern Mechanics Conference*. 5: 343 – 371.
- Paiva, J. B. (1989) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à análise de placas apoiadas em base elástica*. *II Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, Portugal. p. A47 – A59.

- Paiva, J. B., Venturini, W.S. (1985) Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis. *First Boundary Element Technology Conference*, Austrália. p. 201-209.
- Paiva, J. B., Butterfield, R. (1997) Boundary Element Analysis of plate–soil interaction. *Computers & Structures*. 64: 319-328.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. (1998) The boundary element for thick plates on a Winkler foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. p. 1435-1462.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. (1999) A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation. *Computers & Structures*. p. 515-532.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H. (2000) Boundary element analysis of foundation plates in buildings. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. p. 201-206.
- Rashed, Y. F. (2005) A boundary/domain element method for analysis of building raft foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. p. 859-877.
- Reissner, E. (1945) The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 12: A69-A77
- Sapountzakis, E. J., Katsikadelis, J. T. (1992) Unilaterally Supported Plates on Elastic Foundations by the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*. p. 580-586.
- Silva, N. A., Venturini, W. S. (1990) Aplicação do MEC a análise de placas com vinculação interna utilizando a Teoria de Reissner. *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Rio de Janeiro. 2: 925-934.

- Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger (1970) *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 580p.
- Van der Weeën, F. (1982a) Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 18: 1-10.
- Van der Weeën, F. (1982b) Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. *Boundary Elements in Engineering*. p. 487-499.
- Winkler, E. (1867) *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Dominicus, Prague, 182p.