

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL EM CONCRETO REFORÇADO COM
FIBRAS DE AÇO**

RICARDO SCHWAN MOREIRA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO

CAMPOS DOS GOYTACAZES

DEZEMBRO - 2003

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL EM CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

RICARDO SCHWAN MOREIRA

Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Jean Marie Désir

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
DEZEMBRO - 2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do CCT / UENF

05/2004

Moreira, Ricardo Schwan

Simulação computacional em concreto reforçado com fibra de aço / Ricardo Schwan Moreira. – Campos dos Goytacazes, 2004.

67 f. : il.

Orientador: Jean Marie Désir

Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia Civil. Campos dos Goytacazes, 2003.

Área de concentração: Estruturas.

Bibliografia: f. 63-67

1. Modelagem Numérica 2. Propagação das Fraturas 3. Fissuração 4. Materiais Compósitos 5. Reforço com Fibras

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL EM CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

RICARDO SCHWAN MOREIRA

Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada em 19 de dezembro de 2003

Comissão Examinadora

Prof. Flávio de Souza Barbosa (D. Sc.) - UFJF

Prof. Sergio Luis Gonzalez Garcia (D. Sc.) - UENF

Prof. Vânia José Karam (D. Sc.) - UENF

Prof. Jean Marie Désir (D. Sc.) - UENF

Orientador

A Deus,
meus pais,
minha família e
meus amigos.

Agradecimentos

A Deus, por todas as bênçãos proporcionadas para a realização deste trabalho.

A meus pais e minha família, que mesmo à distância deram toda a força e incentivo para o desenvolvimento dessa dissertação.

A Jean Marie Désir, pela orientação e acima de tudo pela amizade conquistada durante os anos.

Aos professores Aldo Durand Fáfán, Sergio Luis Gonzales Garcia, Vânia José Karam, Flávio de Souza Barbosa, pelas valiosas dicas e sugestões para a melhoria deste trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Engenharia Civil: Bruno, Elaine, Gabriel, Gustavão, Jarbas, Leandro, Léo, Marcos Vinícios, Mário, Victor e Willisses; pela amizade e pelo excelente convívio no ambiente de trabalho.

Aos amigos: Adilson, Aline, Amanda, André, Aperibé, Arroz, Brex, Brother, Capilé, Carlão, Cerrone, Clo, Douglas, Fabiana, Guedes, Hudson, Ivanzinho, Jean, Jofre, Jovem, Juliano, Marcinho, Max, Moreno, Querido, Simpson, Serjão, Thiago, Tot e Wendell, por todos os maravilhosos momentos compartilhados em minha vida.

Aos técnicos, funcionários e demais professores do Laboratório de Engenharia Civil, que desde a graduação colaboraram com meu engrandecimento intelectual e humano.

Aos anônimos, pela ajuda, seja de uma forma ou de outra.

À CAPES e a UENF pelo suporte financeiro deste trabalho.

As pessoas importantes que passaram, estão e sempre estarão presentes em minha vida, por me fazer ser uma pessoa cada vez melhor.

Sumário

Lista de Figuras	III
Lista de Tabelas	V
Resumo	VI
Abstract	VII
1) Introdução	1
1.1) Concreto reforçado com fibras	1
1.2) Modelos probabilísticos	5
1.3) Proposta de implementação	7
1.4) Organização do trabalho	8
2) Propriedades do concreto	9
2.1) Módulo de elasticidade	9
2.2) Resistência à tração	11
3) Mecânica da fratura	14
3.1) Histórico	14
3.2) Teorias lineares	14
3.3) Teorias não-lineares	16
3.4) Fratura de materiais quase-frágeis	18
3.5) Aspectos Mecânicos	18
4) Modelo de fissuração probabilística do concreto	20
4.1) Introdução	20
4.2) Histórico da investigação do comportamento mecânico	20
4.3) Preparação do problema	21
4.4) Geração das propriedades aleatórias	22
4.5) Algoritmo de resolução	23
4.6) Taxa de liberação de energia	26
5) Implementação numérica	28
5.1) Introdução	28

5.2) Separação dos elementos	28
5.3) Inclusão do elemento de aço	31
5.4) Implementação computacional	33
5.5) Validação do programa	42
6) Resultados e Discussões	43
6.1) Introdução	43
6.2) Simulação em concreto com fibras	43
6.3) Simulação em concreto convencional	52
7) Conclusões e Sugestões	60
7.1) Conclusões	60
7.2) Sugestões	61
Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

Figura 1.1	Curvas tensão-deformação para um compósito com fibras sob tração [SIMÕES, 1998].	4
Figura 2.1	Diagrama tensão/deformação elástica da matriz e fibras de alto e baixo módulo [FIGUEIREDO, 2000].	10
Figura 2.2	Esquema de concentração de tensões para um concreto sem reforço de fibras [FIGUEIREDO, 2000].	12
Figura 2.3	Esquema de concentração de tensões para um concreto com reforço de fibras [FIGUEIREDO, 2000].	13
Figura 4.1	Grade para geração de campo aleatório [SILVA, 2000].	23
Figura 4.2	Taxa de liberação de energia [SILVA, 2000].	26
Figura 5.1	Separação dos elementos na malha de elementos finitos [SILVA, 2000].	29
Figura 5.2	Inserção do elemento de barra na matriz.	30
Figura 5.3	Organograma de execução do programa.	34
Figura 6.1	Geometria e condições de contorno da viga simulada.	44
Figura 6.2	Discretização em elementos finitos do exemplo da figura 6.1.	45
Figura 6.3	Curva $P \times d$ para os dois concretos simulados extraída do trabalho de Rossi.	45
Figura 6.4	Curvas $P \times d$ para as simulações realizadas.	46
Figura 6.5	Contornos da abertura das fissuras para as três simulações realizadas.	47
Figura 6.6	Propagação das fissuras para as três simulações realizadas.	48
Figura 6.7	Deslocamentos na direção y para as três simulações realizadas.	49
Figura 6.8	Distribuição de tensões σ_x para as três simulações realizadas.	50
Figura 6.9	Distribuição de tensões σ_y para as três simulações realizadas.	51
Figura 6.10	Geometria e condições de contorno da viga com entalhe.	52
Figura 6.11	Malha de elementos finitos da viga com entalhe.	53
Figura 6.12	Aberturas de fissura e zoom da região fissurada para as três	54

simulações realizadas.

Figura 6.13	Propagação das fissuras para as três simulações realizadas.	55
Figura 6.14	Deslocamentos na direção y para as três simulações.	56
Figura 6.15	Curvas $P \times d$ para as três simulações realizadas.	57
Figura 6.16	Distribuição de tensões σ_x para as simulações realizadas.	58
Figura 6.17	Distribuição de tensões σ_y para as simulações realizadas.	59

Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Equações para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de barra.	38
Tabela 6.1	Dimensões da figura 6.1	44
Tabela 6.2	Características do concreto e da fibra usadas na simulação	44
Tabela 6.3	Tipos de simulações realizadas	46
Tabela 6.4	Dimensões da figura 6.10	53

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL EM CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

RICARDO SCHWAN MOREIRA

Este trabalho analisa a influência das fibras de aço no controle de propagação de fissuras no concreto. O modelo proposto é baseado no desenvolvido por Silva que utiliza o método probabilístico de fissuração para acompanhar a propagação das fissuras numa matriz de concreto. O comportamento da matriz fibra-concreto, definido através de uma lei constitutiva distinta para cada material, é implementado em um programa de elementos finitos, onde os elementos obedecem a um comportamento elasto-frágil. As características mecânicas consideradas são o módulo de elasticidade e a resistência a tração, aleatórias em função da heterogeneidade do concreto. Nessa implementação faz-se a introdução da fibra à medida que ocorre a abertura da fissura, através da inclusão de um elemento de treliça na malha de elementos finitos, interrompendo desta forma a propagação da fissura. Os resultados foram comparados a simulações encontradas na literatura, entre elas o exemplo simulado por Silva em seu trabalho. Pretende-se assim analisar os fatores que governam a alteração do comportamento de fissuração discreta, típica do concreto convencional, para um de fissuração repartida, observada com a inclusão das fibras.

Palavras-Chave: modelagem numérica, propagação das fraturas, fissuração, materiais compósitos, reforço com fibras de aço.

NUMERICAL SIMULATION IN STEEL FIBER REINFORCED CONCRETE

RICARDO SCHWAN MOREIRA

In this dissertation, the steel fiber influence on the concrete crack control is analyzed. The model here presented is based on the implementation of Silva where the cracking probabilistic method is used to describe the cracking propagation path in a concrete matrix. The behavior of the concrete-fiber matrix, defined by a different constitutive law for each material, is implemented in a finite element code where the elements obey an elastic-brittle behavior. The modulus of elasticity and the tensile strength are the mechanical characteristics considered. These are randomized because of the concrete heterogeneity. In this implementation, the fiber introduction is performed when the crack opening begins. A truss element is included into the finite element mesh representing the fiber. That inclusion enables the interruption of crack propagation. The results were compared with those already published in a work found in literature and with those obtained in the case simulated by Silva. This work intends to evaluate the factors that rules the change in the concrete behavior: passing from a discrete cracking behavior, typical of a conventional concrete, to a smeared cracking behavior pattern, observed with the fiber inclusion.

Keywords: numerical modelling, fracture propagation, cracking, composite matrix, steel fiber reinforced concrete.

1) Introdução

1.1) Concreto reforçado com fibras

O uso de materiais compostos em estruturas tem aumentado significativamente nos últimos anos. Esta tendência é devida a suas propriedades, que são muito diferentes dos materiais convencionais [CAR *et al.*, 2002]. Materiais compostos apresentam elevada relação resistência/peso e resistência/rigidez, são resistentes a corrosão, termicamente estáveis e bem apropriados para estruturas onde o peso é uma variável fundamental, e também para de componentes que necessitem de alta resistência e rigidez.

Hoje em dia preocupa-se cada vez mais com o comportamento das estruturas quanto à resistência e à durabilidade, tornando-se necessário que a engenharia civil passe a levar em conta possíveis problemas patológicos, bem como sua forma de controle ou mesmo recuperação.

Um exemplo são as estruturas de concreto que apresentam fissuras quando submetidas a um determinado nível de esforços. Em tal caso, existe a possibilidade dessas fissuras se propagarem, levando a estrutura à ruína. É necessário, portanto, descobrir as trajetórias de fissuração e evitar a sua propagação. Tal situação significa, muitas vezes, intervenção no nível dos materiais empregados.

Os materiais cimentícios são caracterizados por baixa resistência e baixa capacidade de deformação à tração, sendo portanto, materiais frágeis [BENTUR e MINDESS, 1990]. Assim, eles requerem reforço antes de serem solicitados como materiais de construção. Historicamente, este reforço tem sido feito com barras contínuas colocadas para resistir à tração e à tensão de cisalhamento.

O uso de reforço nos materiais vem desde os tempos antigos. O primeiro composto manufaturado utilizado nos tempos modernos foi o cimento amianto, já proibido em alguns países. Hoje em dia, vários tipos de fibras são usados no reforço de diversos materiais, como plásticos e cerâmicos [BENTUR e MINDESS, 1990]. Uma ampla variedade passou a ser usada como reforço no concreto: fibras convencionais, como as de aço (a mais utilizada, depois do amianto) e vidro; novas fibras, como as de carbono e kevlar; sintéticas, como

polipropileno e nylon; além das naturais como as de sisal, celulose, entre outras. Estes tipos variam consideravelmente suas propriedades, efetividade, custo e diferem amplamente em termos de fator de forma.

As aplicações das fibras são tão variadas quanto os tipos existentes [BENTUR e MINDESS, 1990]. As fibras de vidro são usadas em painéis pré-moldados (não estruturais), as de aço em pavimentação, concreto jateado, em barragens e em muitas outras estruturas, além de atuar como controlador de fissuras no concreto. Fibras de polipropileno são aplicadas como reforço secundário no controle de fissuras por retração plástica. Fibras vegetais têm sido utilizadas em materiais de construção de baixo custo. Novas fibras e novas aplicações vêm sendo desenvolvidas a cada dia.

As fibras, como as de aço, modeladas neste trabalho, são distribuídas aleatoriamente na matriz de concreto. Já o reforço feito com barras convencionais é disposto de forma contínua na matriz [NAAMAN, 2000]. Deve-se reconhecer que as fibras não vieram para substituir as barras. Em muitas aplicações elas devem ser usadas juntas, mas, devido a algumas diferenças, existem aplicações onde as fibras são mais adequadas que as barras convencionais [BENTUR e MINDESS, 1990], como por exemplo:

- Materiais esbeltos, onde barras não podem ser usadas, as fibras constituem o reforço primário, e sua concentração é alta (mais de 5% do volume). Elas agem para aumentar tanto a resistência quanto a rigidez dos materiais;
- Componentes que têm de resistir a cargas ou deformações elevadas numa pequena área, como forros de túneis, estruturas resistentes a explosões e pilares pré-moldados;
- Componentes onde as fibras são adicionadas no controle de fissuras, como em lajes e pavimentos. Nesses casos, as fibras são chamadas de reforço secundário.

As propriedades do concreto podem ser melhoradas substancialmente com a adição de fibras curtas de pequeno diâmetro [LI e LI, 2001]. Por esta razão, o concreto reforçado com fibras de aço vem sendo muito utilizado em infra-estruturas, onde fissuras por tração podem ocorrer. Entretanto, deve-se ter cuidado, pois se as fibras forem muito curtas não atravessarão as microfissuras, sendo então arrastadas [CHENKUI e GUOFAN, 1995]. Por outro lado, sabe-se que, fibras longas, de diâmetros menores, são mais eficientes no concreto endurecido, porém, bem mais

difíceis de se manusear no concreto fresco [BENTUR e MINDESS, 1990]. Para superar essas dificuldades, tem-se como alternativas:

- Modificação da geometria da fibra, para aumentar a aderência sem aumentar o comprimento;
- Tratamento químico na superfície da fibra, para melhorar a dispersão na matriz fresca;
- Modificação das propriedades da matriz, através do uso de aditivos químicos (principalmente superplastificantes) e minerais (como por exemplo a sílica);
- Uso de técnicas especiais de produção, para assegurar um volume grande de fibras dispersos na mistura.

O conteúdo de fibras geralmente utilizado no concreto é em torno de 0,2 a 2% [ZOLLO, 1997]. Mas, com um conteúdo muito baixo de fibras, a resposta do concreto reforçado à tração assumiria o comportamento semelhante ao do concreto convencional, caracterizado pelo alargamento de uma única fissura [LI, 1998]. NAAMAN e HOMRICH [1989] relataram em seu trabalho um fenômeno onde o concreto reforçado com um volume elevado de fibras curtas dispersas aleatoriamente na matriz (em torno de 8%) pode alcançar endurecimento e apresentar múltiplas fissuras.

Quando o composto fibra-matriz é submetido à tração, em determinado estágio do carregamento ocorre a fissuração da matriz. Assim que isso acontece, a fibra recebe toda a carga atuante, transmitindo-a de um lado ao outro da matriz, através da fissura. Na realidade, diversas fibras, sob diversas orientações, ligam as fissuras, e um dos seguintes comportamentos é exibido pelo material [SIMÕES, 1998]:

- O compósito falha imediatamente após a fissuração da matriz (figura 1.1.a). Isso ocorre quando o teor de fibras na mistura é tão baixo que sua contribuição ao comportamento do material não se percebe em termos práticos.
- A capacidade de carga do compósito é reduzida, mas, mesmo logo após a fissuração, continua resistindo a cargas inferiores à carga de pico (figura 1.1.b). Quando a matriz fissura, o carregamento atuante é transferido do compósito para as fibras, na interface da fissura. Observa-se uma resistência residual, oriunda do fato das fibras estarem transmitindo carga através da fissura. À medida que as deformações vão aumentando, as fibras começam a deslizar e a ser arrancadas da matriz, num processo conhecido como *pull-out*. Esse processo de arrancamento das

fibras é diretamente responsável pela maior capacidade de absorção de energia do concreto com fibras, já que parte da energia de deformação transmitida ao compósito é assim dissipada. Isso resulta numa melhora considerável no comportamento do material, observando-se uma perda suave e gradual de capacidade de carga no regime pós-pico. Por outro lado, o teor de fibras na mistura é de tal ordem que, para esses compósitos, não se nota um aumento significativo na resistência à tração.

➤ Se a fração volumétrica de fibras presente é grande o suficiente, após o surgimento da primeira fissura, as fibras têm capacidade de absorver um carregamento ainda maior do que o responsável pela falha da matriz (figura 1.1c). Observa-se uma fissuração progressiva, conhecida como estágio de múltipla fissuração, acompanhada de aumento gradual no carregamento. Há, no entanto, uma queda na rigidez do compósito, em virtude da não participação da matriz. Quando se atinge uma deformação tal, que as fibras começam a sofrer o processo de arrancamento, a capacidade de carga atinge um valor máximo e passa a cair progressivamente.

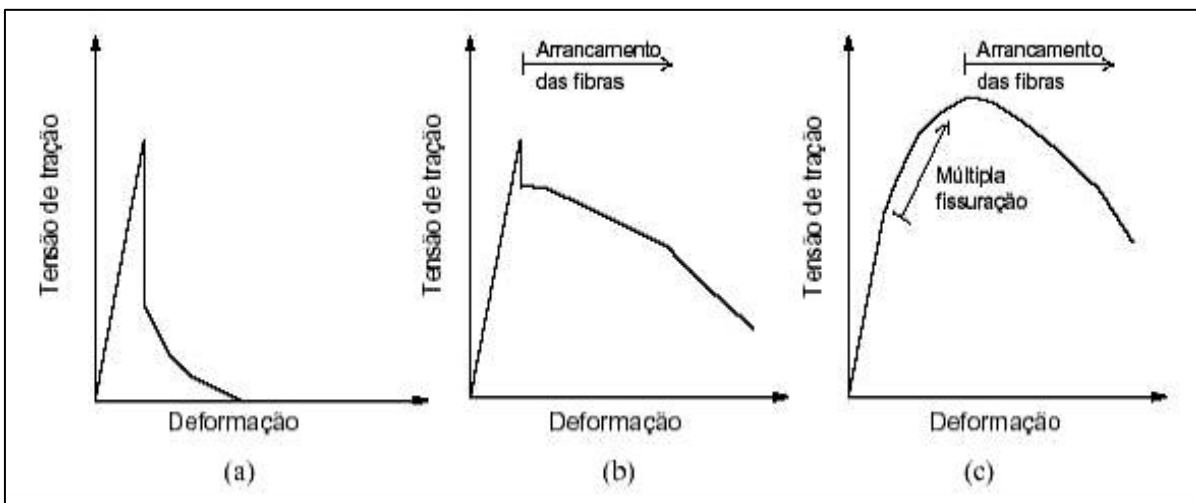


Figura 1.1 Curvas tensão-deformação para um compósito com fibras sob tração: (a) baixíssimo teor de fibras; (b) baixo teor de fibras; (c) alto teor de fibras; [SIMÕES, 1998].

Pode-se dizer, portanto, que a eficácia do reforço de fibras depende de sua capacidade para ligar fissuras, que, por sua vez, está relacionada a dois fatores principais: a quantidade de fibras na mistura e a eficiência da ligação fibra-matriz. A influência do primeiro fator é óbvia e facilmente entendida através da evolução dos diagramas da figura 1.1, como já explicado. O segundo fator depende da geometria das fibras e da composição da matriz, sendo possível compreendê-lo como a resistência que as fibras oferecem ao arrancamento. Essa resistência pode ser

quantificada através dos ensaios do tipo *pull-out*, nos quais uma ou mais fibras parcialmente embebidas numa matriz de concreto são tracionadas por suas extremidades livres, acompanhando-se a variação da carga ou da tensão cisalhante aplicada com o deslizamento observado [SIMÕES, 1998].

Fibras com maior fator de forma e/ou deformadas têm uma aderência maior ao concreto, expressa em termos da resistência friccional ao cisalhamento, e são capazes de absorver mais energia durante o processo de arrancamento. Assim, mais eficiente o reforço proporcionado e, portanto, melhor o comportamento mecânico exibido pelo compósito que as contém.

Assim, com o passar dos anos, pesquisadores puderam vislumbrar um significativo benefício do uso de fibras como reforço para concreto: o substancial ganho em tenacidade que elas proporcionam. De fato, o surgimento de ensaios com deformação controlada deram possibilidade de monitorar-se completamente o comportamento do material, inclusive além do limite de resistência. Pôde-se observar, então, que a adição de fibras ao concreto melhora substancialmente seu desempenho pós-pico de tensão, levando-o a atingir, de forma mais suave, níveis de deformação maiores até a ruptura. Associado a isso, nota-se um controle maior do processo de fissuração, com aparecimento de fissuras mais finas, menos espaçadas, e distribuídas de forma mais uniforme na estrutura [SIMÕES, 1998]. Em resumo, a adição de fibras de aço minimiza o comportamento frágil característico do concreto e aumenta sua capacidade de absorção de energia de deformação, fazendo-o passar a se comportar como um material pseudo-dúctil [FIGUEIREDO, 2000], ou seja, continua apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após sua fissuração.

1.2) Modelos probabilísticos

Experimentalmente têm-se observado caminhos de fissuração e mecanismos de ruptura diversos em peças de concreto. Isso se deve à heterogeneidade do concreto, fator determinante para suas características mecânicas, e a seu complexo comportamento na fissuração. O concreto tem seu comportamento traduzido através de modelos probabilísticos que simulam seu comportamento médio dentro de uma determinada faixa de variação.

Existem diversos modelos capazes de simular o comportamento do concreto. A modelagem pode ser feita com a introdução de fissuras discretas ou repartidas. Os modelos discretos podem ser coesivos ou não, e no último caso baseados diretamente na mecânica da fratura linear elástica ou em fissuras equivalentes. Uma revisão mais detalhada da mecânica da fratura e dos diversos mecanismos de fissuração será discutida mais adiante.

O modelo probabilístico mais direto é provavelmente o concreto numérico [ROELFSTRA *et al.*, 1985], onde uma seção de concreto é digitalizada e discretizada em uma malha fina o suficiente para considerar separadamente os compostos, matriz e agregado, na malha de elementos finitos.

A abordagem mais comum para simulação de materiais heterogêneos é mediante a utilização do método dos elementos finitos, onde as propriedades do material, módulo de elasticidade e resistência à tração, são modeladas como campos aleatórios, determinando, através de processos matemáticos, o comportamento médio da estrutura e o desvio em relação à média [SILVA, 2000].

O comportamento à tração é talvez o mais difícil de ser modelado. Os modelos de fissuração em uso hoje em dia podem ser classificados em dois grandes grupos: modelos de fissuração discreta e modelos de fissuração repartida [ELICES e PLANAS, 1989].

Os modelos de fissuração discreta utilizam elementos finitos de interface que são infinitamente rígidos até que a tensão normal ultrapasse a resistência à tração. Isto é, os elementos não permitem deslocamentos relativos entre os nós até que se inicie a fissuração, passando, a partir de então, a serem regidos por uma equação constitutiva que é função dos deslocamentos relativos dos nós (normal e cisalhante).

No caso dos modelos de fissuração repartida, não são introduzidos elementos de interface, e a fissuração é considerada como repartida no volume do elemento finito ou numa determinada banda de fissuração no interior dos elementos. Nesse modelo relacionam-se tensões e deformações.

Os modelos de fissuração, bem como o mecanismo de fratura dos materiais, serão discutidos mais a fundo posteriormente.

1.3) Proposta de implementação

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo constitutivo para concreto reforçado com fibras de aço. Como base foi utilizado o modelo probabilístico desenvolvido por ROSSI e RICHER [1987] no Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC/Paris), e a implementação desenvolvida por SILVA [2000].

O modelo de Rossi obteve resultados muito semelhantes a experimentos reais [ROSSI e ULM, 1997]. Suas características principais são a simplicidade de implementação, o reduzido número de parâmetros e a aparência realística das simulações, principalmente das trajetórias de fissuração. Uma descrição mais completa do modelo do LCPC, desenvolvido por Rossi e outros, pode ser encontrada nas referências originais [ROSSI e RICHER, 1987; ROSSI e ULM, 1997; ROSSI *et al.*, 1994].

No modelo de Silva, alguns pontos da formulação de Rossi foram questionados, levando ao desenvolvimento de uma formulação alternativa. O modelo acompanha a propagação das fissuras em uma matriz de concreto, onde a fissura é descrita por meio de alterações na malha. Gera as propriedades como campos aleatórios e utiliza um critério energético de ruptura.

A implementação proposta neste trabalho visa analisar a influência da inclusão de fibras de aço no concreto no controle de propagação das fissuras. O comportamento da matriz fibra-concreto, definido através de uma lei constitutiva distinta para cada material, é implementado num programa de elementos finitos, onde os elementos obedecem a um comportamento elasto-frágil. As características mecânicas consideradas são o módulo de elasticidade e a resistência à tração, características essas, aleatórias em função da heterogeneidade do concreto. A introdução da fibra é feita na medida em que ocorre a abertura da fissura através da inclusão de um elemento de barra, com propriedades de aço, na malha de elementos finitos, proporcionando a interrupção da propagação da fissura.

A implementação numérica, baseada no modelo de Silva, é feita conforme os princípios básicos do método dos elementos finitos e escrita em linguagem *FORTRAN*. O programa *GID*, desenvolvido pelo International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE, UPC/ES), é utilizado como pré e também como pós-processador, auxiliando na visualização dos resultados.

Visando analisar a validade da implementação, a simulação dos resultados se faz com ensaios encontrados na literatura [ROSSI e WU, 1992;

GALVEZ *et al.*, 1998]. Os resultados numéricos são comparados em termos de tensões, deslocamentos e da abertura da fissura, para concretos com e sem reforço de fibra.

1.4) Organização do trabalho

O presente trabalho organiza-se em 7 capítulos.

O capítulo 1 apresenta um breve histórico sobre o uso do concreto, sua evolução ao longo dos anos, bem como a introdução das fibras ressaltando seus principais benefícios. Introduz-se também o fundamento dos modelos probabilísticos, necessários à simulação do comportamento do concreto, e a proposta de implementação, objeto desse trabalho.

As propriedades do material, módulo de elasticidade e a resistência à tração, são utilizadas na modelagem do comportamento mecânico do concreto. Essas propriedades são ilustradas no capítulo 2.

No capítulo 3 apresenta-se uma revisão da mecânica da fratura, teoria que é base de estudo dos modelos de fissuração que simulam o comportamento de ruptura dos materiais.

O modelo de fissuração probabilística do concreto, que é a base desta implementação, é descrito no Capítulo 4. São apresentados os detalhes do modelo pertinentes a essa implementação. Particularidades do método sem correspondência com o desenvolvimento proposto podem ser encontrados no trabalho original de SILVA [2000].

A implementação numérica desenvolvida neste trabalho é mostrada no capítulo 5. O processo de inclusão da fibra na matriz de concreto é detalhadamente explicado, desde a abertura da fissura até a inserção do elemento de aço na matriz de rigidez.

No capítulo 6 os resultados da simulação do novo modelo são discutidos e comparados a ensaios encontrados na literatura, [ROSSI e WU, 1992], e, ao simulado no modelo original de Silva. As conclusões pertinentes ao trabalho e algumas sugestões para novas implementações e trabalhos futuros são encontradas no capítulo 7.

2) Propriedades do concreto

2.1) Módulo de elasticidade

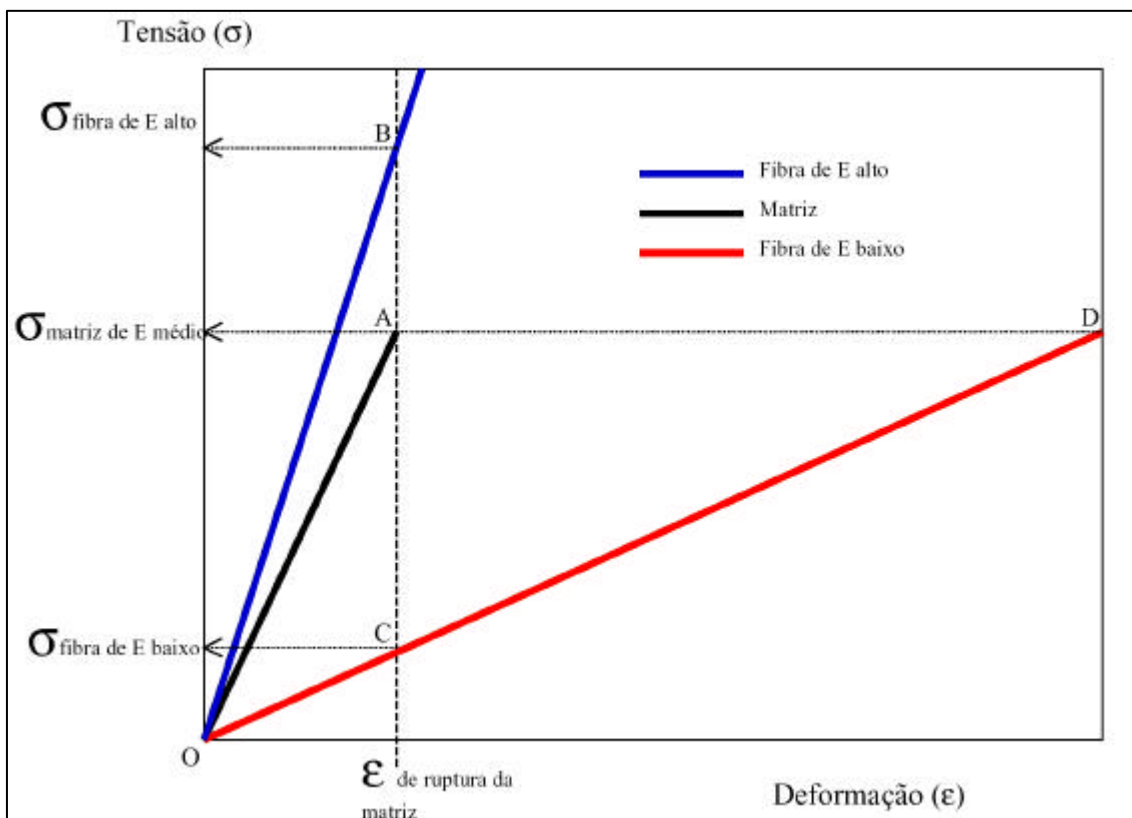
O módulo de elasticidade de um material, quer em tração, compressão ou cisalhamento, é uma propriedade fundamental necessária para modelagem do comportamento mecânico em várias aplicações estruturais [ZIA *et al.*, 1997]. Testes têm sido desenvolvidos para medir o módulo de elasticidade de diversos materiais. Para materiais homogêneos, como aço e vidro, observaram-se valores experimentais e esses foram tabelados e utilizados na prática. Entretanto, para materiais como o concreto reforçado com fibras, compostos por pelo menos dois materiais diferentes, a determinação do módulo de elasticidade depende de vários parâmetros, como as propriedades de interface entre os materiais, distribuição das fibras, orientação, fator de forma (relação comprimento/diâmetro), etc...

Numerosos estudos foram realizados envolvendo o módulo de elasticidade de materiais compostos [HALPIN e TSAI, 1969; EZELDIN e LOWE, 1991], trabalhando com diversos modelos que vão dos mais simples aos mais sofisticados. Dentre os modelos mais simples, para compostos com dois materiais distintos, os parâmetros envolvidos são a fração em volume e o módulo de cada material. Modelos mais avançados, desenvolvidos para concreto reforçado com fibras, incluem as propriedades da interface entre os dois materiais, se as fibras são descontínuas ou não, sua distribuição, orientação e o fator de forma das fibras.

Quando o módulo de elasticidade da matriz é maior que o da fibra, o composto tende a apresentar uma limitada capacidade de reforço, como observado em [ARMELIN e HAMASSAKI, 1990], ou mesmo pode ter questionado o seu papel de controlador de fissuração originada por deformação plástica [TANESI, 1999]. Isso se deve ao fato dos cimentos atuais, em conjunto com os aditivos aceleradores de pega e redutores de água, propiciarem um elevado ganho de resistência inicial e, em paralelo, do módulo de elasticidade [FIGUEIREDO, 2000]. Com isto, as fibras de baixo módulo só têm possibilidade de atuar como reforço num curto espaço de tempo após o lançamento, onde a cura, se bem feita, já garante bons resultados. Para se entender melhor este aspecto, deve ser observado o gráfico apresentado na figura 2.1[FIGUEIREDO, 2000], na qual se representa o trabalho de uma matriz hipotética reforçada com dois tipos de fibras: uma de módulo de elasticidade alto e

outra de módulo baixo, sendo todas de comportamento elástico perfeito. A curva de tensão x deformação da matriz está representada pela linha O-A, enquanto as linhas O-B e O-C representam o trabalho elástico das fibras de alto e baixo módulo, respectivamente. No momento em que a matriz se rompe (ponto A) e transfere a tensão para a fibra de baixo módulo (ponto C), esta apresenta uma tensão muito baixa nesse nível de deformação, devendo ser deformada muito mais intensamente, até o ponto D, para garantir o mesmo nível de tensão. Logo, a fibra de baixo módulo não poderá oferecer uma capacidade de reforço após a fissuração da matriz para um dado carregamento, ou permitirá uma grande deformação do compósito com um conseqüente elevado nível de fissuração (ponto D). Isso ocorreria supondo-se que a fibra de baixo módulo tenha resistência mecânica suficiente para atingir o nível de tensão associado ao ponto D. O que normalmente acontece é que fibras de baixo módulo apresentam menor resistência mecânica, por outro lado, a fibra de alto módulo de elasticidade já apresentará um elevado nível de tensão no momento da ruptura da matriz, o que lhe permitirá atuar como um reforço já a partir do ponto B, caso sua resistência não seja superada.

Figura 2.1- Diagrama tensão/deformação elástica da matriz e fibras de alto e baixo módulo



[FIGUEIREDO, 2000].

2.2) Resistência à tração

O concreto apresenta algumas limitações, como o comportamento de ruptura frágil e pequena capacidade de deformação, quando comparado com outros materiais estruturais como o aço [MEHTA e MONTEIRO, 1994]. Além disso, o concreto apresenta resistência à tração bem inferior à resistência à compressão, cuja relação está, geralmente, em torno de 0,07 e 0,11. Este comportamento está associado às fissuras que se formam ou já estão presentes no concreto, que prejudicam muito mais o material quando solicitado à tração do que à compressão [FIGUEIREDO, 2000].

Assim, pode-se associar a reduzida capacidade de resistência à tração à uma dificuldade muito maior do concreto interromper a propagação das fissuras quando é submetido a esse tipo de tensão [MEHTA e MONTEIRO, 1994]. Isso ocorre pelo fato da direção de propagação das fissuras ser transversal à direção principal das tensões. Assim que se principia o crescimento de cada nova fissura, a área disponível de suporte de carga é reduzida, causando um aumento das tensões nas extremidades das fissuras. Logo, a ruptura na tração é causada por algumas fissuras que se unem e não por numerosas fissuras, como ocorre quando o concreto é comprimido [MEHTA e MONTEIRO, 1994].

A principal dificuldade na caracterização da resposta dos concretos à tração é que o comportamento pós-fissura é geralmente dominado, como foi dito anteriormente, pela ampliação de uma única fissura principal como foi observado em alguns estudos experimentais [VISALVANICH e NAAMAN, 1983; GOPALARATNAM e SHAH, 1987]. A concentração de deformações no local da fissura leva a um campo de deformações não uniformes na região fissurada que depende da escala prescrita.

Outro aspecto importante é o comportamento do concreto quanto a concentrações de tensões, quando do surgimento e propagação de uma fissura a partir do aumento da tensão a ele imposta. No caso do concreto simples, apresentado na figura 2.2 [FIGUEIREDO, 2000], uma fissura irá representar uma barreira à propagação de tensões, representada simplificada pelas linhas de tensão. Esse "desvio" irá implicar numa concentração de tensões na extremidade da fissura e, no caso desta

tensão superar a resistência da matriz, se dará a ruptura abrupta do material. Assim, a partir do momento em que se abre a fissura no concreto ele rompe abruptamente, caracterizando um comportamento tipicamente frágil. Ou seja, não se pode contar com nenhuma capacidade resistente do concreto fissurado.

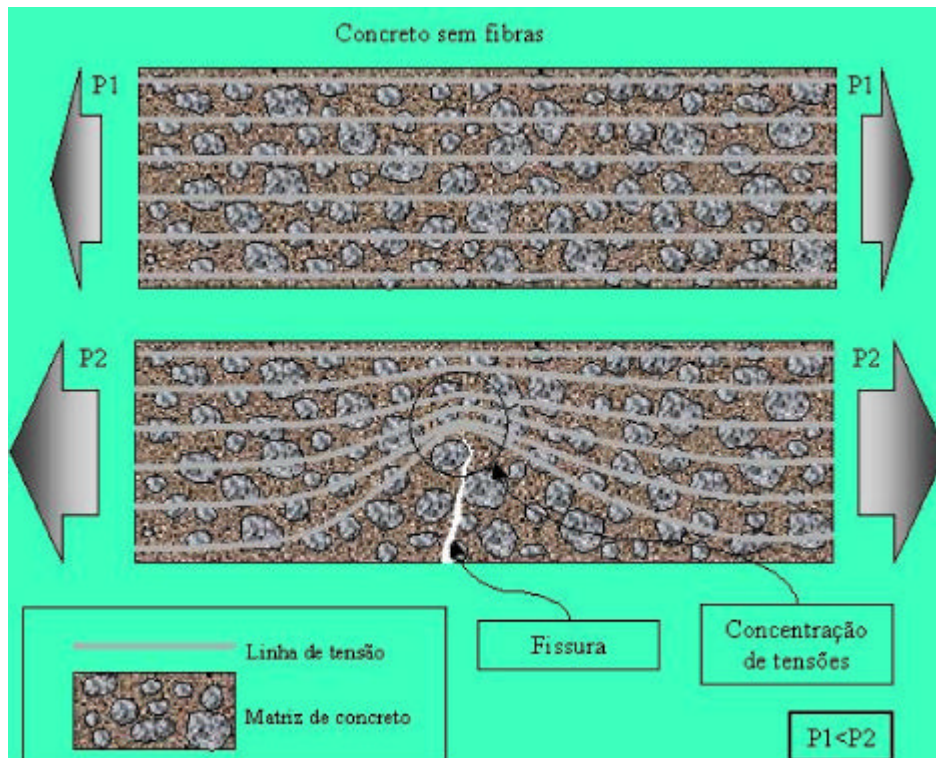


Figura 2.2 - Esquema de concentração de tensões para um concreto sem reforço de fibras

[FIGUEIREDO, 2000].

Quando se adicionam fibras ao concreto, este deixa de ter o caráter marcadamente frágil. Isso ocorre pelo fato da fibra servir como ponte de transferência de tensões pelas fissuras, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das mesmas, conforme o ilustrado na figura 2.3 [FIGUEIREDO, 2000]. Com isso, tem-se uma grande redução da velocidade de propagação das fissuras no concreto que passa a ter um comportamento pseudo-dúctil, ou seja, apresenta uma certa capacidade portante pós-fissuração.

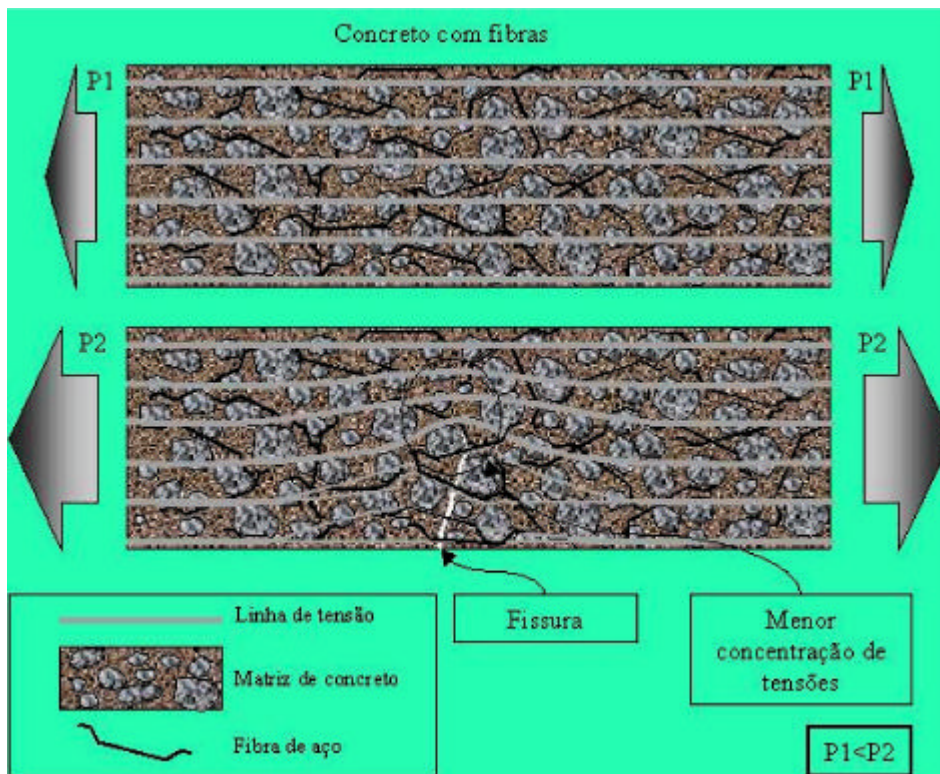


Figura 2.3 - Esquema de concentração de tensões para um concreto com reforço de fibras [FIGUEIREDO, 2000].

Com a utilização das fibras, será assegurada uma menor fissuração do concreto [LI, 1992]. Este fato pode vir a recomendar sua utilização mesmo para concretos convencionalmente armados [MINDISS, 1995].

Ensaio de concretos reforçados com fibras, como o Teste Brasileiro (*splitting tensile test*), não são tão numerosos quanto ensaios de tração direta, flexão ou compressão. Entretanto, é esperado que os mesmos fatores que influenciam o comportamento do concreto reforçado com fibras nos outros ensaios afetem também o seu comportamento. Assim, aumentando o volume de fibras e/ou seu fator de forma, aumenta também a resistência do composto fibroso. Também espera-se que fibras com ganchos e deformadas ofereçam uma maior resistência quando comparadas com fibras retas e não deformadas [ZIA *et al.*, 1997].

3) Mecânica da fratura

3.1) Histórico

A fratura das estruturas de concreto acontece normalmente através do aumento de uma zona de fissuração e da formação de grandes fendas antes que o máximo carregamento seja alcançado.

As teorias em mecânica da fratura existentes antigamente eram aplicáveis apenas a materiais frágeis e homogêneos, como vidro ou metais. A utilização dessas teorias para o concreto foi sendo explorada com o passar do tempo, mas os primeiros resultados não foram satisfatórios. Hoje, entende-se que a razão para a falha dos primeiros modelos era o processo físico ocorrente na fratura do concreto, muito diferente do que acontece na fratura dos materiais homogêneos acima mencionados e, especialmente, a escala interna do processo de fratura do concreto que é muito maior que a dos outros materiais. A mecânica da fratura, da forma como conhecemos, apareceu durante os anos 70, determinando a ruptura do material por um critério energético, considerando sua propagação por toda a estrutura ou por toda uma zona de fissuração [BAZANT e PLANAS, 1998].

As pesquisas na mecânica da fratura de materiais quase-frágeis cresceram muito nos anos 80. Muitas pesquisas foram e estão sendo feitas para aperfeiçoar os modelos anteriores, melhorar as ferramentas analíticas e numéricas necessárias para manipular esses modelos, desenvolver padrões experimentais para medição dos parâmetros de entrada e relacionar o comportamento macroscópico ao caráter microscópico do material. Modelos que refletem a heterogeneidade do concreto têm sido desenvolvidos para auxiliar o estudo de seu comportamento macroscópico.

3.2) Teorias lineares

O estímulo para o início do desenvolvimento da mecânica da fratura foi um trabalho clássico de INGLIS [1913] que obteve a solução elástica para tensões no vértice de uma cavidade elipsoidal de um sólido infinito. Observando que quando a cavidade aproximava a fissura a uma linha, a tensão no vértice tendia a infinito. GRIFFITH [1921,1924] concluiu que, em ocorrência de uma fissura, a tensão não pode ser usada como critério de ruptura, visto que a tensão na ponta da fissura é infinita, independente da carga aplicada, permitindo a ele propor um critério energético de ruptura que serve como base para a Mecânica da Fratura Linear Elástica, *Linear Elastic Fracture Mechanics* – LEFM.

A LEFM é a teoria básica da fratura. É simples e sofisticada, e trata de corpos elásticos fissurados. A LEFM é aplicável a qualquer material, desde que obedeça a determinadas condições relacionadas com a situação ideal analisada, onde todo material é elástico, exceto numa minúscula região na ponta da fissura. De fato, as tensões perto da ponta da fissura são tão altas que pode aparecer alguma inelasticidade nas vizinhanças. Entretanto, se o tamanho da zona inelástica for pequeno em relação à dimensão linear do corpo (incluindo o tamanho da fissura), a perturbação provocada por essa zona inelástica é também pequena, levando à verificação exata da LEFM.

Assim, a LEFM é a teoria básica na descrição do comportamento de qualquer material com fissuras, mesmo que, como no caso do concreto, a geometria e dimensão das estruturas não permitam seu uso direto.

A formação de fissuras em um sólido elástico inicialmente submetido a esforços de tração uniaxial uniforme desvia a trajetória da máxima tensão principal, indicando um aumento na concentração de tensões próximo à ponta da fissura. Os cálculos realizados por Inglis levaram Griffith a concluir que a propagação da fissura necessita de uma determinada quantidade de energia superficial por unidade de área, que é uma propriedade do material, desde que a estrutura seja tão grande que a região da ponta da fissura, onde se inicia o processo de fratura, seja desprezível. Essa é a chamada abordagem de Griffith, que introduz os conceitos de taxa de liberação de energia (G), representando a energia disponível para fratura e a energia de fratura ou força resistente à fissuração (R), representando a energia necessária à fratura [BAZANT e PLANAS, 1998].

Outra grande descoberta nos fundamentos teóricos da LEFM foi feita por IRWIN [1957], que introduziu o conceito do fator de intensidade de tensões (K), como um parâmetro para medir a intensidade das tensões próximas à ponta da fissura, relacionando-as com a taxa de liberação de energia. Esta abordagem tem como vantagem o fato do fator de intensidade de tensões ser cumulativo, enquanto que a taxa de liberação de energia de Griffith não. Entretanto, sua abordagem era limitada à elasticidade linear, diferentemente do critério de Griffith.

3.3) Teorias não-lineares

A LEFM é hoje a principal ferramenta na análise da maioria dos problemas estruturais relativos à fissuração. Entretanto, tornou-se evidente que os conceitos da LEFM funcionavam bem apenas quando a fratura era frágil, significando que a maioria das estruturas deveria permanecer no estado elástico até o início da ruptura. Este não era o caso de muitas situações práticas, como alguns tipos de aços que são capazes de desenvolver grandes zonas plásticas próximo a ponta da fissura [BAZANT e PLANAS,

1998]. O comportamento à fratura do concreto diverge sensivelmente da LEFM, pois, como outros materiais aparentemente frágeis, ou seja, quase frágeis, possui a zona onde se processa a fratura relativamente grande quando comparada às dimensões da estrutura, caracterizando um problema não-linear. Desta forma, seus efeitos não podem ser negligenciados como na LEFM, levando ao desenvolvimento de algumas teorias de mecânica da fratura não-linear. As principais teorias, os modelos de fissuras equivalentes e os de fissuras coesivas são discutidas na seqüência.

➤ Modelo de fissuras equivalentes, é dos mais simples e é uma das primeiras correções da LEFM. A zona não-linear é simulada pela redução da rigidez do corpo, que é aproximadamente o mesmo que aumentar o comprimento da fissura enquanto mantém seu comportamento diferente do elástico. Essa fissura é chamada de fissura equivalente ou efetiva, sendo que, a simulação feita próxima a fissura é similar a feita na LEFM, com exceção do acréscimo de algumas regras para expressar como a fissura equivalente cresce de acordo com o aumento da força. Um exemplo é o conceito da curva de resistência, proposta inicialmente por Irwin, onde a resistência ao crescimento da fissura não é constante, variando com o comprimento da fissura.

➤ Modelo de fissuras coesivas, foram desenvolvidas para simular o comportamento não-linear do material próximo à ponta da fissura. Nos outros modelos, considera-se que o processo de fratura sempre ocorra na ponta da fissura. Entretanto, estes modelos são estritamente aplicáveis quando a zona de processamento da fratura é pequena quando comparada às dimensões da amostra. Nesse modelo, assume-se que a fissura se alargue e abra enquanto ainda houver transferência de tensão de uma face à outra da fissura e descreve o processo de fratura por inteiro, ainda que com algumas simplificações. Essa descrição é essencial quando o comprimento da fissura, ou outra dimensão da amostra, é pequena em relação à zona onde a fissura se desenvolve, situação típica em estruturas de concreto. A zona onde se processa a fratura pode ser descrita por duas abordagens simplificadas: o *modelo de fissuras coesivas*, ou *fictícias*, toda a zona onde se processa a fratura é tratada como se estivesse dentro de uma linha de fissuração e é caracterizada através de leis tensão-deslocamento, exibindo um comportamento *softening*; e o *modelo de fissuras repartidas*, as deformações inelásticas na zona de fratura são repartidas por uma banda de determinada extensão, imaginando-se existir a presença de uma fissura principal.

A aproximação discreta é preferível quando há apenas uma fissura ou um número determinado delas na estrutura. Entretanto, a implementação computacional dos modelos discretos é mais complexa porque exige uma maior manipulação da topologia da malha de elementos finitos e requer propriedades dos materiais difíceis de serem avaliadas.

Na ausência de dados experimentais, essas propriedades são estimadas e os resultados experimentais são utilizados para calibração dos modelos.

No modelo de fissuração repartida, a fratura é representada de tal forma que um número infinito de fissuras de tamanho pequeno são distribuídas por todo o elemento finito [BAZANT e PLANAS, 1998]. As fissuras são geralmente modeladas em uma malha de elementos finitos fixa, e também pela redução da rigidez e da resistência do material na direção normal à fissura depois de alcançar a resistência de pico do material. Algumas mudanças na matriz de rigidez são relativamente fáceis de serem implementadas em códigos de elementos finitos, atraindo assim a fissuração repartida. A evolução do processo de fissuração por toda a fratura implica em um processo de redução gradual da tensão no pós-pico da curva tensão x deformação. As leis constitutivas, definidas pelas relações tensão x deformação, são não-lineares.

3.4) Fratura de materiais quase-frágeis

As pesquisas na mecânica da fratura de materiais quase-frágeis aumentaram durante os anos 80. Muitos esforços foram e estão sendo feitos para refinar os modelos anteriores, melhorar as ferramentas analíticas e numéricas requeridas para manipular esses modelos e relacionar o comportamento de fratura macroscópico às características microestruturais do material. Nesse aspecto, modelos que refletem a heterogeneidade do concreto têm sido desenvolvidos para um melhor entendimento do seu comportamento macroscópico.

Tendo em vista o comportamento macroscópico de estruturas de concreto, a análise computacional requer um modelo matemático robusto para fissuração distribuída e que deve representar realisticamente as mais variadas circunstâncias. O problema pode ser abordado através de duas abordagens:

- Abordagem contínua, onde a estrutura é usualmente resolvida através da discretização em elementos finitos (elementos de contorno e outros métodos são também possíveis). Hoje em dia é a abordagem mais geral, mais amplamente aplicável na análise de estruturas submetidas a diversos tipos de carregamentos. O material é caracterizado por uma relação tensão x deformação triaxial não-linear acoplado a uma formulação não-local.

- Abordagem discreta, utiliza o método dos elementos descontínuos ou uma de suas variantes. O material é representado por treliças e barras de conexão onde regras simples de deformações e ruptura devem ser projetadas. A abordagem discreta proporciona alguns valiosos recursos na micromecânica da ruptura e no

papel da heterogeneidade, mas apenas quando a ruptura é devida principalmente à fratura e fissuração por tração.

3.5) Aspectos mecânicos

A proposta desse trabalho é tentar representar da melhor forma possível o concreto reforçado com fibras, de forma que se possa entender melhor seu comportamento na ruptura. Assim, procurou-se uma abordagem que pudesse levar em conta a maior quantidade de aspectos possíveis para a simulação.

Uma das formas mais simples de incorporar a mecânica da fratura à prática de projetos de estruturas de concreto é através do efeito escala, que pode ser descrito como a alteração do comportamento da estrutura, quando as dimensões espaciais são aumentadas ou reduzidas proporcionalmente, enquanto a geometria e outras características são preservadas [BAZANT, 2000]. O aumento das dimensões do corpo reduz proporcionalmente a importância do efeito de escala e a variabilidade das propriedades, mas, sabe-se também que, o aumento do tamanho provoca uma diminuição da resistência, sendo então, inversamente proporcional ao tamanho da amostra. O efeito escala é um dos problemas fundamentais que atingem as teorias físicas e, é exibido claramente na LEFM.

Adotou-se uma abordagem discreta considerando as fissuras como coesivas, utilizando-se a tensão como critério de fissuração, já que esta se mantém em níveis aceitáveis e, não é calculada na ponta da fissura propriamente, e sim no centro do elemento. Mesmo assim a LEFM é questionável, pois prevê resistências muito altas para corpos pequenos e não permite estudar corpos são ou com fissuras menores que uma dimensão crítica [SILVA, 2000]. A solução adotada é válida para um material frágil, para uma zona de processamento de fissuras pequena e para um tamanho mínimo de fissura.

Diante do exposto, a abordagem empregada é baseada na implementação do modelo desenvolvido por Silva, descrito no capítulo que se segue.

4) Modelo de fissuração probabilística do concreto

4.1) Introdução

O modelo probabilístico estudado neste trabalho é baseado no modelo desenvolvido por SILVA [2000], onde o comportamento do concreto é descrito através de uma relação constitutiva local elasto-frágil, na qual a resistência à tração e o módulo de elasticidade são características aleatórias, em função da heterogeneidade do concreto e da escala do material.

O modelo implementado por Silva utiliza a formulação original de ROSSI e RICHER [1987], onde a propagação das fissuras no concreto é feita com o auxílio de elementos de interface entre os elementos finitos. Assim, na simulação, fissuras discretas são abertas restritas às arestas dos elementos, não havendo a inclusão de novos nós ou elementos na malha, evitando também a necessidade de remalhar o domínio. Suas características principais são a simplicidade de implementação, o reduzido número de parâmetros (são suficientes a resistência à compressão e o diâmetro máximo do agregado) e a aparência realística das simulações. Foram obtidos resultados semelhantes a experimentos reais [ROSSI e ULM, 1997]. A presença de elementos de interface permite a implementação de diferentes relações constitutivas, entretanto, a trajetória da fissura deixa de corresponder à prevista pelo modelo de fissuração.

O modelo de fissuração probabilística do concreto implementado por Silva é uma formulação alternativa que descreve a fissura por meio de alterações mínimas na malha, gera as propriedades como campos aleatórios, procura obter realizações individuais mais realistas e utiliza um critério energético de ruptura. Parâmetros adicionais relativos ao caráter estocástico, como a média e o desvio padrão, são estimados a partir de fórmulas empíricas deduzidas com base em numerosos ensaios [ROSSI *et al.*, 1994].

4.2) Histórico da investigação do comportamento mecânico

Desde a década de 20, com o trabalho de GRIFFITH [1921], sabe-se que não é possível utilizar a tensão como critério de ruptura de um corpo elástico fissurado, uma vez que em tal caso a tensão na ponta da fissura se aproxima de infinito sob qualquer carregamento.

Esse fato explica a falha dos primeiros modelos de elementos finitos que procuraram simular a abertura de fissuras através do uso de elementos elasto-frágeis (método determinístico) com um critério de ruptura baseado na tensão. À medida que a malha é mais bem discretizada, o valor das tensões na ponta da fissura tende a crescer, tornando o resultado da simulação não objetivo para malhas muito refinadas.

Ao se introduzir alguma não-linearidade na relação constitutiva do material, é possível limitar as tensões na ponta da fissura a um valor finito, permitindo que se continue a utilizar a tensão como critério de fissuração. O sucesso na utilização de tal critério para o método probabilístico deve-se, provavelmente, ao efeito de suavização de tensões gerado pela incapacidade do modelo de elementos finitos representar adequadamente o campo de deformações próximo à ponta da fissura sem funções de interpolação especiais [SILVA, 2000], permitindo que a tensão se mantivesse em níveis aceitáveis.

Mesmo utilizando relações constitutivas não-lineares com *softening*, é necessário utilizar a energia de fissuração para evitar a dependência da malha. Em sua implementação, Silva introduz o critério de Griffith e o local da fissura é determinado pela máxima tensão de tração.

O critério de ruptura utilizado por Silva não corresponde diretamente ao critério adotado por Rossi na formulação do LCPC. A formulação de Silva foi validada com evidências experimentais [GÁLVEZ et al., 1996, 1998]. Os resultados obtidos por Silva serão também utilizados como parâmetro de comparação com os obtidos na implementação desenvolvida neste trabalho.

4.3) Preparação do problema

Na implementação de Silva não foram utilizados elementos de interface, sendo, portanto, necessário alterar a topologia da malha com o objetivo de se obter uma melhor trajetória de propagação das fissuras. Mesmo com a utilização de elementos finitos convencionais nas proximidades da ponta da fissura, as

aproximações conseguidas não diferem muito das obtidas no trabalho original de Rossi. O ajuste da malha é feito através da criação de novos nós, resultando em dificuldades de implementação e complexidades numéricas, como o aumento da largura de banda da matriz de rigidez e distorção excessiva dos elementos. Em algumas situações a malha pode ser ajustada para melhor aproximar a direção da fissura.

O ponto de partida do modelo probabilístico é a discretização do domínio em uma malha de elementos finitos, onde é atribuído a cada elemento um módulo de elasticidade obtido através de um campo estocástico gerado não só por parâmetros de distribuição normal, mas também por um comprimento de correlação [SILVA, 2000]. A mesma abordagem é também empregada para as resistências.

4.4) Geração das propriedades aleatórias

Os dados de entrada para a geração do campo são obtidos juntamente com os demais dados do problema, sendo eles:

- Resistência e módulo de elasticidade médio;
- Desvio padrão da resistência e do módulo;
- Comprimento de correlação.

A partir da malha de elementos na qual o problema é subdividido, um campo aleatório em forma de grade é gerado, não igualmente espaçado nas duas direções, onde o número de intervalos precisa obedecer ao critério descrito adiante.

A preparação da grade é feita com as coordenadas nodais, e posterior obtenção das coordenadas de um retângulo que contenha todo o modelo. Estas coordenadas, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, serão utilizadas para determinar o tamanho da grade necessária, adicionando-se uma “margem” de um comprimento de correlação, l , em cada lado a fim de levar em consideração a periodicidade do campo [SILVA, 2000].

De posse do comprimento de correlação estima-se o espaçamento máximo entre os pontos da grade e, posteriormente, a densidade de pontos necessários para cobrir o campo, resultando nos valores N e M . Os espaçamentos Δx e Δy são dados pelas equações 4.1 e 4.2, e são melhor entendidos com o auxílio da figura 4.1.

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1 + 2l}{N - 1} \quad [4.1]$$

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1 + 2l}{M - 1} \quad [4.2]$$

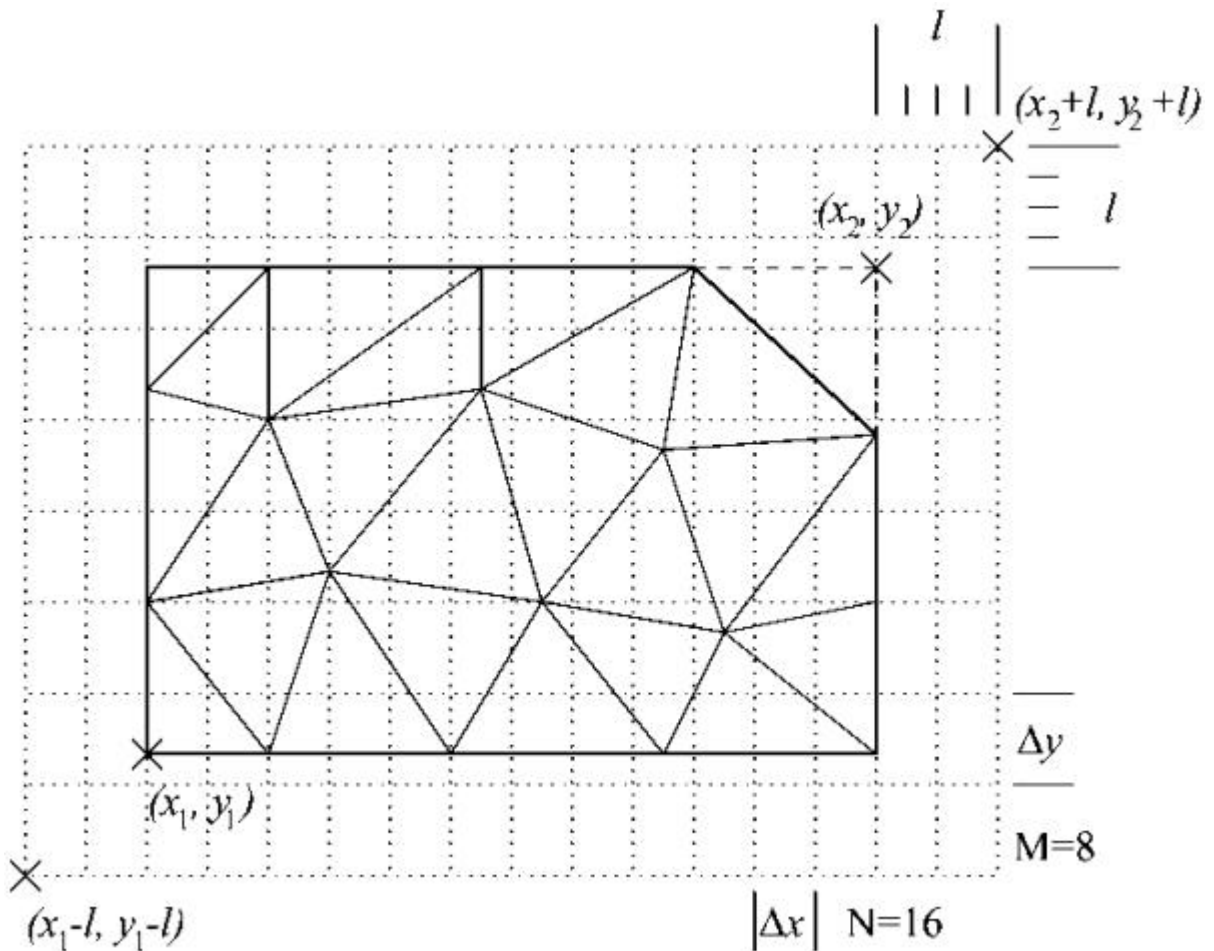


Figura 4.1 – Grade para geração de campo aleatório [SILVA, 2000].

A geração é feita de forma discreta, em uma grade de índices inteiros, de $1, \dots, N$ e de $1, \dots, M$. Os valores da função de correlação são calculados para um quarto do campo e, os demais valores, são refletidos pelo procedimento de geração. O campo discreto é então gerado e os valores intermediários são interpolados linearmente. Assim, são determinados os valores atribuídos à resistência à tração, nos nós, e ao módulo de elasticidade, nos elementos [SILVA, 2000].

4.5) Algoritmo de resolução

Com a grade gerada e, os valores de resistência e módulo determinados, o modelo de Silva segue um algoritmo para a determinação das tensões atuantes nos nós e, de um fator de sollicitação, que será posteriormente utilizado na definição do ponto de abertura da fissura. De fato, as tensões são calculadas nos pontos de integração dos elementos utilizando funções de interpolação lineares e, a tensão em cada nó é calculada pela média entre as tensões correspondentes nos elementos que convergem para esse nó.

Os cálculos são feitos em regime elástico linear, já que a relação constitutiva proposta para o material é elasto-frágil. Assim, o corpo é considerado íntegro entre as iterações.

O controle do método é feito pelo progresso da fissuração. A cada etapa de carregamento é aplicada uma carga unitária, determinando a tensão em todos os nós. Desta forma, o fator de sollicitação, que é multiplicado pelo carregamento para que se obtenha a carga que provoca o rompimento do nó mais sollicitado, é determinado pelo procedimento que se segue:

- Cálculo do deslocamento unitário na iteração k -

$$u_0^k = (K^k)^{-1} F_0 \quad [4.3]$$

onde: u_0 é o deslocamento unitário;

K é a matriz de rigidez do problema;

F_0 é o carregamento unitário.

- Cálculo do tensor de tensões no nó i , na iteração k -

$$s_{0,i}^k = DBu_0^k \quad [4.4]$$

onde: s_0 é o tensor de tensões;

D é matriz constitutiva;

B é a derivada das funções de interpolação.

- As tensões principais correspondentes (no estado plano de tensão - EPT ou de deformação - EPD) são obtidas por cálculos simples.

- Cálculo do fator de solitação no nó i -

$$f_{s,i} = \begin{cases} \frac{f_{t,i}}{s_{t,i}} & \text{se } f_{t,i} \leq 0 \text{ e } s_{t,i} > 0 \\ \infty & \text{se } s_{t,i} \leq 0 \end{cases} \quad [4.5]$$

onde: f_s é o fator de solitação;

f_t é resistência a tração;

s_t é a máxima tensão de tração.

- Fator de solitação do corpo (f_s), corresponde ao fator do nó mais solitado.

$$f_s = \min (f_{s,i}) \quad [4.6]$$

- Determinação do carregamento e do deslocamento correspondente

$$u_k = f_s^k u_0^k \quad [4.7]$$

$$F_k = f_s^k F_0 \quad [4.8]$$

- A próxima iteração é obtida abrindo-se a fissura no nó mais solitado (n_{ms}), onde

$f_{s,nms} = f_s^k$ e calculando-se a matriz de rigidez K^{k+1} .

Com o cálculo do fator de solitação descrito, determina-se a localização do nó mais solitado e, conseqüentemente, o ponto onde se inicia a abertura da fissura. A seqüência do processo de inclusão da fibra é descrita no capítulo subsequente.

4.6) Taxa de liberação de energia

A propagação da fissura requer uma determinada quantidade de energia, que é proveniente da liberação da energia de deformação armazenada no corpo, medida através da taxa de liberação de energia. Para efeito de simplificação, supõe-se um material perfeitamente elástico e linear, e que não há deformação permanente.

Na figura 4.2 [SILVA, 2000], estão representados os casos simplificados em que se tem apenas uma força e seu deslocamento correspondente, com condições de força prescrita (a) e deslocamento prescrito (b).

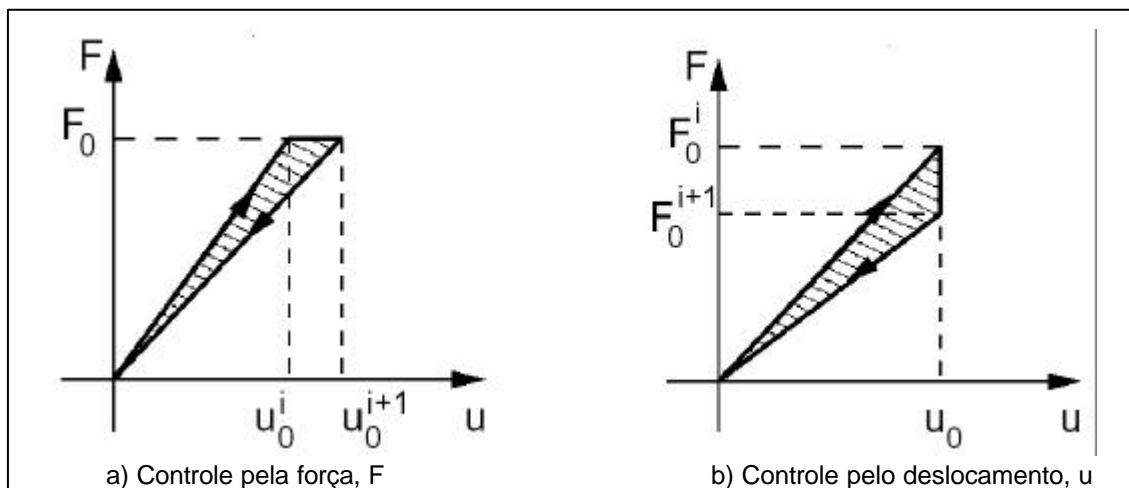


Figura 4.2 – Taxa de liberação de energia, [SILVA, 2000].

Verifica-se uma diferença entre o trabalho realizado pelas forças externas durante o carregamento e o trabalho realizado pelo corpo durante o descarregamento. Essa diferença está representada pela parte destacada na Figura 4.2, correspondendo à energia liberada pelo processo de fissuração, ou taxa de liberação de energia, G , expressa pela equação 4.9.

$$G = \frac{1}{2} F \frac{\partial u}{\partial A} - u \frac{\partial F}{\partial A} \quad [4.9]$$

onde: F é o vetor de forças externas;

u é o vetor de deslocamentos;

∂A é o incremento da fissura.

O cálculo de G é feito através de 4.9, aproximando-se as derivadas por diferenças finitas. Os deslocamentos, u^i , e as forças, F^i , são calculados no estágio inicial, a fissura é aberta e determina-se u^{i+1} e F^{i+1} no estágio final, obtendo-se, através da equação 4.10, a energia de fissuração:

$$G^i = \frac{1}{2} F^i \cdot \frac{u^{i+1} - u^i}{dA} - \frac{1}{2} u^i \cdot \frac{F^{i+1} - F^i}{dA} \quad [4.10]$$

O cálculo na iteração seguinte, $i+1$, é feito por um método iterativo onde os valores da iteração anterior passam a ser os valores do estágio inicial. Assim, calcula-se G^{i+1} de forma suficientemente econômica e geral [SILVA, 2000].

5) Implementação Numérica

5.1) Introdução

O programa base utilizado, apresentado no capítulo anterior, foi desenvolvido por SILVA [2000] e permite acompanhar a propagação de uma fissura discreta. O modelo foi implementado em um programa de elementos finitos para sua validação. A implementação aqui proposta pretende analisar os efeitos da inclusão de fibras de aço na matriz de concreto, seguindo os mesmos princípios dos elementos finitos para a validação do novo modelo.

Nessa implementação a fissura sempre abre num determinado nó, denominado nó mais solicitado, n_{ms} , e tem a tensão de tração do concreto como critério de escolha do local da abertura. Devido ao caráter elasto-frágil da relação constitutiva, todos os cálculos são feitos em regime elástico linear, uma vez que, entre as iterações, o corpo é sempre considerado íntegro, não sendo necessário que o carregamento seja feito em passos de carga, pois o controle do método se faz pelo progresso da fissuração [SILVA, 2000].

A cada incremento é aplicado um carregamento, desta forma determina-se a tensão de tração em todos os nós e conseqüentemente, um fator de sollicitação, calculado de acordo com o procedimento descrito no item 4.5 do capítulo anterior. Assim sendo fica definida a localização do nó mais solicitado (que corresponde ao menor fator de sollicitação) onde ocorre a abertura da fissura e posterior separação dos elementos.

5.2) Separação dos elementos

Esta breve introdução é uma descrição sucinta da implementação de Silva. Um dos objetivos desse trabalho é intervir no processo de propagação através da inclusão de fibras que costuram as fissuras a medida em que elas vão surgindo.

Dando prosseguimento ao processo de separação dos elementos, para cada nó candidato a abrir, correspondente ao n_{ms} , determina-se a direção fictícia da

fissura, definida como perpendicular à direção da maior tensão de tração formando uma linha hipotética que passa pelo nó e segue a direção de uma fissura imaginária.

A direção fictícia da fissura, ângulo g , está ilustrada na figura 5.1 e é calculada com as tensões atuantes nos nós. O ângulo q (figura 5.1-a), é formado pela bissetriz das arestas dos elementos ligados ao n_{ms} , e separa os elementos em dois grupos distintos que indicam a direção em que a fissura vai se propagar. Pequenas alterações na topologia da malha são necessárias (figura 5.1-c) para que a fissura se aproxime o melhor possível de um caminho ideal de propagação.

Na determinação do ângulo q pode acontecer dos elementos pertencerem todos a um mesmo grupo, ou ainda estarem todos do mesmo lado da borda da fissura, neste caso, os elementos são todos marcados com o mesmo sinal, e isto significa que a fissura não poderá se propagar nessa direção. Assim, o próximo n_{ms} é selecionado e o processo de determinação de uma direção de propagação e separação dos elementos é repetido até que se encontre uma direção em um nó que permita que a fissura se propague.

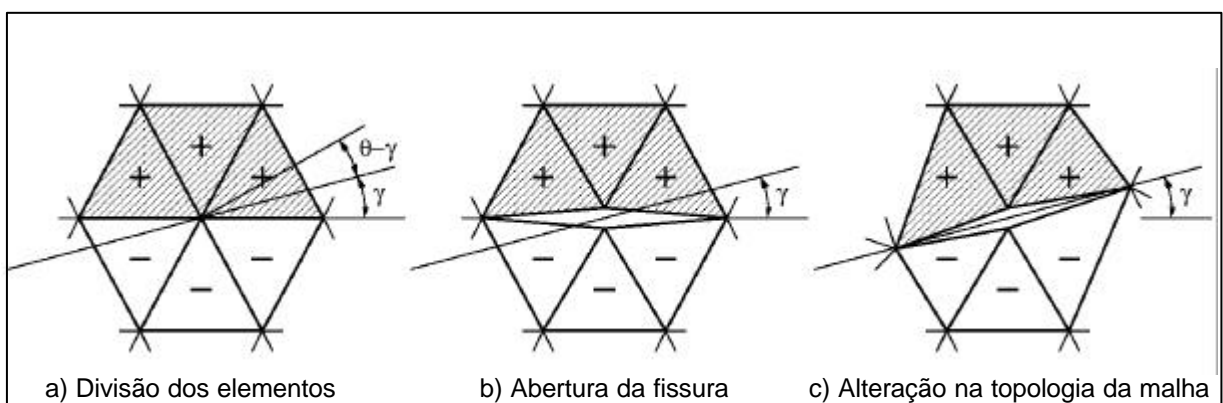


Figura 5.1 – Separação dos elementos na malha de elementos finitos [SILVA, 2000]

Com a direção determinada e os elementos separados, cria-se um “nó sombra”, n_{s1} , com as mesmas coordenadas do n_{ms} . Pode-se dizer que esse é o local onde se inicia a fissura. As conectividades dos elementos são alteradas, um grupo permanece ligado ao n_{ms} , e outro grupo tem suas conectividades mudadas para o novo nó criado. Nesse momento, define-se também a ponta da fissura, n_{pf} , que é o nó que se encontra na ponta da aresta do elemento por onde a fissura se propaga. Esse n_{pf} é movido para uma melhor adequação da topologia da malha à direção de propagação da fissura. A alteração das coordenadas do n_{pf} é feito com o auxílio da equação 5.1 que levam em conta a direção preferencial de propagação, ângulo g . O

sinal \pm que aparece na fórmula é definido pelo ângulo q , que indica a direção para o qual o nó deverá ser movido.

$$\begin{aligned} \text{coord}(x)^{npf} &= \text{coord}(x)^{nms} \pm dA \cdot \cos g \\ \text{coord}(y)^{npf} &= \text{coord}(y)^{nms} \pm dA \cdot \text{sen } g \end{aligned} \quad [5.1]$$

onde: $\text{coord}(x)^{npf}$ é a coordenada em x do n_{pf} depois de movido;

$\text{coord}(y)^{npf}$ é a coordenada em y do n_{pf} depois de movido;

$\text{coord}(x)^{nms}$ é a coordenada em x do n_{ms} ;

$\text{coord}(y)^{nms}$ é a coordenada em y do n_{ms} ;

dA é o incremento do comprimento da fissura.

Após o n_{pf} ser movido, mais um nó, n_{s2} , é então criado e incluído na malha de elementos finitos, na posição antiga do n_{pf} , da mesma forma que o anteriormente criado em cima do n_{ms} . Os elementos são mais uma vez separados em grupos e tem suas conectividades alteradas. Nesse ponto a fibra é propriamente incluída. A figura 5.2 ilustra os nós envolvidos no processo de abertura e o posicionamento da fibra como um novo elemento na malha.

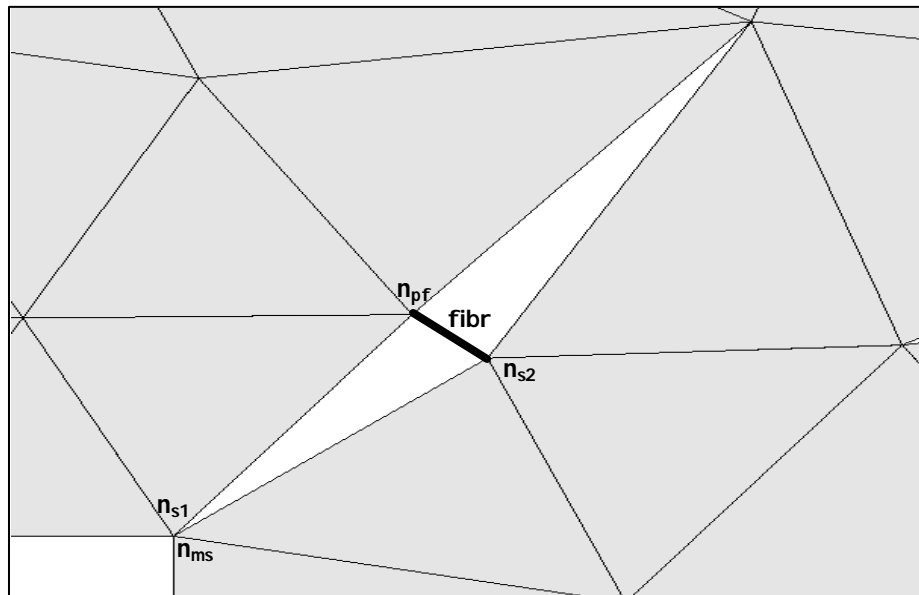


Figura 5.2 - Inserção do elemento de treliça na malha

Observa-se que todo o processo descrito nessa seção para a criação dos novos nós e separação dos elementos é feito numa mesma etapa de carregamento, levando a formação da fissura.

A abertura provoca um processo de concentração de tensões na ponta da fissura, como descrito no capítulo 2, levando a uma ruptura localizada. A inclusão da fibra nesse momento visa reduzir essa concentração e analisar numericamente essa influência, é objetivo dessa implementação.

5.3) Inclusão do elemento de aço

Este trabalho considera apenas a inclusão de fibras de alto módulo. Isso é devido aos efeitos benéficos proporcionados no pós-pico do material e seu papel como controlador de fissuras. A fibra de aço é o exemplo mais conhecido entre as de alto módulo. As fibras de baixo módulo tem aspectos que um elemento de barra não pode reproduzir. A diferença entre os comportamentos das fibras de alto e baixo módulo pode ser revisto na seção 2.1 do capítulo 2.

Portanto, a fibra incluída quando a fissura é abertura, é, na realidade, um elemento de treliça com propriedades mecânicas iguais as do aço, e são essas propriedades, módulo de elasticidade e resistência à tração, que promovem uma redistribuição de tensões na estrutura. O alto módulo da fibra provoca uma transferência de esforço do concreto para o aço, proporcionando um alívio das tensões no concreto e impedindo a fissura de se propagar. Pode-se dizer que a fibra funciona como se estivesse "costurando" as bordas da fissura, de forma que, quando acionada, oferece maior resistência, muito superior à resistência do concreto, impedindo a propagação da fissura. Esquemáticamente essa "costura" propiciada pela ação das fibras pode ser entendida com o auxílio da figura 5.2, apresentada anteriormente.

O elemento de aço incluído tem como conectividade o n_{pf} e o último nó criado, n_{s2} , suas características básicas, a serem usadas no cálculo da matriz de rigidez, são o comprimento e a direção.

O comprimento da fibra é calculado com as coordenadas do n_{pf} antes e depois de ser movido. Com relação a direção, considera-se neste trabalho, que a fibra se encontra sempre na direção perpendicular à fissura, ou seja, a direção da

fibra é a mesma direção da maior tensão de tração, utilizada anteriormente na determinação do ângulo θ . Os co-senos diretores da fibra são então calculados para serem usados posteriormente no cálculo da matriz de rigidez do elemento de aço.

Os cálculos necessários à inclusão da fibra serão apresentados mais adiante na seção 5.4.

É importante lembrar que, nessa etapa de execução do algoritmo, os deslocamentos dos nós já foram calculados através da resolução do sistema de equações. Assim, na medida em que são inseridos novos nós na malha de elementos finitos, são atribuídos a esses novos nós deslocamentos iguais aos dos nós originais (anteriormente definidos como n_{ms} e n_{pf}).

Em termos computacionais, a próxima etapa de execução é definida como “congelada”, pois é utilizada apenas para o cálculo da taxa de liberação de energia. Assim, como são atribuídos aos nós que representam a fibra os mesmos deslocamentos, esta só será ativada na próxima etapa de carregamento.

A resolução do sistema de equações é feita conforme os princípios básicos do MEF. A matriz de rigidez do elemento de aço é calculada com os co-senos diretores, o módulo de elasticidade, a área da seção transversal e o comprimento da fibra. O módulo e a área são valores constantes relativos ao aço utilizado. Com relação ao comprimento da fibra, explica-se que pode ser determinado ou tomado como valor constante, conforme o tipo de simulação utilizada. Em modelos que consideram a contribuição da tensão de aderência, a determinação do comprimento colaborador é fundamental. No caso atual, onde só a tensão de tração é levada em consideração, a influência é menor, porém continua importante pois intervém no cálculo do gradiente de deformação do elemento.

A presença da fibra provoca uma redistribuição das tensões atuantes na estrutura, afetando conseqüentemente os deslocamentos. Os nós com conectividade no elemento de barra apresentam nas próximas etapas de carregamento tensões superiores às tensões admissíveis do concreto. No algoritmo de cálculo estes nós são penalizados não podendo mais se candidatar a nó mais solicitado. Mas o principal efeito da inclusão da fibra, é evidenciado na localização do novo n_{ms} , que difere da ponta da fissura da etapa de carregamento anterior, ou seja, devido ao alívio das tensões o novo fator de sollicitação calculado indica que o n_{ms} se localize num ponto distante da fissura já aberta, caracterizando o fim da propagação da fissura, e o início de uma nova fissura em outra região do domínio.

5.4) Implementação computacional

Nesta seção serão descritos alguns aspectos julgados importantes para a implementação do algoritmo num programa escrito em linguagem de programação *FORTRAN*.

A figura 5.3 apresenta um organograma do algoritmo do programa mostrando a seqüência de execução da implementação. São apresentados também alguns detalhes inerentes ao programa original de Silva.

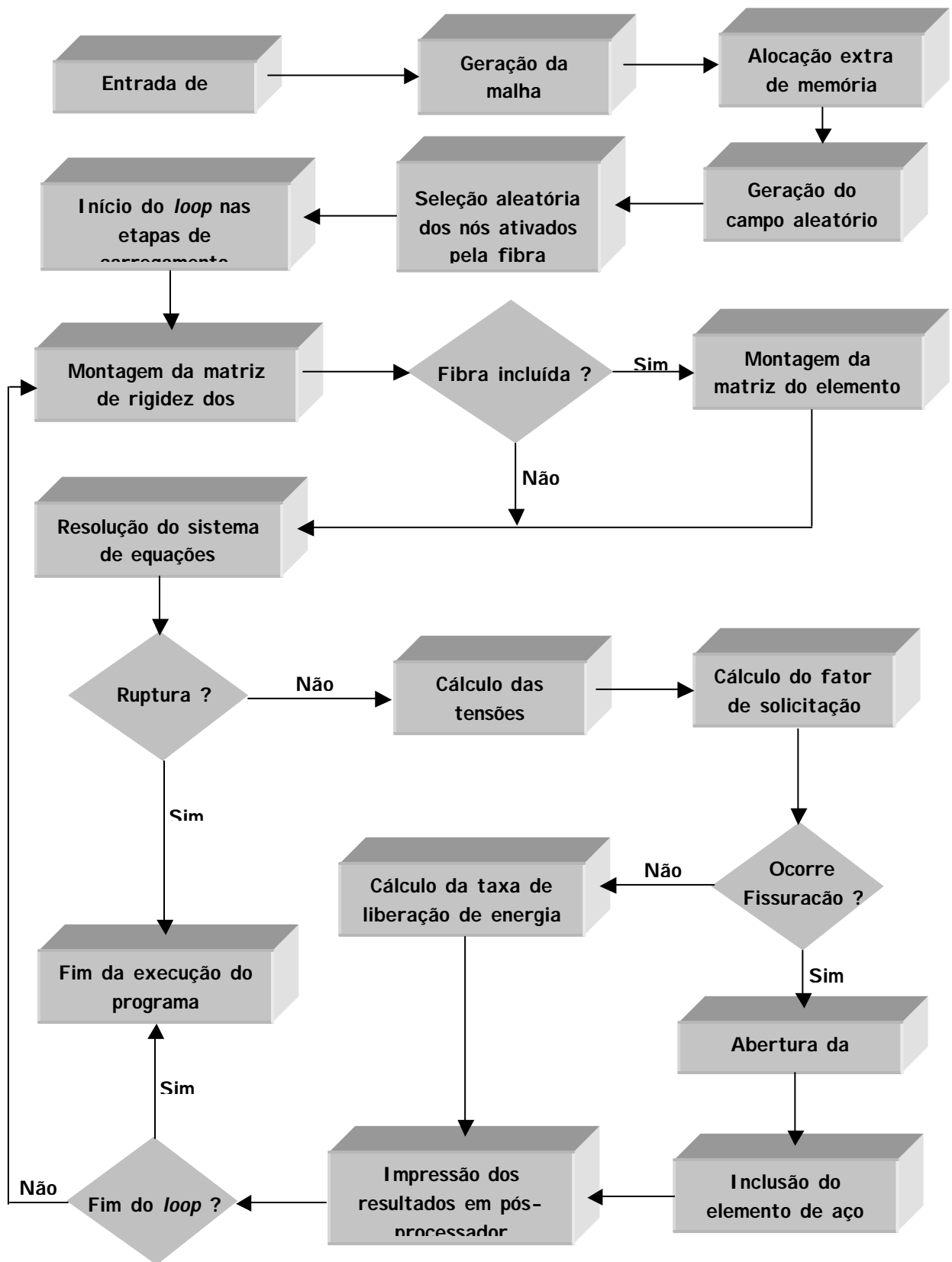


Figura 5.3 – Organograma de execução do programa

➤ **Entrada de dados** – O programa faz a leitura dos dados necessários a sua execução, como os dados para a geração da malha, do campo aleatório, número de iterações, entre outros.

➤ **Geração da malha** – A estrutura a ser analisada é discretizada em uma malha de elementos finitos através de um pré-processador, *GID*. O programa gera os nós com suas coordenadas e os elementos com suas conectividades, escrevendo esses dados em um arquivo que posteriormente é lido pelo compilador *FORTRAN*. A malha obtida pode ser tão refinada quanto se queira com o objetivo de se obter resultados mais apurados. Entretanto, sabe-se que quanto mais refinada for a malha maior o esforço computacional necessário. Nesse trabalho foi feito um estudo preliminar de convergência da discretização da malha. Assim, pôde-se determinar um nível de refinamento de forma que se obtivessem resultados satisfatórios e, refinando-se ainda mais a malha, os resultados não se mostraram tão mais apurados em relação aos anteriores, de forma a se compensar o aumento no número de nós e de elementos.

➤ **Alocação extra de memória** – A criação de novos nós e a inclusão de novos elementos significam também maior espaço em memória para alocar os dados referentes a cada uma destas entidades. Como não é conhecido de antemão a quantidade de nós e de elementos que serão incluídos, um algoritmo é feito para reservar um espaço equivalente ao dobro do número de nós e de elementos da malha.

➤ **Geração do campo aleatório** – Nesse ponto é gerado propriamente o campo aleatório. O procedimento requer bastante memória, que pode ser desalocada após a geração, e pode ser visto com mais detalhes no item 4.4 do capítulo anterior e na referência original de Silva. É importante salientar a modificação feita em relação ao trabalho original no sentido da geração dos valores das propriedades, módulo de elasticidade e resistência à tração. Observou-se que a geração das propriedades pelo modelo probabilístico apresentado era pouco aleatória, resultando em valores, de resistência à tração e módulo, muito próximos à média. Optou-se por implementar um procedimento que fosse mais aleatório, a fim de representar melhor a heterogeneidade do concreto. Assim, através de um valor

médio e de um desvio em relação ao mesmo, obtiveram-se valores que representam melhor o comportamento aleatório desejado.

➤ **Seleção aleatória dos nós ativados pela fibra** – O comportamento aleatório da inclusão das fibras de aço em uma matriz de concreto deve ser representado, com o objetivo de definir uma quantidade aproximada de nós na malha que corresponda a um percentual de inclusão. Essa porcentagem é um dado do problema e, em geral, está na faixa entre 1 e 3% em peso ou em volume, dependendo dos critérios de dosagem. Uma situação seria avaliada como ideal se ocorresse uma distribuição uniforme deste percentual no volume de concreto, mas, sabe-se que é comum certas regiões do volume ficarem com mais fibras do que outras. Neste trabalho são consideradas duas situações: 1) *distribuição homogênea*, onde se supõe uma situação ideal em que todos os nós da estrutura são passíveis de serem ativados pela presença da fibra; 2) *distribuição aleatória*, onde somente um conjunto de nós, selecionadas aleatoriamente, fará parte de uma região contendo fibras.

A seleção aleatória dos nós ativados pela fibra é feita antes de começar o procedimento incremental e, essa distribuição se faz através de uma combinação de funções intrínsecas do compilador *FORTRAN* [HAHN, 1994], procedimento semelhante ao utilizado na determinação das propriedades do concreto.

A partir do percentual de inclusão, é definida uma quantidade de nós, selecionados aleatoriamente entre todos os da malha, e, após essa definição inicial, procede-se a determinação de uma região de influência da fibra.

A noção dessa região de influência se justifica em função da possibilidade de haver um aglomerado de fibras numa mesma região e, considerando-se a escala do modelo, possivelmente o comprimento de uma fibra pode transpassar mais de um elemento. Desta forma, seleciona-se adicionalmente uma região em torno de cada nó selecionado, isso é feito através da ativação de todos os nós pertencentes aos elementos ligados ao nó previamente escolhido. Com isso define-se a região de influência de uma fibra colocada em um nó selecionado.

Os nós, tenham sido selecionados, ou façam parte da região de influência, estão agora ativados pela presença da fibra. Todos os nós que não tenham sido

selecionados permitem a propagação da fissura, desde que atinja a tensão de fissuração. Os nós escolhidos no processo de distribuição aleatória são agora ditos ativados pela ação ou presença da fibra, e passam a representar as propriedades do aço.

➤ **Início do *loop* nas etapas de carregamentos** – Desse ponto em diante o programa é executado quantas vezes for o número de incrementos de carga, como definido na entrada de dados. O fim da execução pode se dar antes do fim do *loop*, indicando que a ruptura da estrutura foi atingida.

➤ **Montagem da matriz de rigidez dos elementos** – O cálculo da matriz de rigidez é feito conforme os princípios básicos do MEF. A matriz de rigidez de cada elemento é montada, depois cada uma delas é adicionada na matriz global.

➤ **Montagem da matriz do elemento de aço** – Após a inclusão de uma fibra, sua matriz de rigidez é também calculada e adicionada na matriz global. Ressalta-se que, tanto o cálculo da matriz de rigidez do elemento de aço, quanto o cálculo de suas propriedades, só são efetuados após o início da fissuração e conseqüente inclusão da fibra. Assim, algumas etapas do organograma, mostrado na figura 5.3, são realizadas apenas se houver inclusão de fibras na etapa anterior. A fibra é representada por um elemento de treliça de dois nós, cujos co-senos diretores e comprimentos são calculados durante a execução do algoritmo enquanto que outras características como a área da seção e o módulo, são dados de entrada do material aço. A matriz de rigidez do elemento de aço é de ordem 4×4 , onde 4 é o número de graus de liberdade para o tipo de elemento utilizado. A tabela 5.1 apresenta os coeficientes da matriz.

Tabela 5.1 – Equações para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de barra.

$S(1,1) = cx \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(1,2) = cx \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(1,3) = -cx \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(1,4) = -cx \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$
$S(2,1) = cy \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(2,2) = cy \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(2,3) = -cy \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(2,4) = -cy \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$
$S(3,1) = -cx \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(3,2) = -cx \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(3,3) = cx \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(3,4) = cx \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$
$S(4,1) = -cy \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(4,2) = -cy \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(4,3) = cy \cdot cx \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$	$S(4,4) = cy \cdot cy \cdot \frac{E \cdot A}{Fl}$

onde: $S(4,4)$ é a matriz de rigidez do elemento de aço;

cx é o co-seno diretor em x da direção da fibra;

cy é o co-seno diretor em y da direção da fibra;

E é o módulo de elasticidade do aço;

A é a área da seção da fibra;

Fl é o comprimento da fibra.

Com a determinação da matriz aproveita-se para calcular as forças internas e tensões presentes na fibra. Para tal, são usadas as equações 5.2 e 5.3 respectivamente:

$$Fi(4) = S(4,4) \cdot u(4) \quad [5.2]$$

onde: $Fi(4)$ é o vetor de forças internas do elemento de aço;

$u(4)$ é o vetor que contém os deslocamentos nos nós do elemento de aço.

$$Tensão(4) = \frac{Fi(4)}{A} \quad [5.3]$$

onde: $Tensão(4)$ é o vetor que contém as tensões do elemento de aço.

Observa-se que, na etapa de carregamento imediatamente após a inclusão da fibra, como os deslocamentos dos dois nós que a representam são iguais, suas forças internas e tensões são iguais a zero, caracterizando um

movimento de corpo rígido. Nas etapas seguintes a fibra se deforma de acordo com os deslocamentos calculados para os respectivos nós.

Após a montagem, a matriz do elemento de barra é adicionada a matriz de rigidez global.

➤ **Resolução do sistema de equações** – Os deslocamentos são calculados pela resolução de um sistema de equações lineares, que utiliza o vetor de forças aplicadas e o vetor que contém a matriz de rigidez da estrutura. A formulação utilizada pode ser mais bem entendida com o auxílio da equação 4.3, no item 4.5 do capítulo anterior.

➤ **Cálculo das tensões** – Após a resolução do sistema, operação que fornece os deslocamentos dessa etapa de carregamento, calculam-se as tensões nos nós dos elementos, conforme procedimento utilizado no programa original, exposto no capítulo 4. A parcela correspondente aos nós dos elementos de barra é calculada na montagem da matriz de rigidez da fibra e está descrita na equação 5.3. A equação 4.4, descrita no item 4.5, retrata o cálculo dos elementos triangulares.

➤ **Cálculo do fator de sollicitação** – Determina-se o nó mais sollicitado e conseqüentemente a localização do ponto onde se inicia a abertura da fissura, conforme descrito no item 4.5 do capítulo anterior.

➤ **Cálculo da taxa de liberação de energia** – O programa original de Silva possui um indicador que é ativado quando ocorre abertura da fissura, sinalizando que é necessária uma nova etapa apenas para o cálculo da energia de fissuração, G , etapa esta previamente definida como “congelada”. Assim, se houver sido aberta uma fissura na etapa anterior, o indicador identifica uma etapa para que o programa execute o cálculo de G . Optou-se por utilizar a mesma estratégia de cálculo do programa original, como descrito no item 4.6, através da equação 4.10.

➤ **Abertura da fissura** – Quando o indicador não sinaliza a abertura na etapa anterior, o programa executa uma rotina para a abertura da fissura propriamente dita. Pontos relevantes desse procedimento a essa implementação estão descritos na seção 5.2.

➤ **Inclusão do elemento de aço** – A inclusão da fibra é feita através da modificação da própria rotina de Silva. Foram feitas mudanças pertinentes para incluir o elemento de treliça como uma opção da biblioteca de elementos do programa. Aqui são ressaltados alguns aspectos em relação ao processo de inclusão em si. Vale ressaltar que um dos objetivos é manter o máximo possível a estrutura do programa original, optando-se por manter a inclusão da fibra como um *logical* que possa ou não funcionar de acordo com ativação do nó pela presença da fibra. Um algoritmo da metodologia efetuada para a inclusão é apresentado na seqüência:

- O processo se dá com o início da abertura da fissura na localização do n_{ms} e a determinação do ângulo de fissuração, como exposto na seção 5.2. O n_{pf} (nó da ponta da fissura) é movido para melhor aproximar a fissura a uma trajetória ideal de propagação, destacando que as coordenadas originais do n_{pf} são armazenadas para posteriormente serem usadas no cálculo do comprimento da fibra.

- Uma análise é feita quanto à presença da fibra no nó onde está sendo aberta a fissura; caso este nó tenha sido selecionado no processo aleatório inicial indica-se a inclusão da fibra, caso não, o algoritmo de propagação é acionado conforme a versão original do programa. A fissura tende a se propagar pelo n_{pf} e assim sucessivamente nas etapas seguintes até encontrar um nó ativado pela fibra.

- Considerando que o n_{pf} tenha sido selecionado para ter fibra, o processo de separação dos elementos e alteração das conectividades é realizado novamente e o elemento de aço é incluído com conectividade no n_{pf} e no novo nó criado.

- Nesse momento é possível calcular o comprimento da fibra incluída, levando em conta as coordenadas do n_{pf} antes e depois de ser movido. A equação 5.4 é usada para a determinação do comprimento da fibra.

$$Fl = \sqrt{\left(\text{coord}(x)^{n_{pf}} - \text{old}(x)^{n_{pf}}\right)^2 + \left(\text{coord}(y)^{n_{pf}} - \text{old}(y)^{n_{pf}}\right)^2} \quad [5.4]$$

onde: Fl é o comprimento da fibra;

$\text{coord}(x)^{n_{pf}}$ é a coordenada em x do n_{pf} depois de ser movido;

$\text{coord}(y)^{n_{pf}}$ é a coordenada em y do n_{pf} depois de ser movido;

$\text{old}(x)^{n_{pf}}$ é a coordenada em x do n_{pf} antes de ser movido;

$\text{old}(y)^{n_{pf}}$ é a coordenada em y do n_{pf} antes de ser movido.

- Visto que a direção da fibra é perpendicular a direção de propagação da fissura, ou seja, coincidente com a direção da maior tensão de tração, o cálculo dos co-senos diretores da fibra é realizado com as coordenadas do n_{ms} , do n_{pf} e do incremento do comprimento da fissura. Para simplificação dos cálculos usa-se como estratégia calcular os co-senos diretores da direção da fissura (equação 5.5), e, como é perpendicular a direção da fibra, inverter os eixos para chegarmos aos co-senos da direção da fibra (vide equação 5.6).

$$\cos \text{dir}(x, y)^{\text{fissura}} = \frac{\text{coord}(x, y)^{n_{pf}} - \text{coord}(x, y)^{n_{ms}}}{dA} \quad [5.5]$$

onde: $\cos \text{dir}(x, y)^{\text{fissura}}$ são os co-senos diretores da direção da fissura;

$\text{coord}(x, y)^{n_{ms}}$ são as coordenadas (x,y) do nó n_{ms} ;

dA é o incremento do comprimento da fissura.

$$\cos \text{dir}(x, y)^{\text{fibra}} = \cos \text{dir}(y, x)^{\text{fissura}} \quad [5.6]$$

onde: $\cos \text{dir}(x, y)^{\text{fibra}}$ são os co-senos diretores da direção da fibra.

- Com a fissura já aberta, o comprimento e a direção calculados, o novo elemento é incluído, assim alguns parâmetros são atualizados, como o número total de elementos, o tipo de material correspondente ao elemento incluído, a conectividade dos elementos, entre outros.

- Após a inserção do novo elemento o programa segue normalmente suas rotinas de execução.

➤ **Impressão dos resultados em pós-processador** – Com a inclusão da fibra e a alteração das coordenadas de alguns nós, a malha de elementos finitos é modificada. A cada iteração essa nova malha é impressa e pode ser visualizada através de um pós-processador, o próprio *GID*, onde são mostrados também os resultados relativos aos deslocamentos e tensões impostas a estrutura.

5.5) Validação do programa

Com o fim da implementação, o programa é calibrado através da comparação dos resultados com um ensaio encontrado na literatura [ROSSI e WU, 1992] e também com os obtidos através do programa original de Silva, objetivando uma comprovação da alteração do comportamento do concreto, que passa a apresentar múltiplas fissuras em virtude da inserção das fibras.

Esses resultados, bem como todas as comparações realizadas são apresentadas no capítulo que se segue.

6) Resultados e discussões

6.1) Introdução

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho foi implementado em um programa de elementos finitos, levando em conta as considerações apresentadas nos capítulos anteriores. Para validar o modelo, foram analisadas e discutidas as tendências de alguns parâmetros: distribuição das fibras, propagação das fissuras, evolução das deformações, tensões nos materiais e evolução da curva $P \times d$. As análises são feitas através da comparação dos resultados obtidos com simulações encontradas na literatura, uma para concreto com fibras, [ROSSI e WU, 1992], outra para concreto convencional, [GALVEZ *et al.*, 1998]; sendo este último, o mesmo ensaio utilizado por Silva para validação de seu modelo.

De uma maneira geral, mais do que uma comparação, faz-se também um paralelismo entre a execução do programa original, que procura acompanhar o caminho de propagação, e o algoritmo aqui desenvolvido, onde o objetivo é impedir essa propagação.

Entretanto, cabe ressaltar que em virtude do caráter aleatório do modelo, alguns resultados podem apresentar pequenas discrepâncias quando comparados aos obtidos por Rossi ou mesmo por Silva. Este fato é plenamente aceitável devido à aleatoriedade dos valores atribuídos a resistência à tração e ao módulo, e também a distribuição das fibras.

6.2) Simulação em concreto com fibras

Nesta seção é simulado o modelo encontrado em ROSSI e WU [1992] de uma viga submetida ao ensaio de flexão de quatro pontos. A figura 6.1 mostra a geometria e condições de contorno da viga simulada.

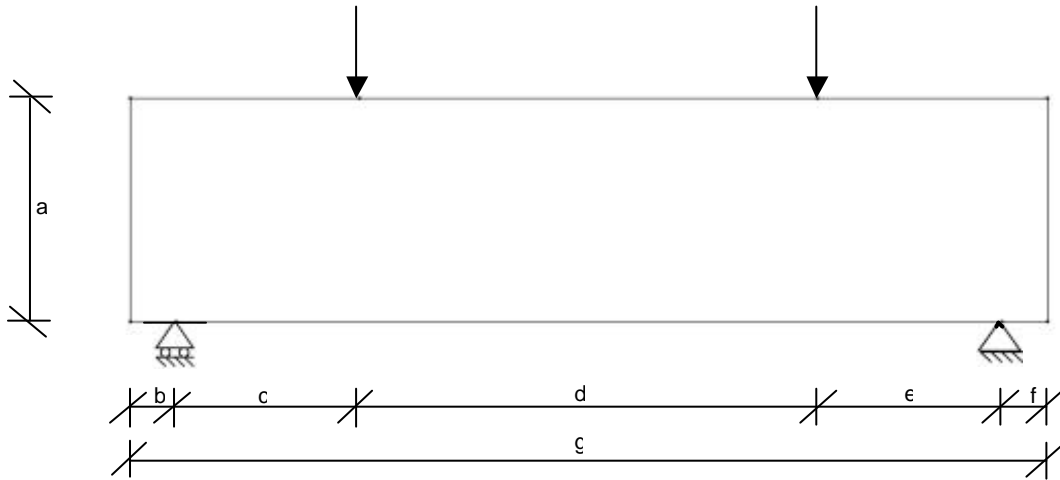


Figura 6.1 – Geometria e condições de contorno da viga simulada

A tabela 6.1 apresenta as dimensões, em *cm*, do corpo de prova usado nas simulações. As forças indicadas têm magnitude de 1 *KN* cada, e são aplicadas a cada etapa de carregamento.

Tabela 6.1 – Dimensões da figura 6.1

a	b	c	d	e	f	g
10,0	2,0	8,0	20,0	8,0	2,0	40,0

Já na tabela 6.2 são encontradas as características do concreto e da fibra utilizados na simulação, além do intervalo de variação em torno da média das propriedades do concreto, módulo e resistência. Como assinalado anteriormente, leis constitutivas lineares-elásticas são consideradas para todos os materiais.

Tabela 6.2 – Características do concreto e da fibra usadas na simulação

Características do concreto	
Desvio relativo (%)	40
Módulo de elasticidade (MPa)	21000
Resistência à tração (MPa)	2,4
Peso específico (N/mm ³)	0,000026

Características da fibra	
Área da seção (mm ²)	0,5
Módulo de Elasticidade (MPa)	210000
Resistência à tração (MPa)	500

A figura 6.2 mostra a malha de elementos finitos usada na discretização do concreto. Foram utilizados 226 elementos triangulares de 3 nós.

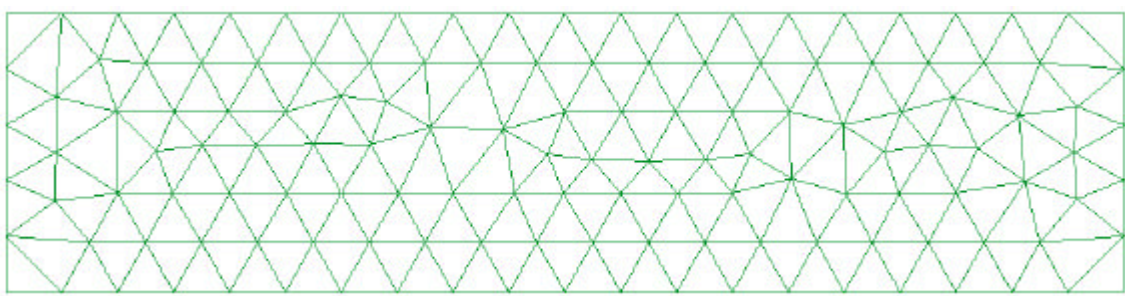


Figura 6.2 – Discretização em elementos finitos do exemplo da figura 6.1

O resultado obtido por Rossi em seu trabalho é mostrado na figura 6.3 [ROSSI e WU, 1992]. No gráfico são vistos os resultados para simulações em concreto convencional e com reforço de fibras de metal (MFRC).

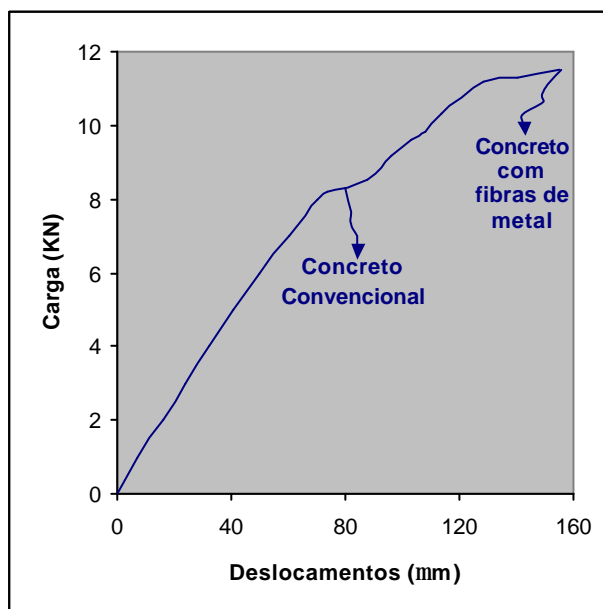


Figura 6.3 – Curva $P \times d$ para os dois concretos simulados extraída do trabalho de Rossi.

As curvas $P \times d$ para as simulações realizadas em concreto convencional e com fibras do modelo proposto são mostradas na figura 6.4. As

curvas obtidas mostram-se bem satisfatórias quando comparadas à obtida por Rossi tanto para a simulação em concreto convencional quanto para a simulação reforçada com fibras de metal.

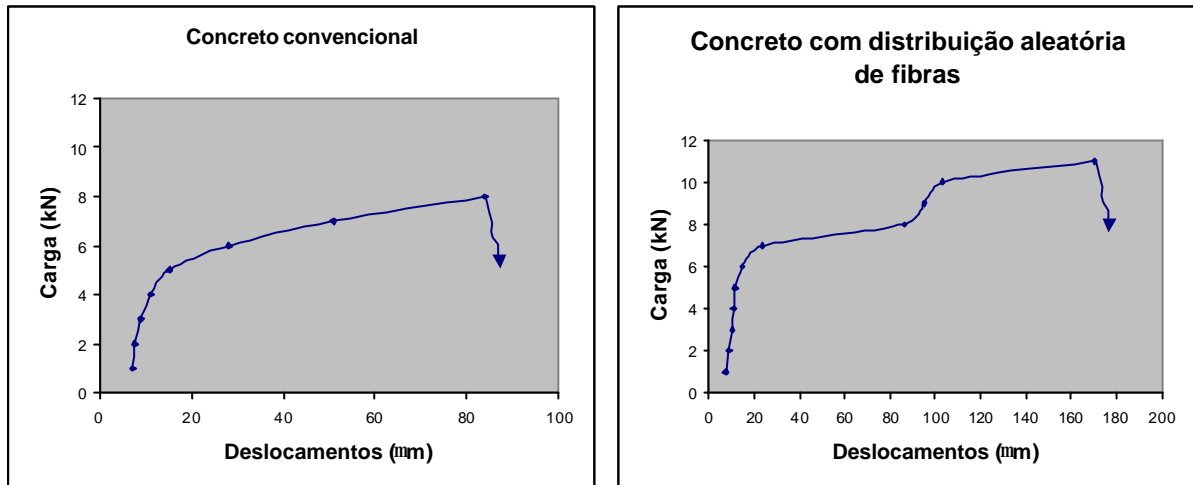


Figura 6.4 – Curvas $P \times d$ para as simulações realizadas.

Algumas diferenças são percebidas principalmente quanto à carga última aplicada em ambas as simulações, o que pode ser facilmente explicado devido ao caráter aleatório do modelo aqui proposto. Este fato é fortemente evidenciado na simulação em concreto com fibras, pois além da aleatoriedade atribuída às resistências e aos módulos, existe também o processo de seleção aleatória dos nós ativados pela presença da fibra. O patamar presente na curva indica a propagação de uma fissura na etapa de carregamento correspondente.

São apresentados agora os resultados obtidos nas simulações realizadas apenas com o modelo desenvolvido neste trabalho. Isto é feito para que se tenha um padrão de comparação entre as formas de simulação propostas. Três casos distintos são definidos conforme mostrados na tabela 6.3.

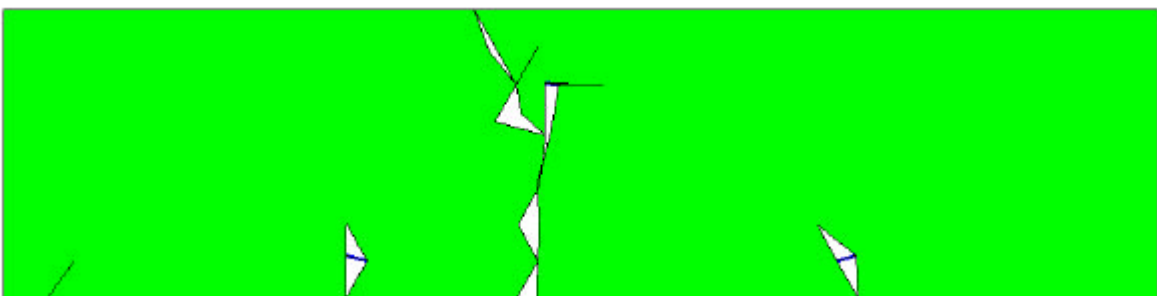
Tabela 6.3 – Tipos de simulações realizadas

Tipo de Simulação	Tipo de concreto	Número de etapas de carregamento
A	Convencional, sem inclusão de fibras	7
B	Com distribuição aleatória de fibras, alguns nós da malha estão ativados pela presença da fibra, outros não	10
C	Com inclusão total de fibras, supõe-se que todos os nós da malha são ativados pela fibra	13

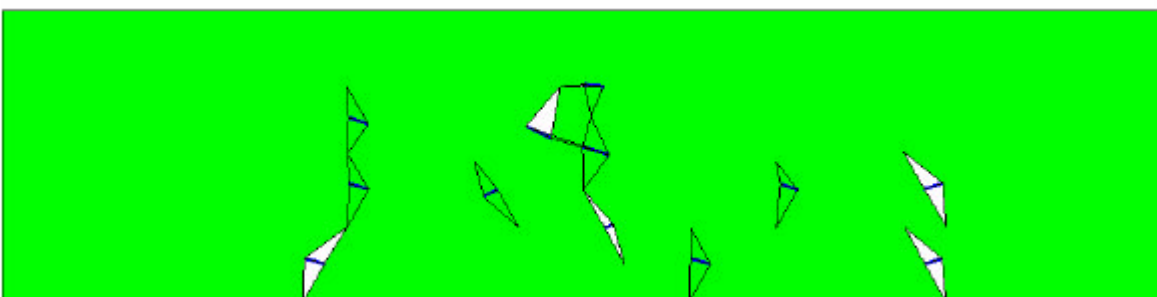
A figura 6.5 mostra os contornos da abertura de fissura para os três casos mencionados. Nas três simulações são adotadas as mesmas características para os materiais e as mesmas condições de contorno, adotando o mesmo esquema para a visualização dos resultados.



a) abertura de fissura, caso A



b) abertura de fissura, caso B



c) abertura de fissura, caso C

Figura 6.5 – Contornos da abertura das fissuras para as três simulações realizadas

Na região onde ocorre a fissuração, as linhas em azul representam as fibras, as regiões delimitadas são as fissuras abertas e seu preenchimento, na cor verde ou branca, diferem apenas em termos numéricos. A figura 6.6 mostra a fissuração da viga em termos de propagação das fissuras.



a) Propagação das fissuras, caso A



b) Propagação das fissuras, caso B



c) Propagação das fissuras, caso C

Figura 6.6 – Propagação das fissuras para as três simulações realizadas

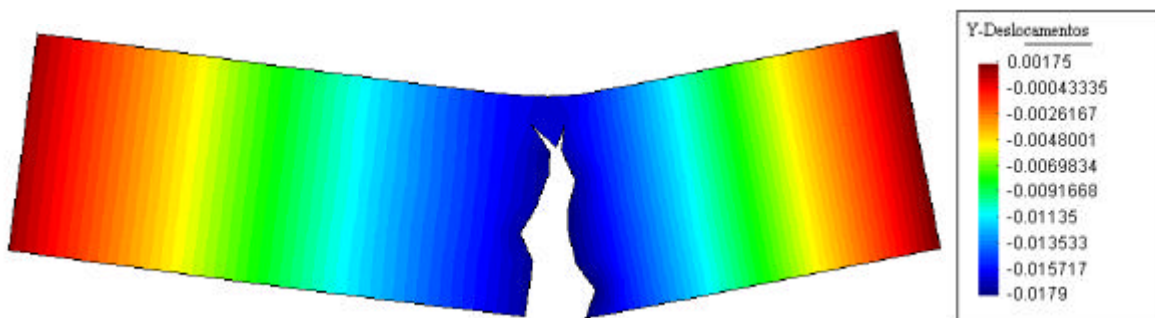
Destaca-se ainda nos itens *b* e *c*, das figuras 6.5 e 6.6, que cada fissura é aberta de acordo com a evolução das etapas de carregamento, em locais

distintos, não necessariamente na mesma seqüência de propagação; diferentemente do apresentado no item *a* das referidas figuras, que mostram a trajetória da propagação das fissuras.

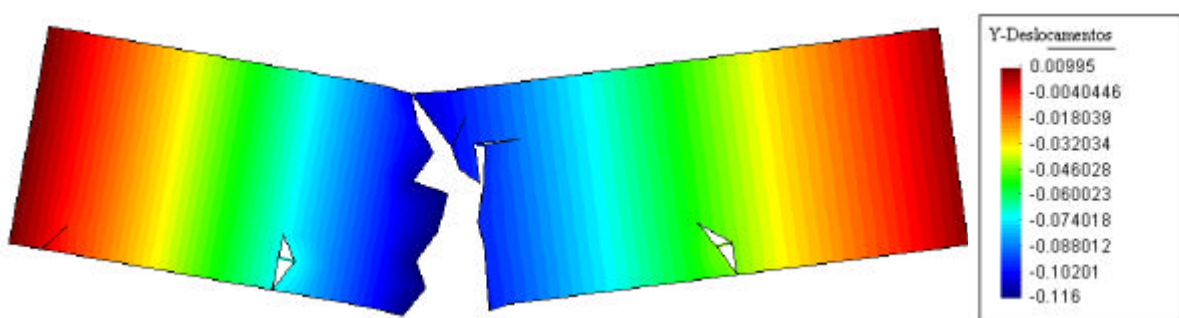
O concreto convencional, sem inclusão de fibra, mostra um padrão de fissuração discreta. De fato, a fissura, uma vez aberta, se propaga gradualmente, pois, como analisado por Bazant e Planas [1998], forma-se uma zona de processamento da fratura (FPZ) que acompanha a ponta da fissura, resultando em uma única fissura grande, como em 6.5-a. A figura 6.5-c, que pode ser considerada um caso ideal, onde qualquer fissura estaria sendo costurada pela presença de uma fibra, exhibe a formação de múltiplas fissuras pequenas que não progridem devido a ação inibidora das fibras. Neste caso, o padrão de fissuração é do tipo repartido.

Apesar do caso 6.5-c ser o desejável, em geral o que ocorre na realidade é o 6.5-b, onde alguns pontos do volume têm até concentração de fibras, enquanto outros ficam sem. Quando um destes pontos atinge a tensão de tração do aço, inicia-se a formação de uma fissura, que se propaga até encontrar uma região com fibra, resultando num padrão de fissuração que pode ser considerado como intermediário.

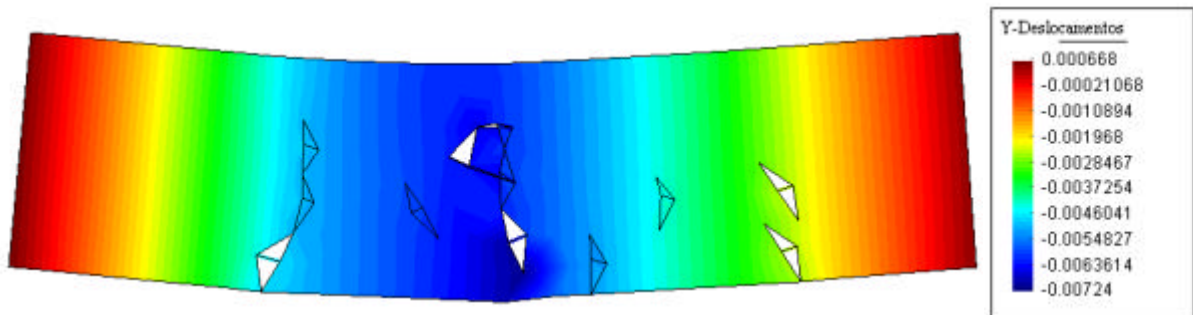
Dando seqüência à comparação dos resultados, a configuração deformada e os deslocamentos na direção *y* são apresentados na figura 6.7. A direção *y* foi escolhida para comparação em virtude da disposição do carregamento.



a) Configuração deformada e deslocamentos em *y*, caso A



b) Configuração deformada e deslocamentos em y, caso B



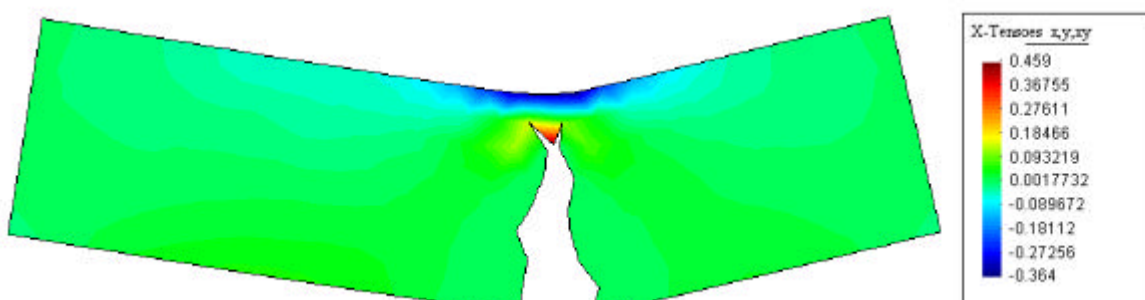
c) Configuração deformada e deslocamentos em y, caso C

Figura 6.7 – Deslocamentos na direção y para as três simulações realizadas

Observando a figura 6.7, dois fatores podem explicar a redução substancial dos valores de deslocamento com a presença das fibras. Por um lado, é evidente a contribuição das fibras com seu alto módulo, porém é importante observar também, que a presença da fibra preserva a seção do concreto, sobretudo no que diz respeito a redução da altura de penetração das fissuras, já que quanto maior for essa altura de penetração menor será a altura que colabora com a inércia da seção.

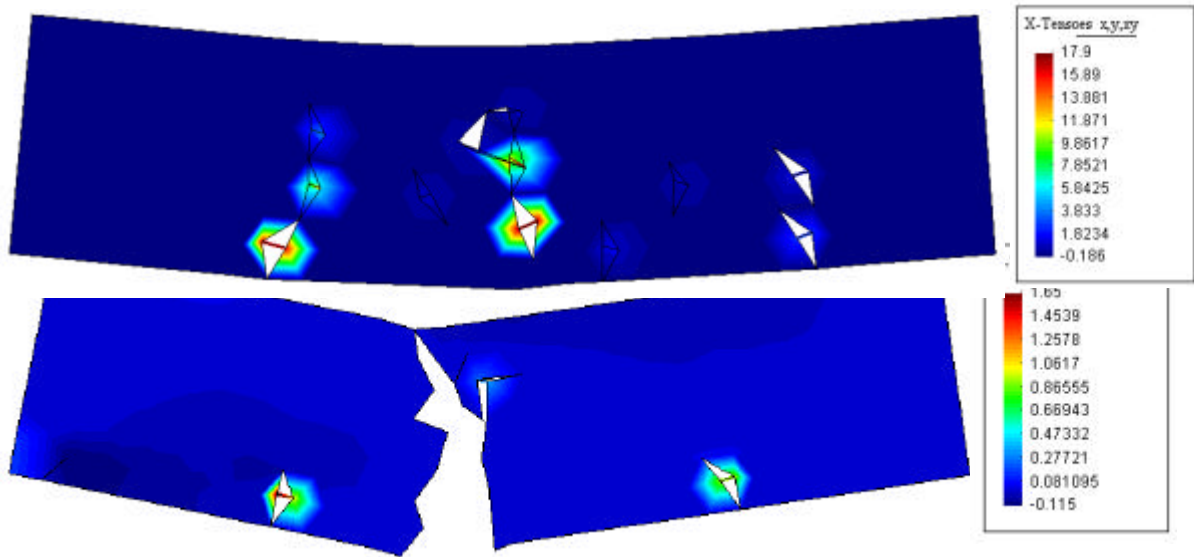
Outro fator de influência para os valores dos deslocamentos mostrados é o fato da estrutura ter atingido a ruptura em etapas de carregamentos distintas, como mostrado na tabela 6.3. Essa diferença na etapa onde ocorre a ruptura significa dizer que nos casos B e C a estrutura atinge maiores níveis de tensão, tensão esta que é transferida para as fibras, e mesmo assim apresentaram deslocamentos menores proporcionalmente.

Na análise das tensões pode ser observado o comportamento que reflete bem o princípio de ação das fibras, como explicado no item 2.2. As figuras 6.8 e 6.9 mostram a distribuição de tensões, σ_x e σ_y respectivamente, ao longo da viga para as simulações realizadas. Convenciona-se que as tensões positivas são de tração e as negativas de compressão.



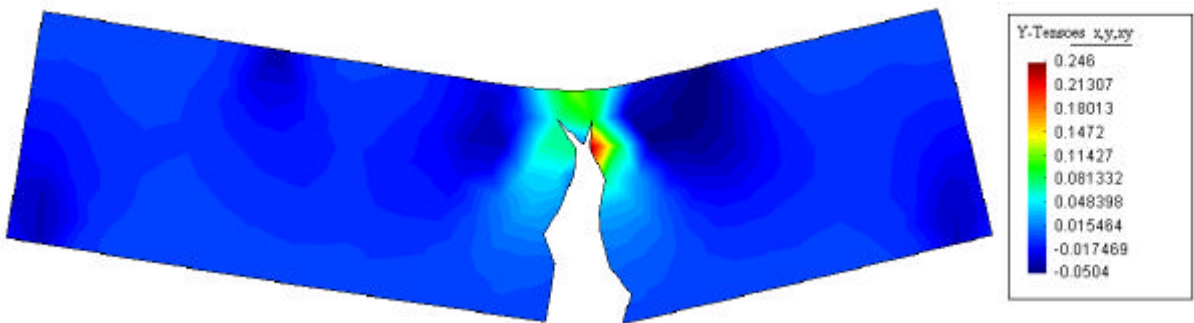
a) Tensões σ_x , caso A

b) Tensões σ_x , caso B

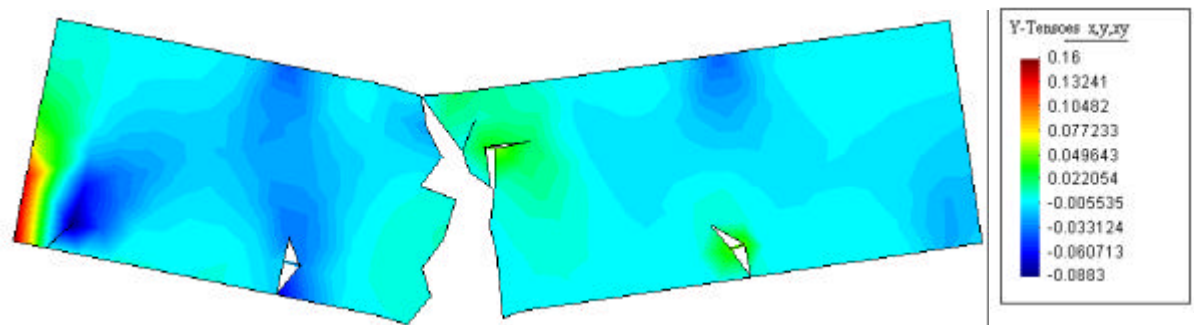


c) Tensões σ_x , caso C

Figura 6.8 – Distribuição de tensões σ_x para as três simulações realizadas



a) Tensões σ_y , caso A

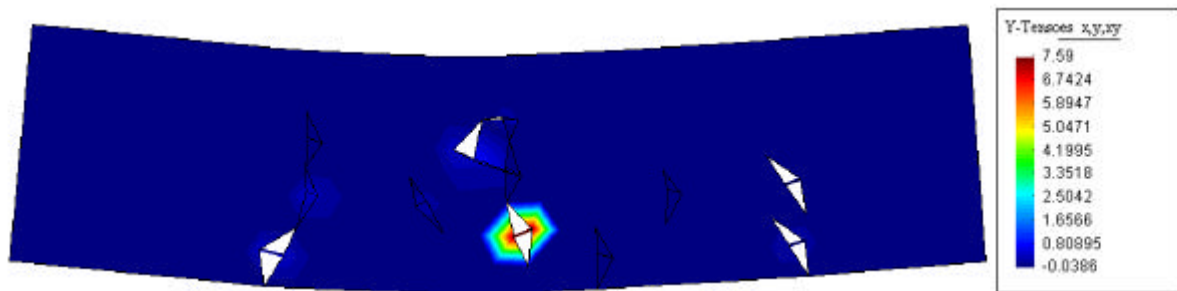


b) Tensões σ_y , caso B

c) Tensões σ_y , caso C

Figura 6.9 – Distribuição de tensões σ_y para as três simulações realizadas

A concentração de tensões, no caso do concreto convencional, é comprovada, com valores muito grandes que tendem a infinito na ponta da fissura, como previsto por Griffith [1924]. As linhas de tensões não se cortam, concentram-se



ao redor da ponta da fissura, causando a propagação. A presença da fibra na matriz permite estabelecer uma ponte, proporcionando uma transferência de tensões entre os lábios da fissura, e, conseqüentemente, um alívio na ponta. Na realidade, esta transferência é bem maior quando se considera o fenômeno de aderência, caso não analisado nesse trabalho.

Outro fato a considerar é que a presença da fibra de aço não aumenta substancialmente a resistência máxima da matriz, porém, melhora significativamente o comportamento pós-pico. Alguns valores elevados, observados nos itens *b* e *c* das figuras 6.8 e 6.9, correspondem ao elemento de barra que representa a fibra.

6.3) Simulação em concreto convencional

Outra análise é feita agora com a simulação do ensaio de GALVEZ *et al.* [1998], utilizado na validação do modelo de Silva. Um paralelo entre o programa original e o modelo desenvolvido neste trabalho é apresentado. Trata-se de um ensaio à flexão em uma viga com entalhe.

Pequenas modificações em relação ao original foram feitas nessa simulação para uma melhor comparação dos resultados em termos de deslocamentos, tensões e visualização da abertura da fissura. A figura 6.10 representa a geometria e condições de contorno usadas nas simulações.

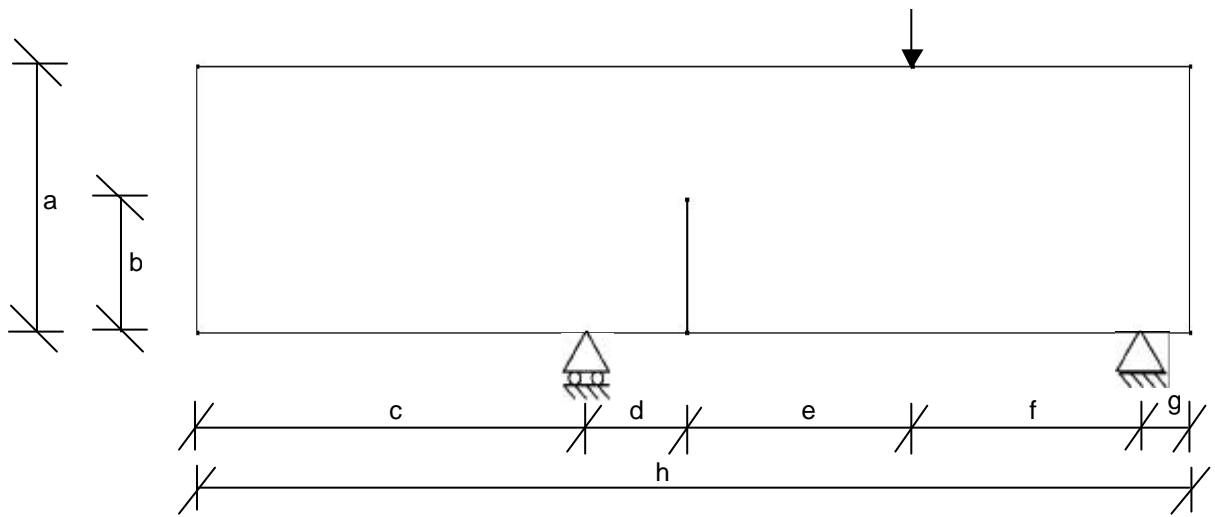


Figura 6.10 – Geometria e condições de contorno da viga com entalhe

As dimensões do corpo de prova, em *mm*, usado nas simulações são apresentadas na tabela 6.4. O carregamento utilizado é de 10 *N*.

Tabela 6.4 – Dimensões da figura 6.10

a	b	c	d	E	f	g	h
75,0	37,5	161,3	22,5	85,0	85,0	18,8	372,5

Alguns parâmetros foram definidos para o concreto e para a fibra a fim de serem usados na simulação. Estes parâmetros são os mesmos utilizados na simulação do exemplo anterior, e são apresentados na tabela 6.2.

A figura 6.11 mostra a discretização da estrutura na malha de elementos finitos, ressaltando um maior refinamento da malha na região central em virtude da presença do entalhe. Foram utilizados 444 elementos triangulares de 3 nós para representar o concreto.

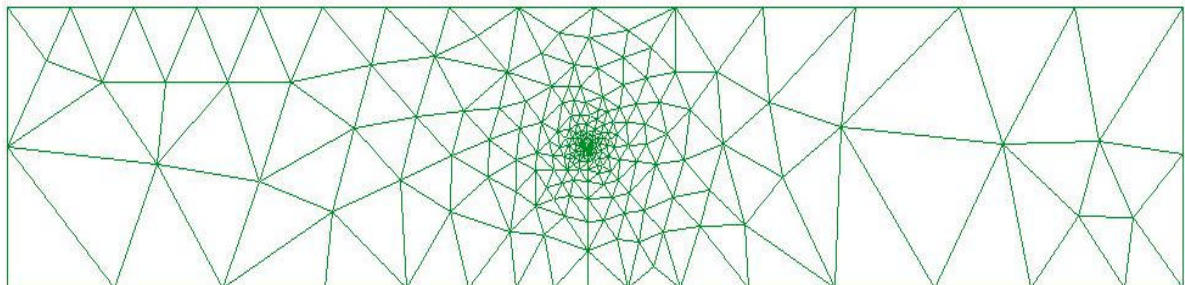


Figura 6.11 – Malha de elementos finitos da viga com entalhe

Para efeito de comparação todos os resultados serão apresentados de acordo com os mesmos casos definidos na tabela 6.3 da seção anterior, a exceção

do número de etapas de carregamento, que nessa simulação corresponde a 13 para os três casos.

Para uma comparação mais objetiva, foram adotadas nos três casos as mesmas características para os materiais, quando pertinentes, e o mesmo esquema de carregamento: valor e número de incrementos de carga. Os mesmos critérios foram adotados na visualização dos resultados.

Na figura 6.12 são apresentadas as configurações de abertura de fissura para as três simulações realizadas. Em destaque, a região onde ocorre a fissuração; as linhas em azul representam a fibra e as regiões delimitadas são as fissuras abertas.

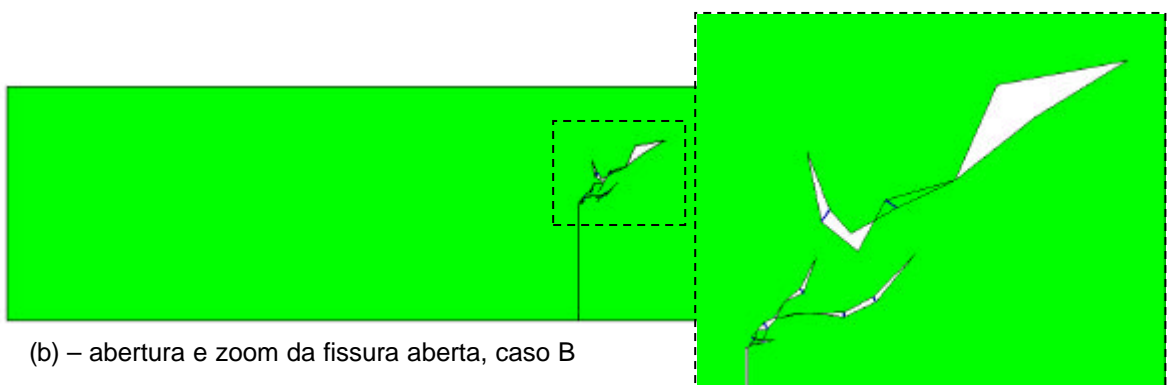
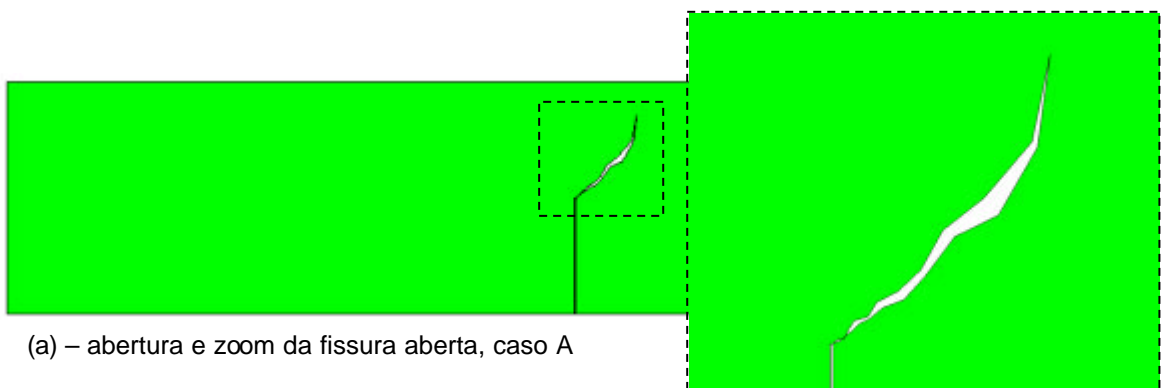
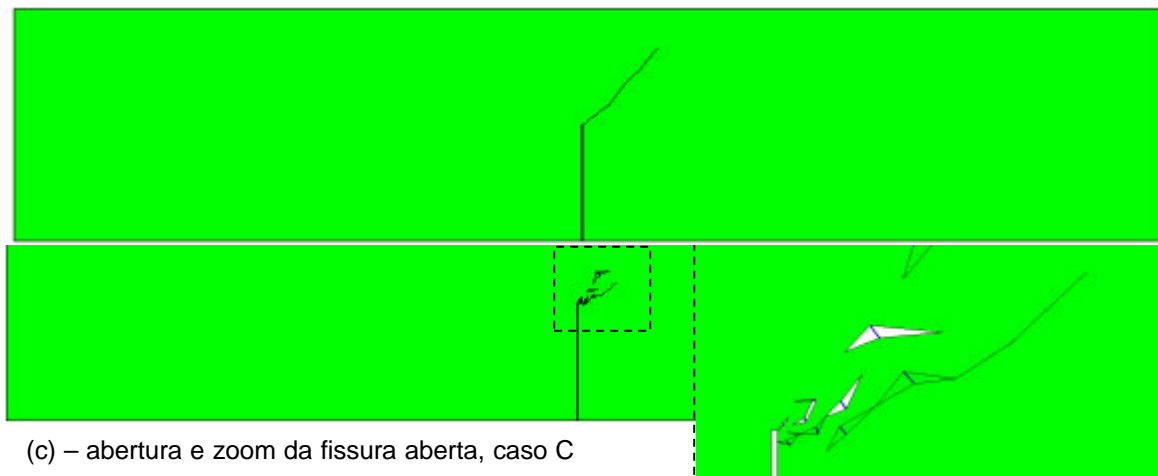


Figura 6.12 – Aberturas de fissura e zoom da região fissurada para as três simulações realizadas

A figura 6.13 mostra a fissuração da viga em termos de propagação das fissuras. Nesse exemplo ressalta-se a presença do entalhe, fato que potencializa a concentração de tensões na região de sua ponta, o que favorece a



fissuração nessa região. O entalhe funciona como uma descontinuidade onde se concentram as tensões, e, essas são de tal magnitude que mesmo o caráter aleatório da resistência não é suficiente para localizar o ponto de abertura em outro local.

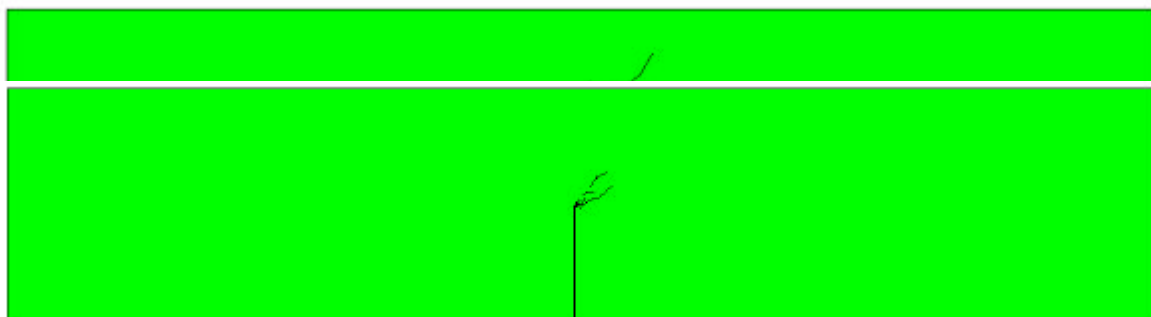
a) Propagação das fissuras, caso A

b) Propagação das fissuras, caso B

c) Propagação das fissuras, caso C

Figura 6.13 – Propagação das fissuras para as três simulações realizadas

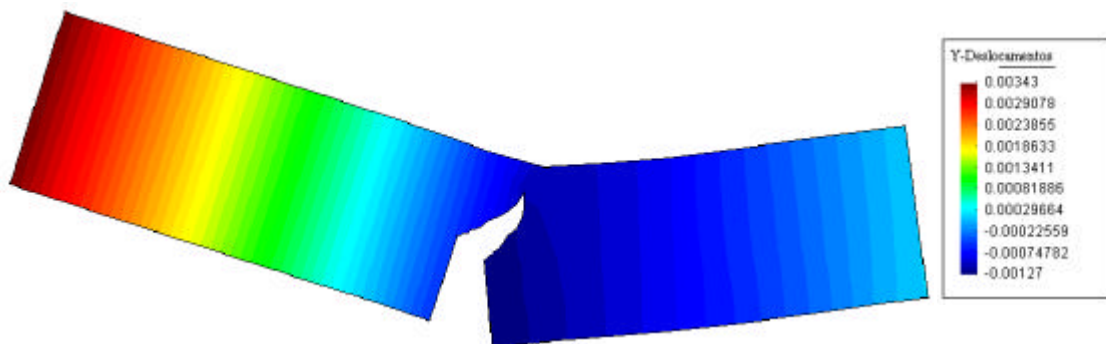
Mais uma vez, assim como no exemplo anterior, o concreto



convencional apresentou um comportamento discreto, o que já havia sido também demonstrado por Silva em seu trabalho, e a inclusão das fibras provocou uma

mudança no seu comportamento típico, passando a apresentar múltiplas fissuras distribuídas no volume da estrutura, nesse caso específico, numa zona de fissuração próxima ao entalhe.

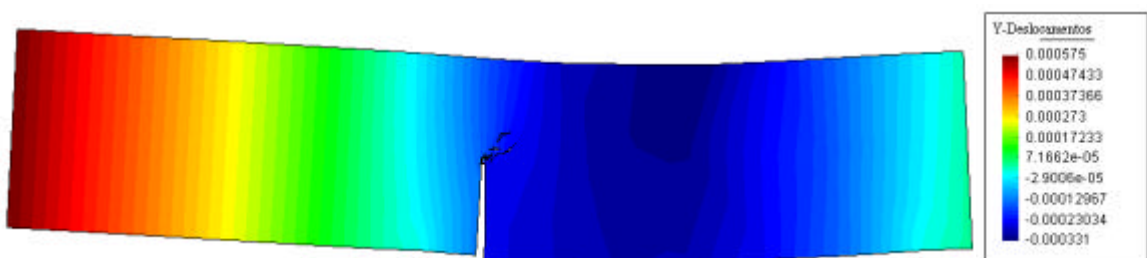
Os deslocamentos na direção y e a configuração deformada são mostrados na figura 6.14. Novamente escolheu-se a direção y para comparação dos resultados em virtude do carregamento.



(a) – Configuração deformada e deslocamentos em y, caso A



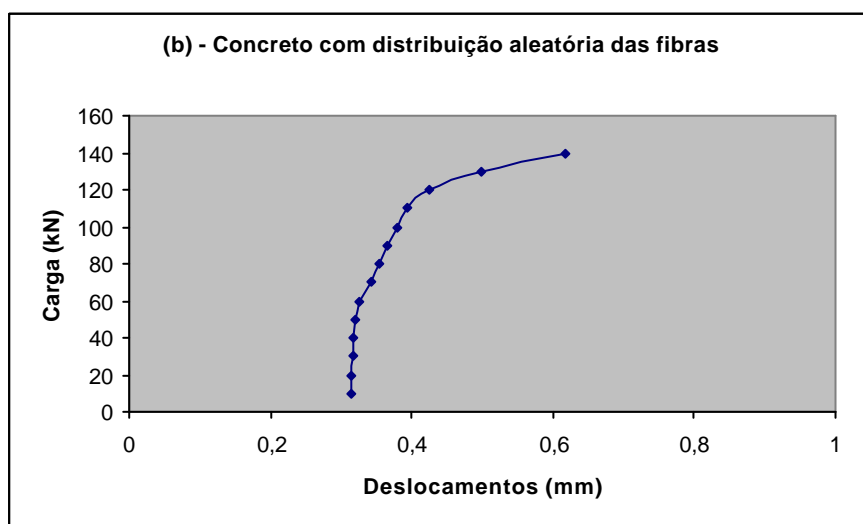
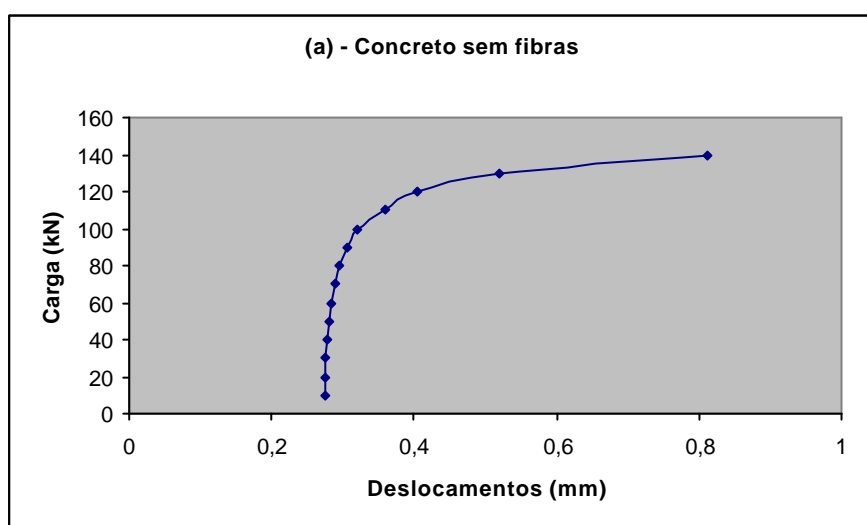
(b) – Configuração deformada e deslocamentos em y, caso B



(c) – Configuração deformada e deslocamentos em y, caso C

Figura 6.14 – Deslocamentos na direção y para as três simulações

As curvas $P \times \delta$ referentes a essa simulação podem ser vistas na figura 6.15. É importante ressaltar que nas três simulações foi considerado o mesmo esquema de carregamento, incluindo o número de etapas.



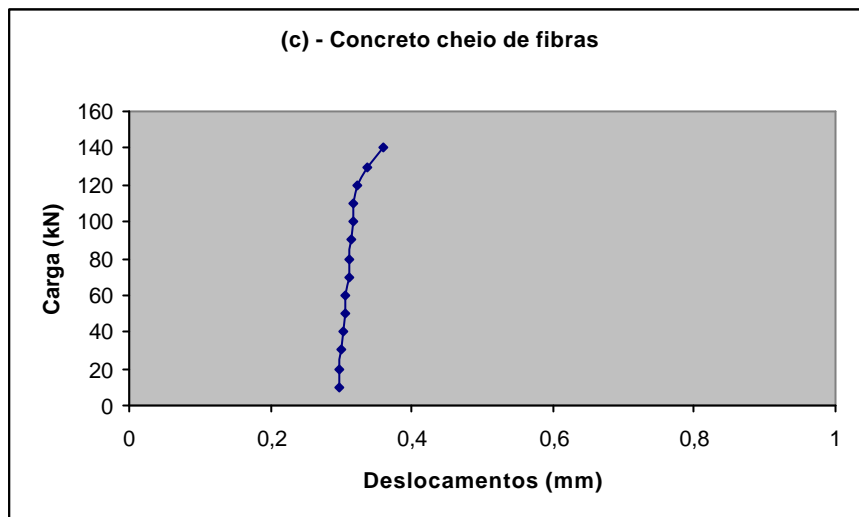


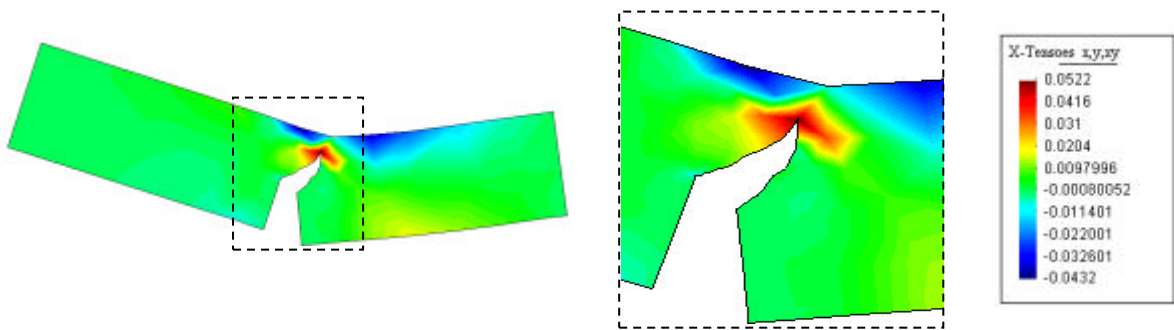
Figura 6.15 - Curvas $P \times \delta$ para as três simulações realizadas

Observando as curvas percebe-se claramente a ação das fibras no comportamento pós-fissuração, aumentando sensivelmente a ductilidade do composto. A execução do programa foi feita com um número determinado de incrementos, assim, as curvas *b* e *c* mostram que o concreto ainda não atingiu a ruptura, tendo ainda capacidade de resistência e também de deformação. O concreto convencional, curva *a*, atingiu a ruptura antes dos outros, na 13^o etapa.

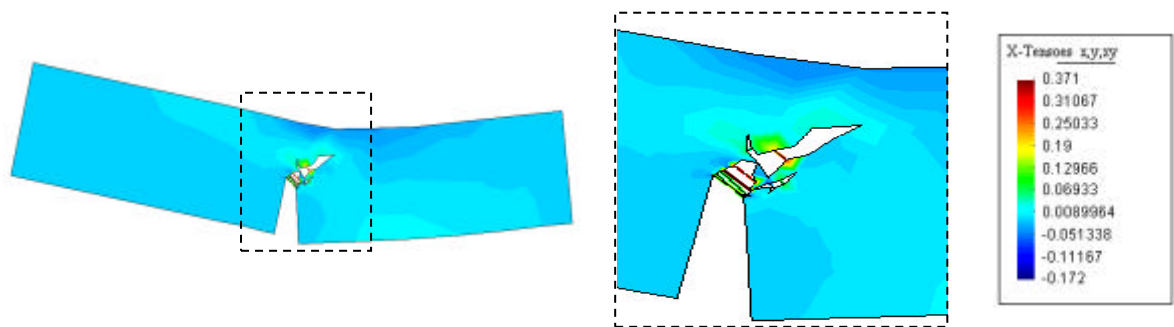
Percebe-se ainda a formação de um pequeno patamar no item *b* da figura 6.15, melhor evidenciado na figura 6.4, na simulação do exemplo anterior, isso é devido à na etapa de carregamento em questão ocorrer a propagação de uma fissura, em virtude do processo aleatório de seleção que não marcou com a presença da fibra o nó aberto nessa etapa.

As distribuições de tensões ao longo da viga, σ_x e σ_y , são mostradas nas figuras 6.16 e 6.17 respectivamente. A mesma convenção do exemplo anterior é utilizada, tensões positivas são de tração e negativas de compressão.

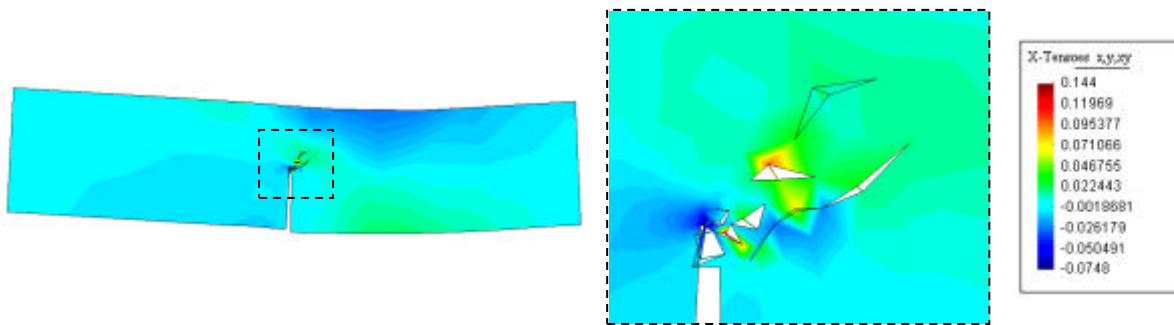
(c) – Configuração deformada e deslocamentos em y , tipo C



(a) – Tensões σ_x , caso A

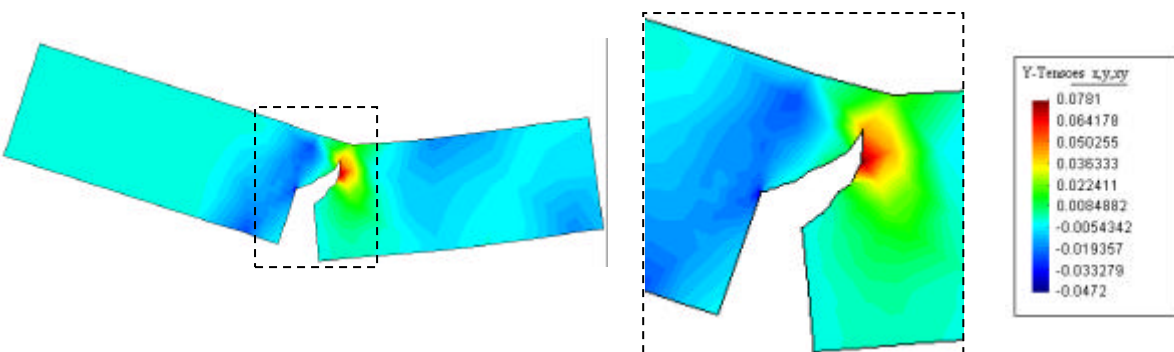


(b) – Tensões σ_x , caso B

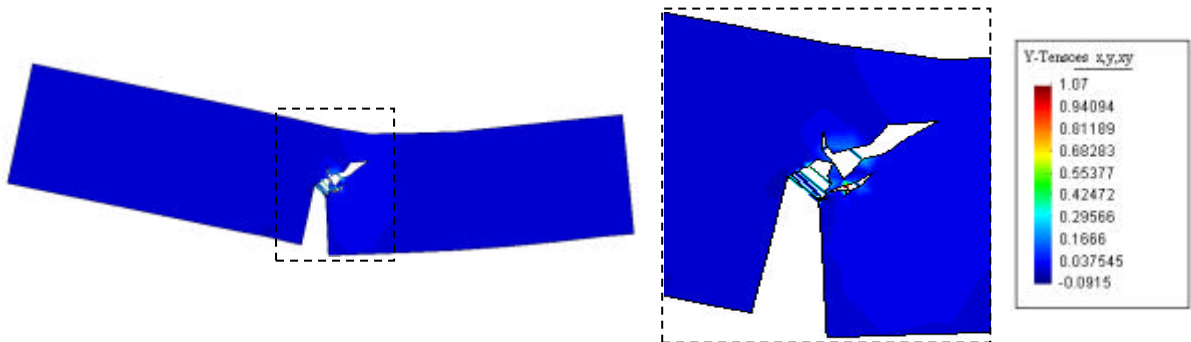


(c) – Tensões σ_x , caso C

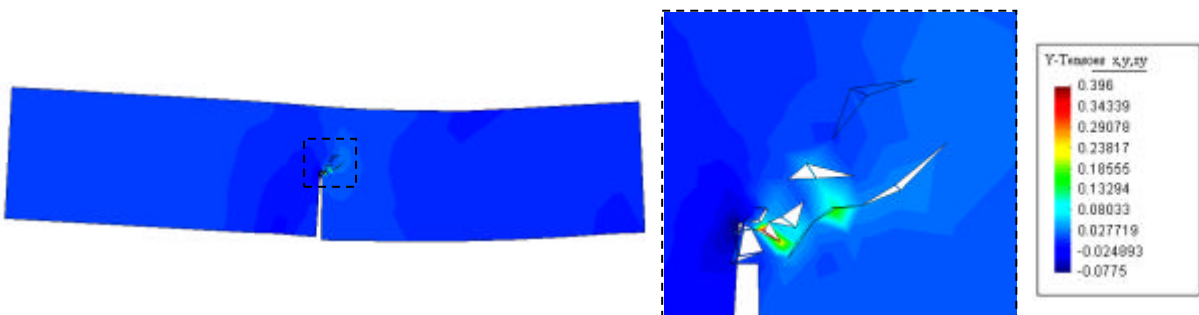
Figura 6.16 – Distribuição de tensões σ_x para as simulações realizadas



(a) – Tensões σ_y , caso A



(b) – Tensões σ_y , caso B



(c) – Tensões σ_y , caso C

Figura 6.17 – Distribuição de tensões σ_y para as simulações realizadas.

7) Conclusões e sugestões

7.1) Conclusões

Nesse trabalho analisou-se o comportamento de matrizes de concreto reforçada com fibras. Partindo de um modelo que permite acompanhar a propagação das fissuras, elaborou-se um algoritmo que interrompa esse processo através da inclusão de fibras na matriz.

Esta implementação reúne alguma das vantagens do modelo original de Silva, ou seja, a possibilidade de simular resultados experimentais e numéricos, além da consideração da heterogeneidade do material.

A análise realizada nas seções 6.2 e 6.3, confirmam o que vários trabalhos experimentais apontam: a fibra de aço quando incluída contém a propagação das fissuras. Através da comparação dos resultados em termos de abertura de fissura, deslocamentos e tensões impostas, é evidenciado o comportamento de fissuração repartida, caracterizado por múltiplas fissuras de tamanhos reduzidos. Além disso, percebe-se uma fissuração mais uniforme e gradual, com a formação de fissuras menos espaçadas e mais finas. Essas características representam um aumento na tenacidade do concreto, já que o material passa a ter uma maior capacidade de absorção de energia de deformação.

Como pode ser observado, a presença das fibras não impede o surgimento das fissuras, e sim, permite controlar o padrão de fissuração e manter o estado de fissuração no nível micro. A microfissuração, em si, é um fenômeno intrínseco ao concreto e é consequência de vários fenômenos não totalmente controláveis, sendo a retração um destes. A utilização de fibras tem sido essencial para atenuar os efeitos prejudiciais destes fenômenos, sobretudo no caso do concreto jovem onde o material sequer atingiu sua resistência característica.

A presença das fibras no volume do concreto proporciona uma resistência necessária para impedir a microfissura de se propagar até o concreto atingir a idade e resistência suficiente para resistir sozinho a esses esforços.

Alguma diferença quantitativa na comparação dos resultados obtidos na simulação com outros ensaios, sejam eles experimentais ou mesmo numéricos, é aceitável e até mesmo esperada. Isso se deve ao fato da tensão no nó mais

solicitado ser infinita (pelos conceitos da LEFM). Ao se reduzir o tamanho dos elementos, obtém-se uma melhoria qualitativa nos resultados e melhor aproximação para as tensões na ponta da fissura, mas, simultaneamente, aumenta-se o esforço computacional necessário para sua execução.

Adicionalmente, na análise do comportamento do composto através das curvas $P \times \delta$, apresentadas no capítulo anterior, mostram claramente como a presença das fibras ajuda na redução dos deslocamentos. O tipo de controle utilizado não permitiu acessar os valores pós-pico, limitando-se a valores no limiar da ruptura. Entretanto, sabe-se que o papel das fibras no pós-pico do material proporciona à estrutura um importante ganho de ductilidade.

7.2) Sugestões

Sabendo que o concreto convencional tem um comportamento de fissuração discreta, e que os resultados encontrados na literatura mostram que as fibras, quando adicionadas ao concreto, costumam a abertura da fissura, é importante poder analisar numericamente os efeitos dessa inclusão.

Este trabalho é definido com este objetivo e constitui um primeiro passo num imenso campo de pesquisa. Nesta implementação utilizaram-se apenas leis constitutivas elasto-frágeis, mas podem também ser considerados outros tipos de comportamento para os materiais.

O comportamento da fibra envolve vários aspectos, sua orientação, aderência e distribuição, que podem ter maior ou menor importância, dependendo de como esses parâmetros são considerados.

Uma vez demonstrada a consistência dessa implementação, os próximos passos seriam realizar estudos paramétricos, visando analisar em detalhes o peso de cada um dos fatores expostos no comportamento geral das fibras. Nesse sentido, resumem-se as possíveis sugestões para o prosseguimento desse trabalho nos seguintes itens:

- considerar as condições de aderência da fibra na matriz de concreto, visto que é fundamental seu papel no comportamento do composto quanto a transferência de esforços entre a fibra e a matriz, e vice-versa;

- levar em consideração a direção da fibra, que nesse trabalho é sempre considerada como perpendicular à direção de propagação da fissura;
- modificar as condições para a distribuição aleatória das fibras na matriz de concreto. Para o tal, sugere-se analisar experimentalmente a dispersão das fibras, através de técnicas micrográficas, ou mesmo raios-X, e propor expressões analíticas que representem a aleatoriedade da distribuição das fibras na matriz;
- implementar um tipo de controle que permita analisar o comportamento pós-pico do composto;
- adaptar o modelo a outros tipos de fibras, através da incorporação de expressões análogas e apropriadas a cada tipo de reforço.

Referências Bibliográficas

- ARMELIN, H. S.; HAMASSAKI, L. T., **Avaliação do concreto projetado reforçado com fibras de aço e polipropileno na construção de túneis - NATM**. 32ª Reunião anual do instituto brasileiro do concreto (IBRACON), Anais, 12 pp., 1990; *apud* [FIGUEIREDO, 2000].
- BAZANT, Z. P.; **Size effect**. International journal of solids and structures, Vol. 37, pp. 69 – 80, 2000.
- BAZANT, Z. P.; PLANAS, J.; **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. CRC press, New York, 1998.
- BENTUR, A.; MINDESS, S.; **Fibre reinforced cementitious composites**. London e New York, Elsevier applied science, 1990.
- CAR, E.; ZALAMEA, F.; OLLER, S.; MIGUEL, F.; OÑATE, E., **Numerical modelling of fiber reinforced composite materials - Two procedures**. International journal of solids and structures, Vol. 39, pp. 1967 – 1986, 2002
- CHENKUI, H.; GUOFAN, Z.; **Properties of steel fibre reinforced concrete containing larger coarse aggregates**. Cement & concrete composites, Vol. 17, pp. 199 – 206, 1995.
- ELICES, M.; PLANAS, J.; Material models, in: ELFGREN, L. (Ed.); **Fracture mechanics of concrete structures**. Chapman & hall, London, pp. 16 – 66, 1989; *apud* [GÁLVEZ, et. al, 2002].
- EZELDIN, A. S.; LOWE, S. R.; **Mechanical properties of steel fiber reinforced rapid-set materials**. ACI materials journal, Vol. 88, nº. 4, pp. 384 – 389, 1991, *apud* [ZIA *et al.*, 1997].
- FAIRBAIRN, E. M. R.; DÉ SIR, J. M.; **Notas de aula**.1997.

- FIGUEIREDO, A. D.; **Concreto com fibras de aço**. Escola politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de engenharia de construção civil, São Paulo – 2000.

- GÁLVEZ, J. C.; CERVENKA, J. CENDÓN D. A.; SAOUMA, V.; **A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete**. Cement and concrete research, Vol. 32, pp. 1567 – 1585, 2002.

- GÁLVEZ, J. C.; ELICE, M.; GUINEA, G. V.; PLANAS, J.; **Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading**. International journal of fracture, Vol. 94, nº 3, pp. 267 – 284, 1998; *apud* [SILVA, 2000].

- GÁLVEZ, J.; ELICES, M.; GUINEA, C. V.; **Crack trajectories under mixed mode and nonproportional loading**. International journal of fracture, Vol. 81, pp. 171 - 193, 1996; *apud* [SILVA, 2000].

- GOPALARATNAM, S.; SHAH, S. P.; **Tensile failure of steel fiber reinforced mortar**. Journal of engineering mechanics, Vol. 113, nº 5, pp. 635 – 652, 1987.

- GRIFFITH, A. A.; **The phenomena of rupture and flow in solids**. Philosophical transactions of the royal society, series A, V. 221, pp. 163 – 197, 1921; *apud* [BAZANT e PLANAS, 1998].

- GRIFFITH, A. A.; **The theory of rupture**. In: Proceedings of the first international conference of applied mechanics, pp. 55 – 63, 1924; *apud* [BAZANT e PLANAS, 1998].

- HAHN, B.; **FORTRAN 90 for scientists and engineers**. London, Hodder headline PLC, ISBN 0-340-60034-9, 368 pp., 1994.

- HALPIN, J. C.; TSAI, S. W.; **Effects of environmental factors on composite materials**. AFML-TR 67423, 53 pp., 1969, *apud* [ZIA *et al.*, 1997].

- INGLIS, C. E.; **Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.** Transaction institute naval architects, V. 55, 219 – 241, 1913; *apud* [BAZANT e PLANAS, 1998].

- IRWIN, G. R.; **Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.** Journal of applied mechanics, T. ASME, V. 24, pp. 361 – 364, 1957; *apud* [BAZANT e PLANAS, 1998].

- LI, F.; **Fracture characterization of fiber reinforced concrete in direct uniaxial tension.** Ph.D. Thesis, Hong Kong University of science and technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong, 1998.

- LI, F.; LI, Z.; **Continuum damage mechanics based modeling of fiber reinforced concrete in tension.** International journal of solids and structures, Vol. 38, pp. 777 - 793, 2001.

- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M.; **Concreto: estrutura, propriedades e materiais.** São Paulo, Pini, 1994.

- MINDESS, S.; **Fibre reinforced concrete: challenges and prospects.** In: Second university - industry workshop on fiber reinforced concrete and other advanced materials. Toronto, Canada, Proceedings pp. 1 – 12, 1995; *apud* [FIGUEIREDO, 2000].

- MURUGAPPAN, K.; TAN, K. H.; PARAMASIVAM, P.; **Finite element formulation for the analysis of reinforced fibrous concrete beams.** Finite elements in analysis and design; Vol. 18, pp. 67 – 74, 1994.

- NAAMAN, A. E.; **Fiber reinforcements for concrete: looking back, looking ahead.** Fifth RILEM symposium on fibre-reinforced concretes, França, 2000.

- NAAMAN, A. E.; HOMRICH, J. R.; **Tensile stress strain properties of SIFCON.** ACI Materials journal, Vol. 86 (3), pp. 244 – 251, 1989.

- NAAMAN, A. E.; REINHARDT, H. W.; **High performance fiber reinforced cement composites 2 (HPFRCC2)**. Proceedings of the second international RILEM workshop, Ann Arbor – EUA, 1995.

- ROELFSTRA, P. E.; SADOUKI, H.; WITTMANN, F. H.; **Le béton numerique**. Materials and structures, Vol. 18, pp. 327 – 335, 1985; *apud* [Silva, 2000].

- ROSSI, P.; RICHER, S., **Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach**. Materials and structures, Vol. 20, pp. 334 – 337, 1987.

- ROSSI, P.; ULM, F.-J., **Size effects in the biaxial tensile-compressive behavior of concrete: physical mechanisms and modelling**. Materials and structures, Vol. 30, pp. 210 – 216, 1997; *apud* [SILVA, 2000].

- ROSSI, P.; WU, X.; **Dimensioning and numerical modelling of metal-fibre reinforced concrete (MFRC) structures**. Cement and concrete composites, Vol. 14, pp. 195 – 198, 1992.

- ROSSI, P.; WU, X.; MAOU, F. LE; BELLOC, A., **Scale effect on concrete in tension**. Materials and structures, Vol. 27, pp. 437 – 444, 1994.

- SILVA, E. C. C.; **Fissuração probabilística do concreto**. Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Programa de engenharia civil, Rio de Janeiro, 2000.

- SIMÕES, L. C.; **Um modelo constitutivo para concreto com fibras**. Tese de M. Sc., PUC/RJ, Departamento de engenharia civil, Rio de Janeiro, 1998.

- TANESI, J.; **A influência das fibras de polipropileno no controle da fissuração por retração**. Dissertação apresentada na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999; *apud* [FIGUEIREDO, 2000].

- VISALVANICH, K.; NAAMAN, A. E.; **Fracture model for fiber reinforced concrete**. ACI Journal, Vol. 80, nº. 2, pp. 128 – 138, 1983; *apud* [MEHTA e MONTEIRO, 1994].

- YANG, Z. J.; PROVERBS, D.; **A comparative study of numerical solutions to non-linear discrete crack modelling of concrete beams involving sharp snap-back.** Engineering fracture mechanics, 2003.

- ZIA, P.; AHMAD, S.; LEMING, M.; **High performance concrete – a state-of-art report.** 1989 – 1994.

- ZOLLO, R. F.; **Fiber reinforced concrete: an overview after 30 years of development.** Cement and concrete composites, Vol. 19, pp. 107 – 122, 1997.