

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE  
REISSNER CONSIDERANDO INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

**NATÁLIA SOUZA RIBEIRO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

Abril – 2015

# O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER CONSIDERANDO INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

**NATÁLIA SOUZA RIBEIRO**

Tese de Doutorado apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para a obtenção de título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadora: Vânia José Karam

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

Abril – 2015

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE  
REISSNER CONSIDERANDO INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

NATÁLIA SOUZA RIBEIRO

Tese de Doutorado apresentada ao  
Centro de Ciência e Tecnologia da  
Universidade Estadual do Norte  
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte  
das exigências para a obtenção de  
título de Doutor em Engenharia Civil.

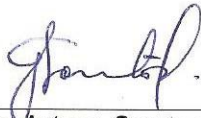
Aprovada em 06 de abril de 2015.

Comissão Examinadora:



---

Prof. Ney Augusto Dumont (Ph.D.) - PUC-Rio



---

Prof. Gines Arturo Santos Falcon (D. Sc.) - UENF



---

Prof. Sergio Luis Gonzalez Garcia (D. Sc.) - UENF



---

Profª. Vânia José Karam (D. Sc.) - UENF

(Orientadora)

À minha família  
Ao meu namorado

## AGRADECIMENTOS

À Deus, minha habitação forte, à qual posso recorrer continuamente, pois é a minha rocha e fortaleza.

À minha orientadora Vânia José Karam, pela orientação, paciência, pelos ensinamentos e incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, irmãos e namorado, minha família que tanto amo. Sem o incentivo deles jamais chegaria até aqui.

À minha amiga Mônica Altoé que mesmo distante fisicamente sempre está presente em minha vida, e é como uma irmã para mim.

Ao amigo e compadre, Sérgio Antônio Brum Jr, pela amizade, colaboração e, pelas horas de desabafo, descontração e ajuda que foram fundamentais ao longo desses anos.

Ao amigo Fábio “Belém” pela ajuda, horas de conversas e conselhos.

À amiga Cássia pelas horas juntas na salinha, pelo incentivo, atenção e amizade.

Aos amigos que conquistei no convívio desses anos, em especial, Zélia, Felipe e Miltom.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xi
RESUMO .....	xiv
ABSTRACT .....	xv
CAPÍTULO 1 .....	1
INTRODUÇÃO .....	1
1.1 – Considerações Iniciais .....	1
1.2 – Revisão Bibliográfica.....	4
1.3 – Objetivos.....	8
1.4 – Organização da Tese .....	8
CAPÍTULO 2 .....	10
TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS.....	10
2.1 – Introdução .....	10
2.2 – Formulação Básica .....	10
2.2.1 – Expressões das tensões .....	11
2.2.2 – Momentos e esforços resultantes das tensões .....	12
2.2.3 – Deslocamentos generalizados .....	13
2.2.4 – Momentos e esforços cortantes.....	14
2.2.5 – Deformações específicas.....	14
2.2.6 – Equações de equilíbrio .....	15
2.2.7 – Condições de contorno.....	17
CAPÍTULO 3 .....	18
O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER.....	18
3.1 – Introdução .....	18
3.2 – Equações Integrais .....	18

3.2.1 – Dedução das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados.....	22
3.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno.....	28
3.4 – Solução Fundamental.....	31
3.4.1 – Deslocamentos generalizados .....	32
3.4.2 – Forças de superfície generalizadas .....	33
3.5 – Transformação das Integrais de Forças de Domínio em Integrais de Contorno.....	34
3.6 – Expressões para Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos .....	37
3.6.1 – Deslocamentos .....	37
3.6.2 – Momentos e esforços cortantes.....	37
 CAPÍTULO 4 .....	 44
IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DA PLACA.....	44
4.1 – Introdução .....	44
4.2 – Discretização das Equações Integrais .....	44
4.2.1 – Sistema de equações .....	45
4.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos .....	50
4.2.3 – Momentos e esforços cortantes nos pontos internos .....	51
4.3 – Elementos de Contorno.....	51
4.3.1 – Elemento quadrático contínuo .....	52
4.3.2 – Elemento quadrático descontínuo .....	53
4.4 – Nó Duplo .....	54
 CAPÍTULO 5 .....	 55
EQUAÇÕES INTEGRAIS DO SOLO.....	55
5.1 – Introdução .....	55
5.2 – Equação Integral para um Sólido Tridimensional.....	55
5.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno de um Sólido Tridimensional .....	60
5.4 – Equações Integrais para o Sólido Tridimensional Semi-Infinito.....	61
5.4.1 – Solução fundamental para pontos do domínio do solo .....	62
5.4.2 – Solução fundamental para pontos na superfície do solo .....	63

5.5 – O Método dos Elementos de Contorno aplicado às Equações Integrais do Solo.....	64
5.5.1 – Elementos de contorno para a superfície livre do solo .....	64
CAPÍTULO 6.....	67
IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO SOLO .....	67
6.1 – Introdução .....	67
6.2 – Discretização das Equações Integrais .....	67
CAPÍTULO 7.....	70
INTERAÇÃO PLACA-SOLO .....	70
7.1 – Introdução .....	70
7.2 – Equações Integrais para o Conjunto Placa-Solo.....	70
CAPÍTULO 8.....	74
APLICAÇÕES.....	74
8.1 – Introdução .....	74
8.2 – Exemplo 1: Placa Quadrada com Bordos Livres.....	74
8.3 – Exemplo 2: Placa Circular com Bordo Livre.....	80
8.4 – Exemplo 3: Placa Retangular com Bordos Livres.....	84
CAPÍTULO 9.....	89
CONCLUSÕES.....	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	91



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação do modelo placa-solo.....	10
Figura 2.2 – Sistema de coordenadas.....	11
Figura 2.3 – Esforços resultantes: momentos e esforços cortantes.....	13
Figura 2.4 – Elemento de placa em equilíbrio.....	15
Figura 3.1 – Região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ contendo a placa $\Omega \cup \Gamma$ .....	19
Figura 3.2 – Placa com ponto $\xi$ no contorno.....	29
Figura 4.1 – Placa dividida em elementos de contorno e células internas.....	45
Figura 4.2 – Elementos de contorno quadráticos contínuos.....	52
Figura 4.3 – Elementos de contorno quadráticos descontínuos.....	53
Figura 5.1 – Sólido tridimensional.....	56
Figura 5.2 – Tensões atuantes em um elemento infinitesimal do sólido.....	56
Figura 7.1 – Tensões atuantes no conjunto placa-solo.....	71
Figura 8.1 – Placa quadrada: discretização em 32 elementos e 128 células.....	75
Figura 8.2 – Placa quadrada: discretização em 32 elementos e 256 células.....	76
Figura 8.3 – Placa quadrada: deslocamento transversal $u_0$ .....	77
Figura 8.4 – Placa quadrada: discretização em 36 elementos e 81 células.....	78
Figura 8.5 – Placa quadrada: fator $I_w$ versus rigidez relativa $K$ .....	79
Figura 8.6 – Placa quadrada com pontos indicados.....	79
Figura 8.7 – Placa circular: discretização em 40 elementos e 200 células.....	81
Figura 8.8 – Placa circular: deslocamento $u_0$ versus fator de rigidez.....	82
Figura 8.9 – Placa circular: deslocamento transversal $u_0$ para $X = 0,1$ .....	82
Figura 8.10 – Placa circular: momento $M_0$ ao longo do raio para $X = 0,1$ .....	83
Figura 8.11 – Placa circular: reação do solo $p_0$ ao longo do raio para $X = 0,1$ .....	83
Figura 8.12 – Placa circular: reação do solo $p_0$ ao longo do raio para $X = 1$ .....	84
Figura 8.13 – Placa circular: reação do solo $p_0$ ao longo do raio para $X = 10$ .....	84
Figura 8.14 – Placa retangular: discretização em 28 elementos e 45 células.....	85
Figura 8.15 – Placa retangular: discretização em 56 elementos e 171 células.....	86
Figura 8.16 – Placa retangular: fator $I_w$ versus rigidez relativa $K$ para 28 elementos e 45 células.....	86
Figura 8.17 – Placa retangular com pontos indicados.....	87

Figura 8.18 – Placa retangular: fator  $I_w$  versus rigidez relativa  $K$  para 56 elementos e 171 células.....87

## LISTA DE SÍMBOLOS

Índices: gregos	→	variam de 1 a 2
latinos	→	variam de 1 a 3
$w$	→	flecha
$\phi_\alpha$	→	rotações
$\sigma_{\alpha\beta}$	→	componentes do tensor de tensões
$\chi_{\alpha\beta}$	→	componentes do tensor de deformações específicas de flexão
$\psi_\alpha$	→	componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais
$M_{\alpha\beta}$	→	momentos fletores e torsões por unidade de comprimento
$Q_\alpha$	→	esforços cortantes por unidade de comprimento
$x_i$	→	eixos coordenados cartesianos
$u_i$	→	componentes dos deslocamentos generalizados
$p_i$	→	componentes das forças de superfície generalizadas
$b_i$	→	componentes das forças de domínio
$\Delta_{ij}^*$	→	componentes do operador de Navier
$u_{ij}^*$	→	componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental
$p_{ij}^*$	→	componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental
$v_i^*$	→	funções que satisfazem determinada equação de Poisson
$u_{i\beta k}^*$	→	componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos
$p_{i\beta k}^*$	→	componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos
$w_{i\beta}^*$	→	componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos
$h$	→	espessura da placa

$E$	→	módulo de elasticidade longitudinal
$G$	→	módulo de elasticidade transversal
$\nu$	→	coeficiente de Poisson
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	→	rigidez à flexão da placa
$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$	→	constante característica das equações de Reissner
$q$	→	carga transversal por unidade de área
$p$	→	reação do solo
$\xi$	→	ponto fonte ou ponto carga
$x$	→	ponto campo
$r$	→	distância do ponto $\xi$ ao ponto $x$
$r_{,\alpha}$	→	derivada de $r$ em relação à coordenada $x_\alpha$
$z$	→	produto expresso por $\lambda^*r$
$n_\beta$	→	co-seno diretor da normal em relação ao eixo $x_\beta$
$K_0$ e $K_1$	→	funções de Bessel modificadas de ordem inteira
$\delta_{ij}$	→	delta de Kronecker
$\delta(x-\xi)$	→	delta de Dirac
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$	→	operador de Laplace
$\mathbf{x}$	→	vetor de incógnitas
$\mathbf{f}$	→	vetor correspondente aos valores prescritos
$\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$	→	vetores que contém os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície respectivamente
$\mathbf{b}$	→	vetor que contém a parcela da carga distribuída
$\mathbf{m}$	→	vetor que contém a parcela da reação do solo
$\mathbf{A}$	→	matriz do sistema de equações $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f}$
$\mathbf{N}$	→	matriz que contém as funções de interpolação
$\mathbf{U}_i^*$ e $\mathbf{P}_i^*$	→	matrizes que contém os deslocamentos e forças de superfície da solução fundamental respectivamente
$\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$	→	matrizes que contém as integrais sobre os elementos de contorno

$ \mathbf{J} $	→ jacobiano para integração nos elementos de contorno
$\Omega$	→ domínio da região analisada
$\Omega^*$	→ domínio da região que contém $\Omega$ e cujo contorno está infinitamente distante da placa
$\Omega_c$	→ domínio da célula $c$
$\Gamma$	→ contorno da região definida por $\Omega$
$\Gamma^*$	→ contorno da região definida por $\Omega^*$
$\Gamma_u$	→ parte do contorno $\Gamma$ onde os deslocamentos generalizados são prescritos
$\Gamma_p$	→ parte do contorno $\Gamma$ onde as forças de superfície generalizadas são prescritas
$\Gamma_c$	→ contorno da célula $c$
$N_c$	→ número total de células da placa
$e$	→ número de elementos do contorno
$N_e$	→ número de elementos no contorno de cada célula interna

## RESUMO

Neste trabalho, utiliza-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e a teoria de flexão de placas de Reissner para análise de interação solo-estrutura. A abordagem utiliza a mesma solução fundamental já empregada na análise de placas pelo MEC e, para considerar a reação do solo, são acrescentadas as parcelas correspondentes nas equações integrais do problema. Ao sistema de equações original, são acrescentadas equações escritas para pontos da interface da placa com o solo, obtendo-se, assim, o sistema de equações para a placa. Esta interface é discretizada em células internas constantes e as integrais correspondentes são transformadas em integrais sobre os contornos das células. Para a discretização do contorno, são empregados elementos de contorno quadráticos, podendo estes ser contínuos ou descontínuos. O solo é considerado como um semi-espaço infinito e são escritas equações integrais para pontos da superfície do mesmo utilizando a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti. A região da superfície do solo em contato com a placa também é discretizada em células internas e, após a implementação numérica, tem-se um sistema de equações para o solo. Os sistemas de equações formados com as equações da placa e com as equações do solo são acoplados para fazer a interação solo-estrutura. Para a validação dos resultados, os mesmos são comparados com resultados de trabalhos que utilizam métodos numéricos com outras abordagens ou de soluções analíticas.

**Palavras-Chave:** Teoria de Reissner, Método dos Elementos de Contorno, Interação Solo-Estrutura.

## ABSTRACT

The Boundary Element Method (BEM) and Reissner's theory for plate bending are used in this work for the analysis of soil-structure interaction. The approach uses the same fundamental solution already employed in the analysis of plates by the BEM and, in order to consider the soil reaction, the corresponding parcels are added to the integral equations of the problem. Equations written for points of the contact area are added to the original system of equations and so an equation system for the plate is obtained. This region is discretized into constant internal cells and the corresponding integrals are transformed into integrals over the boundary of the cells. For the discretization of the boundary, quadratic boundary elements are employed, and they may be continuous or discontinuous. The soil is admitted as an infinite half-space and integral equations are written for points at the soil surface by using the fundamental solution of Boussinesq-Cerruti. The region of the soil surface in contact with the plate is also discretized into internal cells and, after performing the numerical implementation, one has a system of equations for the soil. The system of equations formed from the plate equations and from the soil equations are coupled to accomplish the soil-structure interaction. To validate the results, they are compared to results obtained from studies that use numerical methods with other approaches or to analytical solutions.

**Keywords:** Reissner's theory; Boundary Element Method; Soil-Structure Interaction.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 – Considerações Iniciais

Placas são elementos estruturais utilizados em diversos tipos de estruturas, caracterizadas por apresentar duas das três dimensões muito grandes em comparação com a terceira e com carregamento transversal à sua superfície média. O surgimento de teorias para o estudo de placas data do século XIX, com o surgimento da teoria de Kirchhoff, também chamada teoria clássica de flexão de placas, aplicável a placas delgadas com pequenos deslocamentos (Timoshenko, 1970). Nesta teoria, a solução do problema é obtida a partir de uma equação diferencial de quarta ordem, onde devem ser satisfeitas duas condições de contorno por bordo. A principal hipótese da teoria clássica consiste em que segmentos de reta normais à superfície média, antes da flexão, permanecem retos, normais à superfície média e inalterados no comprimento após a flexão, acarretando deformações cisalhantes transversais nulas.

Como alternativa ao uso da teoria de Kirchhoff, Reissner (1944) introduziu o efeito das deformações cisalhantes transversais na solução do problema, o que levou a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem, na qual devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo. Nesta teoria, segmentos de reta normais à superfície média antes da deformação da placa não permanecem mais necessariamente normais a esta superfície após a deformação. Portanto, tal teoria permite o estudo de placas delgadas e espessas e, em comparação com a teoria de Kirchhoff, apresenta melhores resultados nos bordos e cantos da placa.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi desenvolvido após os chamados métodos de domínio, tais como diferenças finitas e elementos finitos. Ao contrário dos métodos citados, que consideram funções de interpolação no domínio do problema, o MEC considera, em geral, estas funções apenas no contorno. Além disso, para que um problema possa ser resolvido pelo MEC, é necessário que uma solução fundamental seja conhecida.

A solução fundamental utilizada no MEC representa a resposta das equações diferenciais do problema para os efeitos causados em um ponto qualquer



do domínio, chamado ponto campo, devido a aplicação de uma força concentrada unitária em um certo ponto, chamado ponto fonte. Esta solução depende das características do domínio e do contorno da região onde o problema está inserido. A solução fundamental de Kelvin para problemas elásticos definidos em um domínio infinito, homogêneo, isótropo e elástico-linear é obtida a partir da equação de Navier quando uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto fonte (Love, 1944). A solução fundamental de Boussinesq-Cerruti representa o problema de cargas concentradas normais e tangenciais à superfície de contorno de sólidos tridimensionais considerando o domínio semi-infinito, homogêneo, isótropo, elástico-linear e livre de forças de superfície no contorno. Nesta solução, o ponto de aplicação da força unitária é um ponto qualquer na superfície. Já na solução de Mindlin (Mindlin, 1936), o ponto de aplicação da força unitária é um ponto qualquer do interior deste domínio (incluindo a superfície).

A diminuição da dimensão nas equações integrais do problema faz com que o MEC tenha como uma das características principais a redução das aproximações envolvidas quando comparado a métodos que utilizam aproximações no domínio. Neste caso, os valores calculados nos pontos internos, tanto os deslocamentos como momentos e esforços cortantes, tem a mesma precisão, já que derivam-se os tensores da chamada solução fundamental, que é uma solução exata, não acarretando perda de precisão. Além disso, ocorre diminuição da ordem dos sistemas de equações a serem resolvidos.

A interação solo-estrutura condiciona a forma como uma estrutura reage às solicitações ao ser submetida a um carregamento externo, apresentando cargas nas fundações em função das condições do solo e do tipo de estrutura. Uma das vantagens de se considerar a interação solo-estrutura é a possibilidade de se estimarem os efeitos da redistribuição de esforços nos elementos estruturais, a forma e a intensidade dos recalques diferenciais, tornando os projetos mais eficientes e confiáveis. Então, é importante que seja avaliado o processo de interação existente entre o solo e a estrutura.

Neste trabalho, é apresentada uma formulação para análise de interação solo-estrutura utilizando o Método dos Elementos de Contorno e a teoria de Reissner para flexão de placas. São consideradas placas apoiadas sobre o solo, sendo o solo considerado como um semi-espaço infinito. Também foi realizada a implementação computacional da formulação apresentada, em linguagem Fortran.

Inicialmente, é apresentado um resumo da teoria de Reissner para análise de flexão de placas incluindo a consideração da reação do solo.

Em seguida, as equações integrais básicas da placa são deduzidas para um ponto do domínio a partir do Método dos Resíduos Ponderados e, posteriormente, escritas para um ponto do contorno.

Os tensores da solução fundamental também são apresentados, assim como, obtidas as equações que permitem o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

As integrais de forças de domínio relativas às cargas aplicadas na placa são desenvolvidas para cargas uniformemente distribuídas e transformadas em integrais sobre o contorno da placa.

Admite-se que o domínio da placa apoiado sobre o solo é dividido em células triangulares ou quadrilaterais constantes e as integrais de domínio relativas à reação do solo são transformadas em um somatório de integrais sobre o domínio de cada célula interna e, posteriormente, estas últimas integrais são transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

O contorno da placa é discretizado em elementos quadráticos, que podem ser contínuos ou descontínuos.

As equações integrais da placa são escritas em forma discretizada para formar um sistema de equações algébricas. São escritas três equações para cada ponto nodal do contorno, uma para cada uma das três direções generalizadas. Como as forças de reação do solo também são incógnitas, são escritas equações adicionais ao sistema original, constituídas pelas equações dos deslocamentos transversais dos pontos situados nos centros geométricos das células.

Posteriormente, são apresentadas as equações integrais do solo baseadas na Teoria da Elasticidade Tridimensional para sólidos homogêneos. São mostradas as equações integrais para sólidos tridimensionais para pontos do domínio e do contorno. Além disso, são apresentadas as equações integrais do solo, quando este é suposto como um meio contínuo semi-infinito.

Em seguida, mostra-se a aplicação do MEC às equações do solo. A superfície livre do solo é considerada dividida em elementos de contorno (de superfície) triangulares ou quadrilaterais constantes e as equações do deslocamento transversal de pontos de superfície do solo são escritas em forma discretizada, a fim de se obter um sistema de equações algébricas para o solo.

Em seguida, é apresentado o acoplamento do sistema de equações da placa com o sistema de equações do solo, gerando um único sistema de equações, que permite a análise da interação placa-solo.

É importante enfatizar que, neste trabalho, é utilizada a notação cartesiana indicial, onde os índices gregos variam de 1 a 2 e os latinos, de 1 a 3.

## 1.2 – Revisão Bibliográfica

Existem vários trabalhos que abordam o Método dos Elementos de Contorno para análise de placa sobre base elástica ou rígida e interação solo-estrutura, dos quais alguns são destacados a seguir.

A formulação apresentada por Paiva e Venturini (1985) é dedicada à análise de placas sobre base rígida, particularmente à análise de placas de piso de um edifício. Utilizando a teoria de Kirchhoff e o Método dos Elementos de Contorno, modelam um pavimento completo, com todas as restrições impostas por colunas. Silva e Venturini (1990) também dedicaram-se à análise de placas com vinculação interna em seu domínio; porém, a teoria de flexão de placas utilizada foi a de Reissner.

Costa e Brebbia (1985), Bezine (1987), Paiva (1989), Sapountzakis e Katsikadelis (1992) e Fadhil e El-Zafrani (1995) utilizaram a teoria de Kirchhoff para análise de placas apoiadas em base elástica tipo Winkler com o MEC, porém utilizaram diferentes abordagens. Costa e Brebbia (1985) admitiram que a placa tem forma e condições de contorno arbitrárias. Além disso, incorporaram na solução fundamental o efeito da reação do solo e transformaram a integral de domínio em integral de contorno para carregamento uniforme. Já Bezine (1988) admitiu a solução fundamental para problemas de flexão de placas sem a consideração da reação do solo e tratou esta reação como carga por unidade de área. Paiva (1989) também não incorporou o efeito da base elástica na solução fundamental, porém considerou a parte do domínio apoiada na base elástica dividida em células triangulares. Em cada célula, adotou uma aproximação linear para a reação da base elástica, sendo esta escrita em função dos deslocamentos transversais dos pontos das células. Além disso, transformou a integral de domínio referente a cada célula em integral sobre o contorno da célula. Na abordagem realizada por Sapountzakis e Katsikadelis (1992), a reação do solo pode depender linearmente ou não

linearmente da deflexão da placa. O procedimento de solução foi baseado na representação integral da deflexão para a equação bi-harmônica, no qual a reação da fundação, que é incógnita, foi tratada como termo de carregamento. Um sistema de equações não lineares foi obtido e as deflexões da superfície média da placa foram calculadas por meio de um processo iterativo. El-Zafrany e Fadhil (1995) obtiveram a solução fundamental considerando as funções de Kelvin modificadas e os termos relativos ao carregamento foram reduzidos para casos de carga uniformemente distribuída e concentrada.

Já Jianguo et al. (1993), Rashed et al. (1998), Rashed e Aliabadi (2000), Xiao (2001), Rashed (2005) e Ribeiro (2009) utilizaram a teoria de Reissner para análise de placas apoiadas em fundações elásticas tipo Winkler pelo Método dos Elementos de Contorno. Jianguo et al. (1993) utilizaram o método de Hörmander para transformar o sistema de equações diferenciais do problema, a fim de obterem as soluções fundamentais correspondentes. As soluções fundamentais de placas espessas em uma fundação de Winkler foram expressas por uma combinação linear de funções auxiliares e de suas derivadas. Rashed et al. (1998) derivaram a solução fundamental para placas de Reissner apoiadas numa fundação de Winkler, onde a solução fundamental tem três casos diferentes, dependendo das constantes do problema, sendo que um dos três casos já havia sido derivado por Jianguo et al. (1993). Rashed e Aliabadi (2000) apresentaram análises estruturais de problemas práticos baseadas na formulação de Rashed et al. (1998), na qual o efeito do solo é incorporado diretamente nas soluções fundamentais do problema. Por essa razão, a representação do solo é independente da discretização do problema. Rashed (2005) desenvolveu uma formulação com o Método dos Elementos de Contorno/Domínio para análise de placas espessas sobre fundações elásticas, em que tanto o contorno como o domínio são discretizados. A referida formulação é mais abrangente que a desenvolvida por Rashed e Aliabadi (2000), pois também é válida para solos não-homogêneos. Já a abordagem realizada por Ribeiro (2009) não incorpora, na solução fundamental, os efeitos da reação do solo. Além disso, podem-se utilizar valores diferentes para o módulo de fundação em diferentes regiões do domínio, já que o mesmo foi dividido em células. As células admitidas foram células triangulares constantes e as integrais referentes a cada célula são transformadas em integrais sobre o contorno da célula.

Jianguo et al. (1992), Rashed et al. (1999) e Altoé (2009) analisaram placas de Reissner apoiadas em fundações elásticas de Pasternak com o Método dos Elementos de Contorno. Jianguo et al. (1992) utilizaram o método de Hörmander para a obtenção da solução fundamental e introduziram funções auxiliares e suas derivadas na solução fundamental do problema. A solução fundamental apresentada por Rashed et al. (1999) foi desenvolvida por Rashed e Aliabadi (1997). A formulação tem três casos diferentes, dependendo das constantes do problema e possui a mesma ordem de singularidade que os problemas de elasticidade de duas dimensões. Altoé (2009) considerou duas abordagens diferentes para definir equações adicionais ao sistema original. Na primeira, adicionou ao sistema as equações integrais dos deslocamentos transversais dos pontos localizados no centro geométrico de cada célula e as segundas derivadas de deslocamentos transversais foram calculadas por fórmulas de diferenças finitas. Assim, nesta abordagem, admitiu como incógnitas adicionais apenas os deslocamentos transversais dos pontos das células. Na segunda, considerou tanto o deslocamento transversal como suas segundas derivadas como incógnitas nos pontos das células. Portanto, adicionou ao sistema tanto as equações integrais dos deslocamentos transversais como as equações integrais das segundas derivadas destes deslocamentos.

Puttonen e Varpasuo (1986) e Fadhil e El-Zafrani (1994) analisaram placas apoiadas em fundações elásticas com o MEC considerando dois modelos: Winkler e Pasternak. Puttonen e Varpasuo (1986) utilizaram a teoria de placas de Kirchhoff e apresentaram a solução fundamental do problema como uma Integral de Bessel-Fourier. Além disso, fizeram uma terceira abordagem para a fundação elástica, considerando o solo como um semi-espaco, sendo necessária mais uma equação, onde foram considerados o deslocamento transversal e a pressão de contato da fundação. Em Fadhil e El-Zafrani (1994), a teoria de placas utilizada foi a de Reissner, na qual a solução fundamental e demais funções correspondentes foram obtidas como combinações de soluções para o caso de um parâmetro e para o efeito de um segundo parâmetro.

Syngellakis e Bai (1993) e Paiva e Butterfield (1997) apresentaram formulações com o Método dos Elementos de Contorno para análise de interação placa-solo utilizando a teoria de flexão de placas de Kirchhoff e admitindo a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti para as equações integrais do solo. A interface

placa-solo foi dividida em células triangulares, nas quais os deslocamentos e a reação de contato variam linearmente. Syngellakis e Bai (1993) utilizaram procedimentos especiais para o tratamento das singularidades e aplicaram condições de continuidade das componentes tangenciais dos deslocamentos e forças de superfície em toda a interface placa-solo, o que permitiu a consideração de atritos. Paiva e Butterfield (1997) transformaram as integrais sobre o domínio das células em integrais sobre o contorno das células.

Paiva e Mendonça (2010) apresentaram uma formulação alternativa de elementos de contorno para análise de interação placa-viga. A teoria utilizada para a análise de placas foi a teoria de Kirchhoff, com três parâmetros de deslocamentos nodais. O deslocamento transversal ao longo do elemento de viga é aproximado por um polinômio de quinto grau. Substituem as expressões das forças que atuam na interface, escritas em função dos deslocamentos dos nós das vigas, nas equações da placa, e adicionam as equações integrais de deslocamentos dos nós das vigas ao sistema de equações da placa.

Almeida (2003) analisou a interação solo não homogêneo-estrutura via acoplamento MEC/MEF, em que desenvolveu as formulações para a estrutura através do Método dos Elementos Finitos, utilizando a teoria de Kirchhoff, e as formulações para o solo e a subestrutura através do Método dos Elementos de Contorno em abordagem tridimensional.

Xiao (2001) fez análise de placas apoiadas no solo empregando o MEC com a teoria de Reissner e considerou a solução fundamental de placas delgadas, juntamente com a solução fundamental da equação modificada de Helmholtz. A reação do solo foi admitida de duas maneiras: a primeira considerando o modelo de Winkler e a segunda considerando o solo como um semi-espaço infinito. Neste último caso, a solução fundamental utilizada nas equações do solo foi a de Boussinesq-Cerruti. Foram utilizados elementos de contorno constantes e células internas constantes na discretização, sendo que as integrais referentes às cargas transversais foram calculadas considerando o domínio das células.

Observa-se que existem vários trabalhos com o MEC que abordam a interação solo-estrutura considerando o solo como semi-espaço infinito utilizando a teoria de Kirchhoff para flexão de placas. Entretanto, existe carência de trabalhos com o MEC que analisam interação solo-estrutura considerando a teoria de Reissner para flexão de placas.

### **1.3 – Objetivos**

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação e implementação computacional para análise de interação solo-estrutura pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando a teoria de Reissner para flexão de placas e admitindo o solo como um semi-espaço infinito. Será empregando um modelo de análise que considera o acoplamento entre as equações integrais da estrutura, consideradas com a solução fundamental da teoria de Reissner, e as equações integrais do solo, consideradas com a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti. Neste trabalho, as integrais referentes à reação do solo serão transformadas em integrais sobre o contorno das células, evitando-se, assim, o cálculo de integrais singulares.

### **1.4 – Organização da Tese**

Esta tese é apresentada em 9 capítulos. O trabalho iniciou-se com uma introdução sobre as teorias de placas, o Método dos Elementos de Contorno, os tipos de soluções fundamentais, a interação solo-estrutura e os modelos para consideração de reações do solo. Apresentou-se, também, uma revisão bibliográfica e os objetivos desta tese.

Em seguida, no Capítulo 2, é apresentada a teoria de Reissner para análise de flexão de placas, admitindo-se que as forças aplicadas na placa produzem uma reação do solo. São mostradas as expressões das tensões, os momentos e esforços cortantes, os deslocamentos generalizados, as deformações específicas, as equações de equilíbrio e as condições de contorno.

No Capítulo 3, é apresentada a formulação utilizada no Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de Reissner, onde são deduzidas as equações integrais básicas a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Mostra-se, ainda, a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno e as expressões dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

No capítulo seguinte, Capítulo 4, é mostrada a implementação numérica das equações integrais da placa obtidas no Capítulo anterior, sendo estas equações discretizadas, a fim de se obter um sistema de equações algébricas. Também são

mostradas as funções de interpolação consideradas para os elementos de contorno utilizados.

Já no Capítulo 5, são apresentadas as equações integrais do solo, baseadas na Teoria da Elasticidade Tridimensional para sólidos homogêneos. São mostradas as equações integrais para sólidos tridimensionais finitos e as equações integrais para sólidos tridimensionais semi-infinitos. Posteriormente, mostra-se a aplicação do MEC às equações do solo, assim como os elementos de contorno utilizados para a superfície do solo.

No capítulo seguinte, Capítulo 6, é apresentada a implementação numérica das equações integrais do solo obtidas no Capítulo 5, sendo estas equações discretizadas, a fim de se obter um sistema de equações algébricas para o solo.

No Capítulo 7, mostra-se o acoplamento do sistema de equações da placa com o sistema de equações do solo, obtidos, respectivamente, nos capítulos 4 e 6, gerando um único sistema de equações, para considerar a interação placa-solo.

No Capítulo 8, são apresentados alguns exemplos, assim como as respectivas análises de resultados. Os resultados obtidos neste trabalho são comparados com resultados de trabalhos que utilizam métodos numéricos com outras abordagens ou com resultados de soluções analíticas.

Finalmente, no Capítulo 9, são apresentadas as conclusões sobre a análise realizada neste trabalho.



## CAPÍTULO 2

### TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS

#### 2.1 – Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as fórmulas básicas da teoria de Reissner para flexão de placas (Reissner, 1944; Reissner, 1945; Reissner, 1947), nas quais, incorpora-se a reação do solo.

A teoria de Reissner baseia-se na teoria da Elasticidade e no princípio de Hellinger-Reissner e permite a consideração de três condições de contorno por bordo, constituindo-se, assim, um problema de integração de sexta ordem.

#### 2.2 – Formulação Básica

Considera-se uma placa linearmente elástica, homogênea e isotrópica, com espessura  $h$  constante e sujeita a um carregamento transversal  $q$  por unidade de área. Considera-se, ainda, um carregamento  $p$ , por unidade de área, representando a reação do solo (Figura 2.1).

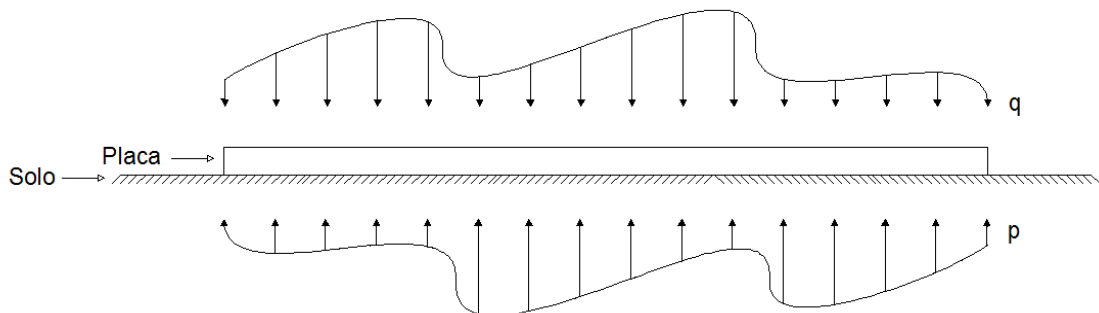


Figura 2.1 – Representação do modelo placa-solo

Além disso, representam-se por  $x_i$  as coordenadas cartesianas, onde  $x_\alpha$  estão na superfície média e  $x_3$  na direção transversal da placa (Figura 2.2).

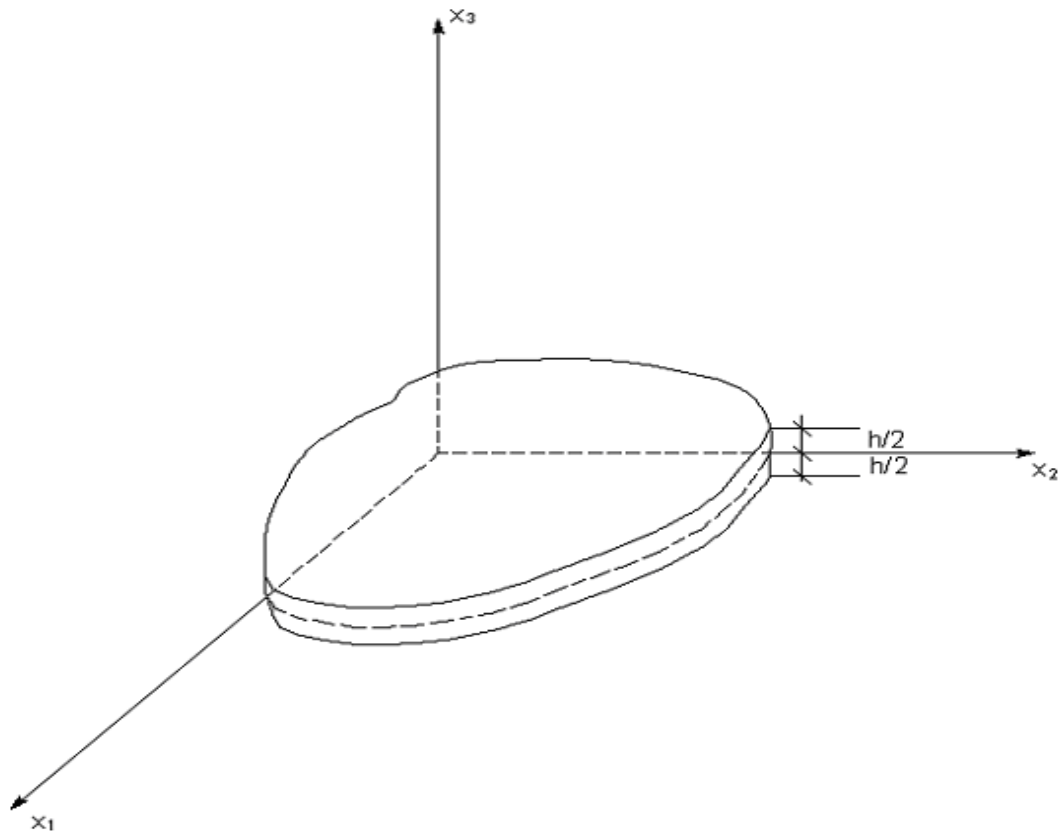


Figura 2.2 – Sistema de coordenadas

### 2.2.1 – Expressões das tensões

Representando as tensões por  $\sigma_{ij}$ , as condições de carregamento consideradas nas faces da placa são, neste caso:

$$\sigma_{33} = q \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0 \text{ para } x_3 = \frac{h}{2} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{33} = p \text{ e } \sigma_{\alpha 3} = 0 \text{ para } x_3 = -\frac{h}{2}$$

As tensões, dadas em função dos esforços resultantes, variam ao longo da espessura na seguinte forma:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3 \quad (2.2a)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.2b)$$

$$\sigma_{33} = \left( \frac{q+p}{2} \right) + \left( \frac{q-p}{2} \right) \left( \frac{3x_3}{h} - \frac{4x_3^3}{h^3} \right) \quad (2.2c)$$

As tensões normais  $\sigma_{33}$ , que atuam na direção transversal, são consideradas desprezíveis em relação às demais.

### 2.2.2 – Momentos e esforços resultantes das tensões

As expressões dos momentos fletores e de torção  $M_{\alpha\beta}$  e dos esforços cortantes  $Q_{\alpha}$ , por unidade de comprimento, atuando na superfície média da placa, são obtidas por integração das tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{\alpha 3}$  ao longo da espessura, sendo:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.3a)$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.3b)$$

Os sentidos positivos desses esforços estão indicados na Figura 2.3.

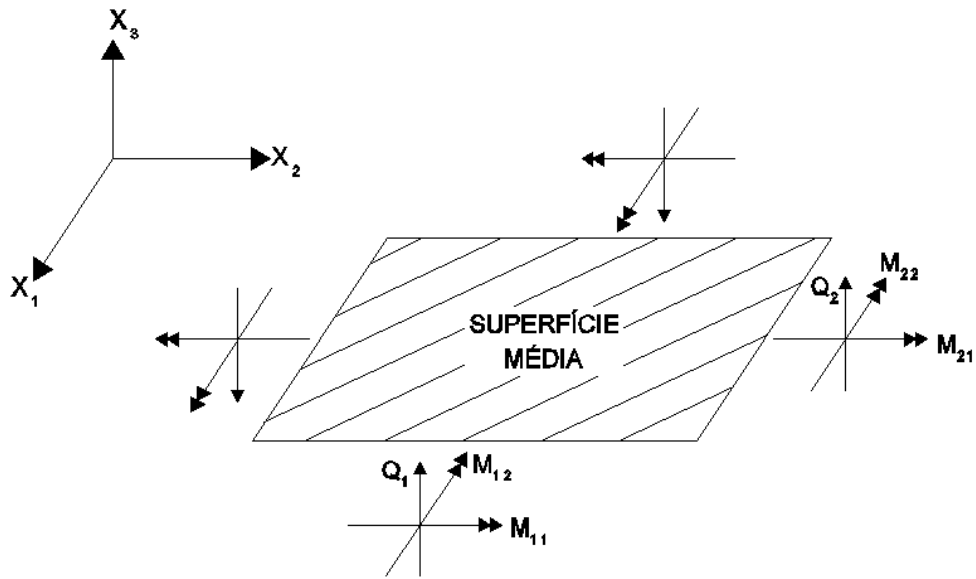


Figura 2.3 – Esforços resultantes: momentos e esforços cortantes

### 2.2.3 – Deslocamentos generalizados

Os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$ , que representam, respectivamente, as rotações da normal à superfície média nos planos  $x_\alpha - x_3$  e o deslocamento transversal (flecha) considerados para pontos da superfície média da placa, são dados a seguir, e representam a média ponderada dos deslocamentos  $v_i$  de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados (Reissner, 1947).

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.4a)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} v_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.4b)$$

### 2.2.4 – Momentos e esforços cortantes

Os momentos e esforços cortantes são expressos a seguir, em função dos deslocamentos generalizados, e são obtidos utilizando-se a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos e princípios variacionais.

$$M_{\alpha\beta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu(q+p)}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.5a)$$

$$Q_{\alpha} = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (\phi_{\alpha} + w_{,\alpha}) \quad (2.5b)$$

onde:

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$\delta_{\alpha\beta}$  = delta de Kronecker

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \text{rigidez à flexão da placa} \quad (2.6)$$

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} = \text{constante característica das equações de Reissner} \quad (2.7)$$

### 2.2.5 – Deformações específicas

As expressões das deformações específicas de flexão  $\chi_{\alpha\beta}$  e cisalhantes transversais  $\psi_{\alpha}$ , em função dos deslocamentos generalizados da placa, são:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (2.8a)$$

$$\psi_{\alpha} = \phi_{\alpha} + w_{,\alpha} \quad (2.8b)$$

Cabe observar que, na teoria clássica de Kirchhoff, as deformações cisalhantes transversais são consideradas desprezíveis e tem-se, assim,  $\psi_\alpha = 0$ . Consequentemente, as rotações  $\phi_\alpha$  são obtidas através de derivadas da flecha, o que não ocorre na teoria de Reissner, já que as deformações cisalhantes transversais não são desprezadas.

### 2.2.6 – Equações de equilíbrio

Fazendo-se o equilíbrio de um elemento de placa, conforme pode ser observado na Figura 2.4, e considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos, são obtidas as seguintes equações de equilíbrio:

$$Q_{\alpha,\alpha} + q + p = 0 \quad (2.9a)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.9b)$$

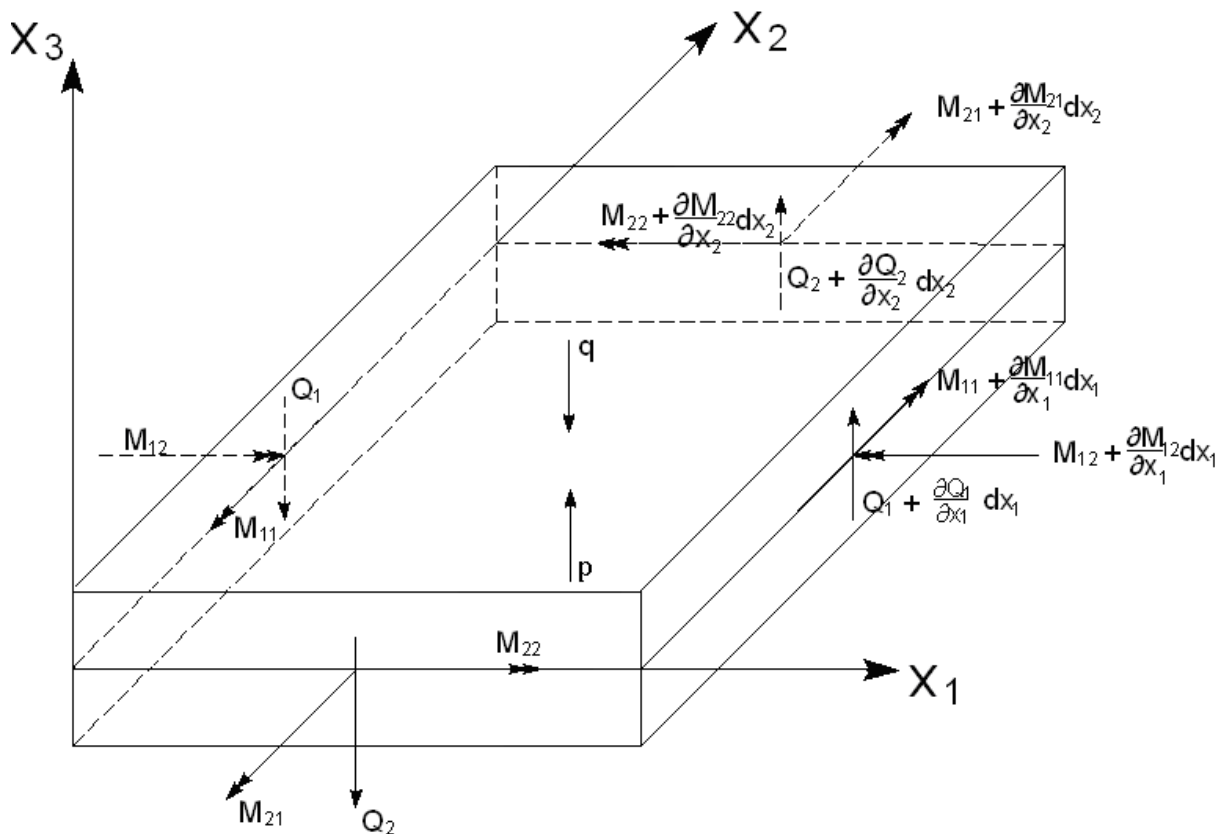


Figura 2.4 – Elemento de placa em equilíbrio

Substituindo as expressões (2.5) em (2.9), obtém-se o seguinte sistema de três equações diferenciais lineares:

$$\Delta_{ij}^* u_j + b_i = 0 \quad (2.10)$$

onde  $\Delta_{ij}^*$  representa as componentes do operador de Navier e suas expressões são mostradas a seguir:

$$\Delta_{\alpha\beta}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[ (\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \quad (2.11)$$

$$\Delta_{\alpha 3}^* = -\Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (2.12)$$

$$\Delta_{33}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla^2 \quad (2.13)$$

sendo:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \text{operador de Laplace} \quad (2.14)$$

e  $b_i$  representa as componentes das forças de domínio que, neste caso, são:

$$b_\alpha = \frac{\nu(q+p)_{,\alpha}}{\lambda^2(1-\nu)} \quad (2.15)$$

$$b_3 = q + p \quad (2.16)$$

### 2.2.7 – Condições de contorno

Seja uma placa, onde devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo. Considerando  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ , podem ser definidas as condições de contorno mostradas a seguir.

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_u : \phi_\alpha &= \bar{\phi}_\alpha \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_p : p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ p_3 &= Q_\beta n_\beta \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \\ \bar{p}_3 &= \bar{Q}_\beta n_\beta \end{aligned} \quad (2.20)$$

e, ainda:

$\Gamma$  = contorno total da placa

$\Gamma_u$  = parte do contorno onde há deslocamentos prescritos

$\Gamma_p$  = parte do contorno onde há forças generalizadas prescritas

$p_\alpha$  e  $p_3$  = forças de superfície generalizadas

$n_\beta$  = co-senos diretores da normal exterior ao contorno

Vale ressaltar que o traço acima dos símbolos indica que os valores correspondentes são prescritos.



## CAPÍTULO 3

### O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER

#### 3.1 – Introdução

São deduzidas, neste capítulo, as equações integrais de placas a partir do Método dos Resíduos Ponderados utilizando a teoria de flexão de placas de Reissner. São apresentados os tensores da solução fundamental e obtidas as equações para a resolução do problema no contorno. Também são obtidas as equações dos deslocamentos e esforços nos pontos internos, segundo Karam e Telles (1988), Karam (1992) e Ribeiro (2009).

No Método dos Elementos de Contorno, as equações diferenciais governantes do problema são utilizadas para obtenção de equações integrais correspondentes. Estas equações integrais, envolvendo integrais de domínio e de contorno, são transformadas em equações integrais apenas de contorno, por meio do Teorema da Divergência ou de Gauss-Green, sempre que possível. Para a obtenção das equações integrais, o MEC necessita de uma solução fundamental (Brebbia et al., 1984). Então, estas equações podem ser obtidas utilizando a solução fundamental como função ponderadora através do Método dos Resíduos Ponderados.

#### 3.2 – Equações Integrais

Seja uma placa definida por um domínio  $\Omega$ , representado por sua superfície média, e um contorno  $\Gamma$ , representado pela linha que a circunda. Considere-se, ainda, que a placa se encontre em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento transversal  $q$  atuando em  $\Omega$ , possuindo uma espessura constante  $h$  e sujeita, ainda, a uma força  $p$ , exercida pelo solo, de acordo com a Figura 2.1.

Por maior conveniência, daqui em diante, os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$  definidos em (2.4) serão representados, respectivamente, por  $u_\alpha$  e  $u_3$ , ou ainda, genericamente, como  $u_k$ .

As condições de contorno consideradas para as três direções generalizadas da placa são:

$$\begin{aligned} u_j &= \bar{u}_j \text{ em } \Gamma_u \\ p_j &= \bar{p}_j \text{ em } \Gamma_p \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p \quad (3.2)$$

Considere-se também um domínio  $\Omega^*$  com um contorno  $\Gamma^*$ , que contenha a placa de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , e que também esteja em estado de equilíbrio Figura (3.1).

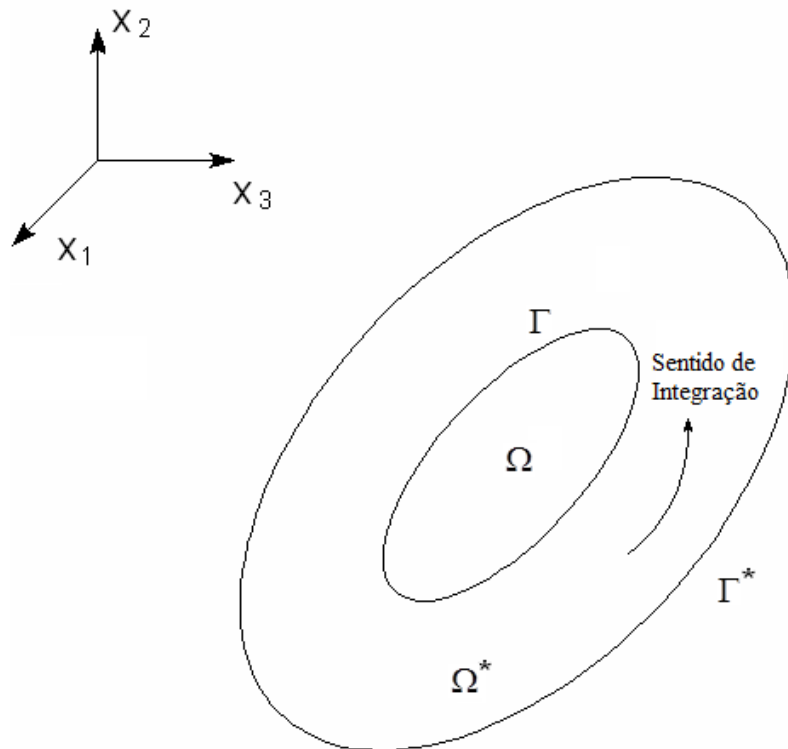


Figura 3.1 – Região  $\Omega^* \cup \Gamma^*$  contendo a placa  $\Omega \cup \Gamma$

Considerando as equações apresentadas no capítulo anterior, têm-se o que se segue:

a) Para a região ( $\Omega \cup \Gamma$ ):

- Deslocamentos:  $u_k$
- Forças de superfície:  $p_k$

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (3.3)$$

$$p_3 = Q_\alpha n_\alpha$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}}{2} \quad (3.4)$$

$$\psi_\alpha = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q + p) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha + u_{3,\alpha})$$

- Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (3.6)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q + p = 0$$

**b) Para a região  $(\Omega^* \cup \Gamma^*)$ :**

- Deslocamentos:  $u_k^*$
- Forças de superfície:  $p_k^*$

$$p_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^* n_\beta \quad (3.7)$$

$$p_3^* = Q_\alpha^* n_\alpha$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta}^* = \frac{u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*}{2} \quad (3.8)$$

$$\psi_\alpha^* = u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (3.9)$$

$$Q_\alpha^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*)$$

- Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* = 0 \quad (3.10)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

onde:

$F_k^*$  = componentes das forças de domínio definidas a fim de se obter a solução fundamental e se relacionam com as forças  $f_\alpha^*$  e  $f_3^*$ , sendo que estas últimas se distribuem ao longo da espessura como mostrado a seguir:

$$f_\alpha^* = \frac{12x_3}{h^3} F_\alpha^* \quad (3.11)$$

$$f_3^* = \frac{3F_3^*}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

### 3.2.1 – Dedução das equações integrais a partir do Método dos Resíduos Ponderados

Utilizando as equações de equilíbrio (3.6) e as condições de contorno (3.1), pode-se então distribuir o erro da forma seguinte, para uma solução aproximada composta de  $u_\alpha$  e  $u_3$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha) u_\alpha^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q + p) u_3^*] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u + \\ + \int_{\Gamma_p} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma_p \end{aligned} \quad (3.12)$$

Integrando a primeira parcela do primeiro membro de (3.12) por partes e considerando as expressões (3.3), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha) u_\alpha^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_\alpha u_\alpha^* d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_\alpha u_\alpha^* d\Omega \quad (3.13)$$

Integrando a segunda parcela do primeiro membro de (3.12) por partes e considerando as expressões (3.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} (Q_{\alpha,\alpha} + q + p) u_3^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_\alpha u_{3,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q + p) u_3^* d\Omega \quad (3.14)$$

Desta forma, o lado esquerdo da equação (3.12), considerando as expressões (3.1), (3.3), (3.13) e (3.14), pode ser escrito na forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{3,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma + \\
 & + \int_{\Omega} (q + p) u_3^* d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ou ainda:

$$- \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (q + p) u_3^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \tag{3.16}$$

sendo:

$$\alpha = 1, 2$$

$$j = 1, 2, 3$$

Considerando a expressão (3.2), a equação (3.12) torna-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (q + p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\
 & - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\overline{u_j} - u_j) p_j^* d\Gamma_u
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Considerando que:

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* \tag{3.18}$$

ressaltando que isto não significa que  $u_{\alpha,\beta}^* = \chi_{\alpha\beta}^*$ , e usando a reciprocidade de Betti:

$$M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* = M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} \tag{3.19}$$

então:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega \quad (3.20)$$

Desta forma, utilizando (3.5) e (3.9), obtém-se:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega \quad (3.21)$$

Considerando, ainda, as expressões (3.4), (3.5), (3.8) e (3.9) em (3.17), tem-se:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* \psi_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega = \\ = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.23)$$

Integrando novamente por partes a primeira parcela do primeiro membro de (3.23) e utilizando (3.3), fica:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega \quad (3.24)$$

Integrando por partes a segunda parcela do primeiro membro de (3.23) e considerando (3.7), obtém-se:

$$\int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{3,\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega \quad (3.25)$$

Sabe-se que:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{para } \alpha = \beta \\ 0 & \text{para } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (3.26)$$

Então, tem-se  $\delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* = u_{\alpha,\alpha}^*$  para  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ .

Logo, considerando (3.24), (3.25), (3.26) em (3.23), fica:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\ & = - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\overline{u_j} - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou ainda, utilizando (3.10), obtém-se :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} F_3^* u_3 d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\ & = - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} (\overline{u_j} - u_j) p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considerando  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p - \int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega = - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u - \\ & - \int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.29)$$



ou ainda:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} (q+p) u_3^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \\
 &= - \int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

A expressão (3.1) fornece:

$$\int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u \quad (3.31)$$

Então:

$$\int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p = \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma \quad (3.32)$$

Logo, a equação (3.30) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega &= \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} p \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

As forças de domínio  $F_j^*$  são forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região  $\Omega^*$ , o qual será chamado de ponto carga ou ponto fonte e representado por  $\xi$ .

Essas forças podem ser representadas por:

$$F_j^* = \delta(x - \xi) P_j \quad (3.34)$$

onde:

$$P_j = 1 \quad (3.35)$$

$\delta(x-\xi)$  = função generalizada delta de Dirac com singularidade em  $\xi$ .

A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x - \xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \quad (3.36)$$

Sendo agora  $\xi$  pertencente à região  $\Omega$  e considerando (3.34), a primeira integral de (3.33) fica:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) P_j u_j d\Omega \quad (3.37)$$

ou ainda, considerando (3.36):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) P_j \quad (3.38)$$

E, considerando (3.35):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi) \quad (3.39)$$

Seja, agora, cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente. Então, pode-se escrever:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (3.40)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i$$

onde:

$\xi$  = ponte fonte, ou seja, ponto onde são aplicadas as cargas concentradas generalizadas unitárias

$x$  = ponto campo, ou seja, ponto onde são observados os efeitos das cargas concentradas generalizadas unitárias aplicadas

$u_{ij}^*(\xi, x)$  = deslocamento generalizado na direção  $j$  do ponto campo correspondente a uma força unitária aplicada na direção  $i$  do ponto fonte

$p_{ij}^*(\xi, x)$  = força de superfície generalizada na direção  $j$  do ponto campo correspondente a uma força unitária aplicada na direção  $i$  do ponto fonte

Considerando as cargas unitárias atuando em cada uma das três direções generalizadas, pode-se então escrever três equações da forma seguinte, sendo válidas para um ponto  $\xi$  qualquer situado no interior da região  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) + \\
 & + \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde:

$q(x)$  = carregamento transversal aplicado à placa

$p(x)$  = reação do solo

### 3.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno

Para resolver o problema no contorno, torna-se necessário escrever a equação (3.41) para um ponto  $\xi$  situado no contorno da placa, pois a equação (3.41) fornece os deslocamentos em qualquer ponto contido no interior da placa desde que os valores das forças de superfície e deslocamentos de todos os pontos

do contorno sejam conhecidos. Então, considera-se a placa representada na Figura 3.2, com o ponto  $\xi$  situado no contorno e envolvido por um semicírculo de raio  $\varepsilon$  e centrado no ponto  $\xi$ .

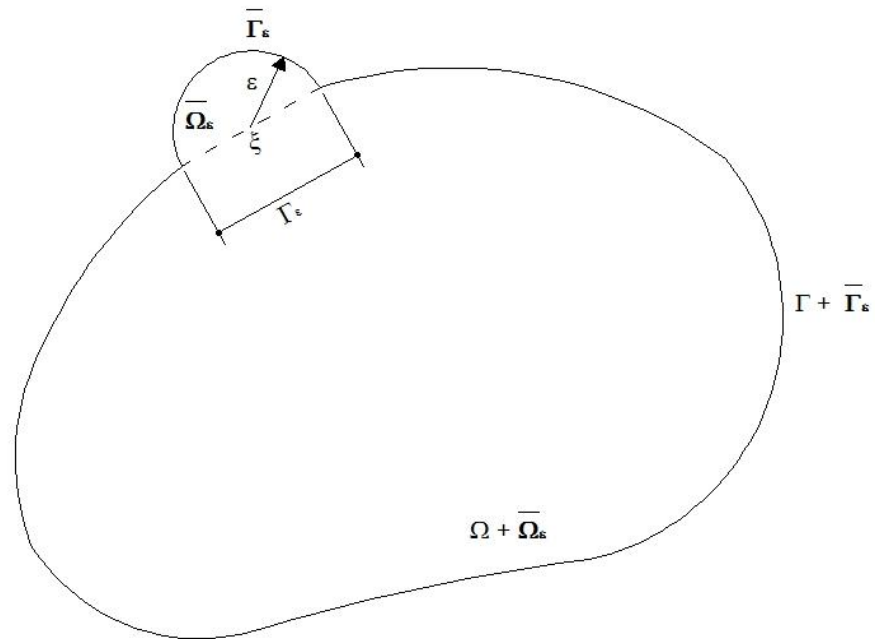


Figura 3.2 – Placa com ponto  $\xi$  no contorno

Neste caso, a equação integral (3.41) para os deslocamentos no ponto  $\xi$  fica:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega + \bar{\Omega}_\varepsilon} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) + \\
 & + \int_{\Omega + \bar{\Omega}_\varepsilon} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral de (3.42) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A segunda integral em (3.42) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde a primeira integral à direita pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

A primeira integral à direita na equação (3.44) se anula devido à continuidade de  $u_j(x)$  e a segunda integral à direita, juntamente com o lado esquerdo da equação (3.42), fornece:

$$u_i(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} = u_j(\xi) \left[ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.45)$$

pois:

$$u_i(\xi) + u_j(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = u_j(\xi) \left[ \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right] \quad (3.46)$$

Então:

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.47)$$

A segunda integral à direita em (3.43) deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se  $u_j(x)$  satisfaz a condição de Hölder:

$$|u_j(x) - u_j(\xi)| \leq B r^\alpha \quad (3.48)$$

onde  $B$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

As integrais restantes em (3.42) não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas.

Assim, pode-se escrever, para um ponto  $\xi$  do contorno:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 &+ \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) + \\
 &+ \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

onde a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{ij}(\xi)$  definido em (3.47) depende da geometria do contorno no ponto  $\xi$ .

Assim, pode-se considerar a equação (3.49) escrita para um ponto  $\xi$  qualquer, onde:

$$c_{ij} = \delta_{ij} \text{ quando } \xi \text{ é ponto do interior} \tag{3.50}$$

$$c_{ij} = \delta_{ij}/2 \text{ quando } \xi \text{ é ponto de contorno suave}$$

### 3.4 – Solução Fundamental

Na análise de problemas pelo Método dos Elementos de Contorno, são utilizadas equações integrais envolvendo soluções fundamentais, sendo estas, determinadas de forma particular de acordo com o tipo de problema a ser analisado. Desta forma, para desenvolver uma formulação que permita aplicação do Método dos Elementos de Contorno, é necessária uma solução fundamental.

Esta solução representa a solução das equações diferenciais do problema nas direções generalizadas consideradas para um ponto campo  $x$  devido a forças concentradas generalizadas unitárias aplicadas em um ponto  $\xi$ .

### 3.4.1 – Deslocamentos generalizados

Sejam as equações (2.10) para cargas concentradas unitárias na direção  $k$  no ponto  $\xi$ , aplicadas separadamente. Neste caso, as equações (2.10) podem ser representadas como:

$$\Delta_{ij}^* u_{kj}^* + b_{ki}^* = 0 \quad (3.51)$$

sendo:

$$b_{ki}^* = \delta(x - \xi) \delta_{ki} \quad (3.52)$$

onde  $\delta(x - \xi)$  é definida no item 3.2.1.

O campo de deslocamentos  $u_{kj}^*$  representa a solução da equação (3.51) e é chamada de solução fundamental.

Segundo Van der Weeën (1982b), uma solução que satisfaz as equações (3.51) foi obtida pelo método de Hörmander, dada pelas expressões:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha}$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[ (1-\nu)z^2 (\ln z - 1) - 8\ln z \right] \quad (3.53)$$

onde:

$$r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha} = \text{distância entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (3.54)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_{\alpha}(x)} = \frac{r_{\alpha}}{r} \quad (3.55)$$

sendo:

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(x) - x_{\alpha}(\xi) \quad (3.56)$$

$$z = \lambda r \quad (3.57)$$

$$A(z) = K_0(z) + 2z^{-1} [K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.58)$$

$$B(z) = K_0(z) + z^{-1} [K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.59)$$

sendo  $K_0$  e  $K_1$  funções de Bessel modificadas. Neste trabalho, as funções de Bessel foram calculadas através de expansões polinomiais (Abramowitz e Stegun, 1965).

### 3.4.2 – Forças de superfície generalizadas

Substituindo as derivadas de (3.53) em (3.5) e, em seguida, substituindo as expressões resultantes em (3.3), resultam as expressões seguintes, que representam as forças de superfície referentes à solução fundamental:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_{\gamma}) + (4A + 1 + \nu)r_{,\gamma} n_{\alpha} - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n}]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B n_{\gamma} - A r_{,\gamma} r_{,n}]$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_{\alpha} + 2r_{,\alpha} r_{,n} \right]$$



$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n} \quad (3.60)$$

onde  $r_{,n}$  é a derivada de  $r$  em relação à normal no ponto  $x$ , sendo expressa por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_\alpha \quad (3.61)$$

Vale ressaltar que as derivadas de  $u_{ij}^*$  são em relação às coordenadas do ponto  $x$  (ponto campo) e considerou-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_\alpha(x)} &= \lambda r_{,\alpha} \\ \frac{\partial A}{\partial x_\alpha(x)} &= -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A) \\ \frac{\partial B}{\partial x_\alpha(x)} &= -\frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A) \\ \frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(x)} &= \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r} \end{aligned} \quad (3.62)$$

### 3.5 – Transformação das Integrais de Forças de Domínio em Integrais de Contorno

A primeira integral de domínio à direita que aparece em (3.49) representa a contribuição da carga transversal  $q(x)$  e a segunda integral de domínio à direita representa a reação do solo  $p(x)$ .

A primeira integral de domínio à direita pode ser transformada em integral de contorno para vários tipos de carregamento.

Neste trabalho, será considerado que a carga  $q(x)$  é um carregamento uniformemente distribuído.

Tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} q(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.63)$$

Considerando a equação de Poisson seguinte, para a qual  $v_i^*$  é uma solução:

$$v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (3.64)$$

e aplicando o teorema da divergência em (3.63), tem-se, sendo  $q(x) = q = \text{cte}$ :

$$I_i(\xi) = q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) \quad (3.65)$$

sendo, de acordo com Van der Weeën (1982a) e Karam (1986):

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[ \delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.66)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left[ 32(2 \ln z - 1) - z^2 (1-\nu) (4 \ln z - 5) \right]$$

Seja o domínio da placa dividido em células e sejam também:

$\Gamma_c$  = contorno da célula  $c$

$\Omega_c$  = domínio da célula  $c$

$N_c$  = número total de células da placa

A segunda integral de domínio à direita em (3.49) pode ser escrita como uma soma de integrais sobre o domínio de cada célula e estas integrais podem ser transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

Tem-se:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} p(x) \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.67)$$

Considerando a equação de Poisson (3.64), pode-se escrever:

$$II_i(\xi) = \int_{\Omega} p(x) \left[ v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) \quad (3.68)$$

Admitindo-se a divisão do domínio em células, tem-se:

$$II_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} \int_{\Omega_c} p_c(x) \left[ v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega_c(x) \quad (3.69)$$

Aplicando o teorema da divergência em (3.69), tem-se, sendo, em cada célula,  $p_c(x) = p_c = \text{constante}$ :

$$II_i(\xi) = \sum_{c=1}^{N_c} p_c \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma_c(x) \quad (3.70)$$

Assim, considerando as equações (3.65) e (3.70) em (3.49), as equações (3.49) podem ser escritas como mostradas a seguir, contendo apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] d\Gamma(x) + \\ &+ q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \sum_{c=1}^{N_c} p_c \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma_c(x) \end{aligned} \quad (3.71)$$

### 3.6 – Expressões para Deslocamentos e Esforços nos Pontos Internos

Os deslocamentos e esforços nos pontos internos também podem ser calculados por meio de equações integrais, como será mostrado a seguir.

#### 3.6.1 – Deslocamentos

Os deslocamentos nos pontos internos são obtidos usando a expressão (3.71) com  $c_{ij} = \delta_{ij}$ .

Logo, para um ponto interno  $\xi$  qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} p_c \int_{\Gamma_c} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma_c(x)
 \end{aligned} \quad (3.72)$$

#### 3.6.2 – Momentos e esforços cortantes

O cálculo dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos é realizado através das expressões (3.5), onde os deslocamentos e as derivadas de deslocamentos que nelas aparecem são substituídos pelas expressões (3.72) e suas respectivas derivadas em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ .

Neste caso, considerando (3.55) e (3.56), tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)} = - \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = - r_{,\alpha} \quad (3.73)$$

Consequentemente, de (3.61), (3.62) e (3.73), vem:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(\xi)} = -\lambda r_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + 2A)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_1 + A)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} (z K_0 + K_1)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r}$$

$$\frac{\partial r_{,n}}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,n} - n_\alpha}{r}$$

(3.74)

Resultam, então, expressões com as seguintes formas, para momentos e esforços cortantes:

a) Momentos:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \sum_{c=1}^{N_c} p_c \int_{\Gamma_c} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q+p)\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(3.75)

b) Esforços cortantes:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + q \int_{\Gamma_c} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \sum_{c=1}^{N_c} p_c \int_{\Gamma_c} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \end{aligned}$$

(3.76)

Os tensores  $u_{i\beta k}^*$ ,  $p_{i\beta k}^*$  e  $w_{i\beta}^*$  foram obtidos considerando-se que são os termos que multiplicam, respectivamente, as forças de superfície  $p_k(x)$ , os deslocamentos  $u_k(x)$  e a carga distribuída  $q$  ou a reação do solo  $p_c$  quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços.

a) Para  $u_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (3.77a)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha 3,\beta}^* + u_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} (u_{13,1}^* + u_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right)$$

Na expressão dos cortantes:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \quad (3.77b)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta 3}^* + u_{33,\beta}^*)$$

Derivando as expressões (3.53) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = \frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left[ (4A + 4zK_1 + 1 - \nu) r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right]$$

$$u_{\alpha 3, \beta}^* = -u_{3\alpha, \beta}^* = -\frac{1}{8\pi D} \left[ \delta_{\alpha\beta} (2\ln z - 1) + 2r_{, \beta} r_{, \alpha} \right]$$

$$u_{33, \alpha}^* = \frac{-r_{, \alpha}}{8\pi D (1-\nu) \lambda^2 r} \left[ (1-\nu) z^2 (2\ln z - 1) - 8 \right]$$
(3.78)

A substituição de (3.53) e (3.78) em (3.77) fornece, após reagruparem-se os termos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{, \alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{, \beta}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{, \alpha} r_{, \beta} r_{, \gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{, \gamma} \right]$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{, \alpha} r_{, \beta} \right]$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[ B\delta_{\gamma\beta} - A r_{, \gamma} r_{, \beta} \right]$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{, \beta}$$
(3.79)

b) Para  $p_{i\beta k}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha\gamma, \beta}^* + p_{\beta\gamma, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{1\gamma, 1}^* + p_{2\gamma, 2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ p_{\alpha 3, \beta}^* + p_{\beta 3, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{13, 1}^* + u_{23, 2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$
(3.80a)

Na expressão dos cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma,\beta}^*) \quad (3.80b)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta 3}^* + p_{33,\beta}^*)$$

Considerando as expressões (3.60) e derivando em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$\begin{aligned} p_{\gamma\alpha,\beta}^* &= \frac{1}{4\pi r^2} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\alpha\beta} n_\gamma) + (4A + 1 + \nu)\delta_{\gamma\beta} n_\alpha - \\ &\quad - 2(8A + 4zK_1 + z^2 K_0 + 1 - \nu) * (n_\gamma r_{,\beta} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,n}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) * \\ &\quad * (n_\beta r_{,\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,n}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu) n_\alpha r_{,\gamma} r_{,\beta} + \\ &\quad + 4(24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n}] \\ p_{\gamma 3,\beta}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi r} [(zK_1 + A) r_{,\beta} n_\gamma + A r_{,\gamma} n_\beta - (4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} + A \delta_{\gamma\beta} r_{,n}] \\ p_{3\alpha,\beta}^* &= \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} n_\alpha r_{,\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + r_{,\alpha} n_\beta + \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right] \\ p_{33,\beta}^* &= \frac{1}{2\pi r^2} [n_\beta - 2r_{,\beta} r_{,n}] \end{aligned} \quad (3.81)$$

Substituindo (3.60) e (3.81) em (3.80) são obtidas, após reagrupar os termos:



$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\alpha} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta} n_\gamma - \right. \\
&\quad - (16A + 6zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) * \left[ (n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha}) r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha}) r_{,n} \right] - \\
&\quad - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_\gamma r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\
&\quad \left. + 4(24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \right\} \\
p_{\alpha\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + zK_1)(r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) - 2(4A + zK_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A \delta_{\alpha\beta} r_{,n} \right] \\
p_{3\beta\gamma}^* &= -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[ (2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta} r_{,n} + r_{,\gamma} n_\beta) + 2A n_\gamma r_{,\beta} - 2(4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n} \right] \\
p_{3\beta 3}^* &= \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[ (z^2 B + 1) n_\beta - (z^2 A + 2) r_{,\beta} r_{,n} \right]
\end{aligned} \tag{3.82}$$

c) Para  $w_{i\beta}^*$ , tem-se:

Na expressão dos momentos:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha\beta}^* &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left( u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \right) \right] n_\gamma
\end{aligned} \tag{3.83a}$$

Na expressão dos cortantes:

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[ v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \right] n_\gamma \tag{3.83b}$$

Considerando as expressões (3.77), podem-se escrever as expressões (3.83) como:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) \right] n_\gamma - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} [v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^*] n_\gamma - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma$$
(3.84)

Derivando-se as expressões (3.66) em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ , obtém-se, após reagrupar os termos:

$$v_{\alpha,\beta\gamma}^* = -\frac{r}{64\pi D} \left\{ [\delta_{\alpha\beta} (4\ln z - 3) + 4r_{,\alpha} r_{,\beta}] r_{,\gamma} + (4\ln z - 3)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha}) \right\}$$
(3.85)

$$v_{3,\beta\gamma}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ \delta_{\gamma\beta} \left[ (4\ln z - 2) - \frac{z^2}{16} (1-\nu)(4\ln z - 5) \right] + r_{,\beta} r_{,\gamma} \right. \\ \left. * \left[ 4 - \frac{z^2}{8} (1-\nu)(4\ln z - 3) \right] \right\}$$

A substituição de (3.66) e (3.85) em (3.84) fornece, após reagrupar os termos:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \left\{ (4\ln z - 3) [(1-\nu)(r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) + (1-3\nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,n}] + \right. \\ \left. + 4[(1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta}] r_{,n} \right\} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma$$
(3.86)

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} \left[ (2\ln z - 1) n_\beta + 2 r_{,\beta} r_{,n} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma$$

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DA PLACA

#### 4.1 – Introdução

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos utilizados na implementação numérica das equações integrais do capítulo anterior. Para isto, as equações integrais são escritas em forma discretizada, sendo o contorno da placa discretizado em elementos de contorno quadráticos, tendo geometria linear, e o domínio, em células triangulares ou quadrilaterais constantes.

Inicialmente, monta-se um sistema de equações composto de três equações integrais de deslocamentos para cada ponto nodal do contorno, sendo uma equação para cada uma das três direções generalizadas. Então, o número de equações do sistema é igual a três vezes o número de nós.

As incógnitas do problema são, neste caso, os deslocamentos ou as forças de superfície em cada ponto nodal da placa e as forças de reação do solo. Logo, o número de equações é menor que o número de incógnitas, sendo, então, consideradas equações adicionais a este sistema, constituídas pelas equações dos deslocamentos transversais dos pontos situados no centro geométrico de cada célula.

Ainda são mostradas, neste capítulo, as equações discretizadas para o cálculo dos deslocamentos e esforços nos pontos internos.

#### 4.2 – Discretização das Equações Integrais

Para a resolução numérica das equações integrais apresentadas no capítulo anterior, o contorno  $\Gamma$  da placa é dividido em elementos, cada um tendo um contorno  $\Gamma_j$ . Além disso, o contorno  $\Gamma_c$  de cada célula é dividido em elementos de contorno  $\Gamma_{c,j}$ , nos quais  $u_j$  e  $p_j$  são calculados por interpolação dos valores nodais. Para cada ponto nodal, têm-se três componentes de deslocamento e três de forças de superfície, sendo uma para cada direção generalizada.

Neste trabalho, são utilizados elementos de contorno tendo geometria linear e podendo ser contínuos ou descontínuos, e células internas triangulares constantes, como mostrado na Figura 4.1, ou também quadrilaterais. Nos cantos da placa, podem ser considerados nós duplos.

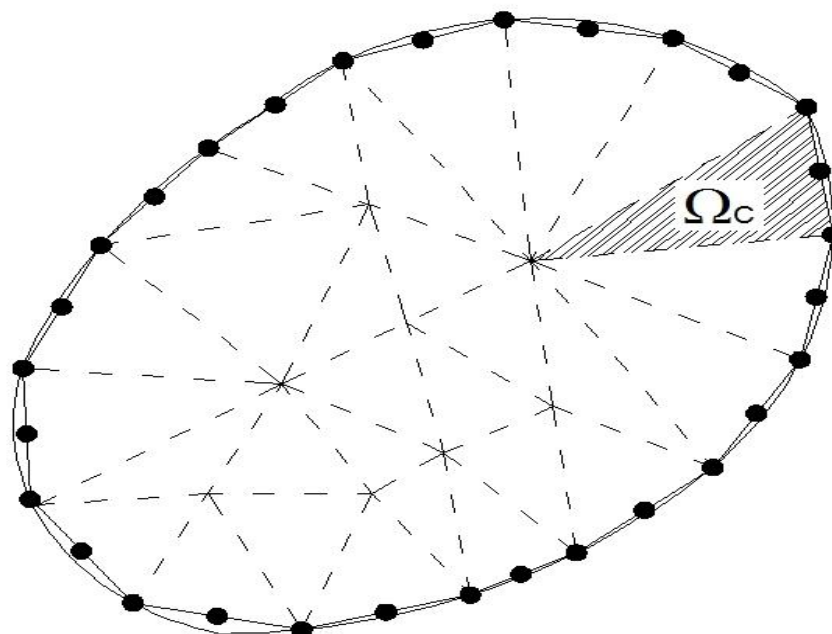


Figura 4.1 – Placa dividida em elementos de contorno e células internas

#### 4.2.1 – Sistema de equações

A equação (3.71) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal  $\xi$  de  $\Gamma$ , substituindo-se as integrais em  $\Gamma$  por somatórios de integrais em  $\Gamma_j$ , sendo  $\Gamma_j$  o domínio de integração do elemento  $j$ . Além disso, as integrais escritas para o contorno  $\Gamma_c$  de cada célula são substituídas por somatórios de integrais em  $\Gamma_{c,j}$ .

Para um ponto qualquer do elemento  $j$ , serão consideradas as expressões seguintes para interpolar os deslocamentos e forças de superfície em função dos valores nodais:

$$\mathbf{u}^j = \mathbf{N} \mathbf{u}^n \quad (4.1)$$

$$\mathbf{p}^j = \mathbf{N} \mathbf{p}^n$$

sendo:

$\mathbf{N}$  = matriz que contém as funções de interpolação

$\mathbf{u}^n$  e  $\mathbf{p}^n$  = vetores que contêm as componentes dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento considerado.

Considerando o contorno  $\Gamma$  discretizado em elementos de contorno  $\Gamma_j$  e considerando as equações (4.1), a equação (3.71) pode ser escrita na seguinte forma discretizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{u}_i = & \sum_{j=1}^e \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{j=1}^e \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \sum_{j=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] + \\ & + \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Ne} \left[ p_c \int_{\Gamma_{c_j}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde:

$\mathbf{C}_i$  = matriz cujos elementos são os  $c_{ij}$  que aparecem na equação (3.50)

$\mathbf{u}_i$  = vetor deslocamento do ponto fonte

$e$  = número de elementos do contorno

$\mathbf{U}_i^*$  e  $\mathbf{P}_i^*$  = matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente

$\mathbf{s}_i^*$  = vetor cujas componentes são expressas por:

$$s_k^* = \left( v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)} \lambda^2 u_{k\alpha} \right) n_\alpha \quad (4.3)$$

$N_e$  = número de elementos no contorno de cada célula interna

$N_c$  = número total de células da placa

Torna-se necessário escrever a diferencial de contorno  $d\Gamma$  em função de uma coordenada intrínseca adimensional  $\eta$  (ver item 4.3), já que as funções de interpolação são escritas nesse sistema. Assim, sendo  $|\mathbf{J}|$  o jacobiano da transformação, é usada a expressão:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.4)$$

Chamando:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.6)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \quad (4.7)$$

$$\mathbf{m}_{ij}^c = p_c \int_{\Gamma_{c,j}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \quad (4.8)$$

a equação (4.2) pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^e \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j - \sum_{j=1}^e \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^e \mathbf{b}_{ij} + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{m}_{ij}^c \quad (4.9)$$

ou ainda:

$$\sum_{j=1}^e \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^e \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{j=1}^e \mathbf{b}_{ij} + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{m}_{ij}^c \quad (4.10)$$

onde:

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} \text{ para } i \neq j \quad (4.11)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{C}_i \text{ para } i = j$$

No caso de integrais regulares (quando o ponto  $\xi$  não pertencente a  $\Gamma_j$ ), as integrações numéricas das expressões (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) são resolvidas através da quadratura de Gauss.

Deste modo, utiliza-se a expressão (4.4) para substituir a diferencial do contorno e as integrais assim obtidas são então substituídas por somatórios, indicados nas seguintes expressões:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{U}_i^* \mathbf{N})_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{P}_i^* \mathbf{N})_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.13)$$

$$\int_{\Gamma_j} s_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 s_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (s_i^*)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.14)$$

$$\int_{\Gamma_{ij}} s_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 s_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (s_i^*)_k |\mathbf{J}| \omega_k \quad (4.15)$$

onde:

$K$  = número total de pontos de integração

$\omega_k$  = fator de peso associado a cada ponto de integração  $k$

Para o caso de integrais singulares, que ocorrem quando o ponto  $\xi$  pertence a  $\Gamma_j$ , estas integrais também são calculadas numericamente, porém, utilizam-se procedimentos especiais.

Escrevendo a equação (4.10) para todos os pontos nodais  $\xi$  do contorno, obtém-se um sistema de equações, no qual o número total de equações é igual a três vezes o número de nós, da seguinte forma:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} + \mathbf{b} + \mathbf{m} \quad (4.16)$$

onde:

$\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  = vetores que contêm os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente

$\mathbf{b}$  = vetor que contém a parcela da carga distribuída

$\mathbf{m}$  = vetor que contém a parcela da reação do solo

$\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  = matrizes que contêm as integrais sobre os elementos de contorno

Vale ressaltar que, nos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$ , deve-se ter, para cada direção nodal, um dos dois valores como incógnita e o outro prescrito. Cabe observar ainda que, na matriz  $\mathbf{H}$ , está incluída a parcela que contém o termo  $c_{ij}$ .

O sistema representado pela equação (4.16) poderia ser resolvido se as incógnitas fossem apenas deslocamentos e forças de superfície no contorno. Como as forças de reação do solo também são incógnitas, equações adicionais a este sistema são necessárias. São, então, consideradas as equações dos deslocamentos transversais dos pontos situados nos centros geométricos das células.

Estas equações são similares às escritas para os nós do contorno (3.71), apenas se diferenciando pelo coeficiente  $c_{ij}$ , que agora vale 1. Desta forma, aplicando a terceira das equações (3.71) a todos os pontos considerados nas células, em que existe o contato com o solo, tem-se, após a discretização:

$$\mathbf{I} \mathbf{u}_i + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{m}_i \quad (4.17)$$



onde o índice  $i$  indica que os vetores e matrizes correspondentes referem-se aos pontos internos.

Agrupando as equações (4.16) e (4.17), tem-se um único sistema, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{ri} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_r \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

onde:

$\{\mathbf{u}\}$  = vetor formado pelos deslocamentos nodais do contorno

$\{\mathbf{u}_i\}$  = vetor formado pelos deslocamentos transversais de todos os nós das células

$\{\mathbf{b}\}$  = vetor formado pelo carregamento transversal à placa

$\{\mathbf{p}_r\}$  = vetor formado pela contribuição da reação do solo

#### 4.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos

Após a resolução do problema no contorno, podem ser calculados os deslocamentos e esforços nos pontos internos.

A fim de se calcular os deslocamentos nos pontos internos, a equação (3.72) é discretizada ao longo do contorno da placa e das células, análogo ao que foi feito na equação (3.71).

Então, para cada ponto  $\xi_i$  do interior da região  $\Omega$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{k=1}^{N_e} \left[ p_c \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{s}_i^* d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

### 4.2.3 – Momentos e esforços cortantes nos pontos internos

Considerando as equações (3.75) e (3.76) discretizadas ao longo do contorno da placa e das células, obtêm-se as expressões dos momentos e dos esforços cortantes nos pontos internos.

Assim, para cada ponto interno  $\xi_i$ , tem-se:

a) Momentos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^{*'} \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}_i^{*'} \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{W}_i^{*'} d\Gamma \right] + \\ & + \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Ne} \left[ p_c \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{W}_i^{*'} d\Gamma \right] + \frac{(q+p)\delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

b) Esforços cortantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i = & \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}_i^{*''} \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{p}^n - \sum_{k=1}^e \left[ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}_i^{*''} \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{u}^n + \sum_{k=1}^e \left[ q \int_{\Gamma_k} \mathbf{W}_i^{*''} d\Gamma \right] + \\ & + \sum_{c=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Ne} \left[ p_c \int_{\Gamma_{ck}} \mathbf{W}_i^{*''} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{U}_i^{*'}$ ,  $\mathbf{U}_i^{*''}$ ,  $\mathbf{P}_i^{*'}$ ,  $\mathbf{P}_i^{*''}$ ,  $\mathbf{W}_i^{*'}$  e  $\mathbf{W}_i^{*''}$  são matrizes que contêm os tensores apresentados anteriormente.

### 4.3 – Elementos de Contorno

O tipo de elemento de contorno utilizado neste trabalho é o elemento quadrático, contínuo ou descontínuo. Desta forma, os deslocamentos e os esforços ao longo de cada elemento são aproximados por funções polinomiais quadráticas, tornando-se necessários três pontos nodais em cada elemento.

### 4.3.1 – Elemento quadrático contínuo

Um elemento é contínuo quando possui pontos nodais nas extremidades, sendo estes pontos comuns entre elementos adjacentes, havendo, neste caso continuidade das funções envolvidas nesses pontos, conforme indica a Figura 4.2.

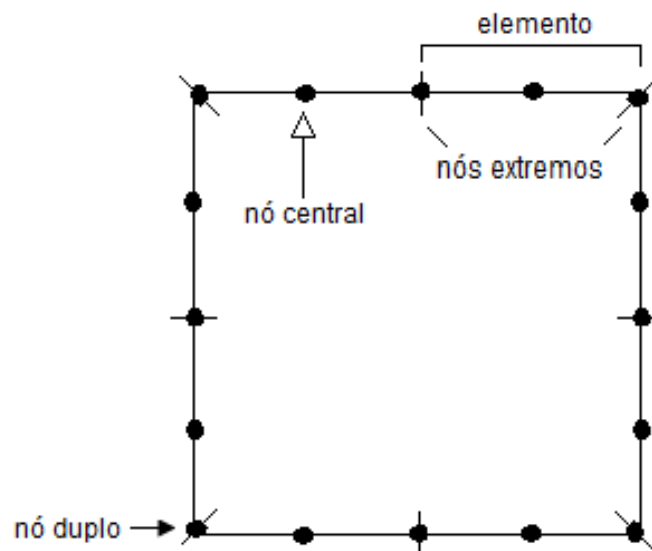


Figura 4.2 – Elementos de contorno quadráticos contínuos

As funções de interpolação, dadas em função da coordenada adimensional  $\eta$ , são:

$$N_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1)$$

$$N_2 = (1 - \eta) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1)$$

(4.22)

e possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois.

### 4.3.2 – Elemento quadrático descontínuo

No elemento descontínuo, existem pontos nodais afastados das extremidades do elemento e, portanto, não há continuidade das funções envolvidas entre elementos adjacentes (Figura 4.3). Este elemento permite a modelagem de contorno onde existem descontinuidades de forças de superfície ou de geometria, ou seja, quando há descontinuidade da normal e as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes.

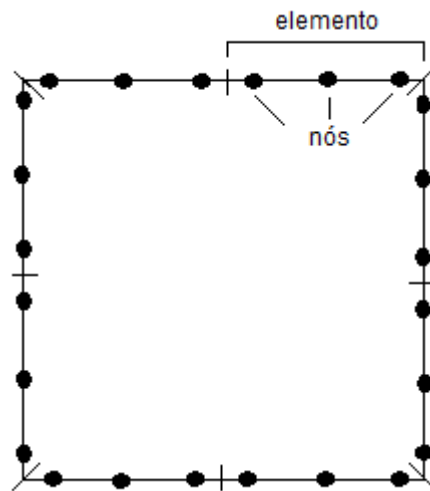


Figura 4.3 – Elementos de contorno quadráticos descontínuos

Suas funções de interpolação são:

$$N_1 = \frac{l\eta(l\eta - l + 2b)}{2(l - a - b)(l - 2a)}$$

$$N_2 = \frac{l\eta(2(a - b) - l\eta)}{(l - 2a)(l - 2b)} + 1$$

$$N_3 = \frac{l\eta(l\eta + l - 2a)}{2(l - a - b)(l - 2b)}$$

(4.23)

onde:

$l$  = comprimento total do elemento

$a$  = afastamento do primeiro nó do elemento em relação à extremidade

$b$  = afastamento do último nó do elemento em relação à extremidade

#### **4.4 – Nó Duplo**

O nó duplo é utilizado quando, em uma determinada direção nodal generalizada do ponto de interseção de dois elementos onde exista descontinuidade da normal ou da condição de contorno, as forças de superfície são conhecidas nos dois elementos adjacentes ou o deslocamento é conhecido num elemento e a força de superfície é conhecida no outro. Considera-se como se houvesse dois pontos nodais no mesmo ponto geométrico, cada um pertencendo a um elemento diferente.

## CAPÍTULO 5

### EQUAÇÕES INTEGRAIS DO SOLO

#### 5.1 – Introdução

Inicialmente, neste capítulo, são obtidas as equações integrais para um sólido tridimensional finito, baseada na teoria da elasticidade tridimensional para sólidos homogêneos.

Posteriormente, são apresentadas as equações integrais para sólidos semi-infinitos.

Para aplicação do Método dos Elementos de Contorno, a solução fundamental utilizada para o solo, neste trabalho, é a solução de Boussinesq-Cerruti, já que esta é válida para domínios semi-infinitos e seu ponto de aplicação da carga unitária é um ponto qualquer da superfície.

Da mesma forma como foi feita para a placa, a superfície do solo é discretizada em elementos de superfície triangulares ou quadrilaterais constantes.

E, por fim, apresenta-se a equação integral para o deslocamento vertical de um ponto qualquer do meio contínuo em função dos valores nodais de todos os elementos de contorno.

#### 5.2 – Equação Integral para um Sólido Tridimensional

Seja um corpo de forma arbitrária, delimitado por uma superfície  $\Gamma$ , conforme mostrado na Figura 5.1. A região interior do sólido é indicada por  $\Omega$ . Considere-se, ainda, que o sólido esteja em estado de equilíbrio e que possui comportamento elástico linear.

As tensões atuantes em um elemento infinitesimal de um sólido tridimensional são mostradas na Figura 5.2.

Fazendo-se o equilíbrio do elemento, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + b_j = 0 \tag{5.1}$$

onde  $b_j$  são as componentes de forças de volume nas direções de  $x_j$ .

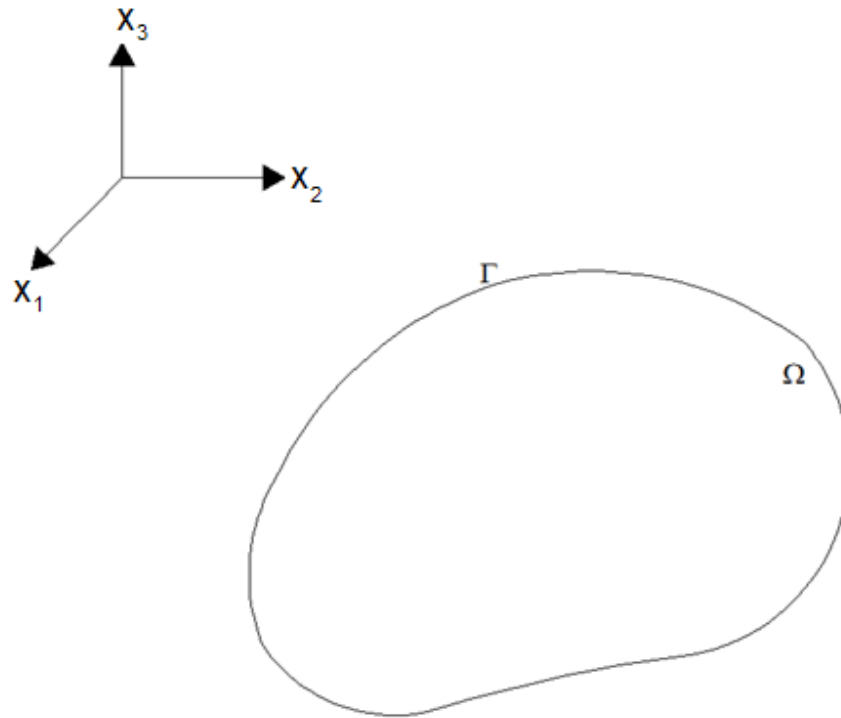


Figura 5.1 – Sólido tridimensional

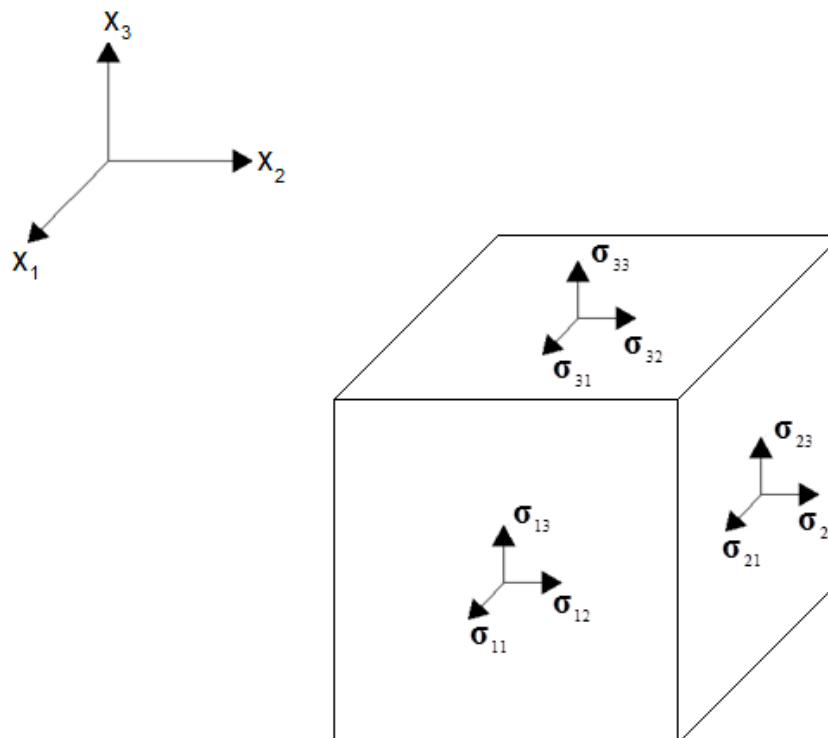


Figura 5.2 – Tensões atuantes em um elemento infinitesimal do sólido

As condições de contorno consideradas para as três direções do sólido são:

$$u_j = \overline{u_j} \text{ em } \Gamma_u \quad (5.2)$$

$$p_j = \overline{p_j} \text{ em } \Gamma_p$$

sendo:

$u_j$  = deslocamentos

$p_j$  = forças de superfície

$\Gamma$  = contorno (superfície) total do sólido, sendo,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$

$\Gamma_u$  = parte do contorno (superfície) onde os deslocamentos são prescritos

$\Gamma_p$  = parte do contorno (superfície) onde as forças de superfície são prescritas

Vale ressaltar que o traço acima dos símbolos indica que os valores correspondentes são prescritos.

As forças de superfície são expressas por:

$$p_j = \sigma_{ij} n_j \quad (5.3)$$

onde:

$n_j$  = co-senos diretores da normal exterior ao contorno

A dedução das equações integrais é obtida, neste trabalho, pelo Método dos Resíduos Ponderados. Assim, utilizando as equações de equilíbrio (5.1) e as condições de contorno (5.2), pode-se distribuir o erro da forma seguinte, para uma solução aproximada composta de  $u_j$  e utilizando a solução fundamental  $u_j^*$  como função ponderadora:



$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_j) u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma_p \quad (5.4)$$

Integrando a primeira parcela do primeiro membro de (5.4) por partes e considerando as expressões (5.3), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_j) u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{j,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.4) e admitindo que  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ , a equação (5.5) torna-se:

$$\int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{j,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p \quad (5.6)$$

Utilizando a reciprocidade de Betti, integrando a segunda parcela do primeiro membro de (5.6) por partes e considerando a expressão (5.3), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{j,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* u_j n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (5.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_u} p_j^* u_j d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} p_j^* u_j d\Gamma_p + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega &= \\ &= \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p \end{aligned} \quad (5.8)$$

Então, a equação (5.4) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma_p + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p + \\ &+ \int_{\Gamma_u} \bar{u}_j p_j^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (5.9)$$

A expressão (5.2) fornece:

$$\int_{\Gamma_u} \overline{u_j} p_j^* d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u \quad (5.10)$$

$$\int_{\Gamma_p} \overline{p_j} u_j^* d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} p_j u_j^* d\Gamma_p$$

Então:

$$\int_{\Gamma_u} u_j p_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} u_j p_j^* d\Gamma_p = \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma \quad (5.11)$$

$$\int_{\Gamma_u} p_j u_j^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} p_j u_j^* d\Gamma_p = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma$$

Logo, a equação (5.9) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma \quad (5.12)$$

Considerando  $u_{ij}^*$  a solução fundamental relativa a uma força concentrada unitária de direção  $j$  aplicada na direção  $i$  do domínio  $\Omega$ , a equação de equilíbrio (5.1) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(x - \xi) P_j = 0 \quad (5.13)$$

ou ainda:

$$\sigma_{ij,j}^* = -\delta(x - \xi) P_j \quad (5.14)$$

onde  $\delta(x - \xi)$  é a função delta de Dirac dada em (3.35).

Sabendo-se que a integração da função de Dirac ao longo do domínio fornece um valor unitário (3.39), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_j d\Omega = - \int_{\Omega} \delta(x - \xi) P_j u_j d\Omega = - P_j u_j = -u_j \quad (5.15)$$

Considerando (5.15) em (5.12) e admitindo que as cargas unitárias atuem em cada uma das três direções generalizadas, pode-se, então, escrever a equação integral para um sólido tridimensional, válida para um ponto  $\xi$  qualquer situado no interior da região  $\Omega$ :

$$u_i(\xi) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (5.16)$$

### 5.3 – Equação Integral para um Ponto do Contorno de um Sólido Tridimensional

A Eq. (5.16) fornece os deslocamentos em qualquer ponto no interior do sólido tridimensional desde que os valores das forças de superfície e dos deslocamentos de todos os pontos do contorno sejam conhecidos. Para resolver o problema no contorno, torna-se necessário escrever a equação (5.16) para um ponto  $\xi$  situado no contorno da região a ser analisada. Então, utilizando-se do mesmo procedimento da seção 3.3, considera-se o ponto  $\xi$  situado no contorno e envolvido por um hemisfério de raio  $\varepsilon$  e centrado no ponto  $\xi$ . Assim, a equação integral (5.16) para os deslocamentos no ponto  $\xi$  fica:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon + \bar{\Omega}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (5.17)$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral de (5.17) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Semelhante ao que foi considerado na seção 3.3, a parcela que apresenta singularidade forte é dada pela segunda integral de (5.17), sendo esta interpretada no sentido de valor principal de Cauchy.

As integrais restantes em (5.17) não apresentam problemas, pois têm singularidades mais fracas.

Assim, pode-se escrever a equação (5.16) para um ponto  $\xi$  situado no contorno, como:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi) = -\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)d\Omega(x) \quad (5.18)$$

onde o coeficiente  $c_{ij}(\xi)$  é definido como em (3.47) e depende da geometria do contorno no ponto  $\xi$ .

Portanto, a Eq. (5.18) pode ser escrita para um ponto  $\xi$  situado no domínio ou no contorno, onde:

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij} \text{ quando } \xi \text{ pertence ao domínio do sólido} \quad (5.19)$$

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2 \text{ quando } \xi \text{ pertence à superfície do sólido}$$

As expressões da solução fundamental para este caso podem ser encontradas na referência Brebbia et al. (1984).

#### 5.4 – Equações Integrais para o Sólido Tridimensional Semi-Infinito

Neste trabalho, pretende-se estudar a interação placa-solo, onde o solo é suposto um meio contínuo semi-infinito. Assim, equações semelhantes às equações representadas em (5.18) podem ser obtidas e, neste caso, as constantes  $c_{ij}(\xi)$ , tanto para o domínio como para o contorno, são dadas por  $c_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ .

Na formulação proposta, apenas os deslocamentos verticais da interface placa-solo serão compatibilizados e, portanto, apenas a terceira das três equações de (5.18) será considerada. Além disso, a parcela correspondente às forças de superfície fundamentais da Eq. (5.18) se anulam na superfície livre do solo. Logo, a equação integral para o deslocamento vertical é dada por:

$$u_3(\xi) = \int_{\Gamma} u_{33}^*(\xi, x) p_3(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{33}^*(\xi, x) b_3(x) d\Omega(x) \quad (5.20)$$

onde:

$p_3(x)$  = força de superfície na direção vertical

$b_3(x)$  = força de volume na direção vertical

$u_{33}^*(\xi, x)$  = solução fundamental do deslocamento na direção vertical do ponto campo correspondente a uma força unitária aplicada na direção vertical do ponto fonte.

Admitindo as forças de volume desprezadas, a Eq. (5.20) torna-se:

$$u_3(\xi) = \int_{\Gamma} u_{33}^*(\xi, x) p_3(x) d\Gamma(x) \quad (5.21)$$

#### 5.4.1 – Solução fundamental para pontos do domínio do solo

A solução fundamental utilizada para pontos no interior do solo, considerado como um meio contínuo semi-infinito, é a solução fundamental de Mindlin, dada por:

$$u_{33}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi G_s(1-\nu_s)} \left[ \frac{3-4\nu_s}{R_1} + \frac{8(1-\nu_s)^2 - (3-4\nu_s)}{R_2} + \frac{R_3^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu_s)R_4^2 - 2x_3(x)x_3(\xi)}{R_2^3} + \frac{6x_3(x)x_3(\xi)R_4^2}{R_2^5} \right] \quad (5.22)$$

sendo:

$$R_1 = \left\{ [x_1(\xi) - x_1(x)]^2 + [x_2(\xi) - x_2(x)]^2 + [x_3(\xi) - x_3(x)]^2 \right\}^{1/2} \quad (5.23)$$

$$R_2 = \left\{ [x_1(\xi) - x_1(x)]^2 + [x_2(\xi) - x_2(x)]^2 + [x_3(\xi) + x_3(x)]^2 \right\}^{1/2} \quad (5.24)$$

$$R_3 = x_3(\xi) - x_3(x) \quad (5.25)$$

$$R_4 = x_3(\xi) + x_3(x) \quad (5.26)$$

$x_i(\xi)$  e  $x_i(x)$  = coordenadas do ponto fonte e do ponto campo, respectivamente

$\nu_s$  = coeficiente de Poisson do solo

$G_s$  = módulo de elasticidade transversal do solo, que se relaciona com o módulo de elasticidade longitudinal  $E_s$  do solo pela expressão:

$$G_s = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \quad (5.27)$$

#### 5.4.2 – Solução fundamental para pontos na superfície do solo

Como mencionado anteriormente, as soluções fundamentais são determinadas de acordo com o tipo de problema a ser analisado. Desta forma, quando, na equação (5.21), tanto o ponto  $\xi$  como o ponto  $x$  são admitidos na superfície do solo, pode-se adotar a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti, que é um caso particular da solução fundamental de Mindlin, quando  $x_3(\xi) = x_3(x) = 0$ .

Assim,  $u_{33}^*(\xi, x)$  torna-se:

$$u_{33}^*(\xi, x) = \frac{1 - \nu_s}{2\pi G_s r} \quad (5.28)$$

## 5.5 – O Método dos Elementos de Contorno aplicado às Equações Integrais do Solo

A fim de se resolver numericamente as equações integrais pelo Método dos Elementos de Contorno, as equações integrais são substituídas por um conjunto de equações discretizadas. Para isto, considera-se a região da superfície do solo em contato com a placa dividida em elementos de contorno, para os quais são definidas funções de interpolação.

### 5.5.1 – Elementos de contorno para a superfície livre do solo

De um modo geral, a função que representa a variação da força de superfície que atua em um elemento do contorno do solo pode ser escrita na seguinte forma:

$$p_{3c}(x) = [\phi_n] \{p_n\} \quad (5.29)$$

onde:

$[\phi_n]$  = matriz das funções de interpolação

$\{p_n\}$  = vetor que contém os valores das forças de superfície dos pontos

nodais do elemento

Neste trabalho, são considerados elementos triangulares ou quadrilaterais constantes, cada um tendo um único ponto nodal situado em seu centro geométrico e, portanto, a função de interpolação correspondente é unitária.

Logo, a expressão (5.29) torna-se:

$$p_{3c}(x) = p_{3c} = cte \quad (5.30)$$

Admitindo a discretização da região da superfície do solo em contato com a placa em elementos triangulares ou quadrilaterais constantes, pode-se considerar a Eq. (5.21) em forma discretizada, substituindo-se a integral por um somatório de integrais de cada elemento. Considerando também a Eq. (5.30), obtém-se:

$$u_3(\xi) = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \int_{\Gamma_c} u_{33}^*(\xi, x) d\Gamma_c(x) \quad (5.31)$$

onde:

$N_{cel}$  = número de células em que foi dividida a região da superfície do solo em contato com a placa

$\Gamma_c$  = superfície de cada elemento do solo

A Eq. (5.31) pode ser resolvida para pontos do contorno ou do domínio do solo.

Seja:

$$III = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \int_{\Gamma_c} u_{33}^*(\xi, x) d\Gamma_c(x) \quad (5.32)$$

Admitindo-se que o ponto  $\xi$  está situado na superfície do solo,  $u_{33}^*(\xi, x)$  é dada pela solução fundamental de Boussinesq-Cerruti. Então, substituindo (5.28) em (5.32), tem-se:

$$III = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \frac{1-\nu_s}{2\pi G_s} \int_{\Gamma_c} \frac{1}{r} d\Gamma_c(x) \quad (5.33)$$

Esta integral tem singularidade de ordem  $r^{-1}$  e, para eliminar esta singularidade, a integral de superfície da célula é transformada em integral de contorno da célula, como se segue.

Considerando-se a Eq. (5.33) escrita em coordenadas polares, esta torna-se:

$$III = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \frac{1-\nu_s}{2\pi G_s} \int_{\theta} \int_0^R dr d\theta \quad (5.34)$$



Integrando (5.34) em relação a  $r$ , obtém-se:

$$III = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \frac{1-\nu_s}{2\pi G_s} \int_{\theta} R d\theta \quad (5.35)$$

Tem-se que:

$$R d\theta = r_{,n} d\Gamma \quad (5.36)$$

Explicitando  $d\theta$  em (5.36) e substituindo em (5.35), obtém-se:

$$III = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \frac{1-\nu_s}{2\pi G_s} \int_{\Gamma_c} r_{,n} d\Gamma_c \quad (5.37)$$

Substituindo (5.37) em (5.31), tem-se, então:

$$u_3(\xi) = \sum_{c=1}^{N_{cel}} p_{3c} \frac{1-\nu_s}{2\pi G_s} \int_{\Gamma_c} r_{,n} d\Gamma_c \quad (5.38)$$

Esta expressão representa o deslocamento vertical de um ponto qualquer da superfície do meio contínuo semi-infinito em função dos valores nodais das forças de reação do solo em cada célula.

## CAPÍTULO 6

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO SOLO

#### 6.1 – Introdução

Semelhante ao que foi feito no capítulo 4, neste capítulo, são apresentados os procedimentos utilizados na implementação numérica das equações integrais do solo mostradas no capítulo 5. Para isto, as equações integrais são escritas em forma discretizada, para os pontos nodais de cada célula, considerando a região da superfície do solo em contato com a placa discretizada em células triangulares ou quadrilaterais constantes. A integral de superfície referente a cada célula é transformada em integrais sobre o contorno da referida célula.

Posteriormente, o sistema de equações assim obtido é invertido, de modo que se tenham as forças de superfície nodais escritas em função dos deslocamentos nodais.

#### 6.2 – Discretização das Equações Integrais

Para a resolução numérica das equações integrais do solo, o contorno  $\Gamma_c$  de cada célula é dividido em elementos de contorno  $\Gamma_{c,j}$ . Assim, a equação (5.38) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto nodal  $\xi$  de  $\Gamma_c$ , substituindo-se as integrais de cada célula  $\Gamma_c$  por somatórios de integrais em  $\Gamma_{c,j}$ , sendo  $\Gamma_{c,j}$  referente ao elemento  $j$ . Então, obtém-se o sistema de equações para o ponto  $\xi$ :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{c=1}^{N_{cel}} \sum_{j=1}^{N_{el}} \left[ \mathbf{p} \int_{\Gamma_{c,j}} \mathbf{U}_i^* d\Gamma \right] \quad (6.1)$$

onde:

$\mathbf{u}_i$  = vetor que contém os deslocamentos dos pontos fontes

$\mathbf{U}_i^*$  = matriz que contém as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos

$N_{cel}$  = número total de células da superfície do solo

$N_{el}$  = número de elementos no contorno de cada célula interna

$\mathbf{p}$  = vetor das forças de superfície nodais

Chamando:

$$\mathbf{d}_{ij} = \int_{\Gamma_{cj}} \mathbf{U}_i^* d\Gamma \quad (6.2)$$

a equação (6.1) pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{c=1}^{N_{cel}} \sum_{j=1}^{N_{el}} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{p} \quad (6.3)$$

Escrevendo a equação (6.3) para todos os pontos considerados nas células, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\{\mathbf{u}_i\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{p}_r\} \quad (6.4)$$

onde:

$\{\mathbf{u}_i\}$  = vetor formado pelos deslocamentos verticais de todos os nós das células

$\{\mathbf{p}_r\}$  = vetor formado pelas forças de superfície dos nós das células

$[\mathbf{A}]$  = matriz expressa em função da solução fundamental

Escrevendo-se (6.4) de forma inversa, tem-se:

$$\{\mathbf{p}_r\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}_i\} \quad (6.5)$$

Desta forma, o sistema de equações dado em (6.5) é o sistema considerado para o solo, onde as forças de superfície e os deslocamentos dos pontos nodais da interface entre a placa e o meio contínuo semi-infinito estão relacionados entre si.

## CAPÍTULO 7

### INTERAÇÃO PLACA-SOLO

#### 7.1 – Introdução

Neste capítulo será realizado o acoplamento do sistema de equações da placa com o sistema de equações do solo, obtidos, respectivamente, nos capítulos 4 e 6, a fim de se fazer a interação placa-solo.

No sistema placa, obtidos no capítulo 4, as equações integrais foram escritas para os nós dos elementos de contorno da placa e para os nós das células triangulares ou quadrilaterais em que foi discretizada a interface placa-solo. As equações integrais do sistema solo, desenvolvidas no capítulo 6, foram escritas para os nós das células na interface solo-placa. Assim, com esses dois sistemas, é possível obter um único sistema de equações e, para resolvê-lo, inicialmente as equações do solo foram substituídas nas equações da placa.

#### 7.2 – Equações Integrais para o Conjunto Placa-Solo

A fim de se obterem as equações integrais para o conjunto placa-solo, algumas hipóteses são feitas.

Para isto, admite-se o conjunto placa-solo indicado na Figura 7.1. Nele, observa-se que a carga  $q$  recebida pela placa é transmitida ao solo através de tensões de contato entre a placa e o solo.

Observa-se, ainda, que, para a placa, a força de contato  $p$  na interface placa-solo, aqui denominada reação do solo, é tratada como carregamento transversal externo e para o solo esta reação é tratada como força de superfície.

Assim, a força da placa é transferida diretamente da placa para o solo e, por consequência, o solo exerce uma reação, que é transferida do solo para a placa.

Neste trabalho, considera-se que as discretizações do domínio da placa e da região da superfície do solo em contato com a placa sejam as mesmas e, com isso, os nós de suas discretizações são coincidentes.

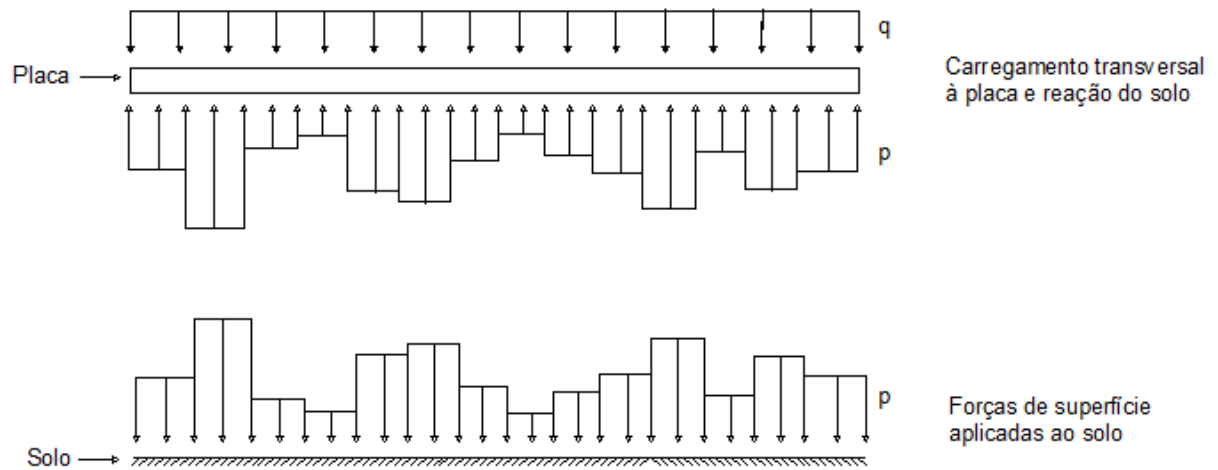


Figura 7.1 – Tensões atuantes no conjunto placa-solo

Com o objetivo de se escreverem as equações matriciais para o sistema placa-solo, admite-se, inicialmente, o sistema obtido para a placa dado no capítulo 4 pela Eq. (4.18). Cabe observar que o contorno da placa foi dividido em elementos com aproximação quadrática, podendo estes ser contínuos ou descontínuos. O domínio da placa foi discretizado em células triangulares ou quadrilaterais constantes. Assim, o sistema obtido para a placa no capítulo 4 é representado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{ri} \end{bmatrix} \{\mathbf{p}_r\} \quad (7.1)$$

onde:

$\{\mathbf{u}\}$  = vetor formado pelos deslocamentos nodais no contorno da placa

$\{\mathbf{u}_i\}$  = vetor formado pelos deslocamentos verticais de todos os nós das células do domínio da placa

$\{\mathbf{b}\}$  = vetor formado pelo carregamento transversal aplicado à placa, referente aos nós do contorno

$\{\mathbf{b}_i\}$  = vetor formado pelo carregamento transversal à placa, referente a todos os nós das células do domínio da placa

$\{\mathbf{p}_r\}$  = vetor formado pela contribuição da reação do solo

A seguir, são escritas as equações matriciais obtidas no capítulo 6 para o solo. Cabe observar que a superfície do meio contínuo semi-infinito foi dividida em células triangulares ou quadrilaterais constantes. Vale ressaltar, ainda, que a reação do solo é tratada como força de superfície no conjunto solo-placa (Figura 7.1). Assim, o sistema do solo obtido no capítulo anterior é dado por:

$$\{\mathbf{p}_r\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}_i\} \quad (7.2)$$

onde:

$\{\mathbf{u}_i\}$  = vetor formado pelos deslocamentos verticais de todos os nós das células da superfície do solo

Os sistemas (7.1) e (7.2) podem ser acoplados considerando que o vetor  $\{\mathbf{u}_i\}$  deve ser igual na placa e no solo para que haja continuidade do deslocamento entre a placa e o solo nos pontos considerados e o vetor  $\{\mathbf{p}_r\}$  tem valores iguais e sinais contrários para que haja equilíbrio de forças entre a placa e o solo. Para isto, substitui-se o vetor dado pela expressão (7.2) no sistema (7.1), obtendo-se um único sistema, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\wedge} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{ri} \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}_i\} \quad (7.3)$$

Reescrevendo o sistema (7.3), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_i \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

O sistema (7.4) ainda pode ser reescrito, colocando-se todas as incógnitas num único vetor  $\mathbf{x}$  e todos os valores conhecidos num vetor  $\mathbf{f}$ , obtendo-se um sistema da seguinte forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (7.5)$$

onde:

$\mathbf{A}$  = matriz do sistema, cheia e não-simétrica

$\mathbf{x}$  = vetor que contém as incógnitas (deslocamentos ou forças de superfície em cada direção nodal generalizada)

$\mathbf{f}$  = vetor que contém os valores conhecidos

Resolvendo-se o sistema de equações (7.5), são obtidos os deslocamentos e forças de superfície de todos os nós do contorno da placa e as forças de superfície de todos os pontos nodais da interface placa-solo.

Com a obtenção dos deslocamentos dos pontos nodais, a reação do solo (que é tratada como força de superfície nas equações do solo) pode ser obtida através das equações (6.5).

Os momentos fletores e torsões para pontos no domínio da placa podem ser obtidos pelas Eqs. (4.20) e (4.21), observando-se que as forças de contato placa-solo são tratadas como carregamento transversal externo.



## CAPÍTULO 8

### APLICAÇÕES

#### 8.1 – Introdução

Neste capítulo, são apresentados alguns exemplos numéricos utilizando o Método dos Elementos de Contorno aplicado à teoria de flexão de placas de Reissner, admitindo o solo como meio contínuo semi-infinito, a fim de mostrar a validade da formulação desenvolvida.

Os resultados são comparados com resultados de trabalhos que utilizam métodos numéricos com outras abordagens ou de soluções analíticas.

#### 8.2 – Exemplo 1: Placa Quadrada com Bordos Livres

Analisa-se uma placa quadrada com bordo livre, apoiada sobre o meio contínuo semi-infinito, sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído  $q$ .

Esta placa é considerada com lado  $a=12m$ , espessura  $h=0,1m$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p = 0,3$ . O solo em que a placa encontra-se apoiada tem módulo de elasticidade  $E_s = 0,26 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,3$ .

O módulo de elasticidade da placa  $E_p$  é obtido a partir de um fator de rigidez relativo  $X$  entre a placa e o solo, definido em Cheung e Zienkiewicz (1965). Para o caso em que  $\nu_p = \nu_s$ , este fator se expressa como:

$$X = 180\pi \left( \frac{E_s}{E_p} \right) \left( \frac{L}{h} \right)^3 \quad (8.1)$$

sendo:

$$L = \frac{a}{6} \quad (8.2)$$

Além disso, a placa foi analisada supondo-se que possui uma rigidez intermediária e, desta forma, o fator de rigidez relativo  $X$  foi calculado admitindo que  $\log X = 1,08$ .

A placa foi discretizada utilizando-se uma malha com 32 elementos de contorno quadráticos e 128 células triangulares constantes, conforme mostra a Figura 8.1. A mesma malha de elementos triangulares constantes foi adotada para a superfície do solo. Além desta, usou-se uma malha com 32 elementos de contorno e 256 células internas triangulares, conforme mostra a Figura 8.2.

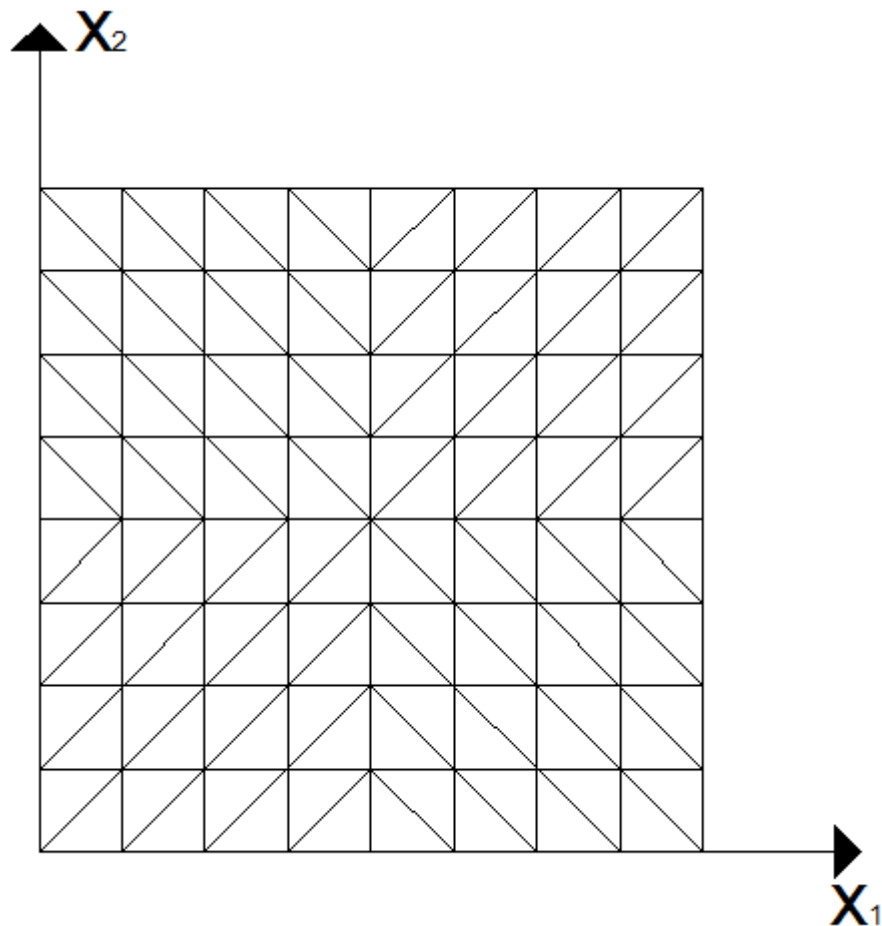


Figura 8.1 – Placa quadrada: discretização em 32 elementos e 128 células

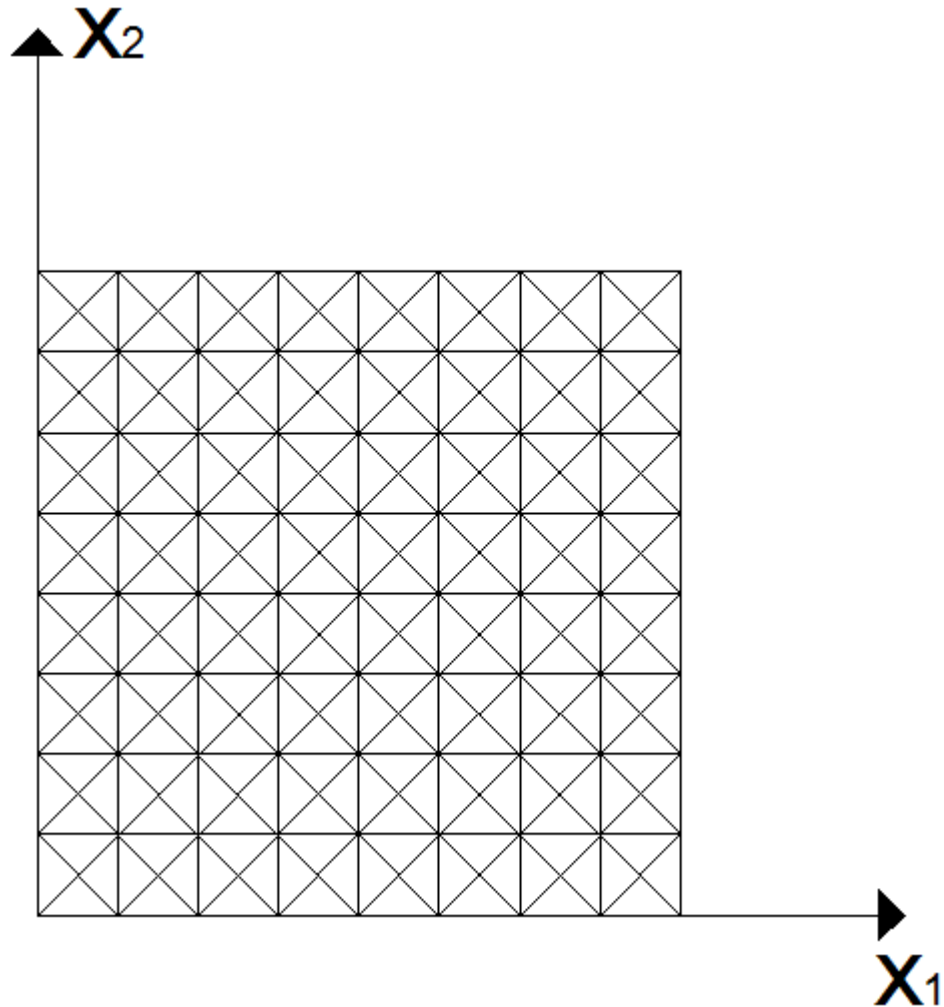


Figura 8.2 – Placa quadrada: discretização em 32 elementos e 256 células

Na Figura 8.3, estão indicadas as variações da flecha  $u_3$  com os valores calculados ao longo da reta  $x_2 = 6m$ , considerando o fator,  $u_0 = (10^8 u_3 / q) (m^3 / N)$ .

Os resultados obtidos estão próximos dos obtidos por Almeida (2003), que utilizou o MEF para modelar a placa e o MEC em abordagem 3D para modelar o solo, de modo que este também pudesse ser simulado com características heterogêneas. Os resultados também foram comparados com os obtidos por Paiva e Butterfield (1997), que consideraram a análise de interação placa-solo pelo MEC com a teoria de Kirchhoff e a discretização da placa em 32 elementos de contorno e 128 células triangulares, sendo ambos lineares; e também com os de Messafer e Coates (1989), que realizaram uma análise de interação placa-solo onde a placa é

analisada pelo MEF e o solo pelo MEC, discretizando a placa em 100 elementos finitos quadrangulares do tipo ACM. Observa-se uma diferença maior em relação aos resultados destes dois últimos trabalhos, possivelmente por divergência entre algum dado apresentado nas referências e o utilizado de fato.

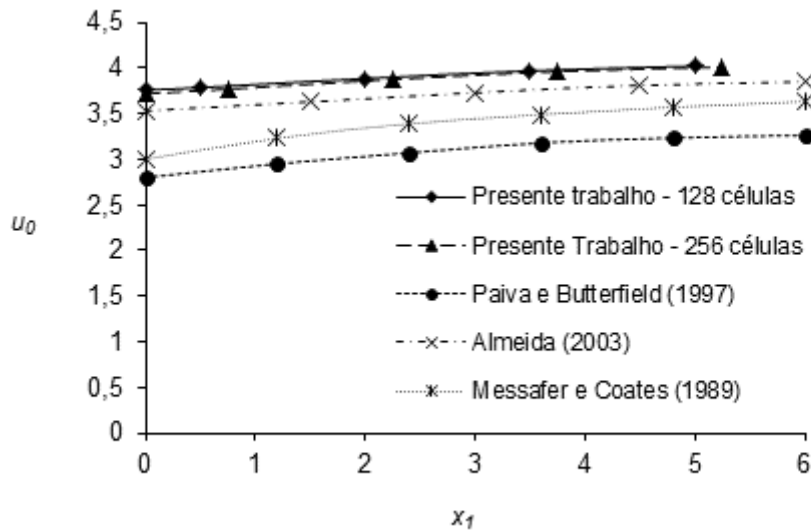


Figura 8.3 – Placa quadrada: deslocamento transversal  $u_0$

Analisa-se, também, uma placa quadrada com bordos livres, de lado  $b$ , apoiada sobre meio contínuo semi-infinito e submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , comparando-se os resultados obtidos no presente trabalho com os de Shen et al. (1999), que utilizam um método variacional e a teoria de placas de Kirchhoff.

O módulo de elasticidade da placa  $E_p$  é obtido a partir de um fator de rigidez relativo  $K$  entre a placa e o solo, apresentado em Shen et al (1999), e expresso por:

$$K = \frac{4 E_p (1 - \nu_p^2) h^3}{3 E_s (1 - \nu_s^2) b^3} \quad (8.3)$$

válido para o caso geral de placa retangular de lados  $a$  e  $b$ , sendo  $b$  o lado menor da placa.

Para o deslocamento transversal obtido, utiliza-se um fator adimensional, expresso por:

$$I_w = \frac{E_s u_3}{qb(1-\nu_s^2)} \quad (8.4)$$

A malha utilizada para discretizar a placa tem 36 elementos de contorno quadráticos e 81 células internas quadradas constantes e a discretização da superfície do solo é feita com 81 elementos quadrados constantes, conforme mostrado na Figura 8.4.

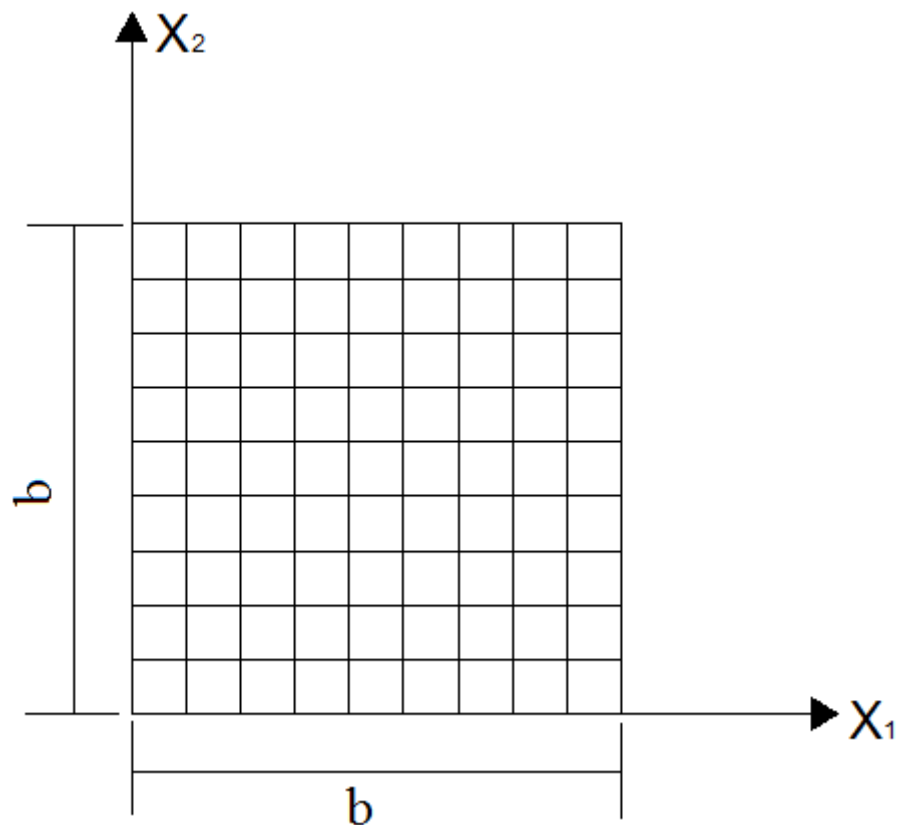


Figura 8.4 – Placa quadrada: discretização em 36 elementos e 81 células

Valores do fator  $I_w$  para uma variação da rigidez relativa de 0,001 a 100 são mostrados na Figura 8.5 e comparados com os valores obtidos por Shen et al. (1999), para os pontos indicados na Figura 8.6.

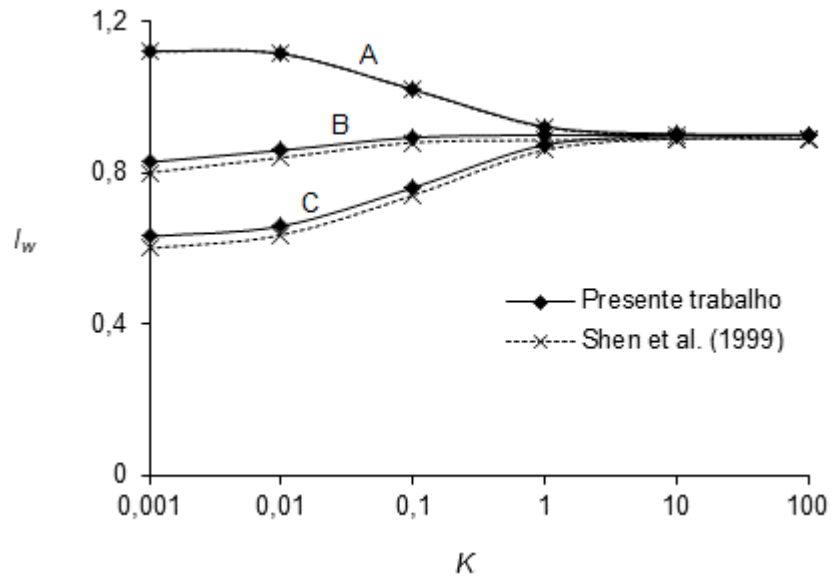


Figura 8.5 - Placa quadrada: fator  $I_w$  versus rigidez relativa  $K$

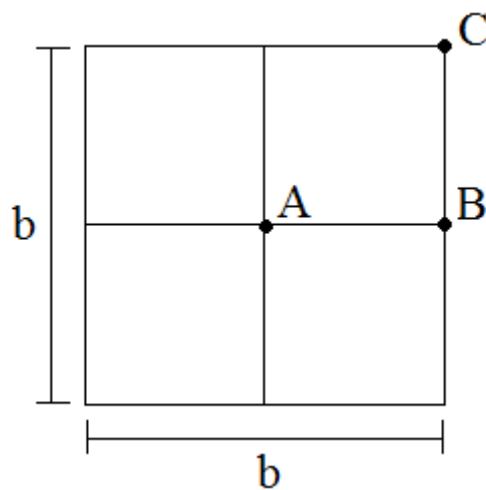


Figura 8.6 - Placa quadrada com pontos indicados

Observa-se que os valores de  $I_w$  para o ponto A, localizado no centro da placa, apresentam-se coincidentes, mesmo com uma malha pouco refinada. Observa-se, ainda, que os valores de  $I_w$  para os pontos B e C, localizados no contorno da placa, apresentam-se bem próximos dos obtidos por Shen et al. (1999) e um refinamento maior da malha possivelmente conduziria a resultados ainda mais próximos desta referência nestes pontos.

### 8.3 – Exemplo 2: Placa Circular com Bordo Livre

Neste exemplo, considera-se uma placa circular com bordo livre, apoiada sobre meio contínuo semi-infinito, sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído  $q$ . Esta placa é considerada com raio  $a=8m$ , espessura  $h=0,1m$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p=0,3$ . O solo em que a placa encontra-se apoiada tem módulo de elasticidade  $E_s=0,26 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s=0,3$ .

O módulo de elasticidade da placa  $E_p$  é obtido a partir de um fator de rigidez relativo  $X$  entre a placa e o solo, definido em Zaman et al. (1988), como:

$$X = (1 - \nu_s^2) \left( \frac{E_p}{E_s} \right) \left( \frac{t}{a} \right)^3 \quad (8.5)$$

Foram considerados 6 (seis) valores de  $X$ , sendo os seguintes:  $X=0,01$ ;  $X=0,074131024$ ;  $X=0,1$ ;  $X=0,316227766$ ;  $X=1$  e  $X=10$ .

A placa foi discretizada em 40 elementos de contorno quadráticos e 200 células triangulares constantes, conforme mostra a Figura 8.7, e, na superfície do solo, foi utilizada a mesma discretização usada no domínio da placa.

Os resultados obtidos para este exemplo são comparados com os resultados de Zaman et al. (1988), que desenvolveram uma solução analítica baseada em um método de energia e considerando a teoria de placas de Kirchhoff.

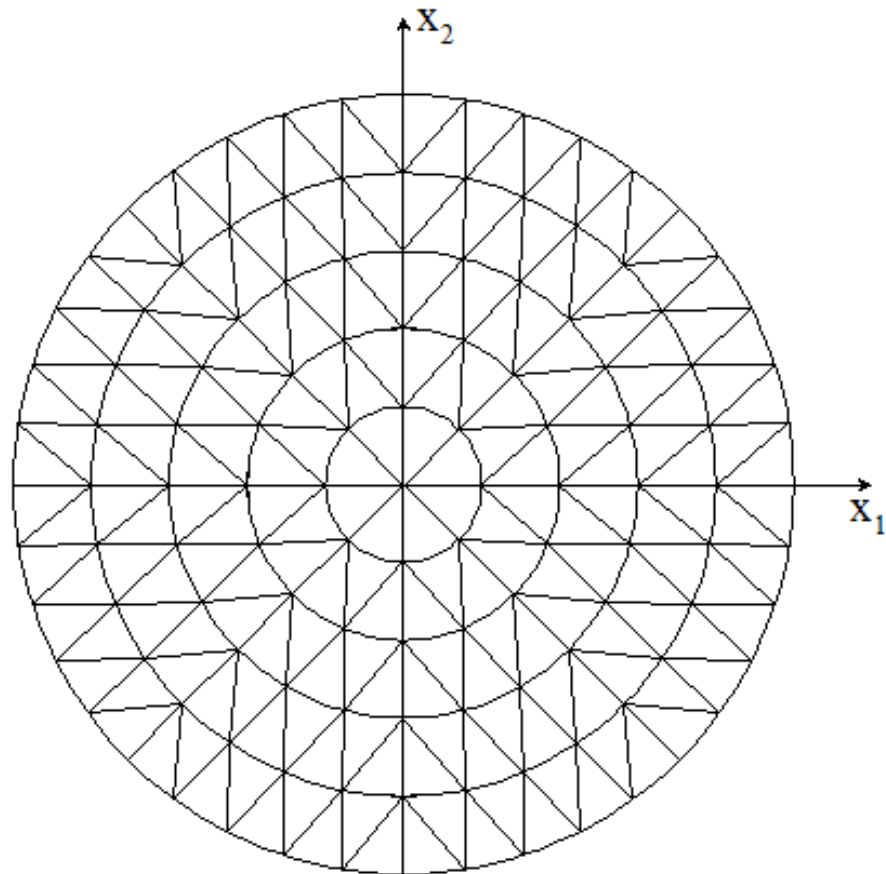


Figura 8.7 – Placa circular: discretização em 40 elementos e 200 células

Na Figura 8.8, mostra-se a variação do deslocamento transversal à medida que a placa se torna rígida, para o ponto situado no centro da placa. Os deslocamentos transversais estão escritos de forma adimensional, sendo:

$$u_0 = u_3 \frac{E_s}{qa(1 - \nu_s^2)} \quad (8.6)$$

onde  $u_3$  é a flecha calculada.

A variação da flecha ao longo de um raio, também em forma adimensional, para uma placa circular com rigidez intermediária,  $X = 0,1$ , está apresentada na Figura 8.9.



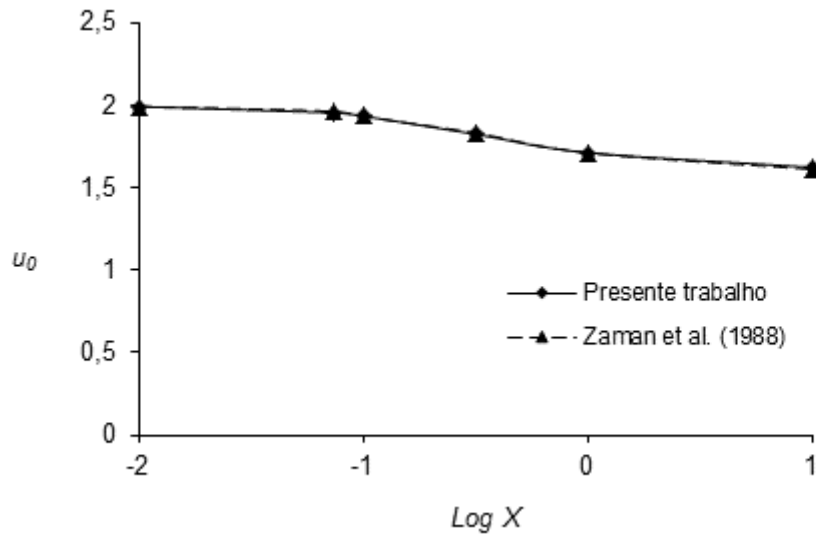


Figura 8.8 – Placa circular: deslocamento  $u_0$  versus fator de rigidez

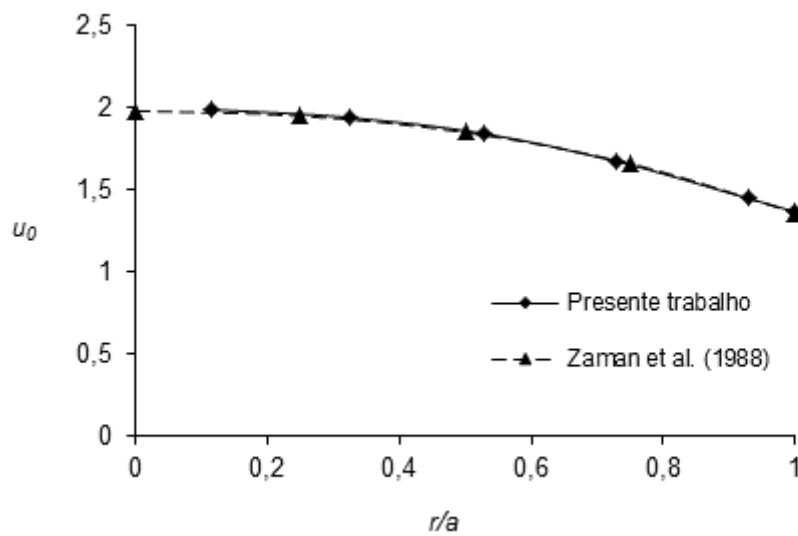


Figura 8.9 – Placa circular: deslocamento transversal  $u_0$  para  $X = 0,1$

Na Figura 8.10, mostra-se a variação do momento radial  $M_r$ , calculado ao longo do raio para o fator de rigidez  $X = 0,1$ , considerando o seguinte fator adimensional:

$$M_0 = \frac{1}{qa^2} M_r \quad (8.7)$$

Nas Figuras 8.11, 8.12 e 8.13, apresentam-se as variações da reação do solo  $p_r$  ao longo do raio, respectivamente, para os seguintes valores do fator de rigidez:  $X = 0,1$ ;  $X = 1$  e  $X = 10$ , considerando o fator adimensional  $p_0 = p_r / q$ .

Como se pode observar, os resultados obtidos no presente trabalho apresentam uma excelente concordância com os resultados de Zaman et al. (1988).

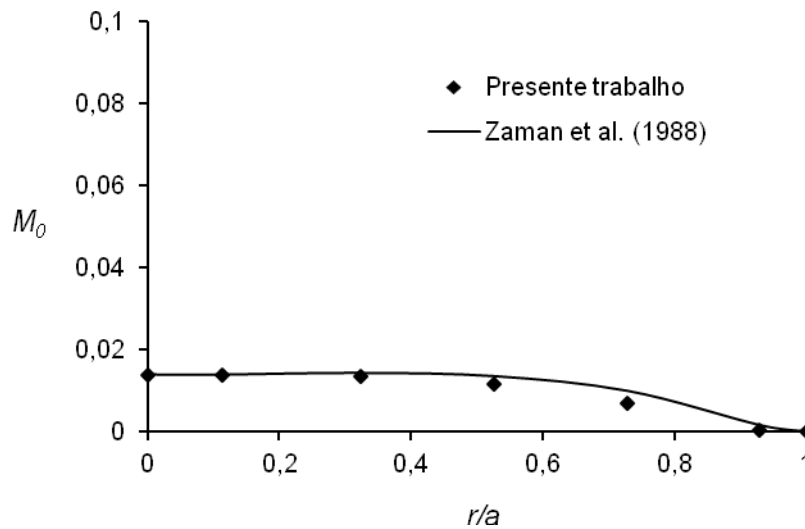


Figura 8.10 – Placa circular: momento  $M_0$  ao longo do raio para  $X = 0,1$

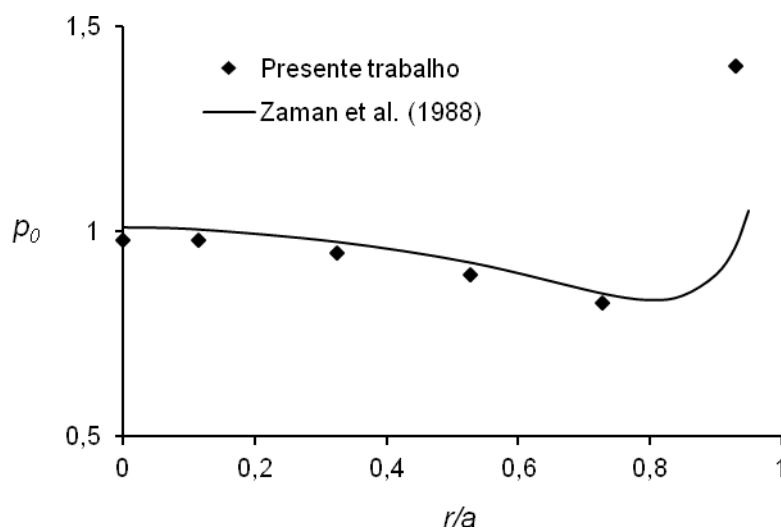


Figura 8.11 – Placa circular: reação do solo  $p_0$  ao longo do raio para  $X = 0,1$

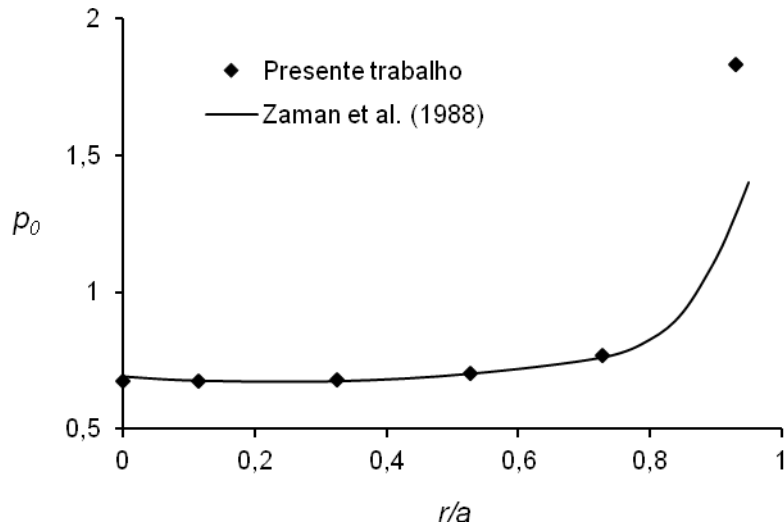


Figura 8.12 – Placa circular: reação do solo  $p_0$  ao longo do raio para  $X = 1$

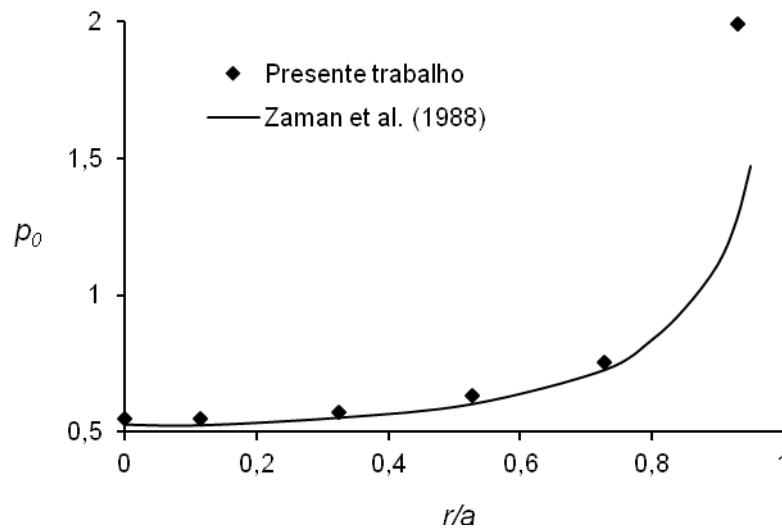


Figura 8.13 – Placa circular: reação do solo  $p_0$  ao longo do raio para  $X = 10$

#### 8.4 – Exemplo 3: Placa Retangular com Bordos Livres

Analisa-se uma placa retangular com bordos livres, tendo uma relação entre os lados de  $a/b = 2$ , apoiada sobre meio contínuo semi-infinito e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído  $q$ .

O módulo de elasticidade da placa  $E_p$  é obtido a partir do mesmo fator de rigidez relativo  $K$  entre a placa e o solo dado pela equação (8.3).

Para os resultados do deslocamento transversal, utiliza-se o fator adimensional da equação (8.4).

A malha utilizada inicialmente para discretizar a placa tem 28 elementos de contorno quadráticos e 45 células internas retangulares constantes e, para discretizar a superfície do solo, utilizam-se 45 elementos retangulares constantes, conforme mostrado na Figura 8.14. Além desta, usou-se uma malha com 56 elementos de contorno e 171 células internas retangulares constantes, conforme apresenta a Figura 8.15.

A variação dos valores do fator  $I_w$  para uma variação da rigidez relativa de 0,001 a 100, obtidos com a malha menos refinada, são mostrados na Figura 8.16, em que esses resultados são comparados com os valores obtidos por Shen et al. (1999), utilizando um método variacional e a teoria de placas de Kirchhoff. Os valores são calculados para os pontos indicados na Figura 8.17. Na Figura 8.18, são mostrados os resultados para a malha mais refinada, calculados para os mesmos valores da rigidez relativa e nos mesmos pontos.

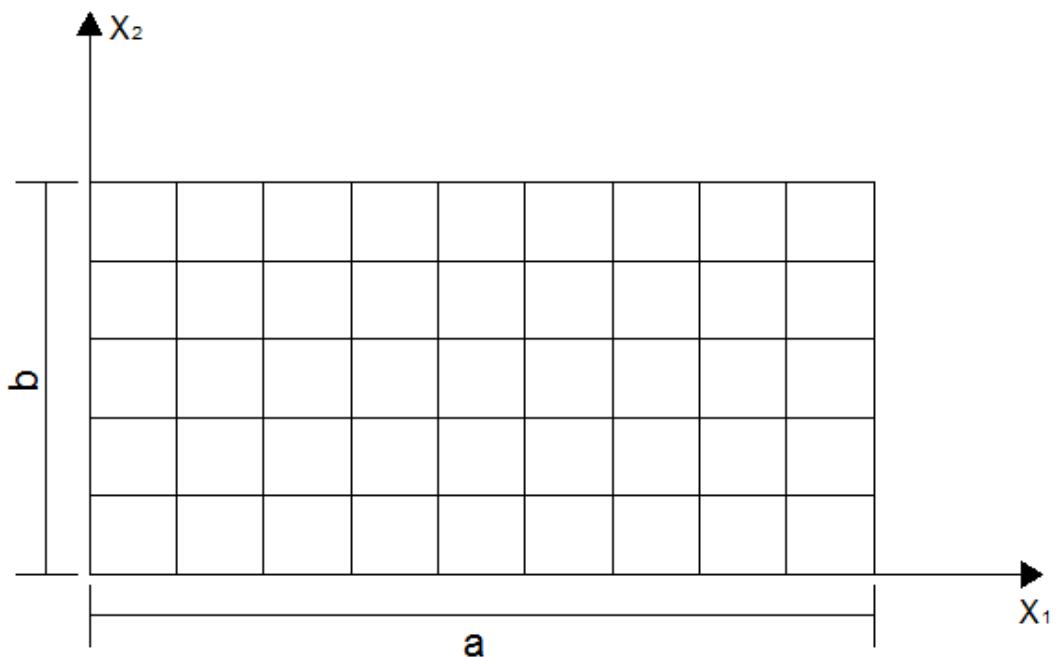


Figura 8.14 – Placa retangular: discretização em 28 elementos e 45 células

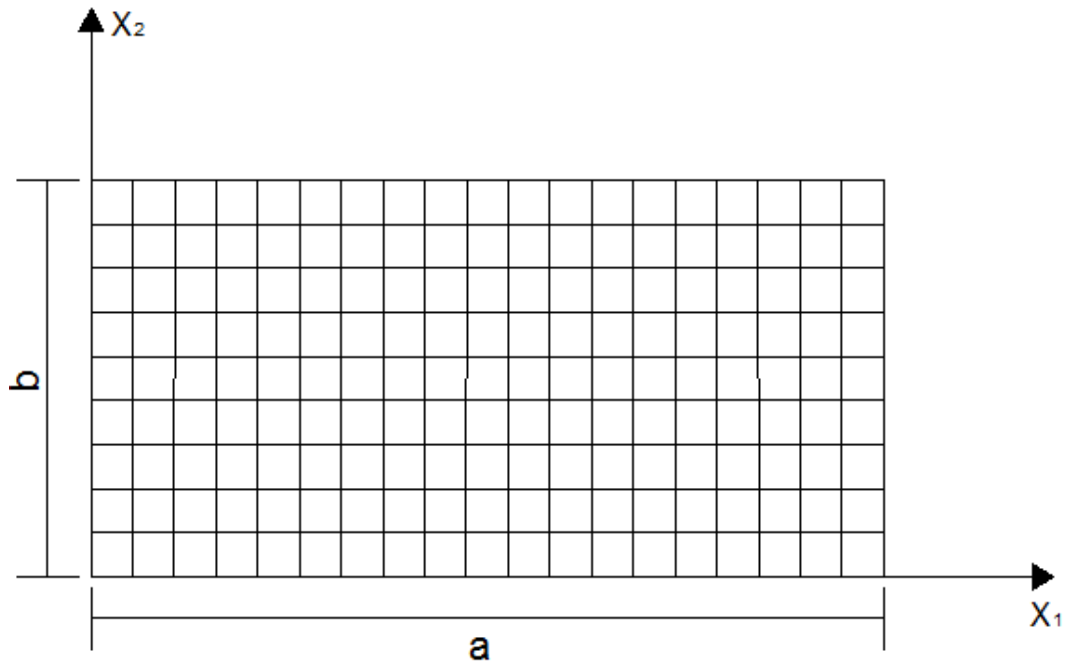


Figura 8.15 – Placa retangular: discretização em 56 elementos e 171 células

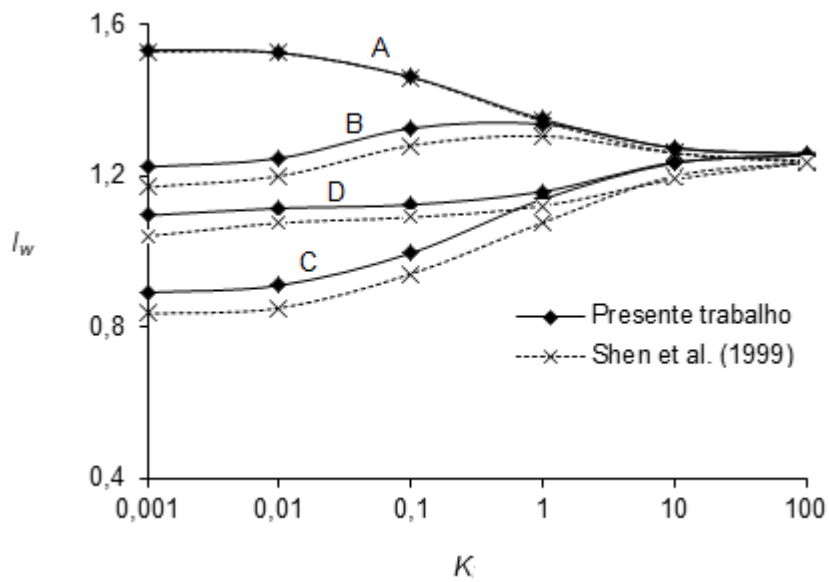


Figura 8.16 - Placa retangular: fator  $I_w$  versus rigidez relativa  $K$  para 28 elementos e 45 células

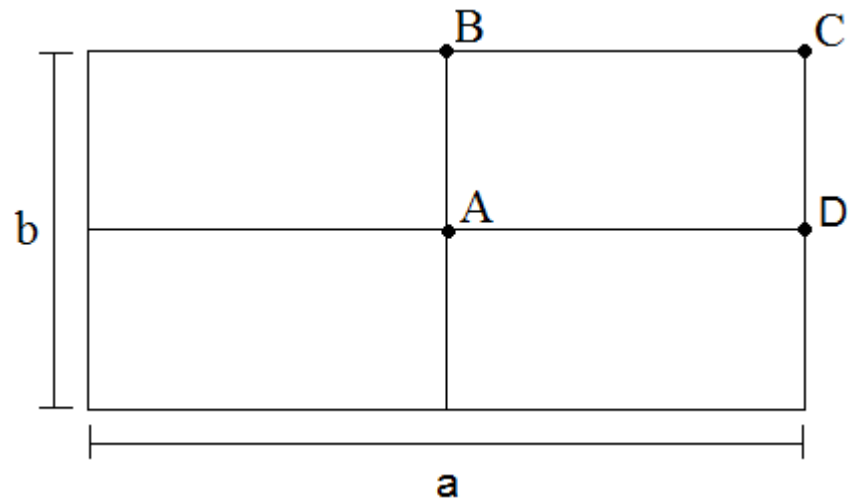


Figura 8.17 - Placa retangular com pontos indicados

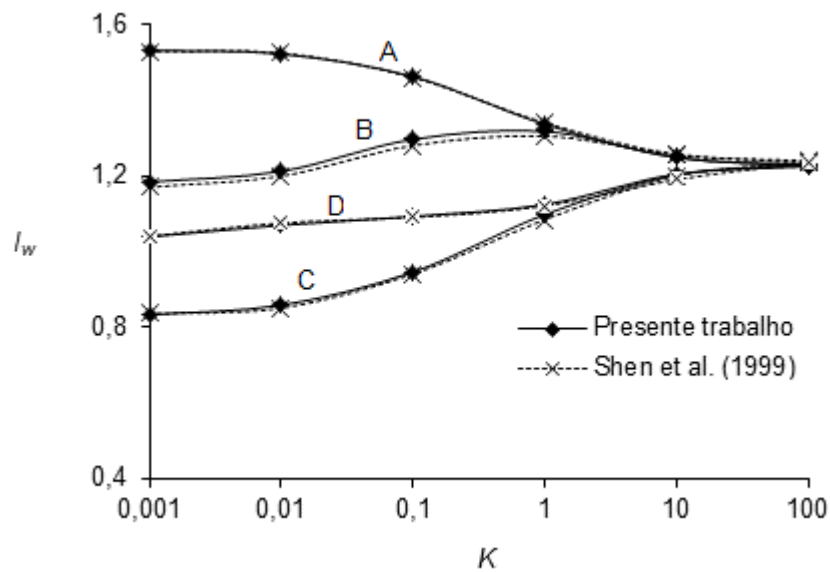


Figura 8.18 - Placa retangular: fator  $I_w$  versus rigidez relativa  $K$  para 56 elementos e 171 células

Observa-se que os valores de  $I_w$  para o ponto A, localizado no centro da placa, apresentam-se coincidentes mesmo com uma malha pouco refinada e, ao fazer o refinamento da malha não apresentou mudança de valores. Observa-se,

ainda, que os valores de  $I_w$  para os pontos B, C e D, localizados no contorno da placa, apresentam-se próximos dos obtidos por Shen et al. (1999) para a malha menos refinada e apresentam-se em excelente concordância com os obtidos por este autor para a malha mais refinada.

## CAPÍTULO 9

### CONCLUSÕES

Neste trabalho, desenvolveu-se uma formulação e uma implementação computacional para análise de interação solo-estrutura para o caso de placas apoiadas sobre solo considerado como um meio contínuo semi-infinito, utilizando o método dos elementos de contorno e a teoria de Reissner para flexão de placas.

A reação do solo foi incorporada nas equações básicas da teoria de Reissner e, conseqüentemente, nas equações integrais usadas na análise pelo MEC. Adotou-se a mesma solução fundamental empregada em trabalhos anteriores para análise de flexão de placas pelo MEC.

O contorno da placa foi discretizado em elementos quadráticos com geometria linear e o domínio foi dividido em células internas constantes. Nas equações integrais da placa, as integrais de domínio correspondentes às forças de reação do solo foram transformadas em integrais sobre o contorno de cada célula.

Como as forças de reação da base elástica acrescentam incógnitas ao sistema de equações original e são expressas em função dos deslocamentos transversais, foram consideradas equações adicionais ao sistema, constituídas pelas equações dos deslocamentos transversais dos pontos das células.

Assim, formou-se um sistema de equações constituído de equações escritas para pontos da placa.

Além disso, foram escritas equações integrais para pontos da superfície do solo, considerando a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti. Adotou-se, para a superfície do solo, a mesma discretização em células internas constantes que foi empregada no domínio da placa e montou-se um sistema de equações para o solo.

Esses dois sistemas de equações foram acoplados para se considerar a interação solo-estrutura.

Comparando-se os resultados obtidos neste trabalho com resultados de outros autores, tanto com soluções analíticas como com soluções por outros procedimentos numéricos, observou-se uma boa aproximação dos resultados com os das referências consideradas, para placas quadradas, circulares e retangulares. Com isso, pode-se comprovar a validade da formulação desenvolvida.



Como sugestões para trabalhos futuros, podem-se citar: consideração de células internas lineares ou quadráticas; consideração de outros tipos de carregamento; consideração de solo com camadas de características diferentes; consideração de contato unilateral através de processo iterativo; consideração de interação placa-estaca-solo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., Stegun I.A. (1965) *Handbook of Mathematical Functions* – Dover Publications, New York, 1046p.
- Almeida, V. S. (2003) *Análise da Interação Solo Não-homogêneo/estrutura via Acoplamento MEC/MEF*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo – USP, 192p.
- Almeida, V. S., Paiva, J. B de (2004) A Mixed BEM – FEM Formulation for Layered Soil – superstructure Interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 28: 1111–1121.
- Altoé, M. (2009) *O Método dos Elementos de Contorno para Placas de Reissner sobre Fundações do Tipo Pasternak*. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 77p.
- Bezine, G. (1988) A New Boundary Element Method for Bending of Plates on Elastic Foundations. *International Journal of Solids and Structures*. 24: 557-565.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. (1984) *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 464p.
- Cheung, Y.K., Zienkiewicz, O.C. (1965) Plates and Tanks on Elastic Foundations – an Application of Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*. 1:1123-1128.
- Costa, Jr J. A., Brebbia, C. A. (1985) The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundations. *Engineering Analysis*. 2: 174-183.

- Fadhil, S., El-Zafrany, A. (1994) Boundary Element Analysis of Thick Reissner Plates on Two-parameter Foundation. *International Journal of Solids and Structures*. 31(22): 2901-2917.
- El-Zafrany, A., Fadhil, S., Al-Hosani, K. (1995) A New Fundamental Solution for Boundary Element Analysis of Thin Plates on a Winkler Foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38: 887-903.
- Jianguo, W., Xiuxi, W., Maokuang, H. (1992). Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for Reissner's Plates on Two Parameter Foundations. *International Journal of Solids and Structures*. 29: 1233-1239.
- Jianguo, W., Xiuxi, W., Maokuang, H. (1993). A Boundary Integral Equation Formulation for Thick Plates on a Winkler Foundation. *Computers & Structures*. 49: 179-185.
- Karam, V. J. (1986) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 142p.
- Karam, V.J., Telles, J. C. F. (1988) On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory. *Engineering Analysis*. 5 (1): 21-27.
- Karam, V. J. (1992) *Análise de Flexão de Placas pelo MEC Incluindo Não-linearidade Física*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 158p.
- Love, A. E. H. (1944) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York. Dover.
- Mendonça, A. V., Paiva, J. B. de (2000) A Boundary Element Method for the Static Analysis of Raft Foundations on Piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 24: 237-247.

- Mendonça, A. V., Paiva, J. B. de (2005) Análise de Radiês Simples e Estaqueados via Combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno. *Caderno de Engenharia de Estruturas – São Carlos*. 22:1-28.
- Messafer, T., Coates, L.E. (1989) *An Application of FEM/BEM Coupling to Foundation Analysis*. Southampton. 3: 211-223.
- Mindlin, R.D. (1936) A Force at the Interior Point of a Semi-infinite Solid. *Physics*. 7: 195-202.
- Paiva, J. B. (1989) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas Apoiadas em Base Elástica. *X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Portugal. p. A47 – A59.
- Paiva, J. B., Butterfield, R. (1997) Boundary Element Analysis of Plate–soil Interaction. *Computers & Structures*. 64: 319-328.
- Paiva, J. B., Mendonça, A. V. (2010) A Coupled Boundary Element/differential Equation Method Formulation for Plate-beam Interaction Analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 34: 456-462.
- Paiva, J. B., Venturini, W.S. (1985) Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis. *First Boundary Element Technology Conference*, Austrália. p. 201-209.
- Puttonen, J., Varpasuo, P. (1986) Boundary Element Analysis of a Plate on Elastic Foundations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 23: 287-303.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H. (1997) Fundamental Solutions for Thick Foundation Plates. *Mechanics Research Communications*. 24: 331-340.

- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. (1998) The Boundary Element for Thick Plates on a Winkler Foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 41: 1435-1462.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. (1999) A Boundary Element Formulation for a Reissner Plate on a Pasternak Foundation. *Computers & Structures*. 70: 515-532.
- Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H. (2000) Boundary Element Analysis of Foundation Plates in Buildings. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 24: 201-206.
- Rashed, Y. F. (2005) A Boundary/domain Element Method for Analysis of Building Raft Foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 29: 859-877.
- Reissner, E. (1944) On the Theory of Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematics and Physics*. 23: 184-191.
- Reissner, E. (1945) The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 12: A69-A77.
- Reissner, E. (1947) On bending of Elastic Plates. *Quarterly of Applied Mathematics*. 5:55-68.
- Ribeiro, N. S. (2009) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno para Placas de Reissner sobre Fundações do tipo Winkler*. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 87p.
- Sapountzakis, E. J., Katsikadelis, J. T. (1992) Unilaterally Supported Plates on Elastic Foundations by the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*. 59: 580-586.

- Shen, W. Y., Chow, Y. K., Yong, K. Y. (1999) A Variational Approach for the Analysis of Rectangular Rafts on an Elastic Half-space. *Soils and Foundations*. 39(6): 25-32.
- Silva, N. A., Venturini, W. S. (1990) Aplicação do MEC a Análise de Placas com Vinculação Interna utilizando a Teoria de Reissner. *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Rio de Janeiro. 2: 925-934.
- Syngellakis, S., Bai, C.X. (1993) On the Application of the Boundary Element Method to plate-half-space interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 12: 119-125.
- Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger (1970) *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 580p.
- Van der Weeën, F. (1982a) Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 18: 1-10.
- Van der Weeën, F. (1982b) Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. *Boundary Elements in Engineering*. p. 487-499.
- Xiao, J. R. (2001) Boundary Element Analysis of Unilateral supported Reissner Plates on Elastic Foundations. *Computational Mechanics*. 27: 1-10.
- Zaman, M. M., Issa, A., Kukreti A. R. (1988) Analysis of Circular Plate-elastic Half-space Interaction using an Energy Approach. *Appl. Math. Modelling*. 12: 285-292.