

**ANÁLISE DE PLACAS ESPESSAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE FÍSICA**

SERGIO RAFAEL CORTES DE OLIVEIRA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

AGOSTO – 2015

ANÁLISE DE PLACAS ESPESSAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

SERGIO RAFAEL CORTES DE OLIVEIRA

Tese apresentada ao Centro de Ciência e
Tecnologia da Universidade Estadual do Norte
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das
exigências para a obtenção do título de Doutor
em Engenharia Civil.

Orientadora: Vânia José Karam

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

AGOSTO – 2015

iii

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

75/2015

Oliveira, Sergio Rafael Cortes de

Análise de placas espessas pelo método dos elementos de contorno considerando não-linearidade física / Sergio Rafael Cortes de Oliveira. – Campos dos Goytacazes, 2015.

xxi, 130 f. : il.

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia Civil. Campos dos Goytacazes, 2015.

Orientador: Vânia José Karam.

Área de concentração: Estruturas.

Bibliografia: f. 115-121.

1. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 2. TEORIA DE REISSNER 3. ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA 4. PLACAS (ENGENHARIA) – FLEXÃO 5. PLACAS E CASCAS ELÁSTICAS I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia Civil II. Título

CDD 624.17765

ANÁLISE DE PLACAS ESPESSAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

SERGIO RAFAEL CORTES DE OLIVEIRA

Tese apresentada ao Centro de Ciência e
Tecnologia da Universidade Estadual do Norte
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das
exigências para a obtenção do título de Doutor
em Engenharia Civil.

Aprovada em 28 de agosto de 2015.

Comissão Examinadora:

Prof. Webe João Mansur (Ph.D., Engenharia Civil) – COPPE/UFRJ

Prof. Gines Arturo Santos Falcon (D.Sc., Engenharia Mecânica) – LECIV/UENF

Prof. Sergio Luis González Garcia (D.Sc., Engenharia Civil) – LECIV/UENF

Prof.^a Vânia José Karam (D.Sc., Engenharia Civil) – LECIV/UENF

(Orientadora)

A Théo Valentin.

A todos que amo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as realizações e conquistas que me são proporcionadas.

À minha orientadora, pela valiosa parceria, dedicação e por sua doação incessante na construção de conhecimentos acadêmicos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca examinadora, por avaliarem o trabalho e apresentarem sugestões para o engrandecimento deste.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação acadêmica ao longo de todos os anos em que estive na Instituição.

Aos meus pais, por me terem feito acreditar na riqueza dos conhecimentos e pelos valores passados ao longo da minha caminhada.

À minha irmã, pelo apoio e incentivo.

À minha esposa, por acreditar no meu potencial e por estar ao meu lado em quaisquer circunstâncias.

Aos meus avós, cunhados e sogra, pela torcida incondicional.

Aos amigos professores e alunos do Instituto Federal Fluminense, pelo apoio e compreensão cedidos ao longo deste percurso.

A todos aqueles que me colocam em suas orações e torcem pelo meu sucesso.

“Nunca deixe ninguém te dizer que não pode fazer uma coisa. [...] Se você tem um sonho, tem que correr atrás dele. As pessoas não conseguem vencer e dizem que você também não vai vencer. Se você quer uma coisa, corre atrás. Ponto.”

(À Procura da Felicidade)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	xiv
RESUMO	xx
ABSTRACT	xxi
CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO	1
1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 – PRINCIPAIS TRABALHOS	5
1.2.1 – Trabalhos sobre placas sem a consideração de não-linearidade.....	5
1.2.2 – Trabalhos sobre problemas bi e tridimensionais com a consideração de não-linearidade	7
1.2.3 – Trabalhos sobre placas com a consideração de não-linearidade	8
1.3 – OBJETIVO DA TESE.....	11
1.4 – ESCOPO DA TESE	11
CAPÍTULO 2. ANÁLISE ELÁSTICA PELA TEORIA DE REISSNER	14
2.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	14
2.2 – FORMULAÇÃO BÁSICA DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS ELÁSTICAS.....	14
2.2.1 – Expressões das tensões	15
2.2.2 – Esforços resultantes das tensões	16
2.2.3 – Equações de equilíbrio	17
2.2.4 – Deslocamentos generalizados.....	18

2.2.5 – Deformações específicas generalizadas.....	18
2.2.6 – Esforços em função dos deslocamentos generalizados	19
2.2.7 – Sistema de equações de Reissner.....	20
2.2.8 – Condições de contorno	20
CAPÍTULO 3. O MEC APLICADO À TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE ELÁSTICA.....	22
3.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	22
3.2 – APLICAÇÃO DO MÉTODO À TEORIA DE REISSNER.....	23
3.2.1 – Equação integral básica	23
3.2.2 – Solução fundamental	27
3.2.3 – Equação integral para pontos do contorno	30
3.2.4 – Transformação da integral de forças de domínio em integral de contorno ...	31
3.2.5 – Deslocamentos nos pontos internos.....	33
3.2.6 – Esforços nos pontos internos	33
CAPÍTULO 4. ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER.....	36
4.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	36
4.2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE ESCOAMENTO.....	39
4.2.1 – Os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca	40
4.2.2 – Regra de endurecimento	42
4.3 – FÓRMULAS BÁSICAS DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS ELASTOPLÁSTICAS	44
4.4 – CONSIDERAÇÕES SOBRE ESCOAMENTO PARA PLACAS.....	46
4.5 – RELAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS PARA PLACAS DE REISSNER.....	48
4.5.1 – Pelo critério de escoamento de von Mises.....	48
4.5.2 – Pelo critério de escoamento de Tresca	52

CAPÍTULO 5. O MEC APLICADO À ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA	55
5.1 – EQUAÇÕES INTEGRAIS BÁSICAS PARA PLACAS ELASTOPLÁSTICAS	55
5.1.1 – Dedução a partir do Segundo Teorema de Betti.....	55
5.1.2 – Dedução a partir do Método dos Resíduos Ponderados..	59
5.1.3 – Equação integral para pontos do contorno..	61
5.1.4 – Determinação do tensor fundamental da parcela plástica	63
5.1.5 – Transformação da integral de forças de domínio em integral de contorno ...	65
5.2 – EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA MOMENTOS E ESFORÇOS CORTANTES NOS PONTOS INTERNOS.....	66
 CAPÍTULO 6. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	 72
6.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	72
6.2 – DISCRETIZAÇÃO E SISTEMA DE EQUAÇÕES	73
6.2.1 – Equações dos deslocamentos nos pontos do contorno.....	75
6.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos.....	77
6.2.3 – Cálculo dos esforços resultantes nos pontos internos.....	78
6.3 – ELEMENTOS DE CONTORNO.....	81
6.4 – DESCONTINUIDADE DA NORMAL OU DA CONDIÇÃO DE CONTORNO ...	86
6.4.1 – Nó duplo	86
6.4.2 – Elemento descontínuo.....	87
6.5 – INTEGRAIS SINGULARES	88
6.5.1 – Cálculo das submatrizes da diagonal de G e do vetor B	88
6.5.2 – Cálculo das submatrizes da diagonal de H	89
6.5.3 – Integrais quase-singulares no cálculo dos esforços	90
6.6 – CÉLULAS INTERNAS	91
6.7 – TÉCNICA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO	100

6.8 – ESTRUTURA DO PROGRAMA	102
CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA.....	103
7.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS	103
7.2 – ANÁLISE NUMÉRICA.....	103
7.2.1 – Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada.....	103
7.2.2 – Exemplo 2: Viga simplesmente apoiada	105
7.2.3 – Exemplo 3: Placa circular simplesmente apoiada.	107
7.2.4 – Exemplo 4: Placa quadrada engastada.....	109
CAPÍTULO 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	112
8.1 – CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES.....	112
8.2 – SUGESTÕES	114
BIBLIOGRAFIA.....	115
APÊNDICE A. FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 E K_1.....	122
APÊNDICE B. CÁLCULO DE INTEGRAIS COM SINGULARIDADE LOGARÍTMICA UTILIZANDO UMA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	126
B.1 – TRANSFORMAÇÃO DO SEGUNDO GRAU	126
B.2 – TRANSFORMAÇÃO DO TERCEIRO GRAU	127
APÊNDICE C. CÁLCULO DE INTEGRAIS EM PARTES FINITAS PELA QUADRATURA DE KUTT	129

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema de coordenadas	15
Figura 2.2 – Esforços resultantes: (a) momentos fletores e torsões; (b) esforços cortantes ...	17
Figura 2.3 – Elemento de placa em equilíbrio.....	17
Figura 2.4 – Sentidos positivos considerados para as rotações	19
Figura 3.1 – Região $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém a placa $\Omega + \Gamma$	23
Figura 3.2 – Placa com ponto fonte no contorno.....	31
Figura 3.3 – Definição da normal e sentido de integração	32
Figura 4.1 – Curva tensão-deformação para ensaio uniaxial.....	37
Figura 4.2 – Curva bilinear.....	38
Figura 4.3 – Representação bidimensional dos critérios de von Mises e de Tresca: (a) projeção no plano π ; (b) representação convencional no plano $\sigma_3 = 0$	41
Figura 4.4 – Modelos de representação de comportamentos com endurecimento: (a) isotrópico; (b) cinemático.....	43
Figura 4.5 – Plastificação da seção transversal de placa	46
Figura 5.1 – Domínio Ω_ϵ remanescente do domínio Ω	67
Figura 6.1 – Discretização do contorno Γ em elementos de contorno Γ_j e do domínio Ω em células internas Ω_j	73
Figura 6.2 – Elemento quadrático contínuo com geometria linear.....	81
Figura 6.3 – Elemento quadrático descontínuo com geometria linear	82
Figura 6.4 – Descontinuidade da normal.....	86

Figura 6.5 – Nó duplo.....	87
Figura 6.6 – Elemento descontínuo	88
Figura 6.7 – Célula triangular e sistema intrínseco de coordenadas (ζ_1, ζ_2)	91
Figura 6.8 – Célula triangular com ponto singular γ coincidindo com um dos vértices do triângulo.....	96
Figura 6.9 – Célula triangular com ponto singular γ situado em um dos lados do triângulo..	97
Figura 6.10 – Célula triangular com ponto singular γ coincidindo com o ponto interno da célula.....	98
Figura 6.11 – Célula triangular com ponto singular γ fora da célula.....	100
Figura 7.1 – Discretização da placa quadrada: (a) com elementos de contorno e células internas; (b) com elementos finitos	104
Figura 7.2 – Curva carga-flecha da placa quadrada	105
Figura 7.3 – Discretização da viga em elementos de contorno e células internas.....	106
Figura 7.4 – Curva carga-flecha da viga.....	107
Figura 7.5 – Discretização da placa circular em elementos de contorno e células internas: (a) malha 1; (b) malha 2	108
Figura 7.6 – Curva carga-flecha da placa circular.....	109
Figura 7.7 – Discretização da placa quadrada engastada em elementos de contorno e células internas.....	110
Figura 7.8 – Curva carga-flecha da placa quadrada engastada.....	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

Abreviaturas:

- MDF: Método das Diferenças Finitas.
- MEC: Método dos Elementos de Contorno.
- MEF: Método dos Elementos Finitos.

Símbolos:

Índices gregos: variam de 1 a 2.

Índices latinos: variam de 1 a 3.

Letras romanas maiúsculas:

- A : matriz de coeficientes, cheia e não-simétrica, que multiplica o vetor de incógnitas no sistema elastoplástico.
- B : vetor cujas componentes são expressas por integrais associadas às forças de domínio.
- C_i : matriz de elementos C_{ij} .
- $C_{i\beta j\theta}$: componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas.
- $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$: rigidez à flexão da placa.
- D : matriz que multiplica as deformações plásticas.
- E : módulo de elasticidade longitudinal.
- E_T : módulo tangente.
- $F(\sigma, \kappa')$: função escalar de escoamento dependente do tensor de tensões e do parâmetro de dureza κ .
- F_k^* : componentes das forças de domínio, que se distribuem ao longo da espessura, definidas a fim de se obter a solução fundamental.
- G : matriz que multiplica as forças de superfície generalizadas no sistema de equações $HU = GP + B + D\chi^p$.

- \mathbf{H} : matriz que multiplica os deslocamentos generalizados no sistema de equações $\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\chi}^p$.
- H' : inclinação da curva momento equivalente-deformação plástica equivalente.
- J_2' : segundo invariante da tensão desviadora.
- J_3' : terceiro invariante da tensão desviadora.
- $|\mathbf{J}|$: jacobiano para integração nos elementos de contorno.
- $K_0(z)$ e $K_1(z)$: funções de Bessel modificadas de ordem inteira.
- L : número de elementos de contorno.
- \mathbf{M}_i^* : matriz que contém os momentos da solução fundamental.
- \mathbf{M} : matriz que contém as funções de interpolação para as coordenadas dos pontos dos elementos de contorno.
- $\hat{\mathbf{M}}$: matriz que contém as funções de interpolação para as coordenadas de pontos das células internas.
- $M_{\alpha\beta}$: momentos fletores e torsões por unidade de comprimento.
- $\overline{M}_{\alpha\beta}$: momentos prescritos.
- M_0 : momento de escoamento.
- M_e : momento equivalente.
- M_{ij}' : momentos desviadores.
- $M_{\alpha\beta}^*$: componentes do tensor plástico que multiplica a deformação plástica na equação de deslocamentos.
- $M_{i\beta\gamma\theta}^*$: componentes do tensor plástico que multiplica a deformação plástica nas equações dos esforços.
- $M_{\alpha\beta}^p$: componentes de momento plástico inicial.
- \mathbf{N} : matriz que contém as funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície em pontos dos elementos de contorno.
- $\hat{\mathbf{N}}$: matriz que contém as funções de interpolação para as deformações plásticas dos pontos internos.
- P_j : intensidade da carga unitária.
- \mathbf{P}_i^* : matriz que contém as forças de superfície da solução fundamental.

- $\mathbf{P}^{(j)}$: vetor que contém as forças de superfície relativas a um ponto qualquer do elemento de contorno.
- $\mathbf{P}^{(n)}$: vetor que contém as forças de superfície relativas aos pontos nodais do elemento de contorno.
- Q_α : esforços cortantes por unidade de comprimento.
- \bar{Q}_α : esforços cortantes prescritos.
- \mathbf{S}_i^* : vetor cujas componentes são expressas por $S_k^* = \left(v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)} u_{k\alpha} \right) n_\alpha$
- \mathbf{U}_i^* : matriz que contém os deslocamentos da solução fundamental.
- $\mathbf{U}^{(j)}$: vetor que contém os deslocamentos relativos a um ponto qualquer do elemento de contorno.
- $\mathbf{U}^{(n)}$: vetor que contém os deslocamentos relativos aos pontos nodais do elemento de contorno.
- Z : número de células internas.

Letras romanas minúsculas:

- a e b : distâncias dos nós às extremidades do elemento descontínuo.
- b_i : componentes das forças de domínio.
- \mathbf{f} : vetor que contém os valores prescritos do sistema elastoplástico.
- \mathbf{f}' e \mathbf{f}'' : vetores que contêm os valores prescritos dos sistemas dos esforços.
- h : espessura da placa.
- l : comprimento do elemento de contorno.
- n_β : co-senos diretores da normal exterior ao contorno em relação ao eixo x_β .
- p_i : componentes das forças de superfícies generalizadas.
- \bar{p}_i : componentes das forças de superfícies generalizadas prescritas.
- p_{ij}^* : componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental.
- $p_{i\beta k}^*$: componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos.
- q : carregamento transversal aplicado.
- $r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha}$: distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

- $r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha}$: derivada de r em relação à coordenada x_α .
- u_i : componentes dos deslocamentos generalizados.
- \bar{u}_i : componentes dos deslocamentos generalizados prescritos.
- u_{ij}^* : componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental.
- $u_{i\beta k}^*$: componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos.
- w : deslocamento transversal (flecha).
- \bar{w} : deslocamento transversal prescrito.
- $w_{,\alpha} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}$: primeira derivada da flecha em relação às coordenadas x_α .
- $w_{i\beta}^*$: componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos.
- x : ponto campo.
- x_i : eixos coordenados cartesianos.
- $\mathbf{x}^{(j)}$: vetor que contém as coordenadas de pontos quaisquer dos elementos de contorno.
- $\mathbf{x}^{(n)}$: vetor que contém as coordenadas dos pontos nodais dos elementos de contorno.
- \mathbf{y} : vetor de incógnitas.
- z : produto expresso por λr .

Letras gregas maiúsculas:

- Γ : contorno da região definida por Ω .
- Γ_j : contorno do elemento j .
- Γ_u : parte do contorno em que os deslocamentos generalizados são prescritos.
- Γ_p : parte do contorno em que as forças de superfície generalizadas são prescritas.
- Γ^* : contorno da região definida por Ω^* .
- $\bar{\Gamma}_\varepsilon$: contorno adicional.
- Δ_{ij}^* : componentes do operador de Navier.
- $\Psi(\kappa)$: função de escoamento dependente do parâmetro de dureza κ .
- Ω : domínio da região analisada.

- Ω^* : domínio da região que contém Ω cujo contorno está infinitamente distante da placa.
- Ω_j : contorno da célula j .

Letras gregas minúsculas:

- $\delta_{\alpha\beta}$: delta de Kronecker.
- $\delta(x - \xi)$: função generalizada delta de Dirac.
- ε : raio do semicírculo.
- ε : deformação.
- ζ_α : coordenada homogênea associada com a célula interna.
- η : coordenada adimensional associada com o elemento de contorno.
- θ : ângulo de desvio (parâmetro de Lode).
- κ : parâmetro de dureza.
- κ' : conjunto de variáveis de endurecimento.
- $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$: constante característica das equações de Reissner.
- $d\gamma$: fator de proporcionalidade do processo plástico.
- μ_o : fator de carga inicial
- ν : coeficiente de Poisson.
- v_i^* : funções que satisfazem determinada equação de Poisson.
- ξ : ponto fonte ou ponto carga.
- σ_0 : tensão de escoamento uniaxial do material.
- $\sigma_{máx}$: tensão máxima.
- $\bar{\sigma}$: tensão efetiva.
- $\sigma_{\alpha\beta}$: componentes do tensor de tensões.
- σ_{ij} : tensor das tensões de desvio.
- ϕ_α : rotações da normal à superfície média nos planos $x_\alpha - x_3$.
- $\bar{\phi}_\alpha$: rotações prescritas.
- ψ_α : componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais.
- $\chi_{\alpha\beta}$: componentes do tensor de deformações específicas de flexão.

- $\chi_{\alpha\beta}^e$: componentes de deformação elástica de flexão.
- $\chi_{\alpha\beta}^p$: componentes de deformação plástica de flexão.
- $d\chi_{ij}^p$: incremento de deformação plástica.
- $d\chi_e^p$: incremento de deformação plástica equivalente.
- $\hat{\chi}_{ij}$: tensor de deformação total modificado.
- χ'_{ij} : forma desviadora do tensor de deformação.
- χ_{et} : deformação equivalente ao tensor de deformação total modificado $\hat{\chi}_{ij}$.

Operadores Matemáticos:

- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$: operador de Laplace.
- $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$: operador bi-harmônico.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma formulação para análise elastoplástica de flexão de placas empregando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Utiliza-se a teoria de Reissner, válida tanto para placas delgadas como para placas espessas.

Inicialmente, mostra-se a formulação básica considerando a análise no regime elástico, incluindo a solução fundamental e as equações integrais para este caso. Em seguida, esta formulação é estendida para a análise elastoplástica, admitindo a ocorrência de deformações plásticas apenas de flexão. Considera-se a teoria clássica da plasticidade com procedimento de deformação inicial, e usam-se os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

São apresentadas as equações integrais para deslocamentos em pontos internos e do contorno e para momentos e esforços cortantes em pontos internos. São também apresentadas as expressões para os novos tensores que multiplicam as deformações plásticas e dos termos livres. A implementação numérica é realizada usando as equações integrais discretizadas, empregando elementos de contorno quadráticos e células internas constantes, ambos de geometria linear. Utiliza-se um processo incremental-iterativo para a resolução do sistema de equações que rege o problema elastoplástico.

Alguns exemplos numéricos são apresentados no fim do trabalho para ilustrar a aplicabilidade da formulação. Os resultados são validados por meio de comparação com resultados de outros trabalhos, obtidos por métodos analíticos e numéricos.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, teoria de Reissner, análise elastoplástica, flexão de placas.

ABSTRACT

The present work presents a formulation for elastoplastic analysis of plate bending using the Boundary Element Method (BEM). Reissner's theory is considered, which is valid for both thin and thick plates.

Initially, the basic formulation for the elastic analysis is shown, including the fundamental solution and integral equations for this case. In following, this formulation is extended to the elastoplastic analysis, admitting the occurrence of plastic strains only by flexure. The classical theory of plasticity is considered with an initial strain procedure, and the yield criteria of von Mises and Tresca were used.

Integral equations are presented for displacements at internal and boundary points and for moments and shear forces at internal points. The expressions for the new tensors which multiply the plastic strains and free terms are also presented. The numerical implementation is done by using discretized integral equations, employing quadratic boundary elements and constant internal cells, both with linear geometry. It is used an incremental-iterative process to solve the system of equations that governs the elastoplastic problem.

Some numerical examples are presented in the end of the work to illustrate the applicability of the formulation. The results are validated by comparing them with results of other researches, obtained from numerical and analytical methods.

Keywords: Boundary element method, Reissner's theory, elastoplastic analysis, plate bending.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são feitas as considerações iniciais com relação aos principais conceitos empregados na pesquisa, como os elementos estruturais de placas, as principais teorias de flexão de placas, os comportamentos linear e não-linear das estruturas e os principais métodos numéricos empregados na Engenharia. Depois, apresenta-se uma revisão dos principais trabalhos relacionados aos conceitos utilizados no tema proposto, além do objetivo da presente pesquisa. Por fim, tem-se o escopo da tese.

1.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As estruturas são compostas por diversos elementos encarregados de oferecer rigidez e resistência ao conjunto, dispostos de maneira a transmitir os esforços para os apoios. Dentre eles, são encontrados, frequentemente, os elementos denominados placas.

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas ou de pequena curvatura. A distância entre as superfícies é denominada espessura, sendo esta muito menor do que as demais dimensões da placa. A superfície equidistante das superfícies limites é denominada superfície média. Em geral, as placas estão submetidas a carregamentos transversais, podendo ter também carregamentos paralelos à superfície média. São utilizadas em diversos tipos de estruturas e podem ser classificadas em delgadas, moderadamente espessas ou espessas.

A solução de problemas envolvendo placas constitui um assunto relevante para o campo da Engenharia Estrutural.

Existem várias teorias para análise de flexão de placas, sendo as mais conhecidas as de Kirchhoff, de Reissner e de Mindlin. Estas teorias consistem em aproximações bidimensionais, por meio de hipóteses simplificadoras, do problema tridimensional da teoria da elasticidade.

A primeira teoria desenvolvida foi a de Kirchhoff, também chamada teoria clássica para placas delgadas. A principal hipótese desta teoria é de que segmentos de reta normais à superfície média, antes da flexão, permanecem retos, normais à superfície média e inalterados no comprimento após a flexão, isto é, considera que as deformações cisalhantes transversais

não são relevantes na deformação da placa, o que conduz a resultados inexatos nos bordos, cantos e próximo a furos com diâmetro da ordem de grandeza da espessura da placa.

Na teoria de Kirchhoff, o problema é representado por uma equação diferencial de quarta ordem em que devem ser satisfeitas duas condições de contorno por bordo, ao invés das três condições de contorno físicas do problema. A teoria apresenta também a limitação de ser aplicável apenas a placas delgadas com pequenos deslocamentos transversais.

Já as teorias de Reissner e de Mindlin, que aparecem de modo alternativo à teoria de Kirchhoff, consideram os efeitos das deformações cisalhantes transversais e possibilitam a análise de placas espessas ou moderadamente espessas, respectivamente, além das placas delgadas. A teoria de Reissner parte de uma distribuição conhecida de tensões, enquanto a teoria de Mindlin, de uma distribuição conhecida de deformações, impondo nulas as variações das distorções, uma vez que as distorções não mais serão nulas por conta da consideração da força cortante. Nessas teorias, o sistema de equações diferenciais é de sexta ordem e devem ser satisfeitas as três condições de contorno físicas do problema; por isso, são obtidos resultados melhores que aqueles encontrados pela teoria de Kirchhoff.

A análise de estruturas pode admitir comportamento linear ou não-linear, podendo esta não-linearidade ser física ou geométrica. Em um grande número de aplicações, a consideração de não-linearidade física e/ou geométrica torna-se necessária.

A não-linearidade física está associada a uma relação constitutiva não-linear entre tensão e deformação, manifestada no comportamento do material (fissuração, plasticidade, viscoplasticidade, etc.).

Em linhas gerais, a plasticidade é caracterizada pela presença de deformações irreversíveis (permanentes), em um sólido quando submetido a forças externas, o que geralmente ocorre para níveis mais elevados de sollicitação, especialmente próximos da resistência ou da ruptura do material.

Na consideração desse tipo de não-linearidade, são escritas relações constitutivas que representam a resposta do material nas fases pré e pós-escoamento. Para a determinação do nível de tensão a partir do qual as deformações plásticas aparecem, são utilizados critérios de escoamento, dentre os quais se destacam o critério da tensão normal máxima (teoria de Rankine), o critério da tensão cisalhante máxima (teoria de Tresca), o critério de Mohr-Coulomb, o critério de Beltrami, o critério da energia de distorção máxima (teoria de von Mises), o critério de Green e o critério de Drucker-Prager.

A não-linearidade geométrica está relacionada aos efeitos de 2ª ordem oriundos de grandes deformações e grandes deslocamentos, que provocam uma mudança incremental nos esforços a serem considerados nas estruturas.

Devido à complexidade no tratamento de muitos problemas de Engenharia no que diz respeito à geometria e às leis constitutivas de alguns materiais, torna-se difícil a obtenção das soluções analíticas (“exatas”) dos mesmos. Para contornar essa adversidade, buscam-se soluções aproximadas através de técnicas numéricas, que fazem simplificações na consideração da geometria e das leis constitutivas dos materiais.

O desenvolvimento dessas técnicas aproximadas originou os métodos de domínio, como o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), e de métodos de contorno, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Graças à evolução dos equipamentos e dos sistemas computacionais, aliado aos métodos numéricos, os engenheiros puderam dispor de ferramentas muito valiosas na solução de problemas de maior complexidade.

Os métodos de domínio, como são denominados muitas vezes o MDF e o MEF, aproximam a solução das equações diferenciais ou integrais que regem o problema físico, considerando incógnitas associadas a pontos discretos do domínio e pontos do contorno do corpo analisado.

No MDF, o sistema de equações diferenciais é transformado em um sistema algébrico através da aplicação de aproximações para as derivadas parciais contínuas, geralmente utilizando séries de Taylor truncadas.

O desenvolvimento do MEF acompanhou o avanço tecnológico dos equipamentos computacionais, sendo alguns dos primeiros estudos realizados por Turner *et al.* (1956) e Argyris e Kelset (1960). No MEF, o meio contínuo é dividido em elementos que têm tratamento numérico individual como sub-regiões contínuas e, depois, são acoplados a fim de se obter a solução do problema geral.

O estudo de placas através do MEF foi feito, inicialmente, a partir das hipóteses de Kirchhoff, usando funções aproximadoras contínuas de classe C^1 , isto é, funções com derivadas primeiras contínuas, necessárias para a formulação de elementos conformes (contínuos).

Posteriormente, foram admitidas as hipóteses de Reissner/Mindlin para o estudo de placas moderadamente espessas com o MEF. Nesta formulação, as funções aproximadoras

para deslocamentos exigem apenas continuidade do tipo C^0 , por serem as derivadas de ordem um as mais altas que aparecem no funcional. Neste caso, os efeitos das deformações cisalhantes transversais são considerados na formulação.

Como procedimentos numéricos alternativos para a resolução dos diversos problemas físicos usuais da Engenharia, surgem técnicas para o cálculo de equações integrais de contorno. Apesar de ser mais recente, o MEC tem sua origem na resolução de equações integrais, as quais são conhecidas desde o século XIX.

No MEC, equações integrais escritas, em geral, com integrais de contorno, são resolvidas discretizando o contorno e considerando as variáveis básicas de contorno aproximadas por funções de interpolação definidas a partir de pontos previamente escolhidos em cada elemento, denominados pontos nodais (ou nós). Os valores nos pontos internos são calculados a partir dos valores de contorno.

A aplicação do MEC tem origem na década de 1960, mas a sua formulação a partir do Método dos Resíduos Ponderados foi feita por Brebbia (1978), usando uma função ponderadora conveniente. A partir daí obteve-se uma generalização do método, associando sua formulação com outros métodos numéricos.

Particularmente, o MEC vem ganhando cada vez mais espaço no campo da pesquisa já que, no caso geral da discretização apenas sobre o contorno, reduz-se uma unidade na dimensão do problema, levando-se, em geral a uma quantidade menor de dados de entrada e memória auxiliar de armazenamento das informações do problema.

Essa é uma das principais diferenças entre o MEF e o MEC. No primeiro, é sempre necessária a discretização de todo o domínio do problema e, no segundo, apenas o contorno e, possivelmente, partes do domínio precisam ser discretizadas. Dessa forma, consideram-se as equações integrais do problema escritas com integrais de contorno e, possivelmente, algumas integrais de domínio.

Em particular, no caso de análise de placas pelo MEC, são discretizadas apenas as linhas de contorno que circundam a superfície média.

Outra vantagem de se utilizar o MEC é que todos os valores calculados nos pontos internos, tanto os deslocamentos como as tensões ou esforços solicitantes, possuem a mesma precisão, pois as derivadas são efetuadas nos tensores da solução fundamental, não acarretando perda de precisão. Porém, no MEC, costumam existir integrais singulares nas equações, que requerem tratamentos especiais na sua resolução.

Deve-se destacar que o MEC é bastante adequado ao cálculo de problemas com domínio infinito.

Para que um problema seja formulado com o MEC, é necessário que uma solução fundamental do problema a ser analisado seja conhecida.

As formulações apresentadas para o MEC podem apresentar-se de forma indireta ou direta. Os métodos indiretos apareceram primeiro e consistem na solução do problema em termos de variáveis fictícias associadas ao contorno, permitindo, após a determinação de seus valores, o cálculo das variáveis reais do problema. As variáveis fictícias não têm significado físico real e sua determinação é obtida atendendo-se as condições de contorno em um certo número de pontos. Os métodos diretos são mais empregados e se caracterizam pelo uso das variáveis físicas do problema real de maneira explícita na formulação.

1.2 – PRINCIPAIS TRABALHOS

Alguns trabalhos desenvolvidos anteriormente para a análise de placas e de problemas bi e tridimensionais pelo MEC são destacados a seguir e servirão para situar o trabalho proposto. Eles estão agrupados da seguinte forma: os que não consideraram qualquer tipo de não-linearidade e os que fizeram este tipo de consideração.

1.2.1 – Trabalhos sobre placas sem a consideração de não-linearidade

Em Jaswon *et al.* (1967) o MEC foi aplicado, pela primeira vez, à análise de flexão de placas pela teoria de Kirchhoff, sendo proposta uma solução através de equações integrais para a equação bi-harmônica, decomposta em duas equações harmônicas, pelo método indireto.

Forbes e Robinson (1969) foram os primeiros a utilizar o método direto na solução de problemas de placas.

Altiero e Sikarskie (1978) utilizaram a formulação indireta no problema de placas, resolvendo casos com contornos engastados.

Bezine (1978) fez a análise de flexão de placas pela teoria de Kirchhoff, utilizando o MEC de forma direta. Foram empregados elementos constantes na formulação integral e as integrais de domínio provenientes do carregamento não foram transformadas em integrais de contorno, limitando o estudo aos casos de carregamentos concentrados.

Em Stern (1979) foi feita análise de flexão de placas pela teoria de Kirchhoff, também de forma direta, entretanto, com uma formulação integral mais geral, admitindo aproximações lineares nos elementos. Não foram admitidas as possíveis descontinuidades das condições de contorno nos cantos das placas.

Tottenham (1979) fez uma comparação entre os métodos direto e indireto para placas delgadas e estendeu para a análise de placas apoiadas sobre fundação elástica.

Wu e Altiero (1979) estenderam as considerações feitas em Altiero e Sikarskie (1978) para condições de contorno arbitrárias.

Van der Weeën (1982a; 1982b) foi o primeiro a estudar a flexão de placas aplicando o MEC à teoria de Reissner. Em sua formulação são escritas três equações integrais para cada ponto do contorno em termos dos deslocamentos generalizados, relativas à flecha e às rotações, cuja solução é obtida numericamente, aproximando o contorno por elementos isoparamétricos quadráticos.

Em Paiva e Venturini (1985) é apresentada uma formulação utilizando o MEC aplicado a problemas de flexão de placas com a teoria de Kirchhoff, transformando as integrais de domínio provenientes do carregamento atuante em integrais de contorno. A formulação é aplicada à análise de pavimentos de edifícios.

Karam (1986) apresentou uma análise utilizando o MEC aplicado ao problema de flexão de placas linearmente elásticas, homogêneas e isotrópicas, utilizando a teoria refinada de Reissner, baseando-se nos trabalhos de Van der Weeën (1982a; 1982b).

Reissner (1986) apresenta uma formulação generalizando as equações para a análise de placas considerando grandes deformações, obtendo um sistema de equações diferenciais de décima ordem.

Ribeiro e Venturini (1989) escreveram o sistema de equações lineares utilizando os pontos de carga fora do domínio a fim de evitar a ocorrência de algumas integrais singulares. As equações foram empregadas a partir dos trabalhos de Van der Weeën (1982a; 1982b).

Em Silva e Venturini (1990) é feita uma análise de placas com condições de vinculação em seu domínio, empregando o MEC aplicado à teoria de Reissner, a fim de comparar com a teoria de Kirchhoff. O processo de resolução do sistema é iterativo, provocando modificações no mesmo à medida que os carregamentos ou deslocamentos conhecidos nos pontos internos produzem reações internas, tratadas de forma distribuída nas áreas de contato.

Reissner (1991) abordou a análise de placas ortotrópicas, incluindo o conceito de apoio *soft*.

Em 1991, Sapountzakis e Katsikadelis combinaram o MDF e o MEC para fazer a análise de placas de espessura variável. O equacionamento é composto de duas equações diferenciais e três equações integrais acopladas.

1.2.2 – Trabalhos sobre problemas bi e tridimensionais com a consideração de não-linearidade

A aplicação do MEC à plasticidade iniciou-se com o trabalho de Swedlow e Cruse (1971), para problemas tridimensionais, porém sem apresentar resultados numéricos. Eles também não apresentaram as expressões das tensões e deformações em pontos internos, que são muito importantes na análise plástica.

Mendelson (1973) mostrou as expressões para os valores internos de tensões e deformações para problemas bi e tridimensionais. Entretanto, segundo Mukherjee (1977), o problema de deformação plana não teve uma correta abordagem.

Ricardella (1973) analisou problemas de elasticidade plana e elastoplasticidade, considerando aproximação linear para as variáveis nos elementos.

Os autores citados anteriormente encontraram dificuldades na obtenção de equações apropriadas para o cálculo de tensões em pontos do domínio analisado. Eles não levaram em consideração o termo livre oriundo da derivação das equações de deslocamentos, no que se refere aos tensores que multiplicam as deformações inelásticas, no caso da formulação utilizando procedimento de deformação inicial, ou as tensões inelásticas, no caso de formulação empregando procedimento de tensão inicial.

Os termos livres que surgem foram considerados pela primeira vez por Bui (1978). A formulação completa para problemas bi e tridimensionais, incluindo as expressões corrigidas para as tensões em pontos internos foi apresentada por Telles e Brebbia (1979; 1981).

Em Telles (1983) são apresentadas formulações e procedimentos numéricos com o MEC para análise de problemas bi e tridimensionais com vários tipos de não-linearidade física.

Telles e Carrer (1991) apresentaram um procedimento implícito de solução de problemas elastoplásticos empregando o MEC. Com esta técnica, conseguiram diminuir o

número de iterações, porém, houve aumento no esforço computacional a cada incremento de carga.

1.2.3 – Trabalhos sobre placas com a consideração de não-linearidade

Morjaria e Mukherjee (1980) desenvolveram um esquema para análise inelástica de placas engastadas e simplesmente apoiadas, admitindo um modelo viscoplástico, com carregamento transversal distribuído variando linearmente com o tempo, a partir da teoria de Kirchhoff.

Moshaiov e Vorus (1986) apresentaram uma formulação para análise elastoplástica de placas utilizando a teoria clássica, usando um procedimento incremental-iterativo, considerando um campo de momentos fletores plásticos iniciais. O contorno foi discretizado em elementos constantes e as células internas também eram constantes.

Xiao-Yan *et al.* (1990) fizeram o uso da teoria de Reissner considerando a possibilidade de não-linearidade geométrica.

Em Karam (1992), são feitas análises elásticas de flexão de placas abordando as teorias de Kirchhoff e de Reissner empregando o MEC e, também, uma comparação entre as duas teorias para placas delgadas. Em seguida, é apresentada uma formulação para análise de flexão de placas utilizando a teoria de Reissner com a consideração de elastoplasticidade pelo MEC, empregando um procedimento de tensão inicial e os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca. É utilizado um processo incremental-iterativo de solução. Na discretização, são utilizados elementos quadráticos contínuos ou descontínuos e células internas triangulares constantes.

Karam e Telles (1992) apresentaram uma formulação empregando o MEC para análise de flexão de placas de Reissner com elastoplasticidade, considerando um procedimento de tensão inicial e os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

Ribeiro (1992) apresentou uma formulação do MEC para análise elástica de placas pelas teorias de Kirchhoff e de Reissner. A formulação pela teoria de Reissner é complementada com uma análise não-linear admitindo campos de momentos iniciais no domínio da placa e a solução plástica é obtida adotando-se um procedimento de tensão inicial. A análise elastoplástica é feita utilizando um algoritmo incremental-iterativo baseando-se no método da rigidez inicial, em que a matriz dos coeficientes é calculada apenas uma vez. A

discretização das integrais de domínio é feita utilizando células internas com aproximação linear.

Em Chueiri (1994), é desenvolvida uma formulação do MEC para análise de flexão de placas pela teoria clássica de Kirchhoff no regime elástico. A análise é estendida para o caso elastoplástico, considerando momentos iniciais oriundos de um campo de deformações. As integrais de domínio são discretizadas em células triangulares com aproximação linear. Utiliza-se um algoritmo incremental-iterativo, baseado em um procedimento de tensão inicial.

Fortiu *et al.* (1994) realizaram uma análise de vibrações de placas elastoplásticas usando soluções fundamentais dinâmicas de um domínio finito na forma modal com a teoria de Kirchhoff.

Providakis e Beskos (1994) desenvolveram uma formulação para análise dinâmica de placas elastoplásticas de geometria e condições de contorno arbitrárias empregando a solução fundamental elastostática e a teoria clássica.

Em Karam e Telles (1998), o MEC é aplicado a placas de Reissner com não-linearidade física.

Fernandes (1998) apresenta o desenvolvimento de uma formulação para análise linear e não-linear de placas de concreto armado pelo MEC aplicado à teoria de Kirchhoff. Na análise não-linear de placas, são considerados o critério de escoamento de von Mises e o modelo de danos de Mazars, além de um campo de momentos iniciais.

Em Ribeiro e Venturini (1998), o MEC é empregado para analisar placas elastoplásticas com a teoria de Reissner, admitindo um procedimento de tensão inicial.

Providakis e Beskos (2000) também utilizaram o MEC e a teoria de Reissner para o estudo de placas com plasticidade, considerando a análise dinâmica e um procedimento de tensão inicial.

Bacarji (2001) apresentou uma formulação do MEC com a teoria de Reissner para análise de flexão de placas, aplicada a pavimentos de edifícios, incluindo não-linearidade física considerando um campo de momentos iniciais. Considerou, ainda, interação de lajes com outros elementos estruturais, como vigas e pilares.

Em Auatt (2002), são feitas análises elástica e elastoplástica do contato de uma placa com uma base rígida, através do MEC aplicado à teoria de Reissner, utilizando a mesma solução fundamental do problema sem contato, utilizando células na interface. Equações de

deslocamentos dos pontos internos foram adicionadas ao sistema de equações original. Além disso, foi considerada plasticidade com multicamadas.

Fernandes e Venturini (2002) propuseram formulações para análise não-linear de placas de concreto armado, usando o modelo elastoplástico e o modelo de dano de Mazars.

Cresce (2003) apresentou uma formulação do MEC para análise não-linear de pavimentos de concreto armado com a teoria de Reissner, admitindo procedimento de tensão inicial pela aplicação de um campo de momentos em pontos do domínio. Foram admitidos carregamentos concentrados e distribuídos. Foi utilizado procedimento incremental-iterativo para fazer a análise do problema.

Fernandes e Venturini (2005) desenvolveram uma formulação para análise linear de placas através do MEC utilizando a teoria clássica de Kirchhoff. Após a discretização, a integração numérica sobre os elementos de contorno foi feita considerando-se a técnica de sub-elementos. No mesmo trabalho, a formulação foi estendida para análise não-linear de placas de concreto armado, através da inclusão de um campo de momentos iniciais e utilizando células internas, admitindo o modelo constitutivo elastoplástico com o critério de von Mises e o modelo de dano de Mazars.

Supriyono e Aliabadi (2006) empregaram o MEC para a análise de placas sujeitas a deformações cisalhantes com a combinação de não-linearidades geométrica e do material.

Em Waidemam (2008), foi apresentada uma formulação do MEC para análise de placas pela teoria de Kirchhoff considerando as não-linearidades física, partindo de um campo de tensões iniciais e o critério de von Mises, e geométrica, empregando a teoria de Von Kármán. Foi avaliado ainda o comportamento de placas enrijecidas, considerando o comportamento não-linear físico do material. Foram admitidas células triangulares com funções de aproximação linear.

Em Taguti (2010), é apresentada uma análise de placas elásticas delgadas através do MEC, considerando o caso de não-linearidade geométrica, além de um comparativo com a teoria de primeira ordem. Para a montagem do sistema de equações algébricas, utilizou apenas a equação integral do deslocamento transversal da placa e as variáveis de canto como incógnitas. As integrais de domínio, que antes estavam escritas em função da curvatura, ficaram em função apenas do deslocamento transversal.

Observa-se que existe a falta de uma formulação de deformação inicial para análise de placas elastoplásticas pelo MEC.

1.3 – OBJETIVO DA TESE

O objetivo desta tese é o desenvolvimento de uma formulação para análise elastoplástica de flexão de placas espessas empregando o MEC aplicado à teoria de Reissner, admitindo um procedimento de deformação inicial, em vez do procedimento de tensão inicial utilizado nos trabalhos anteriores, e a correspondente implementação computacional.

1.4 – ESCOPO DA TESE

O presente trabalho está dividido em 8 (oito) capítulos e 3 (três) apêndices.

O Capítulo 1 abordou o tema de uma forma mais abrangente, ressaltando os principais conceitos necessários para a compreensão da pesquisa e uma breve revisão dos principais trabalhos relacionados ao tema proposto. Por fim, foi apresentado o objetivo da presente pesquisa.

No Capítulo 2, aborda-se, resumidamente, a teoria de flexão de placas de Reissner e apresentam-se as fórmulas básicas para o cálculo de placas elásticas a partir desta teoria, incluindo as expressões das tensões e dos esforços, as equações de equilíbrio, as expressões dos deslocamentos e deformações generalizadas, o sistema de equações de Reissner e a definição das condições de contorno.

No Capítulo 3, apresenta-se a formulação básica do MEC baseada na teoria de flexão de placas de Reissner admitindo regime elástico, incluindo as principais equações integrais envolvidas, como as equações de deslocamentos em pontos internos e pontos do contorno e esforços em pontos internos, além das soluções fundamentais do problema. Neste capítulo, também é feita a transformação das integrais das forças de domínio em integrais de contorno, para o caso de carregamento uniformemente distribuído, permitindo que a discretização seja feita apenas no contorno da placa (no caso elástico).

No Capítulo 4, a formulação apresentada no Capítulo 2 é estendida para análise de flexão de placas com não-linearidade física, considerando a teoria clássica da plasticidade, em que as deformações plásticas são independentes do tempo de atuação do carregamento. Admite-se a existência de deformações plásticas apenas de flexão e adota-se um procedimento de deformação inicial, em que é introduzido um campo de deformações iniciais. O momento efetivo é obtido pelos critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

No Capítulo 5, apresenta-se a formulação para análise elastoplástica de flexão de placas de Reissner tratada no capítulo anterior utilizando o MEC, incluindo as equações integrais deste caso, como as equações de deslocamentos em pontos internos e pontos do contorno além dos esforços nos pontos internos e, também, as componentes dos tensores que multiplicam as deformações plásticas e as expressões para os termos livres. Neste capítulo, faz-se, quando possível, a transformação das integrais das forças de domínio em integrais de contorno.

O Capítulo 6 apresenta o procedimento de implementação numérica pelo MEC, em que são feitas as discretizações das principais equações encontradas no capítulo anterior, considerando-se o contorno da placa dividido em elementos quadráticos contínuos e descontínuos com geometria linear. Os elementos descontínuos são utilizados em casos especiais de descontinuidade da normal e das condições de contorno. Além disso, são utilizadas células internas triangulares constantes de geometria linear nas partes do domínio onde se espera a existência de deformações plásticas. Para o caso de integrais regulares, estas são resolvidas numericamente, pela quadratura de Gauss, tanto para os elementos de contorno como para as células internas. As integrais singulares são resolvidas numericamente, adotando-se procedimentos especiais. É montado um sistema que contempla três equações por ponto nodal do contorno (cada uma associada a uma direção generalizada). Além disso, são escritas três equações de momentos para cada ponto considerado nas células. A consideração destas equações em conjunto permite que o problema elastoplástico seja resolvido, após a aplicação das condições de contorno, através de um processo incremental-iterativo. Assim, as incógnitas, que são deslocamentos ou forças de superfície no contorno e as deformações plásticas nos pontos considerados nas células, podem ser calculadas.

No Capítulo 7, mostram-se os resultados obtidos pela análise elastoplástica utilizando o MEC para quatro exemplos; são eles: placa quadrada simplesmente apoiada, viga simplesmente apoiada, placa circular simplesmente apoiada e placa quadrada engastada. Nos três primeiros exemplos admite-se comportamento elastoplástico perfeito e, no último exemplo, admite-se material com endurecimento linear após o escoamento inicial. Os resultados são validados por meio de comparação com resultados de outros trabalhos, obtidos por métodos analíticos e numéricos.

O Capítulo 8 apresenta os comentários finais, com as conclusões e observações do trabalho, bem como, algumas sugestões para o prosseguimento da pesquisa.

No Apêndice A, apresentam-se as funções de Bessel modificadas de ordem inteira K_0 e K_1 .

No Apêndice B, apresentam-se os procedimentos de transformação de coordenadas de segundo e terceiro graus para o cálculo de integrais com singularidade logarítmica.

No Apêndice C, é apresentado o processo de Kutt para a resolução em partes finitas das integrais interpretadas no sentido de valor principal de Cauchy.

No decorrer do texto, será utilizada a notação cartesiana indicial, representando-se por letras gregas os índices que variam de 1 a 2 e por letras romanas os que variam de 1 a 3.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE ELÁSTICA PELA TEORIA DE REISSNER

Neste capítulo, apresenta-se a teoria de flexão de placas de Reissner, destacando-se as principais características da mesma e mostrando-se a sua formulação básica para placas elásticas, a fim de se estender, posteriormente, a mesma teoria para análise plástica. São apresentadas as expressões das tensões e dos esforços resultantes, as equações de equilíbrio, as expressões dos deslocamentos e das deformações generalizadas, dos esforços em função desses deslocamentos e, no fim do capítulo, são apresentados o sistema de equações de Reissner e as condições de contorno.

2.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A teoria de Reissner para flexão de placas se baseia na teoria da elasticidade e no princípio de Hellinger-Reissner, conduzindo a um problema de integração de sexta ordem que satisfaz a três condições de contorno por bordo.

Como hipóteses básicas desta teoria, tem-se que a superfície média é plana, neutra e inextensional.

A teoria aplica-se tanto a placas delgadas como a placas espessas, pois supõe que linhas retas e normais à superfície média antes da flexão da placa, não permanecem mais necessariamente normais à superfície média após a flexão. Consequentemente, nesta teoria, a deformação cisalhante transversal não é desprezada e os efeitos da espessura sobre os valores calculados de deslocamentos e esforços resultantes para a placa são levados em consideração, o que elimina as imperfeições manifestadas pela teoria clássica de Kirchhoff.

2.2 – FORMULAÇÃO BÁSICA DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS ELÁSTICAS

Nesta seção, são apresentadas as fórmulas básicas empregadas na análise elástica de flexão de placas pela teoria de Reissner (Reissner, 1944; 1945 e 1947).

Admite-se uma placa linearmente elástica, homogênea e isotrópica, com espessura h constante e sujeita a um carregamento transversal q por unidade de área.

Considera-se, ainda, como x_i as coordenadas cartesianas, com x_α na superfície média e x_3 na direção transversal da placa (Figura 2.1).

As condições de carga consideradas nas faces da placa são $\sigma_{\alpha 3} = 0$ e $\sigma_{33} = \pm q/2$ para $x_3 = \pm h/2$ (Van der Weeën, 1982a), sendo $\sigma_{\alpha 3}$ as componentes tangenciais das tensões e σ_{33} a componente normal.

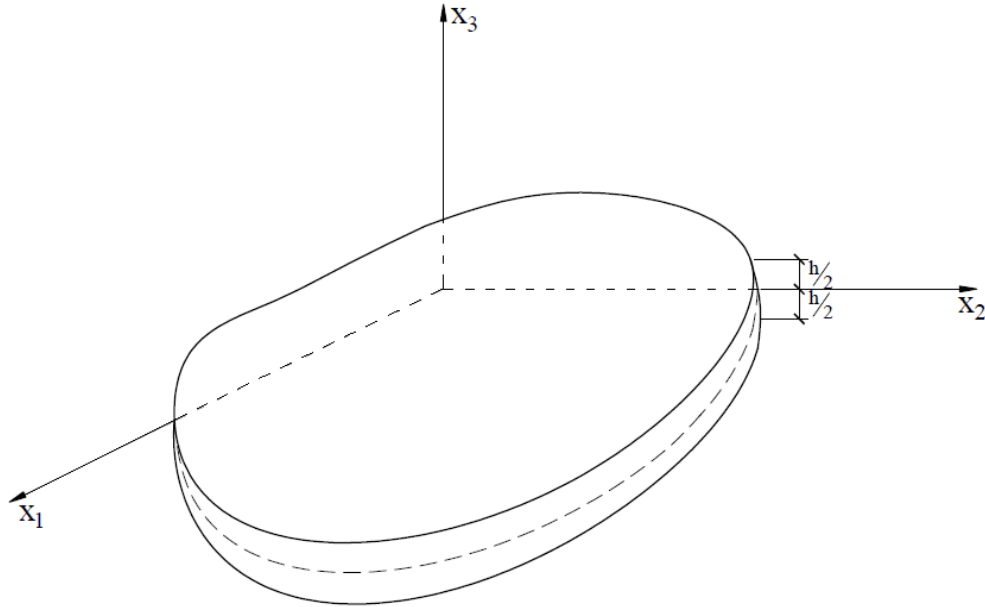


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas.

2.2.1 – Expressões das tensões

As tensões variam ao longo da espessura de acordo com as expressões que seguem, dadas em função dos esforços resultantes (Van der Weeën, 1982a):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_\alpha}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = \frac{qx_3}{2h} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

As tensões normais σ_{33} , que atuam na direção transversal, são consideradas desprezíveis em relação às demais.

2.2.2 – Esforços resultantes das tensões

Os momentos fletores e torsores $M_{\alpha\beta}$ e os esforços cortantes Q_α são as resultantes das tensões, por unidade de comprimento, atuando na superfície média da placa, calculados por integração das tensões $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha 3}$, respectivamente, ao longo da espessura da placa. As expressões são dadas a seguir.

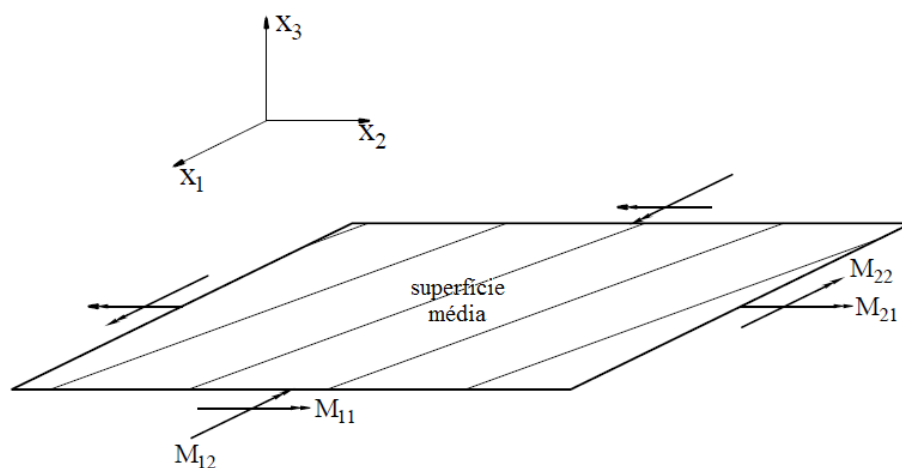
Para os momentos fletores e torsores, tem-se:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.4)$$

e, para os esforços cortantes:

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.5)$$

Na Figura 2.2, estão ilustrados os sentidos positivos destes esforços.



(a)

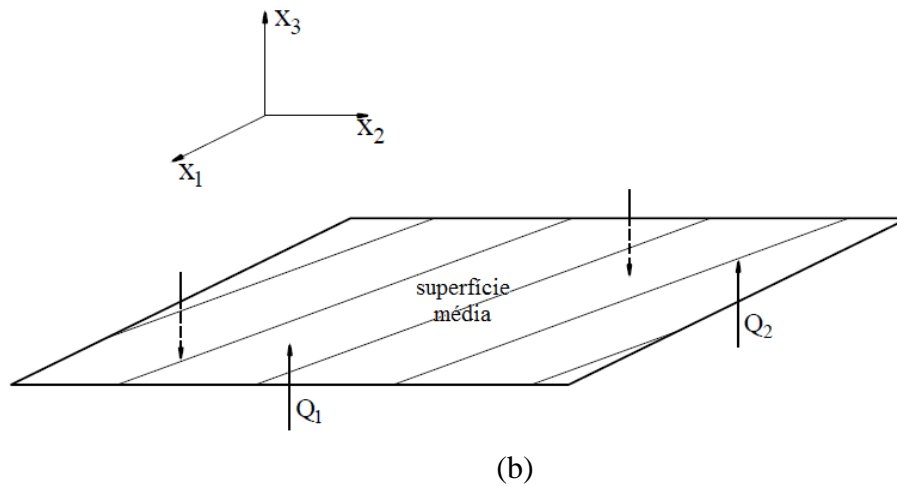


Figura 2.2 – Esforços resultantes: (a) momentos fletores e torsões; (b) esforços cortantes.

2.2.3 – Equações de equilíbrio

A partir da teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos, após fazer o equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa, como mostrado na Figura 2.3, chegam-se às equações de equilíbrio do problema.

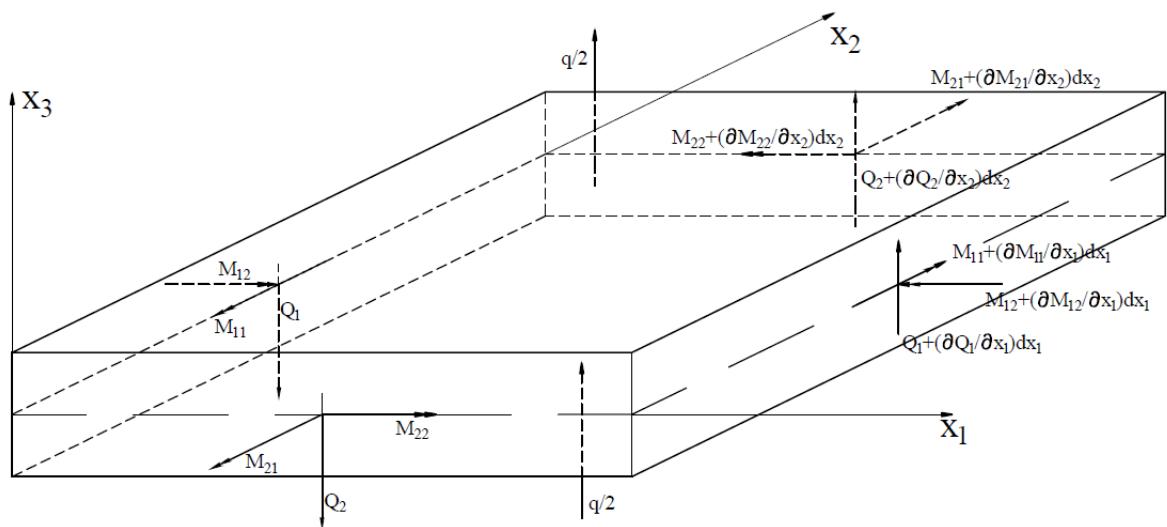


Figura 2.3 – Elemento de placa em equilíbrio.

Pelo equilíbrio de forças na direção x_3 :

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0 \quad (2.6)$$

e pelo equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_α :

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.7)$$

2.2.4 – Deslocamentos generalizados

Os deslocamentos generalizados para pontos da superfície média são calculados a partir da média ponderada dos valores v_i de deslocamentos de translação dos pontos situados ao longo da espessura, nas direções dos eixos coordenados (Reissner, 1947). Têm-se, então, as expressões que seguem.

Para as rotações da normal à superfície média nos planos $x_\alpha - x_3$:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.8)$$

e, para o deslocamento transversal (flecha):

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} v_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.9)$$

2.2.5 – Deformações específicas generalizadas

Pela teoria linear, as expressões das deformações específicas em função dos deslocamentos generalizados da placa são as apresentadas a seguir.

As deformações específicas de flexão são dadas por:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (2.10)$$

e as deformações específicas cisalhantes transversais são expressas por:

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha} \quad (2.11)$$

É importante observar que, na teoria clássica de Kirchhoff, as deformações cisalhantes transversais são consideradas desprezíveis, o que acarreta $\psi_\alpha = 0$ na equação (2.11). Assim, por esta equação, as rotações ϕ_α são obtidas diretamente de derivadas da flecha, ou seja, tem-

se $\phi_\alpha = -w_{,\alpha}$, o que não acontece na teoria refinada de Reissner, já que as deformações cisalhantes transversais não são desprezadas, sendo estas consideradas constantes ao longo da espessura. Assim, tem-se:

$$\phi_\alpha = \psi_\alpha - w_{,\alpha} \quad (2.12)$$

Os sentidos positivos considerados para as rotações ϕ_α na teoria de Reissner são indicados na Figura 2.4.

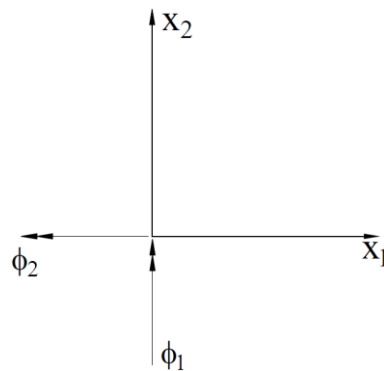


Figura 2.4 – Sentidos positivos considerados para as rotações.

2.2.6 – Esforços em função dos deslocamentos generalizados

As expressões dos momentos e esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados, dados em (2.8) e (2.9), são obtidas usando-se a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos juntamente com princípios variacionais. Assim, têm-se as expressões apresentadas a seguir.

Para os momentos, tem-se:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

Para os esforços cortantes, tem-se:

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\phi_\alpha + w_{,\alpha}) \quad (2.14)$$

em que:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ é a rigidez à flexão da placa;} \quad (2.15)$$

ν é o coeficiente de Poisson;

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

$\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker, correspondente a $\begin{cases} 1, \text{ se } \alpha = \beta \\ 0, \text{ se } \alpha \neq \beta \end{cases}$;

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} \text{ é a constante característica das equações de Reissner.} \quad (2.16)$$

2.2.7 – Sistema de equações de Reissner

Considerando-se, conjuntamente, as três equações de equilíbrio dadas em (2.6) e (2.7) e as cinco equações independentes dos esforços em função dos deslocamentos generalizados (2.13) e (2.14), monta-se um sistema com oito equações, que satisfazem a três condições de contorno por bordo. Entretanto, ao substituírem-se essas últimas nas primeiras, as oito equações são condensadas, dando origem a um sistema com três equações diferenciais, conforme segue:

$$Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{,\alpha} = -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\nabla^2 w) \quad (2.17)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q = q \quad (2.18)$$

em que:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \text{ é o operador de Laplace;} \quad (2.19)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2 \text{ é o operador bi-harmônico.} \quad (2.20)$$

2.2.8 – Condições de contorno

Na teoria de Reissner, devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo, podendo-se prescrever, em cada uma das três direções generalizadas, o deslocamento ou a força de superfície correspondente.

Admitindo, para a placa, o contorno total Γ dividido em dois sub-contornos, Γ_u e Γ_p , sendo $\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$, com Γ_u representando a parte do contorno em que os deslocamentos generalizados ϕ_α e w são prescritos e Γ_p representando a parte do contorno em que as forças de superfície generalizadas p_α e p_3 são prescritas, tem-se o que se segue.

Em Γ_u :

$$\phi_\alpha = \bar{\phi}_\alpha \quad (2.21)$$

$$w = \bar{w} \quad (2.22)$$

e, em Γ_p :

$$p_\alpha = \bar{p}_\alpha \quad (2.23)$$

$$p_3 = \bar{p}_3 \quad (2.24)$$

em que a barra acima das variáveis representa valor prescrito.

Além disso, sendo n_β os co-senos diretores da normal exterior ao contorno, podem-se escrever:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (2.25)$$

$$p_3 = Q_\beta n_\beta \quad (2.26)$$

e, ainda:

$$\bar{p}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \quad (2.27)$$

$$\bar{p}_3 = \bar{Q}_\beta n_\beta \quad (2.28)$$

CAPÍTULO 3

O MEC APLICADO À TEORIA DE REISSNER PARA ANÁLISE ELÁSTICA

Neste capítulo, em que o MEC é aplicado à teoria de flexão de placas elásticas de Reissner, apresentam-se as principais equações integrais envolvidas, como as equações de deslocamentos para pontos do domínio e do contorno, inclusive a transformação das integrais das forças de domínio em integrais de contorno, além das equações dos esforços em pontos internos e as soluções fundamentais.

3.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No contexto das teorias de flexão de placas e dos métodos numéricos, a análise utilizando o MEC foi feita inicialmente a partir da teoria clássica de Kirchhoff, como no trabalho desenvolvido por Jaswon *et al.* (1967) e, posteriormente, foram desenvolvidas formulações para o MEC com a teoria de Reissner, como nos trabalhos de Van der Weeën (1982a; 1982b), Karam (1986) e Karam e Telles (1988).

Para o caso de análise de placas pelo MEC, podem ser discretizadas apenas as linhas de contorno que circundam a superfície média e, se necessário, partes do domínio da placa.

Para a aplicação do MEC, é necessária, inicialmente, a obtenção de equações integrais, o que pode ser feito através do Teorema da Reciprocidade de Betti ou a partir do Método dos Resíduos Ponderados, utilizando a solução fundamental como função ponderadora. A solução fundamental, que está presente nas equações integrais, é uma solução conhecida da equação diferencial. Quando as equações integrais envolvem integrais de domínio, estas integrais podem ser transformadas em integrais de contorno através do teorema da divergência para funções conhecidas ou podem ser usadas células internas nas regiões onde isso for necessário, além de se poder utilizar outras técnicas.

Apresentam-se, na sequência, as principais equações integrais empregadas utilizando o MEC com a teoria de Reissner.

3.2 – APLICAÇÃO DO MÉTODO À TEORIA DE REISSNER

3.2.1 – Equação integral básica

Seja uma placa com espessura constante h , definida por um domínio Ω representado pela superfície média da mesma e um contorno Γ representado pela linha que a circunda, em estado de equilíbrio e sujeita a um carregamento transversal q atuando em Ω .

Por conveniência, os deslocamentos generalizados ϕ_α e w são representados, respectivamente, por u_α e u_3 , ou ainda, genericamente, como u_k .

Sejam, ainda, as condições de contorno para as três direções generalizadas da placa, em que $\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$, reescritas agora como:

$$u_k = \bar{u}_k \text{ em } \Gamma_u \quad (3.1)$$

$$p_k = \bar{p}_k \text{ em } \Gamma_p \quad (3.2)$$

Define-se uma placa infinita com domínio Ω^* e contorno Γ^* , também em equilíbrio, e contendo a referida placa com domínio Ω e contorno Γ (Figura 3.1).

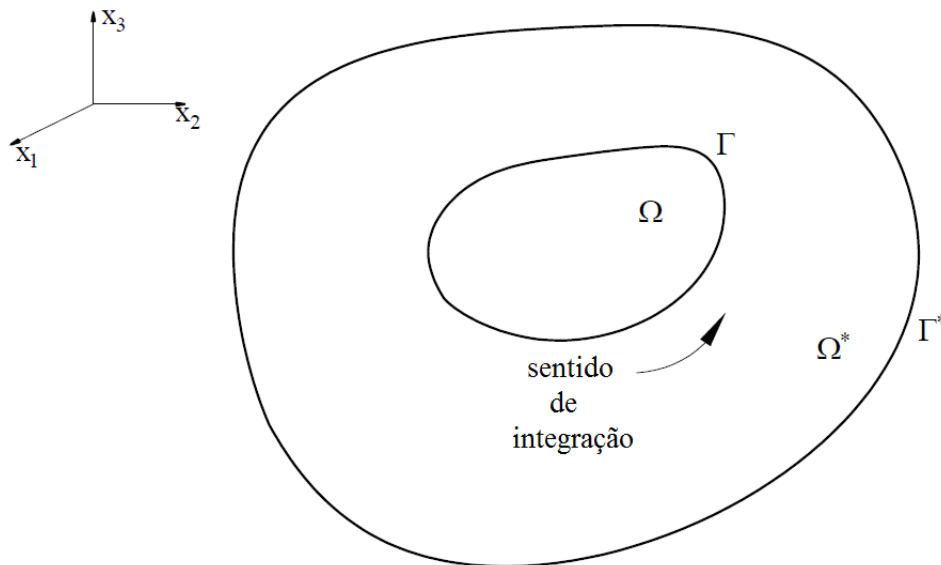


Figura 3.1 – Região $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém a placa $\Omega + \Gamma$.

Para as equações apresentadas no capítulo anterior, têm-se:

- Deslocamentos: u_k
- Forças de superfície: p_k

sendo:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (3.3)$$

$$p_3 = Q_\beta n_\beta \quad (3.4)$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (3.5)$$

$$\psi_\alpha = u_\alpha + u_{3,\alpha} \quad (3.6)$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.7)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha + u_{3,\alpha}) \quad (3.8)$$

- Equações de equilíbrio:

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0 \quad (3.9)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (3.10)$$

As equações anteriores podem se estender também para a região $\Omega^* + \Gamma^*$, o que conduz a:

- Deslocamentos: u_k^*
- Forças de superfície: p_k^*

sendo:

$$p_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^* n_\beta \quad (3.11)$$

$$p_3^* = Q_\alpha^* n_\alpha \quad (3.12)$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*) \quad (3.13)$$

$$\psi_\alpha^* = u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \quad (3.14)$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.15)$$

$$Q_\alpha^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*) \quad (3.16)$$

- Equações de equilíbrio:

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0 \quad (3.17)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* = 0 \quad (3.18)$$

em que F_k^* são as componentes de forças de domínio, que atuam na superfície média, definidas a fim de se obter a solução fundamental, e sua distribuição ao longo da espessura é representada por f_k^* . As forças F_k^* são consideradas como cargas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região Ω^* , o qual será chamado de ponto carga ou fonte e representado por ξ .

As componentes f_k^* são expressas como:

$$f_\alpha^* = \frac{12x_3}{h^3} F_\alpha^* \quad (3.19)$$

$$f_3^* = \frac{3F_3^*}{2h} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

A equação integral para os deslocamentos generalizados em um ponto fonte ξ pode ser obtida a partir do Segundo Teorema de Betti (Teorema da Reciprocidade), ou, ainda, a partir do Método dos Resíduos Ponderados, considerando as expressões das forças de superfície e deformações específicas, as equações dos esforços, as condições de contorno e as equações de equilíbrio mostradas anteriormente, e usando integrações por partes e o teorema da divergência, o que permite a obtenção da equação seguinte, aplicável a cada uma das três direções generalizadas e válida para um ponto ξ do interior de Ω :

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = & \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_\Omega \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que:

x é o ponto campo, isto é, o ponto onde são observados os efeitos das cargas unitárias aplicadas;

$u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ são os deslocamentos e forças de superfícies generalizados, respectivamente, na direção j do ponto x , correspondentes a uma carga generalizada concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ .

A equação (3.21) fornece os deslocamentos de um ponto pertencente ao domínio da placa analisada em função dos deslocamentos e forças de superfície dos pontos do contorno. Como são três direções generalizadas em cada ponto considerado, sendo duas rotações e uma translação, têm-se três equações para cada ponto.

3.2.2 – Solução fundamental

Para a resolução do problema pelo MEC, é necessária a consideração de uma solução fundamental.

A solução fundamental será considerada como a solução no ponto campo x , das equações diferenciais de equilíbrio, quando se considera que as forças de domínio são forças concentradas generalizadas unitárias atuando no ponto fonte ξ de uma placa infinita, de domínio Ω^* e contorno Γ^* e que contém a placa de domínio Ω e contorno Γ .

O sistema de equações diferenciais dado em (2.17) e (2.18) pode ser escrito em função dos deslocamentos generalizados u_i como:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_j + b_i = 0 \quad (3.22)$$

sendo Δ_{ij}^* as componentes do operador de Navier, dadas por:

$$\Delta_{\alpha\beta}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[(\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right] \quad (3.23)$$

$$\Delta_{\alpha 3}^* = -\Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (3.24)$$

$$\Delta_{33}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla^2 \quad (3.25)$$

em que ∇^2 é o operador de Laplace, dado em (2.19); as derivadas que aparecem nas expressões são em relação às coordenadas do ponto fonte ξ e b_i representa as componentes das forças de domínio que, neste caso, são:

$$b_{\alpha} = \frac{\nu q_{,\alpha}}{\lambda^2(1-\nu)} \quad (3.26)$$

$$b_3 = q \quad (3.27)$$

A expressão (3.22) pode ser reescrita como:

$$\Delta_{ij}^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_{kj}^* + b_{ki}^* = 0 \quad (3.28)$$

em que k é a direção da carga concentrada unitária aplicada em ξ ; o campo de deslocamentos u_{kj}^* é a solução fundamental e b_{ki}^* expressa-se como:

$$b_{ki}^* = \delta(x - \xi) \delta_{ki} \quad (3.29)$$

sendo $\delta(x - \xi)$ a função generalizada delta de Dirac com singularidade no ponto ξ .

Os tensores u_{ij}^* , referentes à solução fundamental, podem ser obtidos pelo método de Hörmander (Van der Weeën, 1982b), tendo como expressões:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2\ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\} \quad (3.30)$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) r r_{,\alpha} \quad (3.31)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(\ln z - 1) - 8\ln z] \quad (3.32)$$

sendo:

$$r = \sqrt{r_{\alpha} r_{\alpha}}, \text{ a distância entre o ponto fonte e o ponto campo;} \quad (3.33)$$

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(x) - x_{\alpha}(\xi); \quad (3.34)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)}; \quad (3.35)$$

$$z = \lambda r. \quad (3.36)$$

As derivadas de u_{ij}^* que aparecem na equação (3.21) e em outras a seguir são obtidas derivando-se as equações (3.30) a (3.32) em relação às coordenadas do ponto x .

Nas expressões anteriores, $A = A(z)$ e $B = B(z)$ dependem das funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$, sendo expressas por:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (3.37)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (3.38)$$

As funções $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas através de expansões polinomiais e são mostradas no APÊNDICE A.

As forças de superfície p_{ij}^* são obtidas substituindo-se as expressões (3.30) a (3.32) nas equações (3.15) e (3.16) e, em seguida, substituindo as expressões resultantes em (3.11) e (3.12), chegando-se em:

$$p_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,n} + r_{,\beta} n_\alpha) + (4A + 1 + \nu)r_{,\alpha} n_\beta - \right. \\ \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} \right] \quad (3.39)$$

$$p_{\alpha 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B n_\alpha - A r_{,\alpha} r_{,n}] \quad (3.40)$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_\alpha + 2 r_{,\alpha} r_{,n} \right] \quad (3.41)$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n} \quad (3.42)$$

em que $r_{,n}$ é a derivada de r em relação à normal no ponto x , sendo definida por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_\alpha \quad (3.43)$$

Os tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* apresentados anteriormente possuem singularidades para $r = 0$, ou seja, quando os pontos ξ e x forem coincidentes. Tal fato ocorre quando o ponto fonte é levado para o contorno.

Considerando as expansões de $K_0(z)$ e $K_1(z)$ para pequenos argumentos, observa-se que a função $A(z)$ é contínua, pois as parcelas que possuem singularidade de ordem r^{-2} se cancelam, o mesmo acontecendo para as parcelas com singularidade logarítmica. Já no caso de $B(z)$, apesar da singularidade de ordem r^{-2} se cancelar, a singularidade de ordem logarítmica permanece.

Levando em conta o exposto acima e observando-se as expressões (3.30) a (3.32) e (3.39) a (3.42), verifica-se que os tensores u_{ij}^* possuem singularidade de ordem $\ln r$ e os tensores p_{ij}^* possuem singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} .

3.2.3 – Equação integral para pontos do contorno

Para escrever a equação (3.21) para um ponto do contorno, pode-se levar o ponto ξ para o contorno e envolvê-lo com um semicírculo de raio ε centrado em ξ , gerando um contorno adicional $\bar{\Gamma}_\varepsilon$, conforme apresentado na Figura 3.2.

Com isso, a equação integral para os deslocamentos no ponto ξ fica:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

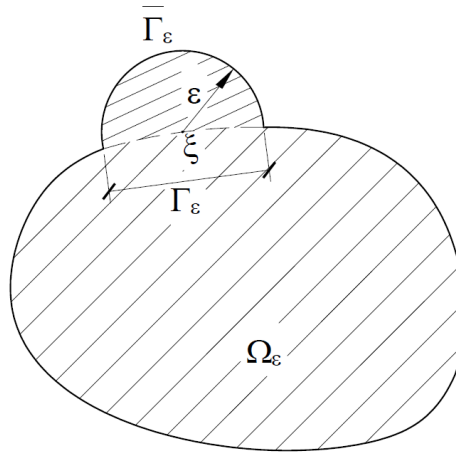


Figura 3.2 – Placa com ponto fonte no contorno.

Após estudados os limites de cada integral da equação (3.44) quando ε tende a zero, considerando as singularidades que aparecem nas expressões dos deslocamentos e forças de superfície generalizados, chega-se à expressão:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

na qual a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, por conta da singularidade r^{-1} de p_{ij}^* , e o coeficiente $c_{ij}(\xi)$ depende da geometria do contorno no ponto ξ .

A equação (3.45) pode ser considerada para um ponto ξ qualquer, admitindo que (Van der Weeën, 1982a e 1982b):

- $c_{ij} = \delta_{ij}$ quando ξ é ponto interno;
- $c_{ij} = \delta_{ij} / 2$ quando ξ é ponto de contorno suave (com normal contínua).

3.2.4 – Transformação da integral de forças de domínio em integral de contorno

A integral de domínio que aparece na equação (3.45) está relacionada à contribuição dada pelo carregamento transversal $q(x)$. Entretanto, esta integral também pode ser transformada em integral de contorno para diversos tipos de carregamento. Admitindo

carregamento uniformemente distribuído e aplicando o teorema da divergência, encontra-se a expressão que se segue, para $q(x) = q = \text{constante}$.

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) \quad (3.46)$$

As expressões dos tensores $u_{i\alpha}^*$ são obtidas de (3.30) a (3.32).

Os tensores $v_{i,\alpha}^*$ são dados pelas equações:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[\delta_{\alpha\beta} (4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.47)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left[32(2 \ln z - 1) - z^2(1-\nu)(4 \ln z - 5) \right] \quad (3.48)$$

Deve-se ressaltar que a normal aponta para fora da região analisada e o sentido de integração está indicado na Figura 3.3.

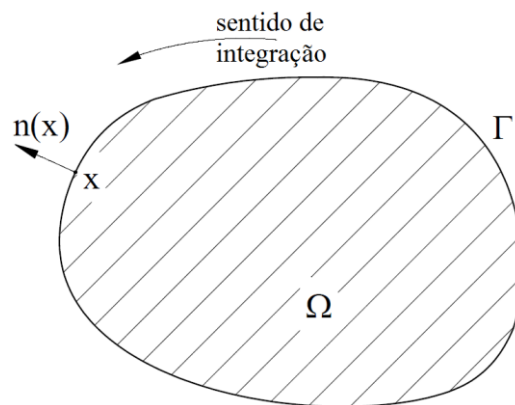


Figura 3.3 – Definição da normal e sentido de integração.

3.2.5 – Deslocamentos nos pontos internos

Os deslocamentos nos pontos internos são calculados através da expressão (3.46), fazendo $c_{ij} = \delta_{ij}$. Assim, tem-se:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} \left[v_{i\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) \quad (3.49)$$

3.2.6 – Esforços nos pontos internos

Os momentos e esforços cortantes nos pontos internos são obtidos substituindo-se a expressão (3.49) e suas derivadas em relação às coordenadas do ponto ξ nas expressões (2.13) e (2.14), o que fornece as seguintes expressões:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \quad (3.50)$$

$$Q_{\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (3.51)$$

A determinação dos tensores $u_{i\beta k}^*$, $p_{i\beta k}^*$ e $w_{i\beta}^*$ é feita considerando-se que estes são os termos que multiplicam as forças de superfície $p_k(x)$, os deslocamentos $u_k(x)$ e a carga distribuída q , respectivamente, quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços. As expressões dos tensores assumem, então, as formas mostradas a seguir.

Para os tensores $u_{i\beta k}^*$, têm-se:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - \right. \\ \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right] \quad (3.52)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.53)$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B \delta_{\gamma\beta} - A r_{,\gamma} r_{,\beta}] \quad (3.54)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (3.55)$$

Para os tensores $p_{i\beta k}^*$, têm-se:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\alpha} n_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} n_{,\alpha}) + \\ + (4A + 1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} n_{,\gamma} - (16A + 6zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) \cdot \\ \cdot [(n_{,\alpha} r_{,\beta} + n_{,\beta} r_{,\alpha}) r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha}) r_{,n}] - \\ - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu) (\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,n} + n_{,\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\ + 4(24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,n} \} \quad (3.56)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1) (r_{,\beta} n_{,\alpha} + r_{,\alpha} n_{,\beta}) - \\ - 2(4A + zK_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,n} + 2A \delta_{\alpha\beta} r_{,n}] \quad (3.57)$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta} r_{,n} + r_{,\gamma} n_{\beta}) + 2An_{\gamma} r_{,\beta} - 2(4A + zK_1)r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,n}] \quad (3.58)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2B + 1)n_{\beta} - (z^2A + 2)r_{,\beta} r_{,n}] \quad (3.59)$$

Para os tensores $w_{i\beta}^*$, têm-se:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \{ (4\ln z - 3)[(1-\nu)(r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,\alpha} n_{\beta}) + (1+3\nu)\delta_{\alpha\beta} r_{,n}] + 4[(1-\nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}]r_{,n} \} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.60)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2\ln z - 1)n_{\beta} + 2r_{,\beta} r_{,n}] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.61)$$

CAPÍTULO 4

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER

Neste capítulo, a formulação anteriormente desenvolvida para análise elástica de flexão de placas é estendida para o caso da análise elastoplástica. Para isto, apresentam-se, inicialmente, alguns conceitos da teoria matemática clássica da plasticidade, os quais governam o comportamento elastoplástico dos materiais. Depois, abordam-se algumas considerações sobre escoamento para uma formulação geral, onde são apresentados os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca, além de uma breve explicação sobre as regras de endurecimento. Em seguida, é apresentada uma formulação básica para análise de flexão de placas elastoplásticas de Reissner, a partir do procedimento de deformação inicial. As equações que regem o escoamento são, então, reescritas para o caso particular de placas. O capítulo é finalizado com a apresentação das relações elastoplásticas para placas, utilizando os critérios de von Mises e de Tresca, abordados na presente pesquisa.

4.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Grande parte dos projetos de estruturas admite que as solicitações impostas conduzem a um comportamento elástico dos materiais que a compõem. Entretanto, em vários casos, é necessário avaliar o comportamento elastoplástico das estruturas, caracterizado pelo aparecimento de deformações plásticas, o que pode ser feito através da teoria matemática da plasticidade. Esta teoria considera, de modo geral, que as deformações plásticas são independentes do tempo de atuação do carregamento, isto é, elas ocorrem instantaneamente após a aplicação do carregamento.

As deformações plásticas são irreversíveis e permanecem mesmo quando se anula a solicitação a que o corpo estava sujeito, se esta última tiver provocado tensões que excederam o limite elástico do material.

O início do regime plástico se dá quando a tensão aplicada atinge o valor da tensão de escoamento σ_o . O modo como se estabelece esse valor de tensão aplicada, de forma a compará-lo com a tensão de escoamento, denomina-se critério de escoamento.

A configuração deformada depende do nível de tensão e da história do carregamento. No regime plástico, as tensões crescem muito menos com as deformações do que no regime

elástico e, geralmente, há uma redução na rigidez do material. Além disso, o descarregamento não se dá pelo caminho do carregamento, mas por um percurso paralelo ao do regime elástico, resultando, então, para o nível nulo de tensão, na deformação plástica residual (irreversível) ε_p , conforme pode ser visto na Figura 4.1, que apresenta uma curva tensão-deformação de um ensaio uniaxial para um material com características plásticas.

Atingida a tensão de escoamento, este valor pode ou não manter-se constante com o aumento da deformação plástica. Se esse valor não apresentar variação com o aumento da deformação plástica, diz-se que o material tem um comportamento perfeitamente plástico; caso contrário, se esse valor aumentar com o crescimento da deformação plástica, diz-se que o material está sofrendo um encruamento (endurecimento por deformação) e, se houver diminuição desse valor com o crescimento da deformação plástica, diz-se que o material está sofrendo um amolecimento.

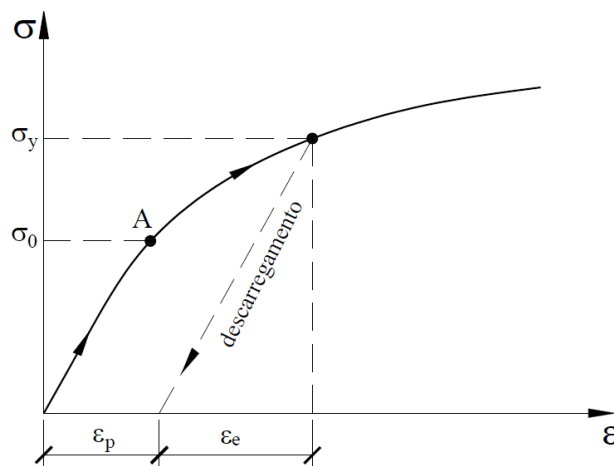


Figura 4.1 – Curva tensão-deformação para ensaio uniaxial.

Um fenômeno que ocorre no regime plástico, característico, geralmente, para os metais, é o chamado efeito de Bauschinger, associado à dependência da tensão de escoamento com o sentido do carregamento. Ocorre uma perda de simetria da curva tensão-deformação, após o escoamento, quando há inversão na solitação. As deformações permanentes modificam as características iniciais do material, alterando a sua condição de isotropia. Entretanto, este efeito não será considerado neste trabalho.

A teoria da plasticidade é adequada para materiais dúcteis, como o aço, mas é também usada para materiais frágeis, como é o caso do concreto, de maneira aproximada. Para materiais frágeis, a ruptura, que é devida à abertura de fissuras, ocorre sem plastificação significativa, pois estes materiais têm pequena capacidade de deformação, ao contrário dos materiais dúcteis.

Numa formulação elastoplástica envolvendo pequenas deformações, é habitual decompor o tensor de deformações em componentes elástica e plástica, e estabelecer modelos que descrevem esses fenômenos individualmente.

Para a definição de um modelo que descreva o comportamento elastoplástico, podem ser consideradas relações explícitas entre tensão e deformação tanto para a fase elástica do material, obtidas pela teoria da elasticidade, como para a fase após o escoamento, que permitam o cálculo da componente de deformação plástica. Deve-se levar em consideração, também, o critério de escoamento, que indica o nível de tensão a partir do qual aparecem as deformações plásticas, assim como a regra de endurecimento, que descreve como o escoamento é alterado de acordo com o grau de deformação plástica.

Em se tratando de casos unidimensionais, o modelo que define o comportamento elastoplástico é facilmente obtido, apenas em função da curva tensão-deformação, obtida a partir do ensaio uniaxial de corpos de prova. É muito comum a utilização de curvas simplificadas. Na Figura 4.2, tem-se a curva bilinear, com endurecimento do material após o escoamento.

Por essa figura, pode-se observar que, para tensões inferiores à tensão de escoamento inicial σ_o , equivalente ao ponto A da curva, o comportamento é elástico, sendo válida a Lei de Hooke, com a constante de proporcionalidade igual ao módulo de elasticidade longitudinal E do material. A partir do escoamento, um incremento da tensão normal provoca um incremento de deformação, segundo o módulo tangente constante E_T .

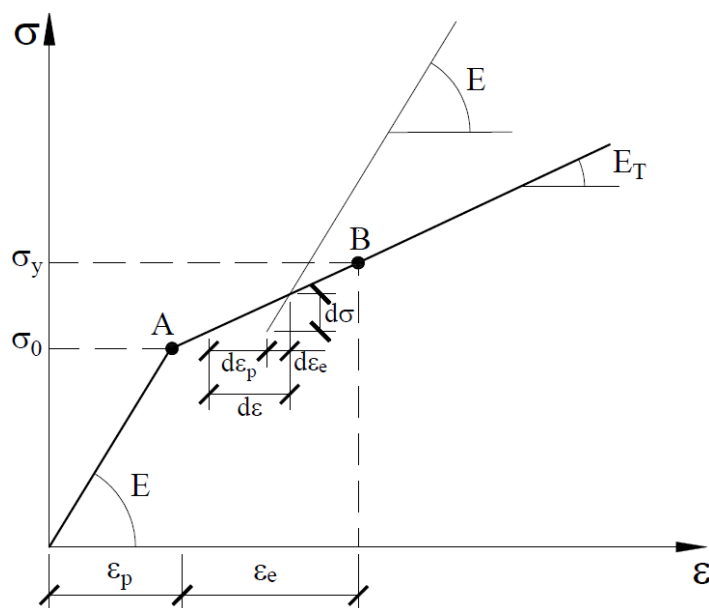


Figura 4.2 – Curva bilinear.

O modelo elastoplástico perfeito constitui a idealização mais simples, para a qual não se considera o endurecimento do material ($E_T = 0$). Neste modelo, admite-se a mesma resposta do material à tração e à compressão.

4.2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE ESCOAMENTO

A formulação de uma teoria que modela o comportamento elastoplástico do material exige que sejam especificadas as relações constitutivas pré e pós-escoamento. A primeira para a descrição do comportamento elástico e a última para o cálculo da deformação plástica. Exige-se, ainda, um critério de escoamento que indique o fim do comportamento elástico e o nível de tensão no qual se dá início o fluxo plástico.

Os critérios de escoamento podem ser representados em forma de funções, de maneira geral, considerando:

$$F(\sigma, \kappa') = 0 \quad (4.1)$$

em que:

σ é o tensor de tensões;

κ' indica um conjunto de variáveis de endurecimento.

Essas funções podem tomar várias formas analíticas, com representações geométricas espaciais distintas, originando as superfícies de escoamento, que separam os estados de tensão elásticos daqueles que produzem deformações plásticas.

No caso de materiais isotrópicos, em que o escoamento depende unicamente da grandeza das tensões principais, e não das suas orientações no espaço das tensões, a função escalar F torna-se apenas dependente de um valor escalar, que é o parâmetro de dureza κ .

Tem-se, então:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = f(\sigma_{ij}) - \Psi(\kappa) = 0 \quad (4.2)$$

em que $f(\sigma_{ij})$ é função do estado de tensões atual σ_{ij} , podendo ser interpretada como uma tensão equivalente uniaxial σ_e . A função $\Psi(\kappa)$, que depende do parâmetro κ associado à

regra de endurecimento do material, pode ser entendida como um valor convencional da tensão de escoamento, obtida a partir de ensaios uniaxiais.

4.2.1 – Os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca

Como os mecanismos de ruptura são diferentes de um material para outro, não existe um critério de escoamento universal. Dentre os principais critérios, destacam-se o critério da tensão normal máxima (teoria de Rankine), o critério da energia de distorção máxima (teoria de von Mises), o critério da tensão cisalhante máxima (teoria de Tresca), o critério de Mohr-Coulomb, o critério de Beltrami, o critério de Green e o critério de Drucker-Prager.

O critério de von Mises admite que o material começa a se deformar plasticamente quando o segundo invariante de tensões J_2 atinge um valor crítico. Uma das interpretações deste critério é a de que as tensões que realmente causam escoamento são aquelas que produzem distorção. É definido, no espaço, por um cilindro, cuja projeção no plano $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ resulta num círculo, sendo σ_1 , σ_2 e σ_3 as tensões principais.

Por este critério, a tensão equivalente (ou efetiva) σ_e é calculada através de:

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2'} \quad (4.3)$$

sendo J_2' o segundo invariante das tensões desviadoras.

O critério de Tresca admite, por hipótese, que a deformação plástica em um ponto material ocorre sempre que a tensão cisalhante máxima atinge um determinado valor limite, que pode ser determinado a partir de ensaios de tração ou compressão simples. É definido, no espaço, por um prisma hexagonal, cuja projeção no plano π resulta num hexágono regular.

Por este critério, a tensão equivalente (ou efetiva) σ_e é calculada através de:

$$\sigma_e = 2 \cos \theta \sqrt{J_2'} \quad (4.4)$$

em que θ é similar ao parâmetro de Lode, dado por:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta = \frac{1}{3} \arcsen \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2' \sqrt{J_2'}} \right) \leq \frac{\pi}{6} \quad (4.5)$$

sendo J_2' e J_3' o segundo e o terceiro invariantes, respectivamente, das tensões desviadoras.

As expressões de J'_2 e J'_3 dependem das tensões desviadoras σ'_{ij} , conforme mostradas a seguir:

$$J'_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (4.6)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \quad (4.7)$$

com:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (4.8)$$

Na Figura 4.3, tem-se a representação das projeções dos critérios de von Mises e de Tresca, onde se pode observar que a projeção da superfície cilíndrica de von Mises circunscreve a projeção do prisma hexagonal de Tresca.

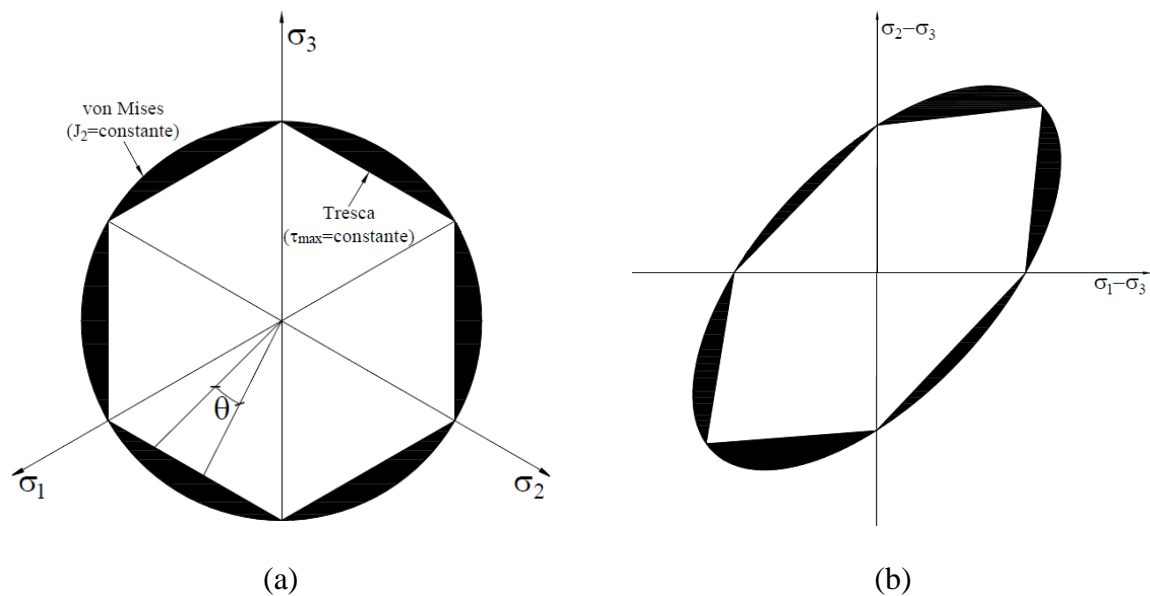


Figura 4.3 – Representação bidimensional dos critérios de von Mises e de Tresca: (a) projeção no plano π ; (b) representação convencional no plano $\sigma_3 = 0$.

Os dois critérios apresentam diferença máxima para o caso de corte puro ($\sigma_3 = -\sigma_1, \sigma_2 = 0$), resultando em tensões efetivas correspondentes a $\sigma_e = \sqrt{3}\sigma_1$ e $\sigma_e = 2\sigma_1$ para os critérios de von Mises e de Tresca, respectivamente. A relação entre as duas tensões é

suficiente para mostrar que as tensões efetivas calculadas por Tresca podem ser até 15% superiores às tensões calculadas pelo critério de von Mises. A partir disto e da Figura 4.3, pode-se dizer que o critério de Tresca é mais conservador, uma vez que prevê o escoamento com tensões geralmente inferiores às indicadas pelo critério de von Mises.

Os critérios de von Mises e de Tresca apresentam boa previsão do escoamento para o caso de materiais dúcteis, mas podem ser adaptados para outros materiais.

4.2.2 – Regra de endurecimento

Após o escoamento inicial, nos estados múltiplos de tensão, o nível de tensões a partir do qual as deformações plásticas adicionais voltam a ocorrer pode ser dependente da magnitude das deformações plásticas atuais, devido ao fenômeno do endurecimento.

A regra de endurecimento estabelece as condições para que um novo escoamento plástico possa ocorrer, depois de se ter atingido o estado plástico do material.

A superfície de escoamento varia a cada estágio de deformação plástica, com as superfícies subsequentes sendo dependentes, de alguma forma, das deformações plásticas ocorridas. Essa variação pode ser classificada de acordo com três modelos elementares: isotrópico, cinemático e distorcional.

O modelo isotrópico admite que a superfície de escoamento subsequente, provocada pelo incremento de deformação plástica, é exclusivamente uma expansão uniforme da superfície de escoamento precedente, o que corresponde à manutenção das características iniciais de isotropia do material. É adequado para situações de carregamento crescente.

O modelo cinemático é de tratamento mais complexo e está associado à translação da superfície no espaço de tensões como um corpo rígido, apesar de manter a dimensão e a forma. É adequado para carregamentos cíclicos, permitindo a simulação do efeito de Bauschinger.

O modelo de endurecimento distorcional admite a expansão, a translação, a rotação e, até mesmo, a mudança de forma da superfície de escoamento.

Para um material elastoplástico perfeito, a superfície de escoamento não depende da plastificação ocorrida anteriormente.

Na Figura 4.4, ilustram-se os dois primeiros modos de endurecimento citados anteriormente, que descrevem o tipo de endurecimento do material.

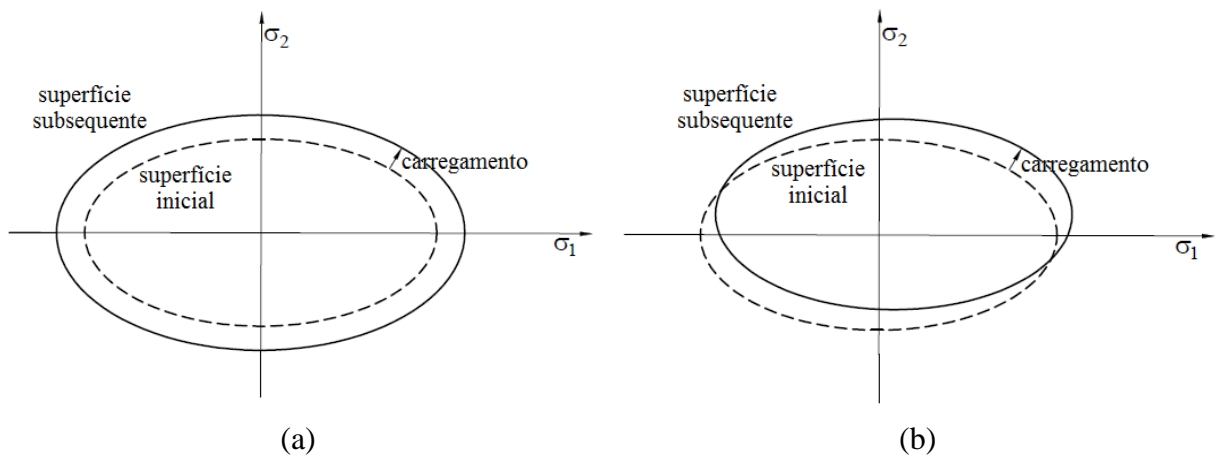


Figura 4.4 – Modelos de representação de comportamentos com endurecimento:

(a) isotrópico; (b) cinemático.

O desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento pode ser definido relacionando-se a tensão de escoamento Ψ à deformação plástica por meio do parâmetro de endurecimento κ .

Na teoria da plasticidade, os efeitos de endurecimento são frequentemente considerados através da aplicação do conceito de trabalho de endurecimento.

O modelo isotrópico, de maior simplicidade, produz resultados satisfatórios para problemas usuais de estruturas. Para este caso, a função $f(\sigma_{ij})$ não se altera e o desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento é definido a partir da variação da função de escoamento do material, $\Psi(\kappa)$, que pode ser relacionada à deformação plástica, através do parâmetro κ .

Existem duas hipóteses quanto à definição do parâmetro de endurecimento κ : *work hardening* e *strain hardening*.

A hipótese *work hardening* define κ como função do trabalho plástico W_p acumulado durante as deformações, ou seja:

$$\kappa = W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.9)$$

A hipótese *strain hardening* define κ como função da deformação plástica equivalente ε_e^p , dada por:

$$\kappa = \varepsilon_e^p = \int d\varepsilon_e^p = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \quad (4.10)$$

sendo $d\varepsilon_{ij}^p$ a parcela plástica das deformações ocorridas durante um incremento de deformação.

Segundo Nayak e Zienkiewicz (1972), para o caso dos materiais em que seja possível aplicar o critério de von Mises, os modelos de endurecimento isotrópico e cinemático são equivalentes, ou seja, as curvas obtidas no ensaio de tração conduzem ao mesmo nível de endurecimento.

Em alguns trabalhos, como em Hill (1950) e Mendelson (1968), a teoria da plasticidade é apresentada com maiores detalhes.

4.3 – FÓRMULAS BÁSICAS DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS ELASTOPLÁSTICAS

A partir desta seção, a formulação para análise elástica de flexão de placas de Reissner apresentada no capítulo 2 é estendida para o caso da análise de flexão no regime elastoplástico.

São utilizadas as mesmas convenções do referido capítulo, com relação ao sistema de eixos cartesianos.

Aqui, são apresentadas as fórmulas da teoria para uma formulação que considera um procedimento de deformação inicial, em que é introduzido um campo de deformações iniciais para viabilizar a análise com a não-linearidade e, no próximo capítulo, são deduzidas as equações integrais, assim como as expressões dos tensores que multiplicam as deformações plásticas.

Considera-se, portanto, uma placa de espessura h constante, sujeita a uma carga transversal q por unidade de área, sendo o material da mesma, isotrópico e homogêneo, porém, não-linear.

Como a placa sofre deformações plásticas apenas de flexão, a deformação total de flexão $\chi_{\alpha\beta}$ é dada por:

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}^e + \chi_{\alpha\beta}^p \quad (4.11)$$

e a deformação total cisalhante ψ_α fica expressa por:

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^e \quad (4.12)$$

em que $\chi_{\alpha\beta}^e$ e ψ_α^e representam as partes elásticas e $\chi_{\alpha\beta}^p$ é a parte plástica.

As equações de equilíbrio (2.6) e (2.7) são ainda válidas neste caso. Os momentos e esforços cortantes são expressos, respectivamente, como:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[2\chi_{\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^p \quad (4.13)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \psi_\alpha \quad (4.14)$$

sendo $\delta_{\alpha\beta}$, ν , λ e D conforme definidos no capítulo 2 e $M_{\alpha\beta}^p$ representa as componentes dos “momentos plásticos”, definidos por:

$$M_{\alpha\beta}^p = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[2\chi_{\alpha\beta}^p + \frac{2\nu}{1-\nu} \chi_{\gamma\gamma}^p \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (4.15)$$

Escrevendo, por conveniência da formulação de deformação inicial, as deformações por flexão elásticas em função dos momentos elásticos, obtém-se:

$$\chi_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{D(1-\nu)} \left[M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} M_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{\nu q}{D(1-\nu^2)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.16)$$

e as deformações por flexão plásticas em função dos momentos plásticos:

$$\chi_{\alpha\beta}^p = \frac{1}{D(1-\nu)} \left[M_{\alpha\beta}^p - \frac{\nu}{1+\nu} M_{\gamma\gamma}^p \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (4.17)$$

Usando (4.16) e (4.17), pode-se reescrever, ainda, a expressão das deformações totais de flexão dada em (4.11):

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{D(1-\nu)} \left[(M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^p) - \frac{\nu}{1+\nu} (M_{\gamma\gamma} + M_{\gamma\gamma}^p) \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{\nu q}{D(1-\nu^2)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.18)$$

As condições de contorno (3.1) e (3.2) são ainda válidas neste caso, bem como as equações (3.3) e (3.4), que definem as forças de superfície generalizadas.

4.4 – CONSIDERAÇÕES SOBRE ESCOAMENTO PARA PLACAS

Para o caso particular de placas, considerado neste trabalho, é admitida a existência de uma função de escoamento F , que é expressa em termos dos momentos M_{ij} e do parâmetro de dureza κ . Durante o carregamento que produz escoamento, os momentos M_{ij} devem permanecer sobre a superfície de escoamento, de modo que a seguinte equação seja satisfeita:

$$F(M_{ij}, \kappa) = f(M_{ij}) - \Psi(\kappa) = M_e - M_o = 0 \quad (4.19)$$

em que M_e é o momento equivalente (ou efetivo), calculado aqui segundo os critérios de von Mises e de Tresca e M_o é o momento de escoamento unidirecional.

A Figura 4.5 ilustra uma evolução gradual da plastificação da seção transversal de placa de acordo com o valor da tensão atuante, em relação à tensão de escoamento uniaxial do material σ_o .

Admite-se, por hipótese simplificadora que, sempre que o momento equivalente, em qualquer ponto, atinge o momento de escoamento, toda a seção transversal se plastifica simultaneamente, conforme ilustrado na Figura 4.5(d).

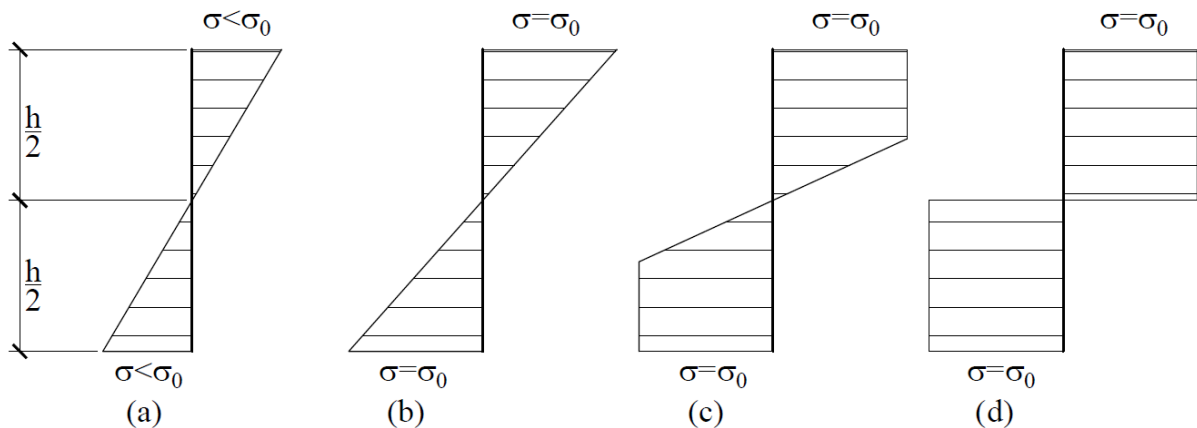


Figura 4.5 – Plastificação da seção transversal de placa.

O momento M_o , calculado considerando-se a plastificação total da seção transversal, tem a seguinte expressão:

$$M_o = \frac{\sigma_o h^2}{4} \quad (4.20)$$

sendo σ_o a tensão de escoamento uniaxial do material.

O momento equivalente (ou efetivo) M_e , pelo critério de von Mises, é calculado através de:

$$M_e = \sqrt{3J'_2} \quad (4.21)$$

sendo J'_2 o segundo invariante das tensões desviadoras.

Já pelo critério de Tresca, o momento equivalente (ou efetivo) M_e , é calculado através de:

$$M_e = 2 \cos \theta \sqrt{J'_2} \quad (4.22)$$

em que θ é similar ao parâmetro de Lode dado em (4.5) e J'_2 e J'_3 são o segundo e o terceiro invariantes, respectivamente, das tensões desviadoras.

As expressões de J'_2 e J'_3 são escritas aqui em termos dos “momentos desviadores” M'_{ij} , conforme:

$$J'_2 = \frac{1}{2} M'_{ij} M'_{ij} \quad (4.23)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} M'_{ij} M'_{jk} M'_{ki} \quad (4.24)$$

com:

$$M'_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{kk} \quad (4.25)$$

As expressões para o cálculo do parâmetro de endurecimento κ podem ser reescritas, para o caso particular de placas, como segue.

Para a hipótese *work hardening*, tem-se:

$$\kappa = \int M_{ij} d\chi_{ij}^p \quad (4.26)$$

e, para a hipótese *strain hardening*, tem-se:

$$\kappa = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\chi_{ij}^p d\chi_{ij}^p \quad (4.27)$$

sendo $d\chi_{ij}^p$ a parcela plástica das deformações ocorridas durante um incremento de deformação.

4.5 – RELAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS PARA PLACAS DE REISSNER

A formulação aqui apresentada para análise de placas, considerando um procedimento de deformação inicial, é similar ao que foi empregado em Telles e Brebbia (1979; 1981) e em Telles (1983) para problemas bi e tridimensionais.

Uma vez que a plasticidade é um fenômeno dependente de todo o histórico de carga, torna-se necessário registrar os incrementos de deformação plástica ao longo de todo o processo e então obter as deformações acumuladas.

As equações de Prandtl-Reuss representam relações adequadas para a determinação dos incrementos de deformação plástica, sendo expressas, neste caso, por:

$$d\chi_{ij}^p = M'_{ij} d\gamma \quad (4.28)$$

sendo M'_{ij} os “momentos desviadores” e $d\gamma$ um fator de proporcionalidade, positivo, que pode variar em todo o histórico do carregamento, ao longo do processo de deformação plástica.

4.5.1 – Pelo critério de escoamento de von Mises

Define-se um incremento de deformação plástica equivalente, pelo critério de escoamento de von Mises, como:

$$d\chi_e^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\chi_{ij}^p d\chi_{ij}^p \quad (4.29)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (4.28), tem-se:

$$d\chi_{ij}^p d\chi_{ij}^p = M'_{ij} M'_{ij} d\gamma^2 \quad (4.30)$$

E, fazendo o mesmo com (4.29), obtém-se:

$$d\chi_{ij}^p d\chi_{ij}^p = \frac{3}{2} (d\chi_e^p)^2 \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.30) e usando (4.23):

$$\left(\frac{3}{2} d\chi_e^p \right)^2 = 3J_2' d\gamma^2 \quad (4.32)$$

Levando em conta a expressão do momento equivalente pelo critério de von Mises dada em (4.21), o fator de proporcionalidade $d\gamma$ pode ser expresso em termos das formas equivalentes M_e e $d\chi_e^p$, como segue:

$$d\gamma = \frac{3}{2} \frac{d\chi_e^p}{M_e} \quad (4.33)$$

Para o emprego do MEC com o procedimento de deformação inicial, os incrementos das deformações plásticas são calculados com as expressões mostradas anteriormente, admitindo que um caminho de carga é definido para alcançar um determinado estado de tensões e deformações plásticas acumuladas χ_{ij}^p .

Pequenos incrementos de carga produzem deformações plásticas adicionais $\Delta\chi_{ij}^p$. Desta forma, as deformações totais dadas em (4.11) ficam expressas por:

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^e + \chi_{ij}^p + \Delta\chi_{ij}^p \quad (4.34)$$

em que χ_{ij}^e já inclui o incremento de carga corrente.

Um tensor de deformação total modificado pode ser convenientemente definido na forma:

$$\hat{\chi}_{ij} = \chi_{ij} - \chi_{ij}^p \quad (4.35)$$

em que a expressão anterior é simplesmente:

$$\hat{\chi}_{ij} = \chi_{ij}^e + \Delta\chi_{ij}^p \quad (4.36)$$

Ou, ainda, usando (4.16), tem-se:

$$\hat{\chi}_{ij} = \frac{1}{D(1-\nu)} \left[M_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} M_{kk} \delta_{ij} \right] - \frac{\nu q}{D(1-\nu^2)\lambda^2} \delta_{ij} + \Delta\chi_{ij}^p \quad (4.37)$$

A expressão (4.37) também pode ser escrita na forma desviadora, desprezando a parcela hidrostática, ou seja, considerando $\Delta\chi_{kk}^p = 0$, como segue:

$$\chi'_{ij} = \frac{M'_{ij}}{D(1-\nu)} + \Delta\chi_{ij}^p \quad (4.38)$$

em que:

$$\chi'_{ij} = \hat{\chi}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \hat{\chi}_{kk} \quad (4.39)$$

Usando as equações de Prandtl-Reuss dadas em (4.28) na expressão (4.38):

$$\chi'_{ij} = \left(1 + \frac{1}{D(1-\nu)\Delta\gamma} \right) \Delta\chi_{ij}^p \quad (4.40)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (4.40) numa forma similar ao que foi feito nas expressões (4.30) a (4.33), a seguinte relação é obtida:

$$1 + \frac{1}{D(1-\nu)\Delta\gamma} = \frac{\chi_{et}}{\Delta\chi_e^p} \quad (4.41)$$

em que χ_{et} é a deformação equivalente ao tensor de deformação total modificado $\hat{\chi}_{ij}$ e se relaciona com sua forma desviadora χ'_{ij} , através de:

$$\chi_{et} = \sqrt{\frac{2}{3} \chi'_{ij} \chi'_{ij}} \quad (4.42)$$

Substituindo (4.41) em (4.40), chega-se a:

$$\Delta\chi_{ij}^p = \frac{\Delta\chi_e^p}{\chi_{et}} \chi'_{ij} \quad (4.43)$$

A partir da equação (4.43), vê-se que, a fim de determinar as magnitudes reais dos incrementos plásticos de deformação, um incremento de deformação plástica equivalente deve ser calculado. Portanto, substituindo o fator de proporcionalidade dado em (4.33) na expressão (4.41), obtém-se:

$$1 + \frac{2M_e}{3D(1-\nu)\Delta\chi_e^p} = \frac{\chi_{et}}{\Delta\chi_e^p} \quad (4.44)$$

o que resulta em:

$$\Delta\chi_e^p = \chi_{et} - \frac{2M_e}{3D(1-\nu)} \quad (4.45)$$

Já que a condição dada em (4.19) deve ser satisfeita em todo o processo plástico, M_e pode ser substituído por M_o na equação (4.45). Então:

$$\Delta\chi_e^p = \chi_{et} - \frac{2M_o}{3D(1-\nu)} \quad (4.46)$$

Note-se que M_o corresponde ao momento de escoamento uniaxial depois da aplicação do incremento de carga e, conseqüentemente, ainda é desconhecido. Este termo, porém, pode ser aproximado por uma série de Taylor truncada sobre o valor precedente de M_o (isto é, antes da aplicação do incremento), como se segue:

$${}^k M_o = {}^{k-1} M_o + {}^{k-1} H' \Delta \chi_e^p + \dots \quad (4.47)$$

sendo H' um parâmetro de endurecimento que, no caso de placas, é função da inclinação do diagrama momento-deformação por flexão (análogo ao caso uniaxial, apresentado na Figura 4.2) após a retirada da componente elástica. É calculado a partir da razão entre os incrementos das formas equivalentes de momento e de deformação plástica, considerando uma faixa de largura unitária de placa, através de:

$$H' = \frac{\Delta M_e}{\Delta \chi_e^p} = \frac{(EI)_T}{1 - \frac{(EI)_T}{EI}} \quad (4.48)$$

no qual E_T é o módulo tangente.

No caso do modelo elastoplástico perfeito, E_T e H' são nulos.

Substituindo (4.47) em (4.46) e resolvendo para o incremento de deformação plástica equivalente $\Delta \chi_e^p$, tem-se:

$$\Delta \chi_e^p = \frac{3D(1-\nu)\chi_{et} - 2M_o}{3D(1-\nu) + 2H'} \quad (4.49)$$

em que os valores de M_o e H' são calculados antes do incremento de carga.

4.5.2 – Pelo critério de escoamento de Tresca

A partir da definição do trabalho de deformação plástica encontra-se um incremento de deformação plástica equivalente, representativo do critério de escoamento de Tresca, dado como:

$$d\chi_e^p = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \theta} d\chi_{ij}^p d\chi_{ij}^p} \quad (4.50)$$

Usando um procedimento análogo ao que foi feito no item anterior para encontrar o fator de proporcionalidade $d\gamma$ expresso em termos das formas equivalentes M_e e $d\chi_e^p$ e, agora, levando em conta a expressão do momento equivalente pelo critério de Tresca dada em (4.22), obtém-se:

$$d\gamma = 2 \cos^2 \theta \frac{d\chi_e^p}{M_e} \quad (4.51)$$

Todas as relações apresentadas de (4.34) a (4.41) continuam válidas no critério de Tresca. Entretanto, χ_{et} agora se escreve como:

$$\chi_{et} = \sqrt{\frac{1}{2 \cos^2 \theta} \chi'_{ij} \chi'_{ij}} \quad (4.52)$$

A expressão de $\Delta\chi_{ij}^p$ dada em (4.43) também é utilizada por este critério.

Substituindo o novo fator de proporcionalidade dado em (4.51) na expressão (4.41), chega-se a:

$$1 + \frac{M_e}{2D(1-\nu)\cos^2 \theta \Delta\chi_e^p} = \frac{\chi_{et}}{\Delta\chi_e^p} \quad (4.53)$$

o que resulta em:

$$\Delta\chi_e^p = \chi_{et} - \frac{M_e}{2D(1-\nu)\cos^2 \theta} \quad (4.54)$$

Como a condição dada em (4.19) deve ser satisfeita em todo o processo plástico, M_e pode ser substituído por M_o na equação (4.54). Dessa forma, tem-se:

$$\Delta\chi_e^p = \chi_{et} - \frac{M_o}{2D(1-\nu)\cos^2 \theta} \quad (4.55)$$

Novamente, M_o corresponde ao momento de escoamento uniaxial depois da aplicação do incremento de carga e, portanto, ainda é desconhecido. Este termo pode ser aproximado por uma série de Taylor truncada sobre o valor de M_o antes da aplicação do incremento, conforme foi feito no critério de von Mises. Com isso, as expressões (4.47) e (4.48) também são utilizadas.

Substituindo a aproximação da série de Taylor dada em (4.47) em (4.55) e resolvendo para $\Delta\chi_e^p$, finalmente chega-se a:

$$\Delta\chi_e^p = \frac{2D(1-\nu)\cos^2\theta\chi_{et} - M_o}{2D(1-\nu)\cos^2\theta + H'} \quad (4.56)$$

em que os valores de M_o e H' são calculados antes do incremento de carga.

CAPÍTULO 5

O MEC APLICADO À ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA

Neste capítulo, apresenta-se a formulação para análise elasto-plástica de flexão de placas de Reissner tratada no capítulo anterior utilizando o MEC, incluindo a equação integral básica para pontos internos e pontos do contorno, obtida pelo Segundo Teorema de Betti e também pelo Método dos Resíduos Ponderados. Além disso, apresentam-se as componentes dos tensores que multiplicam as deformações plásticas nas expressões dos deslocamentos e faz-se a transformação das integrais das forças de domínio em integrais de contorno. Por fim, obtêm-se as equações integrais dos esforços nos pontos internos, com o termo livre na expressão dos esforços de flexão. A solução fundamental é a mesma empregada em trabalhos anteriores para análise de placas de Reissner pelo MEC (Van der Weeën, 1982a e 1982b; Karam e Telles, 1988).

5.1 – EQUAÇÕES INTEGRAIS BÁSICAS PARA PLACAS ELASTOPLÁSTICAS

5.1.1 – Dedução a partir do Segundo Teorema de Betti

Por este procedimento, submete-se a placa a dois carregamentos não simultâneos, o real e o fundamental, os quais dão origem a dois estados de tensão e deslocamento distintos.

A expressão dos momentos dada em (4.13) pode ser reescrita na forma:

$$M_{\alpha\beta} = \hat{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}^p \quad (5.1)$$

Sejam:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta} \quad (5.2)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \chi_{\gamma\theta}^* \quad (5.3)$$

$$Q_{\beta} = C_{3\beta3\theta} \psi_{\theta} \quad (5.4)$$

$$Q_{\beta}^* = C_{3\beta3\theta}^* \psi_{\theta}^* \quad (5.5)$$

em que $C_{i\beta j\theta}$ são as componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas para o caso de placas isotrópicas, sendo dadas por:

$$C_{\alpha\beta\gamma\theta} = D(1-\nu)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta} + (D\nu)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta} \quad (5.6)$$

$$C_{3\beta 3\theta} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}\delta_{\beta\theta} \quad (5.7)$$

Considerando as equações (5.2) a (5.5), pode-se escrever:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta} \chi_{\alpha\beta}^* + C_{3\beta 3\theta} \psi_{\theta} \psi_{\beta}^* \quad (5.8)$$

Reagrupando o segundo membro e como:

$$C_{i\beta j\theta} = C_{j\alpha\beta} \quad (5.9)$$

então:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} (C_{\gamma\theta\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^*) + \psi_{\theta} (C_{3\theta 3\beta} \psi_{\beta}^*) \quad (5.10)$$

Ou ainda, considerando (5.1) a (5.5):

$$\left(M_{\alpha\beta} - \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^p \right) \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \psi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} M_{\gamma\theta}^* + \psi_{\theta} Q_{\theta}^* \quad (5.11)$$

Assim, pode-se escrever a equação integral abaixo, envolvendo integrais de domínio:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}^*) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}^*) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega + \quad (5.12)$$

$$+ \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^p \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega$$

Sabendo-se que:

$$M_{\alpha\beta}^p = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}^p \quad (5.13)$$

pode-se considerar a última integral em (5.12) como:

$$\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^p \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}^p \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_{\gamma\theta}^* \chi_{\gamma\theta}^p d\Omega \quad (5.14)$$

Obtém-se, então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha}^* \psi_{\alpha}) d\Omega &= \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}^*) d\Omega - \\ &- \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

Substituindo as equações (3.5), (3.6), (3.13) e (3.14) na equação anterior, e integrando por partes (usando a divergência) em ambos os lados, exceto o último termo do lado direito, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha} n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} u_{\alpha}^* n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \end{aligned} \quad (5.16)$$

Considerando as expressões das forças de superfície dadas em (3.3), (3.4), (3.11) e (3.12) e as equações de equilíbrio (3.9), (3.10), (3.17) e (3.18), a equação anterior fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

Cancelando termos iguais e escrevendo de forma genérica para as três direções, tem-se a expressão abaixo, correspondente ao Segundo Teorema de Betti (ou da Reciprocidade):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} u_j^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} q \left(u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \quad (5.18)$$

As forças de domínio F_j^* são cargas concentradas generalizadas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto ξ pertencente à região Ω^* .

As forças F_j^* podem ser representadas como:

$$F_j^* = \delta(x-\xi) P_j \quad (5.19)$$

sendo P_j a intensidade da carga unitária e $\delta(x-\xi)$ a função generalizada delta de Dirac, que tem a propriedade dada por:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x-\xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \quad (5.20)$$

Considerando a equação (5.19) com a propriedade dada pela equação (5.20), a primeira integral de (5.18) fica:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) P_j = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi) \quad (5.21)$$

sendo agora $\xi \in \Omega$.

Considerando que cada carga concentrada generalizada unitária atua independentemente, pode-se escrever:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (5.22)$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i \quad (5.23)$$

Podem ser escritas três equações da forma seguinte, válidas para um ponto ξ situado no interior de Ω , sendo que $u_{ij}^*(\xi, x)$, $p_{ij}^*(\xi, x)$ e $M_{\alpha\beta}^*(\xi, x)$ são os termos correspondentes à solução fundamental e representam a resposta, num ponto x (ponto campo), devido a uma carga concentrada generalizada unitária aplicada na direção i do ponto ξ (ponto fonte):

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) + \\
 & + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^*(\xi, x) \chi_{\alpha\beta}^p(x) d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

5.1.2 – Dedução a partir do Método dos Resíduos Ponderados

As equações integrais para os deslocamentos generalizados em um ponto ξ do domínio Ω podem ser obtidas através do Método dos Resíduos Ponderados. A vantagem do uso do método está no fato de, desde o início, poder começar com a ideia de encontrar uma solução numérica para o problema real (Telles, 1983).

Considerando as equações de equilíbrio dadas em (3.9) e (3.10) e as condições de contorno dadas em (3.1) e (3.2), o erro cometido na aproximação da solução da equação diferencial de equilíbrio pode ser distribuído de acordo com a equação seguinte, para uma solução aproximada u_k , usando-se a solução fundamental u_k^* (sendo $u_k^* = u_{ik}^* P_i$, $P_i = 1$) como função de ponderação:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[(M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^*) u_{\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha}^* + q) u_3^* \right] d\Omega = \\
 = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

sendo que p_k^* são dados nas expressões (3.11) e (3.12) e $M_{\alpha\beta}^*$ e Q_{α}^* são os momentos e esforços cortantes, respectivamente, relativos à solução fundamental, dados em (3.15) e (3.16).

Integrando o primeiro e o terceiro termos do primeiro membro por partes, e considerando as equações de p_k dadas em (3.3) e (3.4), fica:

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega = \\
& = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Em seguida, considerando as equações (3.13) e (3.14), e também:

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^e - M_{\alpha\beta}^p \tag{5.27}$$

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}^e \tag{5.28}$$

obtem-se:

$$\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^e \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^p \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^e \psi_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega = \\
& = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Usando agora a reciprocidade e integrando novamente por partes, resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^p \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega = \\
& = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} u_k p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Considerando (5.14) e as equações de equilíbrio para a região Ω^* dadas em (3.17) e (3.18), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega = \\
& = -\int_{\Gamma_u} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_p} u_k p_k^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.31}$$

A equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} F_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} (u_k p_k^* - p_k u_k^*) d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} q \left(u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega + \int_{\Omega} M_{\gamma\theta}^* \chi_{\gamma\theta}^p d\Omega \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como se pode observar, a equação (5.32) é igual à equação (5.18) e, a partir daí, o procedimento é análogo ao do item 5.1.1.

5.1.3 – Equação integral para pontos do contorno

A fim de resolver o problema pelo MEC, é necessário escrever a equação integral (5.24) considerando-se o ponto ξ muito próximo do contorno e tirar o limite das integrais resultantes, quando o ponto ξ tende a Γ .

Considera-se a placa com o ponto ξ situado no contorno da região, envolvido por um semicírculo de raio ε , conforme mostrado na Figura 3.2 da seção 3.2.3.

Assim, a equação integral (5.24) para os deslocamentos no ponto ξ fica:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon}} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega_{\varepsilon}} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) + \\ &+ \int_{\Omega_{\varepsilon}} M_{\alpha\beta}^*(\xi, x) \chi_{\alpha\beta}^p(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral da equação anterior quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A segunda integral em (5.33) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (5.34)$$

em que a primeira integral à direita pode ser considerada como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma(x) + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

A primeira integral à direita na equação anterior se anula devido à continuidade de $u_j(x)$ e a segunda integral à direita, juntamente com o lado esquerdo da equação (5.33), fornece:

$$c_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (5.36)$$

A segunda integral à direita em (5.34) deve ser considerada no sentido de valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfaz a condição de Hölder, isto é:

$$|u_j(x) - u_j(\xi)| \leq B r^\alpha \quad (5.37)$$

sendo B e α constantes positivas.

As integrais restantes em (5.33) não apresentam problemas, pois possuem singularidades mais fracas, como $\ln r$.

Assim, pode-se escrever, para um ponto ξ do contorno:

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) + \\ + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^*(\xi, x) \chi_{\alpha\beta}^p(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.38)$$

na qual a segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy, por conta da singularidade r^{-1} de p_{ij}^* , e o coeficiente $c_{ij}(\xi)$ depende da geometria

do contorno no ponto ξ . Este termo pode ser obtido de forma fechada, mas sob o ponto de vista computacional, torna-se mais eficiente calculá-lo indiretamente, através da consideração de movimento de corpo rígido.

A equação (5.38) é válida tanto para pontos internos, com $C_{ij} = \delta_{ij}$, como para pontos do contorno, sendo $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ no caso de contornos suaves (Van der Weeën, 1982a e 1982b).

A equação anterior é a equação integral básica para análise elastoplástica de flexão de placas em uma formulação que considera deformações plásticas iniciais.

5.1.4 – Determinação do tensor fundamental da parcela plástica

O tensor $M_{\alpha\beta}^*$, que multiplica a deformação plástica de flexão, é obtido de:

$$M_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(u_{\gamma\alpha,\beta}^* + u_{\gamma\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (5.39)$$

$$M_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(u_{3\alpha,\beta}^* + u_{3\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{3\theta,\theta}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (5.40)$$

As derivadas de u_{ij}^* que aparecem nas equações (5.39) e (5.40) são obtidas derivando-se as expressões das soluções fundamentais (3.30) a (3.32) em relação às coordenadas do ponto x .

Considerando as equações (3.33) a (3.36), obtêm-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(x)} = \lambda r_{,\alpha} \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{\delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}}{r} \quad (5.42)$$

Observando as equações (3.37) e (3.38), e utilizando as fórmulas de recorrência de $K_0(z)$ e $K_1(z)$, juntamente com a expressão (5.41), e sabendo-se que:

$$A'(z) = -\frac{1}{z} [z K_1(z) + 2A(z)] \quad (5.43)$$

$$B'(z) = -\frac{1}{z} [z K_1(z) + A(z)] \quad (5.44)$$

obtêm-se:

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} [z K_1 + 2A] \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r} [z K_1 + A] \quad (5.46)$$

Derivando, então, u_{ij}^* dadas em (3.30) a (3.32) em relação às coordenadas do ponto x , utilizando as equações (5.41), (5.42), (5.45), (5.46) e também (3.35), obtêm-se as derivadas dos deslocamentos fundamentais dadas a seguir:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A + 4z K_1 + 1 - \nu)r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \\ - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha})] \quad (5.47)$$

$$u_{\alpha 3,\beta}^* = \frac{1}{8\pi D} [(2 \ln z - 1) \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (5.48)$$

$$u_{3\alpha,\beta}^* = -u_{\alpha 3,\beta}^* \quad (5.49)$$

$$u_{33,\alpha}^* = \frac{r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} [(1-\nu)z^2(2 \ln z - 1) - 8] \quad (5.50)$$

Substituindo (3.30) a (3.32) e suas derivadas, dadas pelas equações (5.47) a (5.50), nas expressões de $M_{\alpha\beta}^*$ dadas por (5.39) e (5.40) e reagrupando os termos, obtêm-se:

$$M_{\alpha\beta\gamma}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - \right. \\ \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right] \quad (5.51)$$

$$M_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2 r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (5.52)$$

A quarta integral da expressão de $u_i(\xi)$ dada em (5.38) não apresenta problemas quanto à singularidade, pois a mesma é fraca.

5.1.5 – Transformação da integral de forças de domínio em integral de contorno

Na equação (5.38), a integral de domínio relacionada com a carga transversal pode ser transformada em integral de contorno para diversos tipos de carregamento. Essa transformação é feita aqui para cargas uniformemente distribuídas ($q(x) = q = \text{constante}$), utilizando o teorema da divergência.

Tem-se:

$$I_i(\xi) = \int_{\Omega} \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha\alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \quad (5.53)$$

Considerando a equação de Poisson seguinte, para a qual v_i^* é uma solução:

$$v_{i,\alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (5.54)$$

e, aplicando o teorema da divergência em $I_i(\xi)$, tem-se, sendo $q(x) = q = \text{constante}$:

$$I_i(\xi) = \int_{\Gamma} q \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Gamma(x) \quad (5.55)$$

Assim, a equação (5.38) pode ser escrita na forma seguinte, envolvendo integral de contorno também na parcela do carregamento:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(\xi)u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
&+ \int_{\Gamma} q \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Gamma(x) + \\
&+ \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^*(\xi, x) \chi_{\alpha\beta}^p(x) d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

As expressões de $u_{i\alpha}^*$ correspondem a (3.30) e (3.31) e para as derivadas de v_i^* utilizam-se (3.47) e (3.48).

Para as expressões dos tensores u_{ij}^* usam-se (3.30) a (3.32) e para p_{ij}^* admitem-se (3.39) a (3.42).

Deve-se ressaltar que a normal aponta para fora da região analisada e o sentido de integração é o mesmo indicado na Figura 3.3.

5.2 – EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA MOMENTOS E ESFORÇOS CORTANTES NOS PONTOS INTERNOS

O cálculo dos esforços em pontos internos é de fundamental importância na solução de problemas em que é feita análise considerando não-linearidade do material, pois as equações correspondentes são usadas no processo de solução, juntamente com as equações dos deslocamentos.

Os momentos e esforços cortantes nos pontos internos são calculados substituindo-se a equação (5.56) com $C_{ij} = \delta_{ij}$ nas equações (3.5) e (3.6) e, então, substituindo-se as expressões resultantes nas equações (4.13) e (4.14).

Deve-se notar que as derivadas são tomadas aqui em relação às coordenadas do ponto ξ .

Para as três primeiras integrais da equação (5.56), a diferenciação pode ser aplicada diretamente nos tensores da solução fundamental. Já no caso da integral que envolve o tensor plástico, são necessárias considerações especiais.

Seja a Figura 5.1, que representa o domínio Ω_ε , remanescente do domínio Ω quando se retira deste um círculo de pequeno raio ε centrado no ponto ξ .

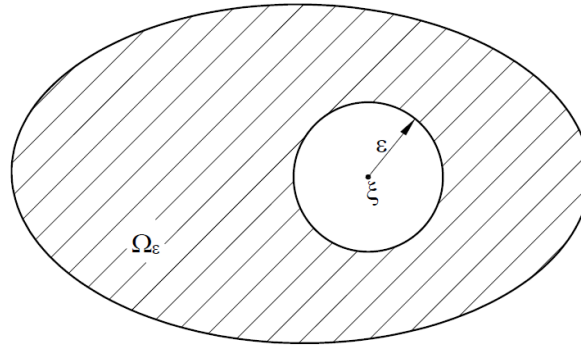


Figura 5.1 – Domínio Ω_ε remanescente do domínio Ω .

Representando agora a última integral de (5.56) de um modo mais formal, pode-se escrever:

$$V_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \quad (5.57)$$

A derivada de V_i em relação à coordenada x_θ do ponto ξ pode ser representada como:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_\theta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\theta} \int_{\Omega_\varepsilon} M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \right\} \quad (5.58)$$

Após utilizar um procedimento análogo àquele que foi empregado em Telles e Brebbia (1979; 1981) e em Telles (1983), conclui-se que:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_\theta} = \int_{\Omega} \frac{\partial M_{\alpha\beta}^*}{\partial x_\theta} \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega - \chi_{\alpha\beta}^p(\xi) \int_{\Gamma_\varepsilon} M_{\alpha\beta}^* r_{,\theta} d\Gamma \quad (5.59)$$

em que a primeira integral à direita é interpretada no sentido de valor principal de Cauchy e a segunda integral é calculada para um círculo centrado no ponto ξ , sendo $r_{,\theta}$ a derivada de r em relação à coordenada x_θ do ponto x .

Assim, pode-se obter a seguinte equação para a derivada de (5.56) em um ponto interno, em relação à coordenada x_θ do ponto ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_\theta} = & \int_\Gamma \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_\theta} p_j d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_\theta} u_j d\Gamma + \int_\Gamma q \left[\frac{\partial v_{i,\alpha}^*}{\partial x_\theta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial u_{i\alpha}^*}{\partial x_\theta} \right] n_\alpha d\Gamma + \\ & + \int_\Omega \frac{\partial M_{\alpha\beta}^*}{\partial x_\theta} \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega - \chi_{\alpha\beta}^p(\xi) \int_{\Gamma_1'} M_{\alpha\beta}^* r_{,\theta} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.60)$$

sendo a quarta integral no sentido de valor principal de Cauchy e a quinta integral calculada em um círculo centrado no ponto ξ .

Para a resolução da integral em Γ_1' , usam-se as funções de Bessel para pequenos argumentos (Abramowitz e Stegun, 1965):

$$K_0(z) \cong -\ln z \quad (5.61)$$

$$K_1(z) \cong \frac{1}{z} \quad (5.62)$$

Dessa forma, têm-se:

$$A(z) = -\ln z \quad (5.63)$$

$$B(z) = -\ln z \quad (5.64)$$

Após a resolução da integral em Γ_1' , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\theta} = & \int_\Gamma \frac{\partial u_{\gamma j}^*}{\partial x_\theta} p_j d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial p_{\gamma j}^*}{\partial x_\theta} u_j d\Gamma + \int_\Gamma q \left[\frac{\partial v_{\gamma,\alpha}^*}{\partial x_\theta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial u_{\gamma\alpha}^*}{\partial x_\theta} \right] n_\alpha d\Gamma + \\ & + \int_\Omega \frac{\partial M_{\alpha\beta\gamma}^*}{\partial x_\theta} \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega + \frac{1}{4} \left[(3-\nu) \chi_{\gamma\theta}^p - \frac{1}{2} (1-3\nu) \delta_{\gamma\theta} \chi_{\Delta\Delta}^p \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_\theta} = & \int_\Gamma \frac{\partial u_{3j}^*}{\partial x_\theta} p_j d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial p_{3j}^*}{\partial x_\theta} u_j d\Gamma + \int_\Gamma q \left[\frac{\partial v_{3,\alpha}^*}{\partial x_\theta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial u_{3\alpha}^*}{\partial x_\theta} \right] n_\alpha d\Gamma + \\ & + \int_\Omega \frac{\partial M_{\alpha\beta 3}^*}{\partial x_\theta} \chi_{\alpha\beta}^p d\Omega \end{aligned} \quad (5.66)$$

Levando em conta as equações (3.5), (3.6), (4.13), (4.14), (5.65) e (5.66), os momentos e esforços cortantes em pontos internos podem ser calculados, respectivamente, na forma:

$$M_{\alpha\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^* u_k d\Gamma + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^* d\Gamma + \int_{\Omega} M_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \chi_{\gamma\theta}^p d\Omega + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{D(1-\nu^2)}{8} (2\chi_{\alpha\beta}^p + \delta_{\alpha\beta} \chi_{\theta\theta}^p) \quad (5.67)$$

$$Q_{\beta}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^* u_k d\Gamma + q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^* d\Gamma + \int_{\Omega} M_{3\beta\gamma\theta}^* \chi_{\gamma\theta}^p d\Omega \quad (5.68)$$

Deve-se notar que a última integral, tanto na equação (5.67) como em (5.68), deve ser calculada no sentido de valor principal de Cauchy.

As expressões para os tensores $u_{i\beta k}^*$, $p_{i\beta k}^*$ e $w_{i\beta}^*$ são dadas pelas equações (3.52) a (3.61).

A determinação do tensor $M_{i\beta\gamma\theta}^*$ foi feita considerando-se que são os termos que multiplicam as deformações plásticas, quando da substituição das expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços. Têm-se:

$$M_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[M_{\gamma\theta\alpha,\beta}^* + M_{\gamma\theta\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} M_{\gamma\theta\Delta,\Delta}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (5.69)$$

$$M_{3\beta\gamma\theta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (M_{\gamma\theta\beta}^* + M_{\gamma\theta3,\beta}^*) \quad (5.70)$$

sendo $M_{\gamma\theta\alpha}^*$ e $M_{\gamma\theta3}^*$ dados por:

$$M_{\gamma\theta\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\theta\alpha} r_{,\gamma} + \delta_{\gamma\alpha} r_{,\theta}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\gamma} r_{,\theta} r_{,\alpha} + (4A + 1 + \nu) \delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} \right] \quad (5.71)$$

$$M_{\gamma\theta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\gamma\theta} + 2 r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] \quad (5.72)$$

As derivadas do tensor $M_{\gamma\alpha}^*$, que aparecem nas equações (5.69) e (5.70), são obtidas derivando-se as expressões de (5.71) e (5.72) em relação às coordenadas do ponto ξ .

Neste caso, considerando a equação (3.35), obtêm-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(\xi)} = -\lambda r_{,\alpha} \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} [z K_0 + K_1] \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha}}{r} [z K_1 + 2A] \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(\xi)} = \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r} \quad (5.76)$$

Derivando-se, então, as expressões (5.71) e (5.72) em relação às coordenadas do ponto ξ , utilizando as equações (5.73) a (5.76), obtêm-se:

$$\begin{aligned} M_{\gamma\theta\alpha,\beta}^* = & \frac{1}{4\pi r^2} \left[(4A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\theta\beta}) + \right. \\ & + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - 2(8A + 4z K_1 + z^2 K_0 + 1 - \nu) \cdot \\ & \cdot (\delta_{\alpha\theta} r_{,\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\theta} r_{,\beta}) - 2(8A + 2z K_1 + 1 + \nu) \delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} r_{,\beta} - \\ & - 2(8A + 2z K_1 + 1 - \nu) (\delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,\theta} + \delta_{\theta\beta} r_{,\alpha} r_{,\gamma} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\theta} r_{,\gamma}) + \\ & \left. + 4(24A + 8z K_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] \quad (5.77) \end{aligned}$$

$$M_{\gamma\theta 3,\beta}^* = \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} + r_{,\theta} \delta_{\gamma\beta} + r_{,\gamma} \delta_{\theta\beta} - 2r_{,\gamma} r_{,\theta} r_{,\beta} \right] \quad (5.78)$$

Substituindo as expressões (5.77) e (5.78) nas equações (5.69) e (5.70) e reagrupando os termos, são obtidas as expressões para as componentes do tensor que multiplica a deformação plástica, dadas a seguir:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta\gamma\theta}^* &= \frac{D(1-\nu)}{8\pi r^2} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\theta\beta}) + \right. \\ &+ 2(4A + 1 + 3\nu) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} - 4(8A + 2zK_1 + 1 + \nu) \cdot \\ &\cdot (\delta_{\gamma\theta} r_{,\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\beta} r_{,\theta} r_{,\gamma}) - 2(16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) \\ &\cdot (\delta_{\alpha\theta} r_{,\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\theta} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha} r_{,\theta} + \delta_{\theta\beta} r_{,\alpha} r_{,\gamma}) + \\ &\left. + 8(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\theta} \right] \quad (5.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{3\beta\gamma\theta}^* &= -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{8\pi r} \left[(4A + 2zK_1)(\delta_{\theta\beta} r_{,\gamma} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\theta}) + \right. \\ &\left. + 4A r_{,\beta} \delta_{\gamma\theta} - 4(4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\theta} r_{,\beta} \right] \quad (5.80) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 6

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, é apresentado um procedimento geral de abordagem numérica com o MEC através da discretização das principais equações integrais mostradas nos capítulos anteriores, visando a solução do problema elastoplástico de flexão de placas. Aqui, apresentam-se os elementos de contorno quadráticos contínuos e descontínuos de geometria linear empregados na pesquisa. Estão abordadas, ainda, as soluções para os casos de descontinuidade da normal ou da condição de contorno através do uso de nó duplo e elemento descontínuo. São apresentados os principais procedimentos usados no tratamento de integrais singulares, incluindo as de ordem logarítmica. Além disso, faz-se uma explanação a respeito das células internas e os critérios para solução dos problemas de singularidade oriundos dos diversos posicionamentos do ponto fonte nestas células. Por fim, apresenta-se a técnica de solução para o problema elastoplástico, análoga àquela empregada por Telles e Brebbia (1979; 1981) e por Telles (1983) e, comenta-se sobre a estrutura do programa computacional.

6.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Diante das dificuldades inerentes à solução analítica das equações integrais de placas, faz-se uma transformação que permita a obtenção de um sistema de equações algébricas.

Para isso, discretiza-se o contorno da placa analisada nos chamados elementos de contorno, sobre os quais os deslocamentos e as forças de superfície são interpolados de acordo com funções aproximadoras previamente escolhidas. Além disso, a parte do domínio da placa onde são esperadas as deformações plásticas é dividida em células internas, nas quais os valores de deformações iniciais são interpolados por funções aproximadoras convenientes.

As integrais são calculadas numericamente, tanto no caso dos elementos de contorno como no caso das células internas. Para o caso de integrais regulares, utiliza-se a quadratura de Gauss. Já as integrais singulares são resolvidas adotando-se procedimentos especiais.

Monta-se um sistema de equações que contempla três equações por ponto nodal do contorno (cada uma associada a um deslocamento generalizado) e são consideradas, ainda, equações adicionais de momentos nos pontos considerados nas células devido ao fato de as deformações plásticas associadas ao problema também serem incógnitas.

O problema elastoplástico é, então, resolvido após aplicarem-se as condições de contorno, através de um processo incremental-iterativo. Assim, as incógnitas, que são deslocamentos ou forças de superfície no contorno e deformações plásticas nos pontos nodais das células, são calculadas.

Deve-se observar que a convenção de somatório aqui não é implícita.

6.2 – DISCRETIZAÇÃO E SISTEMA DE EQUAÇÕES

A fim de analisar o problema pelo MEC, as equações integrais de deslocamentos e esforços são escritas em forma discretizada.

Admite-se o contorno Γ da placa dividido em vários elementos Γ_j quadráticos, contínuos ou descontínuos, com geometria linear, e a parte do domínio Ω onde é esperada a ocorrência de deformações plásticas, dividida em células internas triangulares constantes Ω_j , também com geometria linear, conforme apresentado na Figura 6.1.

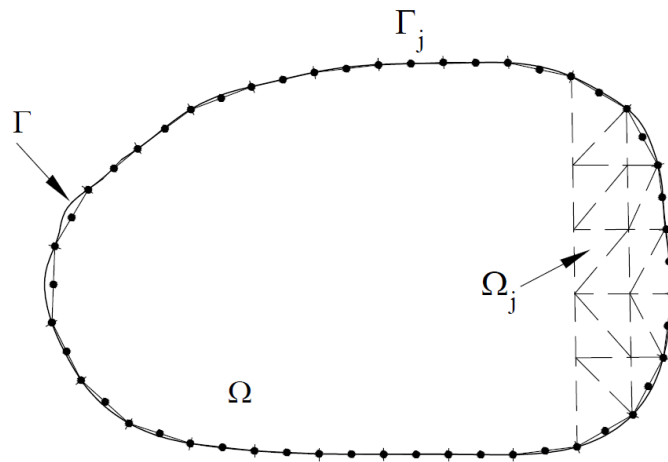


Figura 6.1 – Discretização do contorno Γ em elementos de contorno Γ_j e do domínio Ω em células internas Ω_j .

Para cada ponto nodal do contorno, têm-se três componentes de deslocamentos e três componentes de forças de superfície, sendo uma para cada direção generalizada. Os valores das funções a serem integradas, em um ponto qualquer do elemento de contorno, bem como as coordenadas, são obtidos por interpolação dos valores nodais. Além disso, os resultados em pontos internos podem ser obtidos a partir de equações integrais e considerando-se os valores calculados nos pontos nodais do contorno.

Qualquer ponto do elemento quadrático j tem suas coordenadas (x_1, x_2) calculadas a partir dos valores das coordenadas dos nós do elemento, por meio da seguinte equação, na forma matricial:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(n)} \quad (6.1)$$

em que $\mathbf{x}^{(j)}$ é o vetor que contém as coordenadas de um ponto qualquer do elemento considerado; \mathbf{M} é a matriz que contém as funções de interpolação e $\mathbf{x}^{(n)}$ é o vetor que contém as coordenadas dos pontos nodais do elemento.

Para um ponto qualquer do elemento j , são consideradas as expressões seguintes para interpolar deslocamentos e forças de superfície em função dos valores nodais:

$$\mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{N} \mathbf{U}^{(n)} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{P}^{(j)} = \mathbf{N} \mathbf{P}^{(n)} \quad (6.3)$$

em que $\mathbf{U}^{(j)}$ e $\mathbf{P}^{(j)}$ são os vetores que contêm os deslocamentos e as forças de superfície, respectivamente, relativos a um ponto qualquer do elemento considerado; \mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação e $\mathbf{U}^{(n)}$ e $\mathbf{P}^{(n)}$ são os vetores que contêm os deslocamentos e as forças de superfície, respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento.

Para a discretização das integrais de domínio que envolvem as deformações plásticas, considera-se que as coordenadas $\mathbf{x}^{(j)}$ de um ponto qualquer do interior da célula são calculadas através da equação:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{x}^{(m)} \quad (6.4)$$

em que $\mathbf{x}^{(j)}$ é o vetor que contém as coordenadas de um ponto qualquer do elemento considerado; $\hat{\mathbf{M}}$ é a matriz que contém as funções de interpolação e $\mathbf{x}^{(m)}$ é o vetor que contém as coordenadas dos pontos que definem a geometria da célula.

As deformações plásticas num ponto qualquer do interior da célula são calculadas pela equação:

$$\chi^p{}^{(j)} = \hat{\mathbf{N}} \chi^p{}^{(n)} \quad (6.5)$$

em que $\chi^{p(j)}$ representa o vetor que contém as deformações plásticas de um ponto do interior da célula; \hat{N} é a matriz que contém as funções de interpolação e $\chi^{p(n)}$ é o vetor que contém as deformações plásticas em um certo número de “pontos de momento”.

6.2.1 – Equações dos deslocamentos nos pontos do contorno

A equação (5.56) pode ser escrita em forma discretizada para cada ponto nodal do contorno, ξ_i , substituindo-se as integrais em Γ por somatórios de integrais em Γ_j e as integrais em Ω por integrais em Ω_j obtendo-se, assim, um sistema de N equações algébricas envolvendo N valores nodais de deslocamentos e N valores nodais de forças de superfície. Em forma matricial, obtém-se:

$$\begin{aligned} C_i U_i = & \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} U_i^* N d\Gamma \right) P^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P_i^* N d\Gamma \right) U^{(n)} + \sum_{j=1}^L \left(q \int_{\Gamma_j} S_i^* d\Gamma \right) + \\ & + \sum_{j=1}^Z \left(\int_{\Omega_j} M_i^* \hat{N} d\Omega \right) \chi^{p(n)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

em que:

L é o número de elementos de contorno;

Z é o número de células internas;

C_i é a matriz que contém os termos C_{ij} que aparecem na equação (5.56), sendo $C_{ij} = \delta_{ij} / 2$ para contorno suave;

U_i é o vetor deslocamento do ponto fonte;

U_i^* , P_i^* e M_i^* representam as matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos, forças de superfície e momentos, respectivamente;

S_i^* é o vetor cujas componentes são expressas por:

$$S_k^* = \left(v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha}^* \right) n_\alpha \quad (6.7)$$

Deve-se observar que a equação (6.6) também é válida para “pontos internos de momento”, sendo, neste caso, $C_i = I$.

Os elementos de contorno aqui utilizados são mostrados no item 6.3. As integrais sobre esses elementos são calculadas numericamente, nos casos de integrais regulares, usando-se a quadratura de Gauss, em forma seletiva. No caso de integrais singulares, são utilizados procedimentos especiais, abordados no item 6.5.

Como as funções de interpolação são dadas em função de uma coordenada intrínseca adimensional η (conforme item 6.3), transforma-se a diferencial de contorno $d\Gamma$ para esse novo sistema. Sendo $|\mathbf{J}|$ o jacobiano da transformação, usa-se a seguinte expressão:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (6.8)$$

Para as integrais de contorno regulares em (6.6), nomeando-as como se segue e considerando que k é o número de pontos de integração e w_k são os fatores de peso referentes aos pontos de integração de Gauss, têm-se:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{U}_i^* N |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{U}_i^* N)_k |\mathbf{J}| w_k \quad (6.9)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* N d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{P}_i^* N |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{P}_i^* N)_k |\mathbf{J}| w_k \quad (6.10)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{S}_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{S}_i^*)_k |\mathbf{J}| w_k \quad (6.11)$$

No caso das células internas, as integrais são também calculadas numericamente, conforme a expressão:

$$\mathbf{D}_{ij} = \int_{\Omega_j} \mathbf{M}_i^* \hat{N} d\Omega = \sum_{k=1}^K (\mathbf{M}_i^* \hat{N})_k |\mathbf{J}| w_k \quad (6.12)$$

As coordenadas dos pontos localizados no interior das células são definidas em termos das coordenadas triangulares (ζ_1, ζ_2) e o jacobiano aqui se refere a esse novo sistema intrínseco. Faz-se, ainda, uma transformação de coordenadas definindo um sistema de coordenadas polares (r, ϕ) , centrado no ponto fonte. Então, a integração regular é realizada

usando-se a quadratura de Gauss em relação a ambos, r e ϕ . Para o valor principal de Cauchy, a quadratura de Kutt para integrais em partes finitas é utilizada para integrar em relação a r . Estas questões são discutidas no item 6.6.

Com isso, a equação (6.6) fica reescrita como:

$$C_i U_i = \sum_{j=1}^L G_{ij} P_j - \sum_{j=1}^L \hat{H}_{ij} U_j + \sum_{j=1}^L B_{ij} + \sum_{j=1}^Z D_{ij} \chi_j^p \quad (6.13)$$

ou, ainda, fazendo $\begin{cases} H_{ij} = \hat{H}_{ij}, & \text{para } i \neq j \\ H_{ij} = \hat{H}_{ij} + C_i, & \text{para } i = j \end{cases}$, chega-se à equação:

$$\sum_{j=1}^L H_{ij} U_j = \sum_{j=1}^L G_{ij} P_j + \sum_{j=1}^L B_{ij} + \sum_{j=1}^Z D_{ij} \chi_j^p \quad (6.14)$$

Estendendo a equação (6.14) a todos os pontos nodais do contorno, obtém-se um sistema com um número de equações igual a três vezes o número de nós, representado por:

$$H U = G P + B + D \chi^p \quad (6.15)$$

em que U é o vetor de deslocamentos nodais; P é o vetor de forças de superfície nodais; B é o vetor que contém a influência da carga distribuída; χ^p é o vetor que contém as deformações plásticas em pontos das células; H e G são as matrizes quadradas geradas pelas integrais sobre os elementos de contorno e D é a matriz formada pelas integrais de domínio que multiplica as deformações plásticas.

Em U e P , estão os valores de deslocamentos e forças de superfície de todos os pontos nodais, sendo que, para cada direção nodal, um destes dois valores deve ser conhecido. Portanto, devem ser impostas as condições de contorno do problema e, assim, restarão N incógnitas, dentre deslocamentos e forças de superfície.

6.2.2 – Cálculo dos deslocamentos nos pontos internos

Para o cálculo dos deslocamentos nos pontos internos ξ_i , situados no domínio Ω , usa-se, também, a equação (6.6) com $C_i = I$, o que conduz a:

$$\begin{aligned}
U_i = & \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} U_i^* N d\Gamma \right) P^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P_i^* N d\Gamma \right) U^{(n)} + \sum_{j=1}^L \left(q \int_{\Gamma_j} S_i^* d\Gamma \right) + \\
& + \sum_{j=1}^Z \left(\int_{\Omega_j} M_i^* \hat{N} d\Omega \right) \chi^{p^{(n)}}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

6.2.3 – Cálculo dos esforços resultantes nos pontos internos

Para o cálculo dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos ξ_i , situados no domínio Ω , discretizam-se as equações (5.67) e (5.68), obtendo-se as equações mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
M_i = & \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} U_i^{*'} N d\Gamma \right) P^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P_i^{*'} N d\Gamma \right) U^{(n)} + \sum_{j=1}^L \left(q \int_{\Gamma_j} W_i^{*'} d\Gamma \right) + \\
& + \sum_{j=1}^Z \left(\int_{\Omega_j} M_i^{*'} \hat{N} d\Omega \right) \chi^{p^{(n)}} + \frac{\nu q \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} + C' \chi^p
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
Q_i = & \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} U_i^{*''} N d\Gamma \right) P^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P_i^{*''} N d\Gamma \right) U^{(n)} + \sum_{j=1}^L \left(q \int_{\Gamma_j} W_i^{*''} d\Gamma \right) + \\
& + \sum_{j=1}^Z \left(\int_{\Omega_j} M_i^{*''} \hat{N} d\Omega \right) \chi^{p^{(n)}}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Nas equações anteriores, $U_i^{*'}$, $U_i^{*''}$, $P_i^{*'}$, $P_i^{*''}$, $W_i^{*'}$ e $W_i^{*''}$ são matrizes que contêm os tensores cujas componentes foram apresentadas nas equações (3.52) a (3.61) e $M_i^{*'}$ e $M_i^{*''}$ são matrizes que contêm os tensores apresentados em (5.79) e (5.80).

Em (6.17), C' representa o termo livre relacionado com as deformações plásticas.

Aplicando as equações (6.17) e (6.18) a todos os pontos internos localizados nos centros geométricos das células, obtêm-se:

$$M = G' P - H' U + (W' + V') + (D' + C') \chi^p \tag{6.19}$$

$$Q = G'' P - H'' U + W'' + D'' \chi^p \tag{6.20}$$

em que as matrizes G' , G'' , H' e H'' e os vetores W' e W'' contêm as integrais de contorno relativas à solução fundamental; V' contém o termo livre referente à carga transversal; D' e D'' contêm as integrais de domínio que multiplicam as deformações plásticas.

O sistema apresentado em (6.15) pode ainda ser reorganizado, deixando-se todas as incógnitas num único vetor y e todos os valores conhecidos multiplicados pelos respectivos coeficientes de H ou G , juntamente com B , num vetor f , o que leva a:

$$A y = f + D \chi^p \quad (6.21)$$

em que A é uma matriz de coeficientes, cheia e não-simétrica.

Analogamente, as equações (6.19) e (6.20) tornam-se, respectivamente:

$$M = -A' y + f' + D^* \chi^p \quad (6.22)$$

$$Q = -A'' y + f'' + D'' \chi^p \quad (6.23)$$

sendo:

$$D^* = D' + C' \quad (6.24)$$

Nas expressões (6.21) a (6.23), f , f' e f'' são vetores que contêm os valores prescritos, incluindo a influência da carga transversal.

A pré-multiplicação da equação (6.21) por A^{-1} conduz a:

$$y = K \chi^p + m \quad (6.25)$$

em que:

$$K = A^{-1} D \quad (6.26)$$

$$m = A^{-1} f \quad (6.27)$$

A substituição da equação (6.25) nas equações (6.22) e (6.23) fornece:

$$M = S' \chi^p + n' \quad (6.28)$$

$$Q = S'' \chi^p + n'' \quad (6.29)$$

sendo:

$$S' = D^* - A'K \quad (6.30)$$

$$S'' = D'' - A''K \quad (6.31)$$

$$n' = f' - A'm \quad (6.32)$$

$$n'' = f'' - A''m \quad (6.33)$$

Deve-se notar que os vetores m , n' e n'' representam a solução puramente elástica do problema, com m contendo forças e deslocamentos do contorno e os vetores n' e n'' contendo, respectivamente, momentos e esforços cortantes dos pontos internos.

As expressões (6.28) e (6.29) representam equações recursivas que relacionam os esforços em pontos do contorno e pontos internos com as correspondentes deformações plásticas e a solução elástica.

Em termos de programação eficiente, deve-se notar que, inicialmente, a matriz A é montada na mesma localização das matrizes S' e S'' . Uma vez que o sistema de equações é resolvido, apenas as matrizes S' e S'' são realmente montadas nas equações (6.28) e (6.29). Assim, apenas K , S' e S'' requerem armazenamento.

A fim de obter expressões mais adequadas para a resolução de problemas de plasticidade, algumas manipulações podem ser realizadas, levando-se em consideração as abordagens feitas nos capítulos anteriores. Assim, pode-se reescrever a equação (6.25) como:

$$y = K(\chi^p + \Delta\chi^p) + m \quad (6.34)$$

e as equações (6.28) e (6.29), respectivamente, como:

$$M = S'(\chi^p + \Delta\chi^p) + n' \quad (6.35)$$

$$Q = S''(\chi^p + \Delta\chi^p) + n'' \quad (6.36)$$

em que χ^p representa as deformações plásticas acumuladas até (mas não incluindo) o correspondente incremento de carga atual $\Delta\chi^p$, que são determinados iterativamente.

Em relação às equações (6.34) a (6.36), reitera-se que o vetor m representa a solução elástica para o problema de contorno (forças e deslocamentos desconhecidos) e os vetores n' e n'' representam os correspondentes esforços.

6.3 – ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste trabalho, são empregados elementos de contorno quadráticos contínuos e descontínuos, com geometria linear.

No elemento contínuo, há três pontos nodais situados sobre uma reta, sendo dois deles situados nas extremidades e um intermediário (Figura 6.2). As funções de interpolação para as coordenadas são de ordem linear enquanto para as outras funções envolvidas são do segundo grau. O elemento assegura a continuidade das funções envolvidas entre elementos adjacentes.

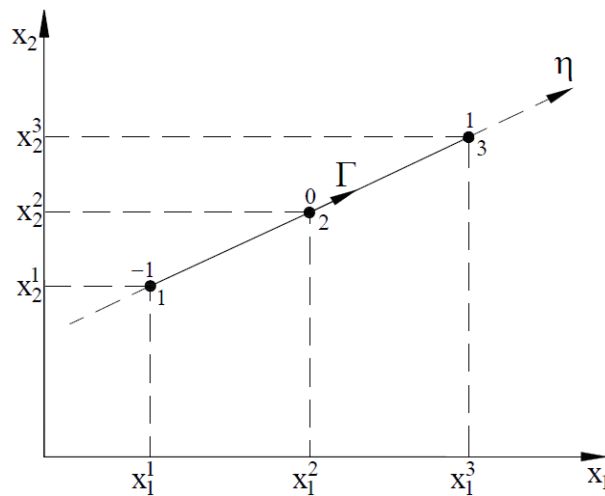


Figura 6.2 – Elemento quadrático contínuo com geometria linear.

Neste caso, as funções de interpolação para as coordenadas, dadas em termos da coordenada adimensional η , possuem valor unitário em um ponto nodal de extremidade e zero no outro nó extremo, e são representadas por:

$$M_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) \quad (6.37)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} (1+\eta) \quad (6.38)$$

As funções de interpolação para os deslocamentos e forças de superfície, ainda no caso do elemento contínuo, possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois, e são as seguintes:

$$N_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) \quad (6.39)$$

$$N_2 = (1 - \eta)(1 + \eta) \quad (6.40)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) \quad (6.41)$$

O elemento descontínuo é aqui utilizado nos casos de descontinuidade da normal ou da condição de contorno. Por não existirem nós situados nas extremidades dos elementos (conforme Figura 6.3), não há obrigação de continuidade das funções envolvidas nas extremidades de elementos adjacentes. Neste elemento, assim como no elemento anterior, as funções de interpolação para coordenadas são de ordem linear e as outras funções envolvidas são do segundo grau.

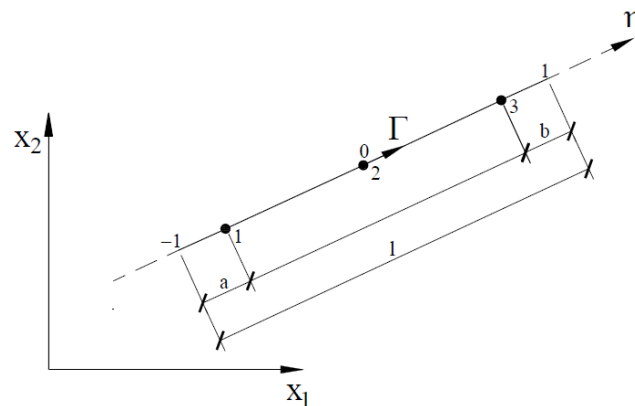


Figura 6.3 – Elemento quadrático descontínuo com geometria linear.

Neste caso, as funções de interpolação para as coordenadas, dadas em termos da coordenada adimensional η , possuem valor unitário em um ponto nodal próximo de uma extremidade e zero no nó próximo da outra extremidade, sendo expressas por:

$$M_1 = \frac{l(1-\eta)-2b}{2(l-a-b)} \quad (6.42)$$

$$M_3 = \frac{l(1+\eta)-2a}{2(l-a-b)} \quad (6.43)$$

em que:

a é a distância do ponto nodal 1 à extremidade do elemento;

b é a distância do ponto nodal 3 à extremidade do elemento;

l é o comprimento total do elemento.

As funções de interpolação para os deslocamentos e forças de superfície que, como no caso do elemento contínuo, também possuem valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos outros dois, são expressas por:

$$N_1 = \frac{l\eta(l\eta-l+2b)}{2(l-a-b)(l-2a)} \quad (6.44)$$

$$N_2 = \frac{l\eta[2(a-b)-l\eta]}{(l-2a)(l-2b)} + 1 \quad (6.45)$$

$$N_3 = \frac{l\eta(l\eta+l-2a)}{2(l-a-b)(l-2b)} \quad (6.46)$$

Ressalta-se que pode-se ter $a=0$ e/ou $b=0$. No caso em que apenas um destes valores é zero, o elemento é dito semicontínuo. Quando os dois são nulos, as fórmulas anteriores recaem nas expressões das funções de interpolação do elemento contínuo.

As coordenadas (x_1, x_2) de um ponto qualquer do elemento são calculadas em função das coordenadas nodais através de:

$$x_1 = x_1^1 N_1 + x_1^3 N_3 \quad (6.47)$$

$$x_2 = x_2^1 N_1 + x_2^3 N_3 \quad (6.48)$$

ou, ainda, de acordo com a forma matricial dada em (6.1), têm-se:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} \quad (6.51)$$

Os deslocamentos e forças de superfície são interpolados, respectivamente, como nas equações (6.2) e (6.3), sendo:

$$\mathbf{U}^{(j)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

$$\mathbf{P}^{(j)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{U}^{(n)} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \quad (6.55)$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

O jacobiano da transformação é calculado em função de derivadas de (6.47) e (6.48), através da expressão:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (6.57)$$

No caso do elemento de geometria linear, obtém-se:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \frac{l}{2} \quad (6.58)$$

6.4 – DESCONTINUIDADE DA NORMAL OU DA CONDIÇÃO DE CONTORNO

Nos casos de descontinuidade da normal ou da condição de contorno, a continuidade das forças de superfície não é assegurada entre elementos adjacentes, pois, num mesmo ponto, têm-se direções da normal diferentes para cada elemento (Figura 6.4).

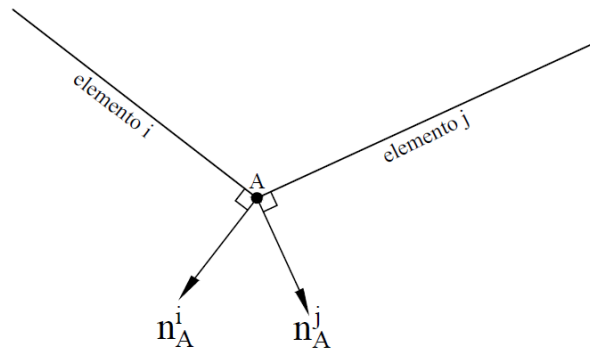


Figura 6.4 – Descontinuidade da normal.

Podem ser empregadas algumas soluções para resolver este problema e, no presente trabalho, são utilizados:

- Nó duplo no ponto de descontinuidade;
- Elementos descontínuos com extremidades no ponto de descontinuidade.

Estes procedimentos podem também ser empregados quando existe continuidade da normal, porém as condições de contorno são descontínuas.

6.4.1 – Nó duplo

É empregado quando, para uma certa direção do ponto de interseção de dois elementos onde existe descontinuidade da normal ou da condição de contorno, tem-se a força de superfície conhecida nos dois elementos adjacentes ou, então, o deslocamento conhecido num elemento e a força de superfície conhecida no outro.

Considera-se a existência de dois pontos nodais com as mesmas coordenadas, mas cada um pertencendo a um elemento diferente (Figura 6.5). Além disso, impõe-se que, nesses dois nós, o deslocamento é o mesmo, a fim de assegurar a continuidade de deslocamentos no ponto de interseção.

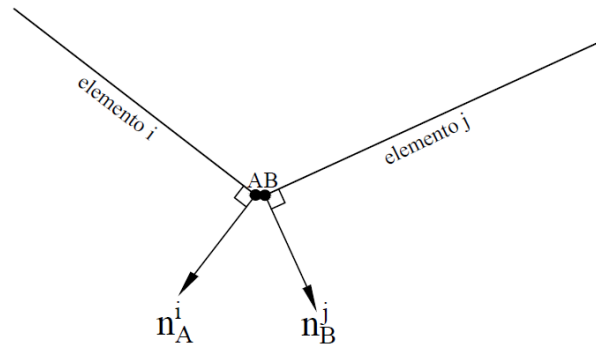


Figura 6.5 – Nó duplo.

6.4.2 – Elemento descontínuo

É empregado quando, em certa direção onde existe descontinuidade da normal ou da condição de contorno, as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos elementos adjacentes. Neste caso, o nó duplo não é aplicável, pois tem-se um número de equações independentes, para esse nó, menor que o número de incógnitas, já que os deslocamentos são contínuos e as forças de superfície podem não ser.

Outra solução, neste caso, seria a utilização de equações adicionais, escritas em função de derivadas de deslocamentos, obtidas assumindo a continuidade dos esforços resultantes. Estas equações substituem outras no sistema.

No caso do elemento descontínuo, os dois pontos nodais não possuem as mesmas coordenadas (Figura 6.6), gerando equações independentes no sistema para cada um dos dois.

A precisão do elemento descontínuo é praticamente a mesma do elemento contínuo, quando se escolhe uma distância conveniente dos nós às extremidades do elemento e, ainda, um número de pontos de integração adequado. Karam (1986) observou que, na medida em que essa distância se torna menor, a integração numérica requer maior número de pontos de integração de Gauss, pois os nós deslocados dos dois elementos adjacentes ficam mais próximos, dificultando a integração. Além disso, verificou que a distância do nó até a extremidade não deve ser muito pequena e nem muito grande, para a obtenção das melhores respostas.

A discretização apenas com elementos descontínuos aumenta significativamente o número de nós e, conseqüentemente, o número de equações do sistema. Diante disso e do fato das descontinuidades das variáveis no contorno só ocorrerem em alguns pontos na maioria

dos problemas, é comum utilizar uma combinação de elementos descontínuos e contínuos, como é feito no presente trabalho.

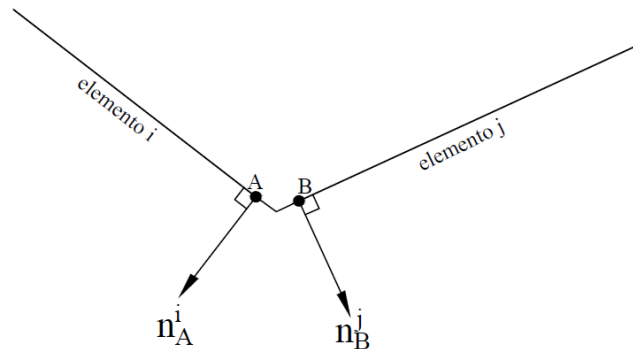


Figura 6.6 – Elemento descontínuo.

6.5 – INTEGRAIS SINGULARES

Quando o ponto fonte ξ pertence ao elemento Γ_j considerado, as integrais correspondentes às matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} e ao vetor \mathbf{B} possuem singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} , por conta dos tensores fundamentais u_{ij}^* e p_{ij}^* serem singulares quando $r = 0$.

Para os elementos quadráticos usados neste trabalho, as singularidades desaparecem quando os nós correspondentes aos pontos ξ e x não são coincidentes, continuando, porém, a existir quando esses pontos coincidem. Isto se deve ao fato das funções de interpolação, que multiplicam esses tensores, terem valor um no ponto nodal considerado e zero nos outros pontos nodais do elemento.

Portanto, há singularidades nas integrais correspondentes às submatrizes da diagonal de \mathbf{G} e \mathbf{H} e, ainda, no vetor \mathbf{B} , cuja integral não envolve funções de interpolação para a carga uniformemente distribuída considerada.

Os procedimentos adotados para esses casos são mostrados nos itens que se seguem.

6.5.1 – Cálculo das submatrizes da diagonal de \mathbf{G} e do vetor \mathbf{B}

No caso da matriz \mathbf{G} e do vetor \mathbf{B} , as singularidades que ocorrem são de ordem logarítmica ($\ln r$). As submatrizes da diagonal de \mathbf{G} envolvem integrais dos tensores u_{ij}^* e, nos subvetores de \mathbf{B} , a singularidade deve-se aos tensores $u_{i\alpha}^*$, pois $v_{i,\alpha}^*$ não possuem

singularidade. Para resolver o problema, podem-se adotar procedimentos especiais, como a utilização de integração com funções de peso logarítmicas ou, ainda, uma transformação quadrática envolvendo a coordenada intrínseca η e a coordenada θ dos pontos de integração. Neste trabalho, usa-se a transformação de coordenadas (APÊNDICE B), uma vez que a mesma produz uma matriz jacobiana nula, o que elimina a singularidade que aparece nas integrais, referente ao ponto considerado.

6.5.2 – Cálculo das submatrizes da diagonal de H

As submatrizes da diagonal de H , que correspondem às submatrizes C_i somadas às submatrizes \hat{H}_{ij} , são expressas através das integrais envolvendo os tensores fundamentais p_{ij}^* e possuem singularidades de ordem $\ln r$ e r^{-1} .

Entretanto, essas submatrizes podem ser obtidas sem que se calculem explicitamente os valores de C_i e de \hat{H}_{ij} , através da consideração de que, para movimentos de translação de corpo rígido, não há forças aplicadas. Portanto, a equação (6.15) fica:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (6.59)$$

Para um ponto ξ qualquer do contorno Γ , tem-se, para movimentos de corpo rígido, no caso de placas finitas, a seguinte expressão, equivalente à equação (6.59):

$$C_{ij} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (6.60)$$

Esta equação admite soluções não-triviais para os seguintes deslocamentos de corpo rígido:

$$\mathbf{u} = (1; 0; r_1 = x_1(\xi) - x_1(x)) \quad (6.61)$$

$$\mathbf{u} = (0; 1; r_2 = x_2(\xi) - x_2(x)) \quad (6.62)$$

$$\mathbf{u} = (0; 0; 1) \quad (6.63)$$

Substituindo (6.61) a (6.63) em (6.60), chega-se a:

$$C_{i\alpha} + \int_{\Gamma} [p_{i\alpha}^* + (x_{\alpha}(\xi) - x_{\alpha}(x))p_{i3}^*] d\Gamma = 0 \quad (6.64)$$

$$C_{i3} + \int_{\Gamma} p_{i3}^* d\Gamma = 0 \quad (6.65)$$

Então, as submatrizes (3x3) da diagonal de \mathbf{H} podem ser calculadas pela expressão seguinte, escrita em forma matricial:

$$\mathbf{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NN} \mathbf{H}_{pq} \mathbf{D}_{qp} \quad p = 1, 2, \dots, NN \quad (6.66)$$

sendo NN o número de pontos nodais e \mathbf{D}_{qp} a matriz que contém os deslocamentos de corpo rígido, dada por:

$$\mathbf{D}_{qp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_1 = x_1(p) - x_1(q) & r_2 = x_2(p) - x_2(q) & 1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

6.5.3 – Integrais quase-singulares no cálculo dos esforços

Quando há um maior refinamento da malha nas proximidades do contorno do problema, no que diz respeito às células internas, os seus baricentros tendem a ficar muito próximos de alguns pontos do contorno. Diz-se que existe uma quase-singularidade, pois a distância entre o ponto fonte e o ponto campo torna-se próxima de zero.

Para resolver o problema das integrais de contorno quase-singulares que ocorrem no cálculo dos esforços nos pontos internos quando estes se situam muito próximos do contorno, utiliza-se uma transformação de coordenadas de terceiro grau (APÊNDICE B).

6.6 – CÉLULAS INTERNAS

Neste trabalho, são utilizadas células internas triangulares constantes. A Figura 6.7 apresenta uma célula com as coordenadas dos vértices, inclusive do baricentro, no sistema intrínseco de coordenadas (ζ_1, ζ_2) .

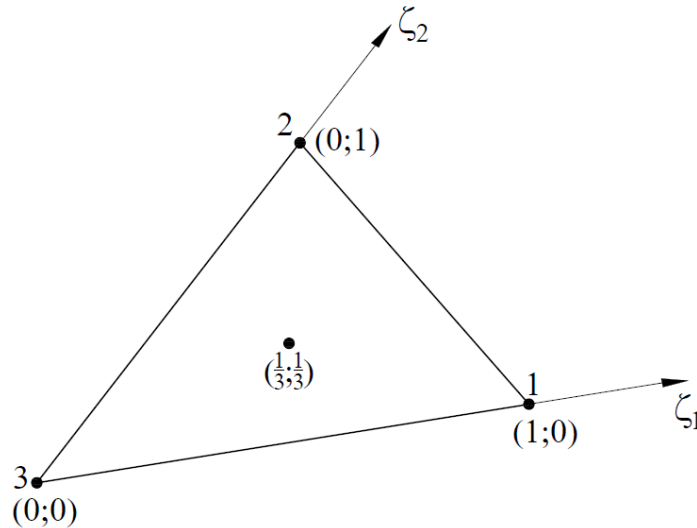


Figura 6.7 – Célula triangular e sistema intrínseco de coordenadas (ζ_1, ζ_2) .

As coordenadas de um ponto do interior da célula são calculadas pela expressão (6.4), sendo a matriz de funções de interpolação \hat{M} representada por:

$$\hat{M} = [I\zeta_1 \quad I\zeta_2 \quad I\zeta_3] \quad (6.68)$$

em que I é a matriz identidade de ordem 2 e ζ_3 é relacionado com as outras duas coordenadas de área através de:

$$\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 \quad (6.69)$$

Na equação (6.4), tem-se o vetor $\mathbf{x}^{(m)}$ que armazena as coordenadas x_1 e x_2 de cada um dos vértices do triângulo, sendo dado por:

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas de área é dada por:

$$x_1 = x_1^1 \zeta_1 + x_1^2 \zeta_2 + x_1^3 \zeta_3 \quad (6.71)$$

$$x_2 = x_2^1 \zeta_1 + x_2^2 \zeta_2 + x_2^3 \zeta_3 \quad (6.72)$$

Usando a relação anterior juntamente com (6.69), obtém-se o jacobiano da transformação:

$$|\hat{\mathbf{J}}| = 2A \quad (6.73)$$

em que A é a área do triângulo.

As deformações plásticas num ponto qualquer da célula são calculadas pela equação (6.5) e como estão sendo utilizadas células constantes, tem-se:

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{I} \quad (6.74)$$

sendo a matriz identidade \mathbf{I} , neste caso, de ordem 3.

Tem-se, ainda, o vetor:

$$\boldsymbol{\chi}^{p(n)} = \begin{pmatrix} \chi_{11}^p \\ \chi_{12}^p \\ \chi_{22}^p \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

cujas componentes são as deformações plásticas no ponto situado no baricentro da célula.

Escrevendo, agora, as coordenadas homogêneas ζ_α em termos das coordenadas cartesianas x_1 e x_2 , tem-se:

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^o + b_\alpha x_1 + a_\alpha x_2) \quad (6.76)$$

sendo α o ponto ao qual a função se refere, e ainda:

$$a_\alpha = x_1^\gamma - x_1^\beta \quad (6.77)$$

$$b_\alpha = x_2^\beta - x_2^\gamma \quad (6.78)$$

$$2A_\alpha^o = x_1^\beta x_2^\gamma - x_1^\gamma x_2^\beta \quad (6.79)$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad (6.80)$$

com $\alpha = 1, 2, 3$ para $\beta = 2, 3, 1$ e $\gamma = 3, 1, 2$.

Para o cálculo da matriz \mathbf{D} , que aparece na expressão dos deslocamentos, usa-se a integral representada em (6.12), levando-se em conta (6.74). Assim, cada célula contribui com uma matriz (3×3) da forma:

$$\mathbf{d} = \int_{\Omega_j} \mathbf{M}_i^* d\Omega \quad (6.81)$$

Escrevendo \mathbf{M}_i^* na forma expandida, considerando que seus elementos são obtidos a partir da expansão do somatório existente no último termo da expressão (5.56), obtém-se:

$$\mathbf{M}_i^* = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{M}_i^* \\ \dots \\ {}_2\mathbf{M}_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{111}^* & 2M_{121}^* & M_{221}^* \\ M_{112}^* & 2M_{122}^* & M_{222}^* \\ \dots \\ M_{113}^* & 2M_{123}^* & M_{223}^* \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

Para o cálculo das matrizes D' e D'' , que aparecem nas expressões dos esforços, cada célula contribui com uma matriz (5×3) da forma (englobando as duas matrizes em uma única):

$$\hat{d} = \int_{\Omega_j} \hat{M}_i^* d\Omega \quad (6.83)$$

Escrevendo \hat{M}_i^* de forma expandida, considerando que seus elementos são obtidos a partir da expansão dos somatórios das integrais que contêm o termo plástico $\chi_{\gamma\theta}^p$ em (5.67) e (5.68), obtém-se:

$$\hat{M}_i^* = \begin{bmatrix} M_i^{*'} \\ \dots \\ M_i^{*''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1111}^* & 2M_{1112}^* & M_{1122}^* \\ M_{1211}^* & 2M_{1212}^* & M_{1222}^* \\ M_{2211}^* & 2M_{2212}^* & M_{2222}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{3111}^* & 2M_{3112}^* & M_{3122}^* \\ M_{3211}^* & 2M_{3212}^* & M_{3222}^* \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

Uma forma de se efetuar a integração seria utilizando a quadratura de Hammer; porém, em virtude da singularidade existente nos casos em que o ponto fonte coincide com algum ponto da célula, torna-se mais conveniente definir um sistema de coordenadas polares (r, ϕ) centrado no ponto fonte γ e efetuar a integração em relação a r e em relação a ϕ . Neste caso:

$$d\Omega = r dr d\phi \quad (6.85)$$

$$x_1(x) = x_1^\gamma + r \cos \phi \quad (6.86)$$

$$x_2(x) = x_2^\gamma + r \sin \phi \quad (6.87)$$

Considerando as equações (6.86) e (6.87), as expressões correspondentes ao tensor M_i^* , dadas em (5.71) e (5.72), podem ser escritas como:

$${}_1\mathbf{M}_i^*(\xi, x) = \frac{1}{r} {}_1\mathbf{A}(\xi, x) \quad (6.88)$$

$${}_2\mathbf{M}_i^*(\xi, x) = {}_2\mathbf{A}(\xi, x) \quad (6.89)$$

As expressões correspondentes ao tensor $\hat{\mathbf{M}}_i^*$, dadas em (5.79) e (5.80), ficam como:

$$\mathbf{M}_i^{*'}(\xi, x) = \frac{1}{r^2} \mathbf{A}'(\xi, x) \quad (6.90)$$

$$\mathbf{M}_i^{*''}(\xi, x) = \frac{1}{r} \mathbf{A}''(\xi, x) \quad (6.91)$$

No caso da matriz \mathbf{d} , quando o ponto singular γ situa-se em um dos vértices da célula (Figura 6.8), o que ocorre quando este ponto singular encontra-se no contorno, coincidindo com um dos vértices, as submatrizes ${}_1\mathbf{d}$ e ${}_2\mathbf{d}$ correspondentes podem ser representadas na forma:

$${}_1\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{r} {}_1\mathbf{A} r dr d\phi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_1\mathbf{A} dr d\phi \right) \quad (6.92)$$

$${}_2\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_2\mathbf{A} r dr d\phi \right) \quad (6.93)$$

sendo:

$$R(\phi) = \frac{-2A}{b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sen \phi} \quad (6.94)$$

em que:

$$\cos \phi = \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (6.95)$$

$$\sen \phi = \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (6.96)$$

Observa-se que, neste caso, a singularidade é eliminada e pode-se efetuar a integração utilizando a quadratura de Gauss, tanto em relação a r como em relação a ϕ . Para isto, expressa-se a variável ϕ como:

$$\phi = \frac{\eta}{2}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \quad (6.97)$$

e a variável r como:

$$r = \frac{R(\phi)}{2}\eta \quad (6.98)$$

sendo η uma coordenada adimensional, definida no intervalo $[-1, 1]$.

Os jacobianos destas transformações ficam:

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \quad (6.99)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{R(\phi)}{2} \quad (6.100)$$

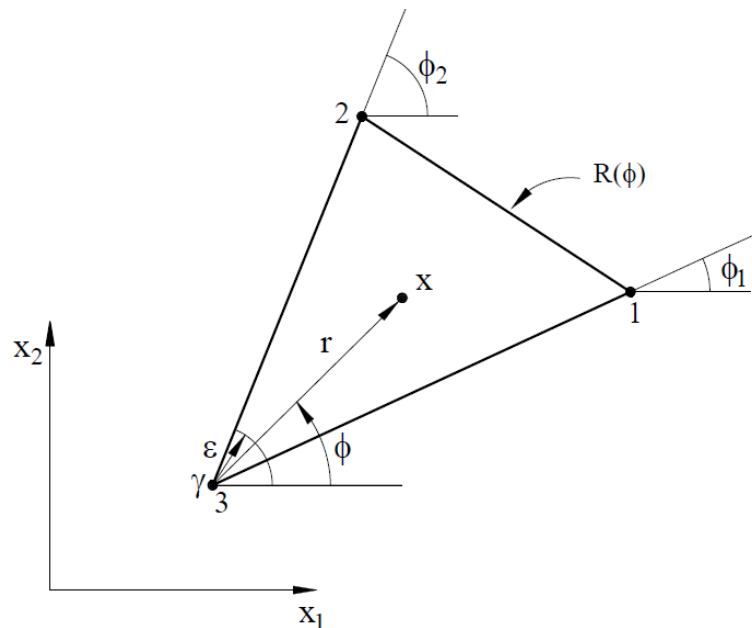


Figura 6.8 – Célula triangular com ponto singular γ coincidindo com um dos vértices do triângulo.

Ainda no caso da matriz \mathbf{d} , quando o ponto singular γ situa-se no contorno e coincide com um ponto qualquer de um dos bordos da célula (Figura 6.9), pode-se considerar a mesma dividida em duas partes, integrando separadamente cada parte e somando os resultados correspondentes. Assim:

$${}_1\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_1\mathbf{A} \, dr \, d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} {}_1\mathbf{A} \, dr \, d\phi \right) \quad (6.101)$$

$${}_2\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\mathbf{A} \, r \, dr \, d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} {}_2\mathbf{A} \, r \, dr \, d\phi \right) \quad (6.102)$$

sendo:

$$R'_\gamma(\phi) = \frac{-2A'}{b'_\gamma \cos \phi + a'_\gamma \sin \phi} \quad (6.103)$$

$$R''_\gamma(\phi) = \frac{-2A''}{b''_\gamma \cos \phi + a''_\gamma \sin \phi} \quad (6.104)$$

Neste caso, a integração também é feita numericamente, utilizando a quadratura de Gauss, tanto em relação a r como em relação a ϕ .

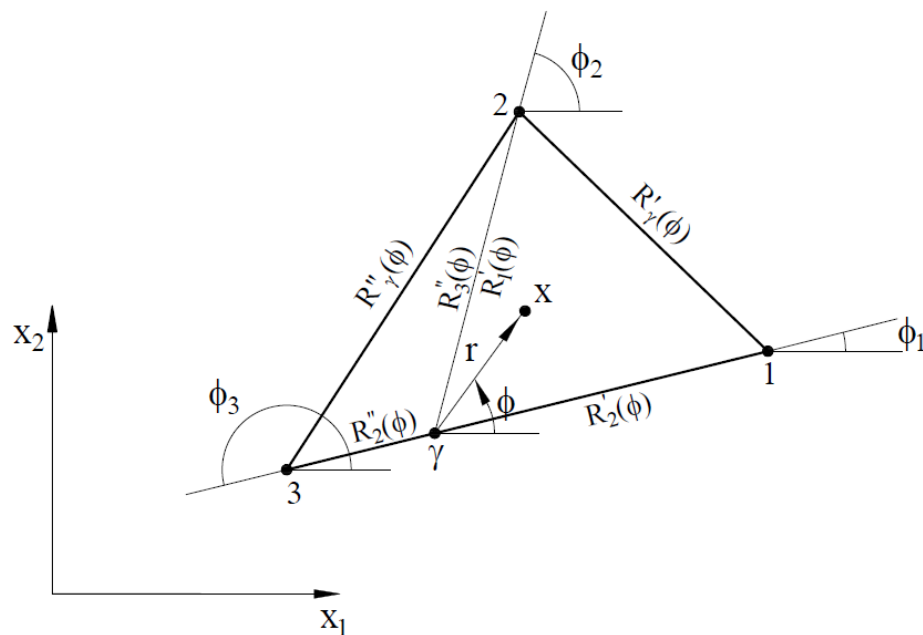


Figura 6.9 – Célula triangular com ponto singular γ situado em um dos lados do triângulo.

No caso da matriz $\hat{\mathbf{d}}$, quando o ponto singular γ coincide com o ponto do interior (baricentro) da célula onde se está integrando (Figura 6.10), deve-se dividir a célula em três partes, o que conduz a:

$$\mathbf{d}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{A}' dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{A}' dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'''_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{A}' dr d\phi \right) \quad (6.105)$$

$$\mathbf{d}'' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} \mathbf{A}'' dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} \mathbf{A}'' dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'''_\gamma(\phi)} \mathbf{A}'' dr d\phi \right) \quad (6.106)$$

sendo R'_γ e R''_γ calculados analogamente ao caso anterior e R'''_γ é calculado através de:

$$R'''_\gamma(\phi) = \frac{-2A'''}{b'''_\gamma \cos \phi + a'''_\gamma \sin \phi} \quad (6.107)$$

Para a integração na matriz \mathbf{d}' , usa-se a quadratura de Gauss em relação a ϕ e, em virtude da singularidade r^{-1} apresentada, utiliza-se a quadratura de Kutt para integrais em partes finitas (APÊNDICE C) para integrar em relação a r . No caso da matriz \mathbf{d}'' , a integração é feita numericamente, utilizando a quadratura de Gauss, tanto em relação a r como em relação a ϕ .

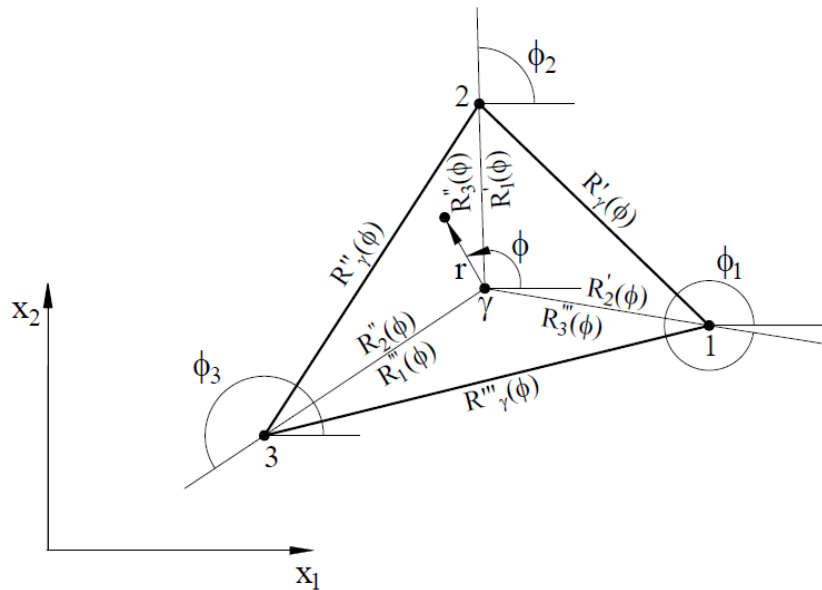


Figura 6.10 – Célula triangular com ponto singular γ coincidindo com o ponto interno da célula.

Para a matriz \mathbf{d} , no caso geral em que o ponto singular γ não pertence à célula (Figura 6.11), podendo este ponto singular estar no contorno ou no domínio do problema, pode-se também utilizar a transformação de coordenadas para o sistema (r, ϕ) , ficando:

$${}_1\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\mathbf{A} \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\mathbf{A} \, dr \, d\phi \right) \quad (6.108)$$

$${}_2\mathbf{d} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\mathbf{A} \, r \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\mathbf{A} \, r \, dr \, d\phi \right) \quad (6.109)$$

O mesmo pode ser feito para a matriz $\hat{\mathbf{d}}$, o que conduz a:

$$\mathbf{d}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{A}' \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{A}' \, dr \, d\phi \right) \quad (6.110)$$

$$\mathbf{d}'' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \mathbf{A}'' \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \mathbf{A}'' \, dr \, d\phi \right) \quad (6.111)$$

Em quaisquer destes casos, tem-se:

$$R_\alpha(\phi) = \frac{-2A \, {}^\gamma\xi_\alpha}{b_\alpha \cos \phi + a_\alpha \sin \phi} \quad (6.112)$$

sendo ${}^\gamma\xi_\alpha$ o valor da função de interpolação no ponto fonte γ .

Além disso, integra-se numericamente em relação a r e a ϕ , usando a quadratura de Gauss, pois as integrais são todas regulares.

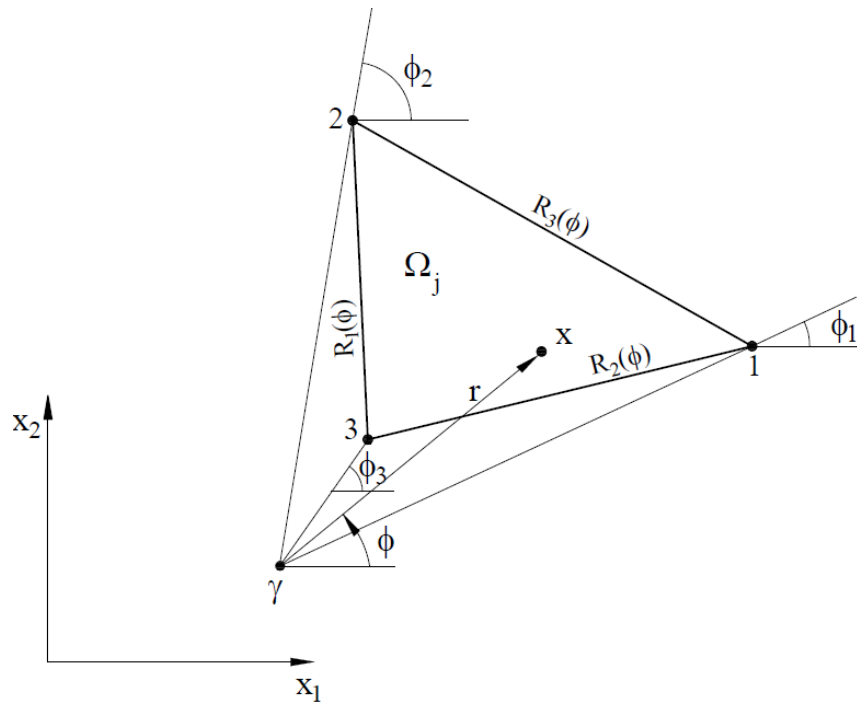


Figura 6.11 – Célula triangular com ponto singular γ fora da célula.

6.7 – TÉCNICA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO

Apresenta-se, nesta seção, a abordagem numérica empregada para o cálculo de placas de Reissner de comportamento elastoplástico baseada em um procedimento de deformação inicial.

O processo incremental começa com a redução do máximo momento equivalente calculado nos pontos das células, representado por M_e^{max} , ao momento de escoamento inicial M_o . Um fator de carga inicial é, portanto, calculado como:

$$\mu_o = \frac{M_o}{M_e^{max}} \quad (6.113)$$

Valores subsequentes do fator de carga para o processo incremental são calculados pela seguinte equação recursiva:

$$\mu_i = \mu_{i-1} + \Delta\mu_i \quad (6.114)$$

sendo $\Delta\mu_i$ o incremento definido como uma dada porcentagem β_i em termos da carga no primeiro escoamento:

$$\Delta\mu_i = \beta_i \mu_o \quad (6.115)$$

As equações (6.34) a (6.36) podem ser escritas, para um procedimento incremental, como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\chi}^p + \Delta\boldsymbol{\chi}^p) + \mu_i \mathbf{m} \quad (6.116)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}'(\boldsymbol{\chi}^p + \Delta\boldsymbol{\chi}^p) + \mu_i \mathbf{n}' \quad (6.117)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}''(\boldsymbol{\chi}^p + \Delta\boldsymbol{\chi}^p) + \mu_i \mathbf{n}'' \quad (6.118)$$

Para cada valor de μ_i , o incremento de deformação plástica é determinado iterativamente em cada ponto interno considerado, seguindo-se uma técnica de solução para uma formulação de deformação inicial, análoga àquela apresentada em Telles e Brebbia (1979; 1981) e em Telles (1983), como se segue:

(1) Cálculo dos esforços \mathbf{M} e \mathbf{Q} através de (6.117) e (6.118), respectivamente.

(2) Cálculo de:

(2.1) $\hat{\chi}_{ij}$ através de (4.37), independente do critério de escoamento;

(2.2) χ_{et} utilizando (4.42) e (4.52), para os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca, respectivamente;

(2.3) $\Delta\chi_e^p \geq 0$ por (4.49) e (4.56), para os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca, respectivamente.

Os valores de M_o e H' que aparecem em (4.49) e (4.56) são calculados antes do incremento de carga.

(3) Verificação da convergência, comparando-se $\Delta\chi_e^p$ calculado com o seu valor anterior.

- (4) Cálculo da nova estimativa do incremento de deformação inicial $\Delta\chi_{ij}^p$ por (4.43), independente do critério de escoamento utilizado.
- (5) Continua com o próximo ponto, recomeçando o processo em (2) até que todos os pontos tenham sido considerados.
- (6) Recomeça uma nova iteração a partir do item (1).

As iterações são realizadas até que seja obtida a convergência em todos os pontos considerados, para a tolerância estabelecida.

Os valores de $\Delta\chi^p$ obtidos ao final das iterações são somados com χ^p e seu valor é usado como uma estimativa inicial para a primeira iteração do incremento de carga seguinte.

Deve-se observar que apenas as equações relativas aos momentos são utilizadas no processo incremental-iterativo e, ainda, que tanto as matrizes K , S' e S'' como os vetores m , n' e n'' , são montados somente uma vez, no início do processo, o que representa uma economia no tempo computacional.

6.8 – ESTRUTURA DO PROGRAMA

O programa computacional que faz a análise elastoplástica de placas pelo MEC, considerando a teoria de Reissner, está desenvolvido em linguagem FORTRAN.

O programa principal é modulado em sub-rotinas que realizam as várias etapas da análise. O programa tem as seguintes etapas: leitura e impressão de dados, montagem das matrizes, resolução do problema elástico e cálculo da carga no primeiro escoamento, processo incremental e impressão dos resultados.

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos pela análise elasto-plástica utilizando o MEC. Os resultados são validados por meio de comparação com resultados de outros trabalhos, obtidos por métodos analíticos e numéricos.

7.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na sequência, a fim de validar a formulação integral desenvolvida e a implementação numérica do algoritmo incremental-iterativo, são apresentados quatro exemplos de análise elasto-plástica; são eles:

- Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada;
- Exemplo 2: Viga simplesmente apoiada;
- Exemplo 3: Placa circular simplesmente apoiada;
- Exemplo 4: Placa quadrada engastada.

Nos três primeiros exemplos admite-se comportamento elasto-plástico perfeito e, no último exemplo, admite-se material com endurecimento linear após o escoamento inicial.

Em todos os casos utiliza-se o critério de escoamento de von Mises e, no primeiro e no último exemplos, usa-se, também, o critério de Tresca.

7.2 – ANÁLISE NUMÉRICA

7.2.1 – Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada

Este exemplo consiste numa placa quadrada simplesmente apoiada de lado $l = 1$ e espessura $h = 0,01$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída q . Admitiu-se material idealmente plástico ($H' = 0$) com o coeficiente de Poisson correspondente a $\nu = 0,3$, o módulo de elasticidade longitudinal $E = 10,92$ e a tensão de escoamento unidirecional $\sigma_0 = 1.600$. Utilizam-se os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

O mesmo exemplo foi analisado por Owen e Hinton (1980), utilizando o MEF com o critério de escoamento de von Mises, e por Karam (1992) e Karam e Telles (1992), empregando o MEC com os critérios de von Mises e de Tresca. Em todos estes trabalhos foi utilizado um procedimento de tensão inicial.

Devido à simetria da placa, apenas um quarto da mesma foi discretizado. Na Figura 7.1(a), tem-se a discretização utilizada neste trabalho, que também foi empregada por Karam (1992) e Karam e Telles (1992), em que são usados 8 elementos de contorno e 16 células internas. Na Figura 7.1(b), tem-se a discretização em elementos finitos utilizada por Owen e Hinton (1980).

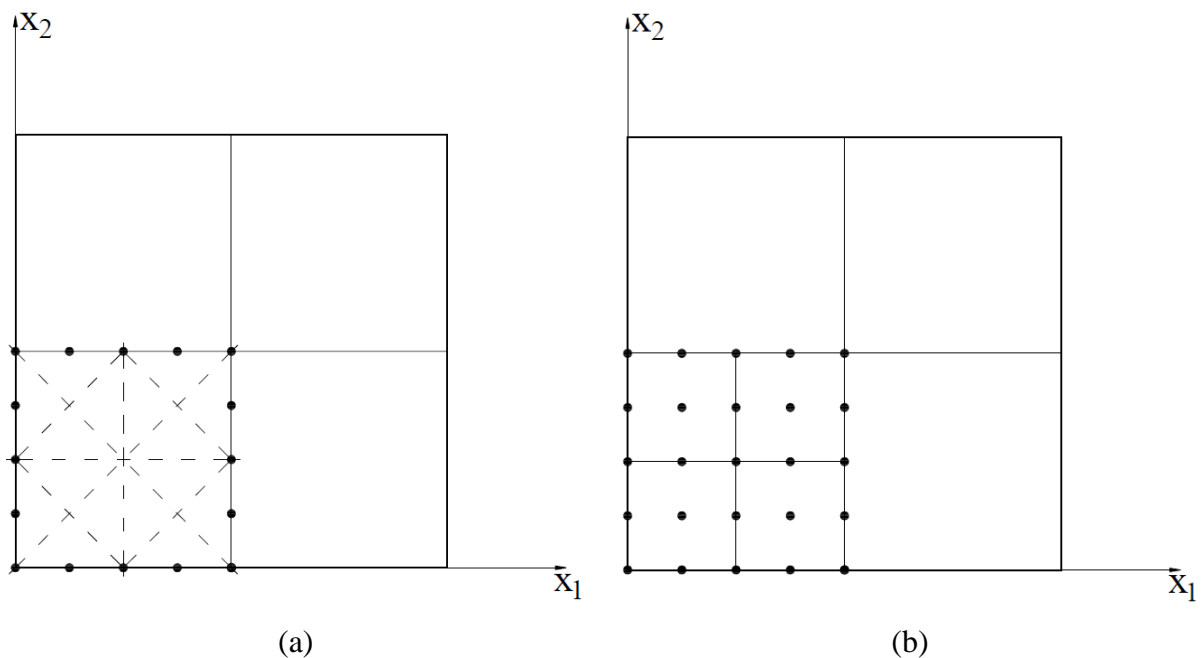


Figura 7.1 – Discretização da placa quadrada: (a) com elementos de contorno e células internas; (b) com elementos finitos.

Na Figura 7.2, apresenta-se a curva carga-flecha correspondente ao ponto situado no centro da placa, obtida a partir da formulação desenvolvida no presente trabalho, em comparação com os resultados obtidos por Owen e Hinton (1980), Karam (1992) e Karam e Telles (1992). Observa-se que os resultados obtidos comparam-se bem aos destes autores.

Os valores das flechas encontrados por Karam (1992) e Karam e Telles (1992) e, também, na presente pesquisa, utilizando o critério de escoamento de Tresca são maiores do que os valores obtidos empregando o critério de von Mises, para um mesmo nível de solicitação. Observa-se uma tendência dos pontos da simulação utilizando o critério de Tresca

permanecerem abaixo da curva que emprega o critério de von Mises, o que demonstra quão mais conservador é o critério de Tresca, uma vez que o escoamento por este critério pode ocorrer com tensões mais baixas se comparado ao critério de von Mises.

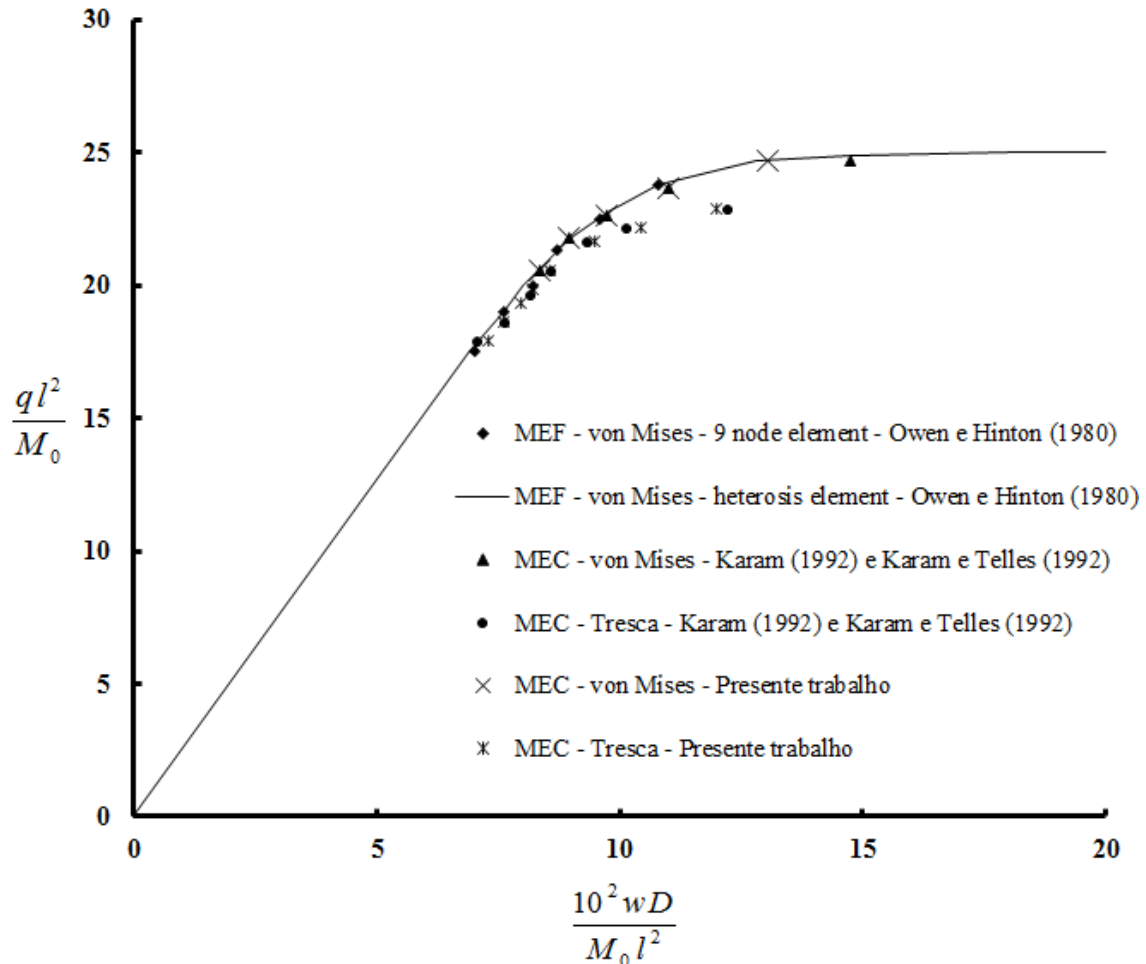


Figura 7.2 – Curva carga-flecha da placa quadrada.

7.2.2 – Exemplo 2: Viga simplesmente apoiada

Uma viga simplesmente apoiada é considerada neste exemplo, com comprimento $l = 3.000\text{mm}$, largura $b = 150\text{mm}$ e espessura $h = 900\text{mm}$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída q . Admitiu-se material idealmente plástico ($H' = 0$) com o coeficiente de Poisson correspondente a $\nu = 0,3$, o módulo de elasticidade longitudinal $E = 210\text{ kN/mm}^2$ e a tensão de escoamento unidirecional $\sigma_0 = 0,25\text{ kN/mm}^2$. Utiliza-se o critério de escoamento de von Mises.

Nota-se que, como $h/l=0,3$, os efeitos das deformações cisalhantes transversais são esperados.

A Figura 7.3 apresenta a discretização empregada neste caso, consistindo em 32 elementos de contorno e 4 células internas. Deve-se notar que as células internas são colocadas na região central da viga, onde é esperada a ocorrência da plastificação. Esta discretização também foi considerada em Karam (1992) e Karam e Telles (1992) para o mesmo problema.

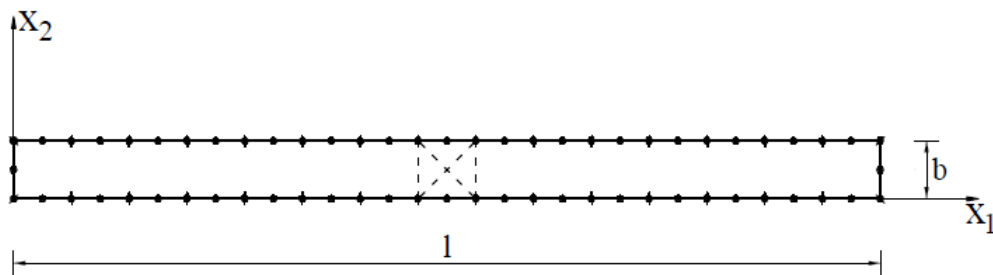


Figura 7.3 – Discretização da viga em elementos de contorno e células internas.

Na Figura 7.4, mostra-se a curva carga-flecha para os resultados obtidos no centro da viga com a presente formulação, em comparação com os obtidos por Karam (1992) e Karam e Telles (1992), usando o MEC com um procedimento de tensão inicial e o critério de escoamento de von Mises.

A simulação diverge no primeiro incremento de carga, como esperado para este caso, indicando a formação da rótula plástica e a condição de sistema hipostático.

O valor do deslocamento transversal de $4,49 \text{ mm}$ correspondente à carga limite de $0,044 \text{ kN/mm}^2$ obtido no presente trabalho está de acordo com o valor $4,46 \text{ mm}$ obtido por Karam (1992) e Karam e Telles (1992) para a mesma carga limite e com o valor $4,48 \text{ mm}$ calculado a partir da teoria de vigas de Timoshenko (Timoshenko e Goodier, 1970), que leva em conta as deformações cisalhantes transversais.

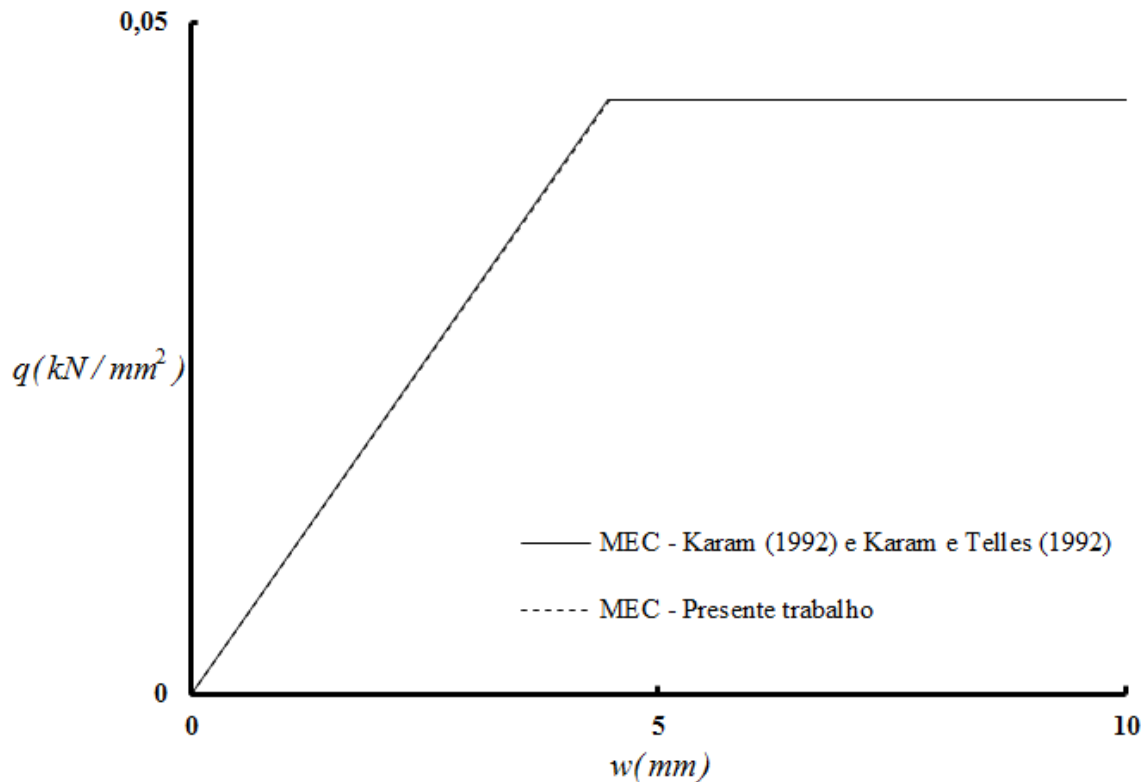


Figura 7.4 – Curva carga-flecha da viga.

7.2.3 – Exemplo 3: Placa circular simplesmente apoiada

Este exemplo consiste em uma placa circular simplesmente apoiada com raio $a = 10 \text{ in}$ (254 mm) e espessura $h = 1 \text{ in}$ ($25,4 \text{ mm}$), sujeita a uma carga uniformemente distribuída q . O material é considerado com o coeficiente de Poisson $\nu = 0,24$, o módulo de elasticidade longitudinal $E = 10.000 \text{ ksi}$ (68.670 MPa) e a tensão de escoamento unidirecional $\sigma_0 = 16 \text{ ksi}$ ($109,872 \text{ MPa}$). Um material idealmente plástico ($H' = 0$) é adotado. Utiliza-se o critério de escoamento de von Mises.

Na Figura 7.5 são apresentadas as discretizações da quarta parte da placa, devido à simetria da mesma. Na Figura 7.5(a), apresenta-se a malha 1, em que são empregados 20 elementos de contorno e 50 células internas. A mesma discretização foi apresentada em Karam e Telles (1998) para este problema. Na Figura 7.5(b) apresenta-se outra discretização utilizada, a malha 2, com 36 elementos de contorno e 162 células internas, em que elementos e células menores são empregados nas proximidades do centro da placa.

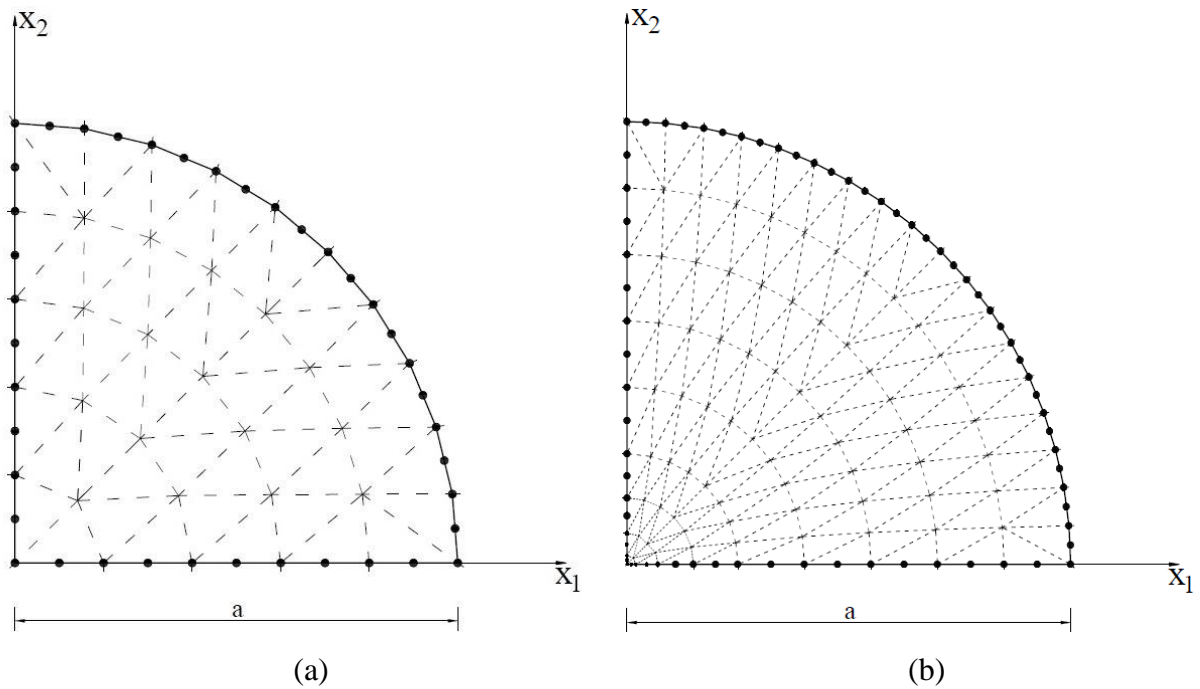


Figura 7.5 – Discretização da placa circular em elementos de contorno e células internas:

(a) malha 1; (b) malha 2.

Este problema também foi analisado por Hopkins e Wang (1954), que fizeram uma análise limite, e por Armen Jr. *et al.* (1970), empregando o MEF com uma discretização do domínio em 50 elementos triangulares lineares, pelo critério de escoamento de von Mises.

No presente trabalho, com a malha 1, o último valor para o qual o programa converge é 6,62 e diverge para 6,67; com a malha 2, o último valor para o qual o programa converge é 6,49 e diverge para 6,54. Os mesmos valores foram obtidos por Karam e Telles (1998) para as mesmas discretizações.

Hopkins e Wang (1954) apresentaram o valor de carga limite de $\rho = 6,51$ e, em Armen Jr. *et al.* (1970) o valor de carga de colapso de $\rho = 6,5$ foi obtido.

Na Fig. 7.6, as curvas carga-flecha para o ponto situado no centro da placa, obtidas com o presente trabalho para as malhas 1 e 2, podem ser vistas em comparação com os resultados obtidos por Karam e Telles (1998). Nesta figura, também está representado o valor da carga limite calculado por Hopkins e Wang (1954).

Pode-se observar que as curvas carga-flecha obtidas com o presente trabalho estão em excelente concordância com os resultados obtidos em Karam e Telles (1998) e os valores de carga limite aqui obtidos estão em excelente acordo com os apresentados por Hopkins e Wang (1954), Armen Jr. *et al.* (1970) e Karam e Telles (1998).

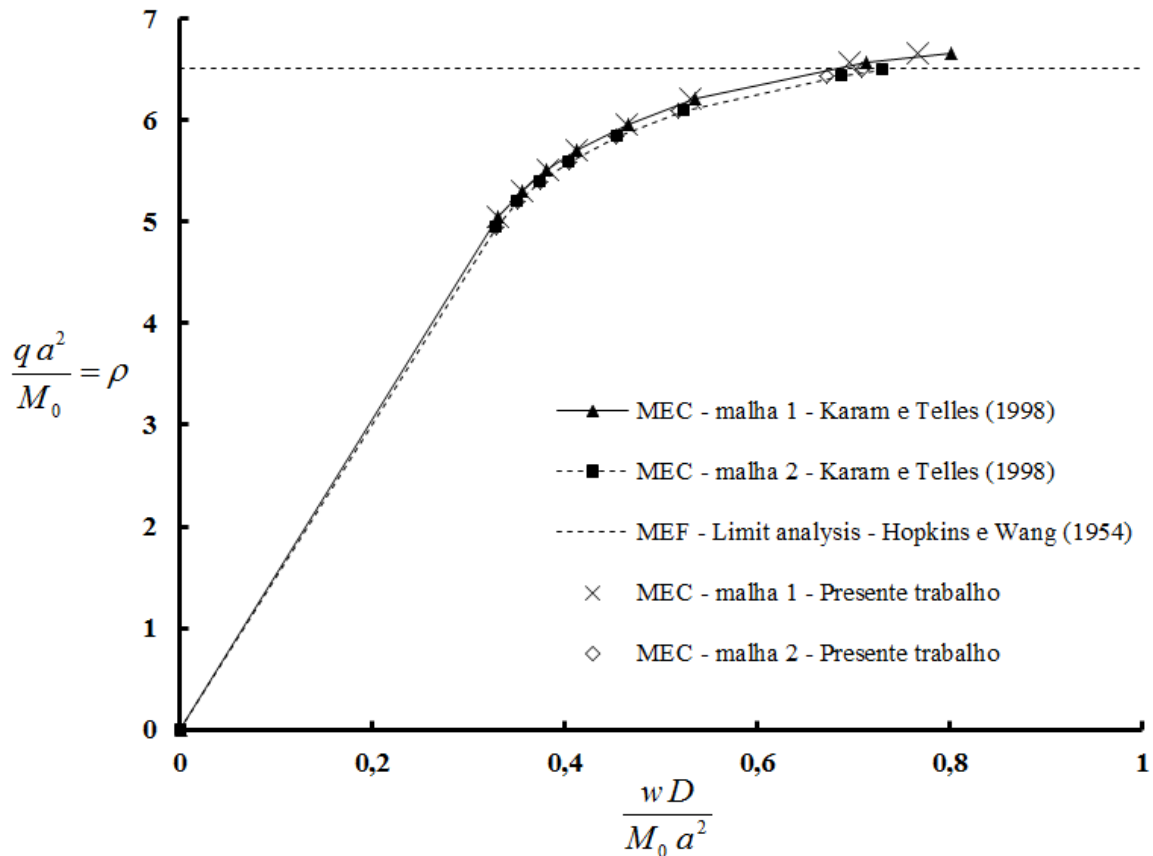


Figura 7.6 – Curva carga-flecha da placa circular.

7.2.4 – Exemplo 4: Placa quadrada engastada

Neste exemplo, admite-se uma placa quadrada engastada nos quatro bordos, de lado $l = 6\text{ m}$ e espessura $h = 0,2\text{ m}$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída q . Têm-se, ainda, como dados do problema, o coeficiente de Poisson correspondente a $\nu = 0,3$, o módulo de elasticidade longitudinal $E = 30.000\text{ MN}/\text{m}^2$ e a tensão de escoamento unidirecional $\sigma_0 = 30\text{ MN}/\text{m}^2$.

Nesta análise, admite-se material com endurecimento linear após o escoamento inicial, conforme Figura 4.2, com $E_T = 300\text{ MN}/\text{m}^2$ e os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

A Figura 7.7 apresenta a discretização de um quarto da placa em elementos de contorno e células internas. Nesta discretização, são usados 24 elementos de contorno e 72 células internas.

O mesmo problema foi analisado por Owen e Figueiras (1983), utilizando o MEF, com uma discretização de um quarto da placa empregando 9 elementos *semiloof*. Estes autores utilizaram o critério de escoamento de von Mises.

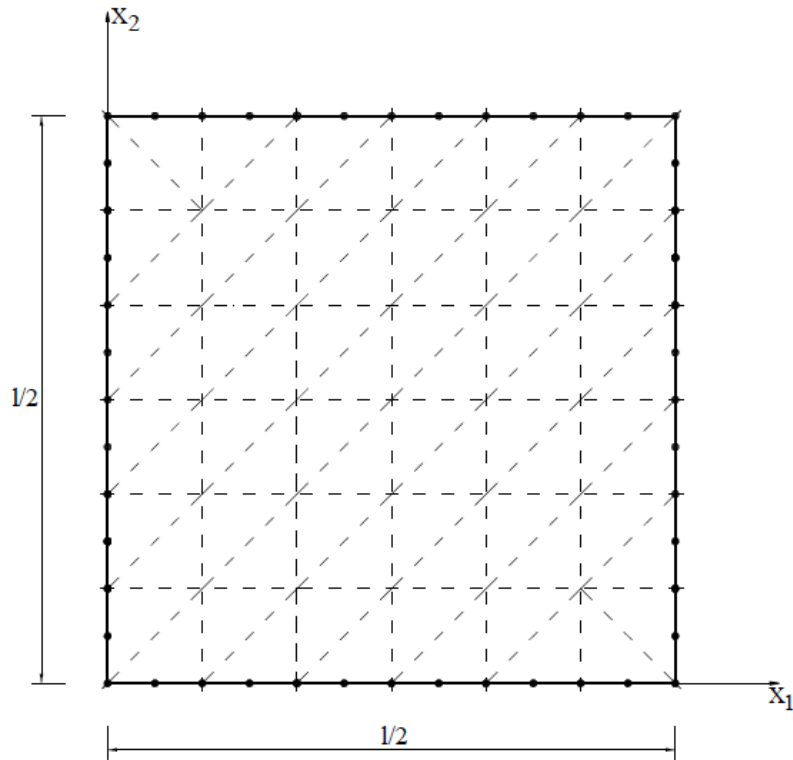


Figura 7.7 – Discretização da placa quadrada engastada em elementos de contorno e células internas.

A curva carga-flecha correspondente ao ponto localizado no centro da placa quadrada é apresentada na Figura 7.8, onde também constam os resultados obtidos por Owen e Figueiras (1983).

Observa-se que os resultados obtidos comparam-se muito bem aos da referência citada. Pelos gráficos, verifica-se que as cargas máximas foram obtidas para valores próximos de $0,4MN/m^2$, sendo no presente trabalho igual a $0,42MN/m^2$ para o critério de escoamento de von Mises e igual a $0,38MN/m^2$ para o critério de Tresca. A curva obtida por este último critério evidencia a ocorrência do escoamento com tensões inferiores às do critério de von Mises, mostrando o caráter conservador do critério de Tresca.

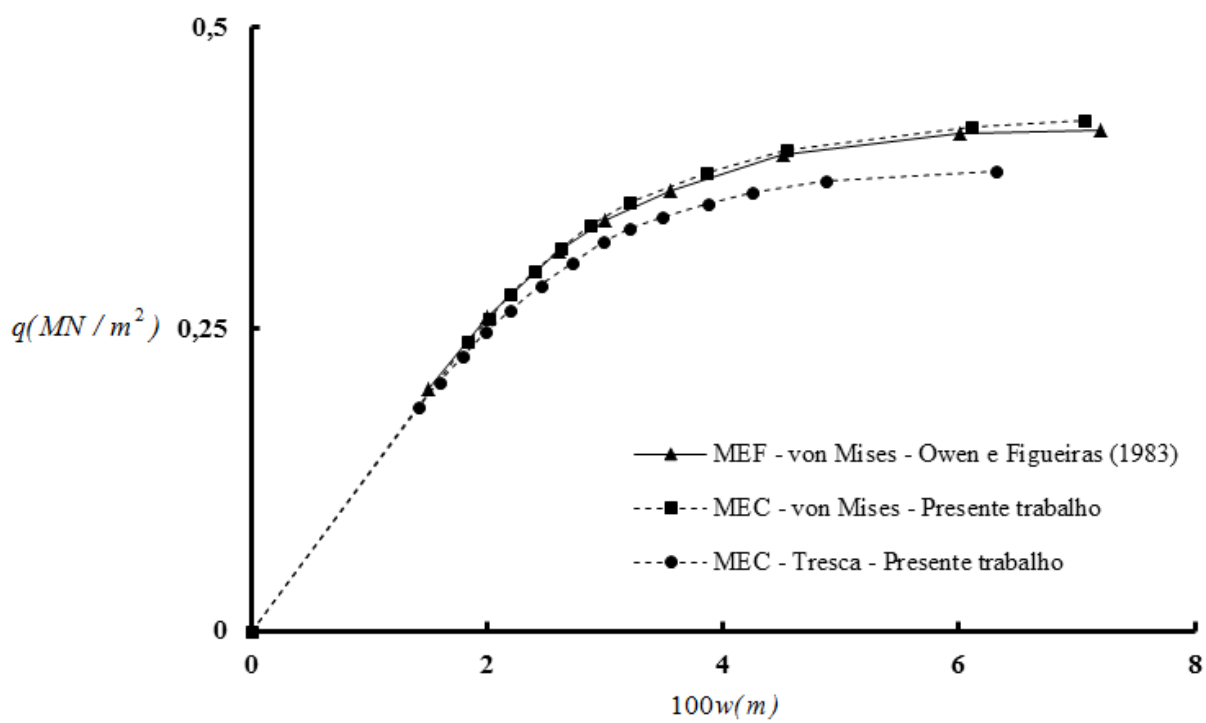


Figura 7.8 – Curva carga-flecha da placa quadrada engastada.

CAPÍTULO 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta os comentários finais, com as conclusões e observações do trabalho, bem como, algumas sugestões para o prosseguimento da pesquisa.

8.1 – CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma formulação para análise elastoplástica de flexão de placas espessas empregando o MEC aplicado à teoria de Reissner, considerando um procedimento de deformação inicial, em vez do procedimento de tensão inicial utilizado nos trabalhos anteriores, e fazer a implementação computacional da referida formulação em linguagem FORTRAN. Com a finalidade de validar o trabalho desenvolvido, foram feitas algumas aplicações numéricas.

O uso do MEC possui várias vantagens em relação aos métodos de domínio, como a redução na quantidade de dados para análise do problema e o menor tamanho das matrizes resultantes, o que pode diminuir também o tempo computacional, por conta da discretização ser necessária, em geral, apenas no contorno do problema. Com o MEC, mesmo no caso de análise com plasticidade, apenas a parte do domínio onde é esperada a existência de deformações plásticas necessita ser discretizada em células internas. Por este método, a precisão dos esforços nos pontos internos é da mesma ordem de grandeza da precisão dos deslocamentos, pois esses esforços são obtidos derivando-se os tensores relativos à solução fundamental, não acarretando a perda de precisão que ocorre no MEF (modelo deslocamento) em que se derivam os deslocamentos para a obtenção dos esforços. O MEC representa satisfatoriamente problemas com domínio infinito, para os quais outros métodos são menos adequados.

No desenvolvimento da formulação, foi empregado um procedimento de deformação inicial, similar ao que foi utilizado em Telles e Brebbia (1979; 1981) e em Telles (1983) para problemas bi e tridimensionais.

Adotou-se a teoria clássica da plasticidade, na qual as deformações plásticas são independentes do tempo de atuação do carregamento. Os critérios de escoamento utilizados

foram o de von Mises e o de Tresca, tendo este último um caráter mais conservador, obtendo maiores deslocamentos para um mesmo nível de sollicitação.

Para o tratamento das placas elastoplásticas pelo MEC, foram obtidas, a partir das equações básicas de Reissner, as equações integrais que governam o problema, incluindo as equações dos deslocamentos em pontos internos e em pontos do contorno e dos esforços nos pontos internos. Além disso, foram deduzidas as expressões dos tensores que multiplicam as deformações plásticas, assim como as expressões para os termos livres das equações integrais.

Para a transformação das equações integrais em equações algébricas a fim de resolver o sistema de equações por um processo incremental-iterativo (por conta da plasticidade), foram utilizadas discretizações com elementos de contorno quadráticos e células internas triangulares constantes, ambos com geometria linear.

O sistema de equações é constituído por três equações por ponto nodal do contorno (cada uma associada a um deslocamento generalizado) e equações adicionais de momentos relacionadas às variáveis incógnitas (deformações plásticas) associadas ao problema de plasticidade.

Admitiu-se uma placa de espessura constante, de material homogêneo e isotrópico, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, sofrendo deformações plásticas apenas de flexão. As integrais de domínio relativas ao carregamento transversal foram transformadas em integrais de contorno. Como as soluções fundamentais utilizadas foram as mesmas de trabalhos anteriores para placas de Reissner (Van der Weeën, 1982a e 1982b; Karam e Telles, 1988), não incorporando o efeito de plasticidade, permaneceu uma integral de domínio relativa a este efeito, requerendo que o domínio fosse discretizado em células internas.

Os problemas de descontinuidade da normal e das condições de contorno foram resolvidos com a adoção de nós duplos e elementos descontínuos, com resultados bastante satisfatórios.

As integrais foram resolvidas numericamente, tanto para os elementos de contorno quanto para as células internas. As integrais regulares foram resolvidas através da quadratura de Gauss e, para as integrais singulares, foram utilizados procedimentos especiais como transformação de coordenadas e a quadratura de Kutt.

Adotou-se a hipótese simplificadora de plastificação simultânea de todos os pontos da seção transversal, em vez da consideração de plastificação gradual ao longo da espessura da placa.

O refinamento da malha, com a utilização de um maior número de elementos e células, promoveu a convergência da simulação para os resultados das referências consideradas.

Os resultados com procedimento de tensão inicial e procedimento de deformação inicial praticamente convergem para as mesmas curvas, para cada um dos critérios de escoamento considerados, von Mises e Tresca.

A metodologia apresentada conduziu a resultados muito satisfatórios, com ótima aproximação em relação aos resultados obtidos por outros autores, utilizando tanto o MEC com outra abordagem como outros métodos, analíticos ou numéricos.

Concluindo, pode-se dizer que o MEC, aliado à teoria de Reissner, constitui um instrumento eficiente para a análise de flexão de placas elastoplásticas, conduzindo a excelentes resultados tanto para placas espessas quanto para delgadas.

8.2 – SUGESTÕES

A formulação desenvolvida neste trabalho pode ser estendida a outras análises. Portanto, apresentam-se como sugestões para estudos futuros a consideração de outros tipos de carregamentos transversais além do uniformemente distribuído, de interação solo-estrutura, de outros critérios de escoamento, de viscoplasticidade, de dinâmica e de uma técnica que considera uma distribuição de plasticidade por camadas.

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965) *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1046p.
- Altiero, N. J. and Sikarskie, D.L. (1978) A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form. *Computers & Structures*, 9(n.2):163-168.
- Argyris, J. H. and Kelset, S. (1960) *Energy Theorems and Structural Analysis*. London: Butter-worths.
- Armen Jr., H., Pifko, A. B., Levine, H. S. and Isakson, G. (1970) Plasticity. *Finite Element Techniques in Structural Mechanics*, chapter 8: 209-257, eds. H. Tottenham & C.A. Brebbia, Stress Analysis Publisher.
- Auatt, S. S. M. (2002) *Análise de Flexão de Placas pelo MEC Considerando Elastoplasticidade com Multicamadas e Contato Unilateral*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 122p.
- Bacarji, E. (2001) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Pavimentos de Edifícios*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 160p.
- Banerjee, P. K. (1994) *The Boundary Element Methods In Engineering*, McGraw-Hill.
- Barbirato, J. C. C. (1999) *Método dos Elementos de Contorno com a Reciprocidade Dual para a Análise Transiente Tridimensional da Mecânica do Fraturamento*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 246p.
- Bezine, G. P. (1978) Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions. *Mechanics Research Communications*, 5(n.4):197-206.
- Brebbia, C. A. (1978). *The Boundary Element Method for Engineers*, London: Pentech Press.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. (1984) *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 464p.

Bui, H. D. (1978) Some Remarks About the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations. *International Journal of Solids and Structures*, 14:935-939.

Chueiri, L. H. M. (1994) *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise Elastoplástica de Placas*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 219p.

Costa Jr, J. A. and Brebbia, C. A. (1985) The Boundary Element Method Applied to Plates on Elastic Foundation. *Engineering Analysis*, 174-183.

Cresce, S. H. (2003) *Análise Não-Linear de Pavimentos de Concreto Armado pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 161p.

Fernandes, G. R. (1998) *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise Não-Linear de Placas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 178p.

Fernandes G. R. e Venturini W. S. (2002) Non-Linear Boundary Element Analysis of Plates Applied to Concrete Slabs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26: 169-181.

Fernandes, G. R. e Venturini, W. S. (2005) O Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise Não-Linear de Placas. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, 7(n. 22):29-60.

Forbes, D. J. and Robinson, A. R. (1969) *Numerical Analysis of Elastic Plates and Shallow Shells by an Integral Equation Method*. University of Illinois Structural Research Series Report, n.346.

Fortiu, P. A., Irschik, H. and Ziegler, F. (1994) Modal Analysis of Elastic-Plastic Plate Vibrations by Integral Equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14(n.1):81-97.

Hill, R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press.

Hopkins, H. G. and Wang, A. J. (1954) Load-Carrying Capacities for Circular Plates of Perfectly-Plastic Material with Arbitrary Yield Condition. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 3:117-129.

- Iwamoto, R. K. (2000) *Alguns Aspectos dos Efeitos da Interação Solo-Estrutura em Edifícios de Múltiplos Andares com Fundação Profunda*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 140p.
- Jaswon, M. A., Maiti, M. and Symm, G. T. (1967) Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. *International Journal of Solids and Structures*, 3:309-332.
- Karam, V. J. (1986) *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 142p.
- Karam, V. J. (1992) *Análise de Flexão de Placas pelo MEC Incluindo Não-Linearidade Física*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 158p.
- Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1987) Analysis of Plate Bending by the Boundary Element Method Using Reissner's Theory, RBE – Revista Brasileira de Engenharia. *Caderno de Engenharia Estrutural*, 5(n.1):25-46.
- Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1988) On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory. *Engineering Analysis*, 5(n.1):21-27.
- Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1992) The BEM Applied to Plate Bending Elastoplastic Analysis Using Reissner's Theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9(n.4):351-375.
- Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1998) Nonlinear Material Analysis of Reissner's Plates, in Plate Bending Analysis with Boundary Elements. *Advances in Boundary Elements*, chapter 4:127-163, Ed. Computational Mechanics Publications, England.
- Katsikadelis, J. T. and Kallivokas, L. F. (1988) Plates on Biparametric Elastic Foundation by BDIE Method. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(n.5):847-875.
- Kutt, H. R. (1975) Quadrature Formulae for Finite Part Integrals. *Report Wisk 178*. The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria.
- Mendelson, A. (1968) *Plasticity: Theory and Application*. MacMillan. New York.

- Mendelson, A. (1973) Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity. *Report No. NASA TN D-7418*, NASA.
- Morjaria, M. and Mukherjee, S. (1980) Inelastic Analysis of Transverse Deflection of Plates by the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*, 47(n.2):291-296.
- Moshaiov, A. and Vorus, W. S. (1986) Elasto-plastic Plate Bending Analysis by a Boundary Element Method with Initial Plastic Moments. *International Journal of Solids and Structures*, 22(n.11):1213-1229.
- Mukherjee, S. (1977) Corrected Boundary Integral Equations in Planar Thermoelastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 13(n.4):331-335.
- Natal Jorge, R. M. e Dinis, L. M. J. S. (2004/2005) *Teoria da Plasticidade (Apostila)*. Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto, Portugal.
- Nayak, G. C. and Zienkiewicz, O. C. (1972) Elasto-plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(n.1):113-135.
- Owen, D. R. J. and Figueiras, J. A. (1983) Elastoplastic Analysis of Anisotropic Plates and Shells by the Semiloof Element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19:521-539.
- Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1980) *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- Paiva, J. B. and Venturini, W. S. (1985) Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis. *First Boundary Element Technology Conference*, Adelaide, Austrália, 201-209.
- Providakis C. P. and Beskos D. E. (1994) Dynamics Analysis of Elasto-Plastic Flexural Plates by the D/BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14(n.1):75-80.
- Providakis C. P. and Beskos D. E. (2000) Inelastic Transient Dynamics Analysis of Reissner-Mindlin Plates by the D/BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:383-397.
- Reissner E. (1944) On the Theory of Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 23:184-191.

- Reissner, E. (1945) The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12:A69-A77.
- Reissner E. (1947) On Bending of Elastic Plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:55-68.
- Reissner, E. (1975) On Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11:569-573.
- Reissner, E. (1976) On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 12:545-554.
- Reissner, E. (1986) On Small Deflections of Shear Deformable Elastic Plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(n.2):227-233.
- Reissner, E. (1991) On the Asymptotic Expansions for the Sixth-order Linear Theory Problem of Transverse Bending of Orthotropic Elastic Plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85(n.1):75-88.
- Ribeiro, G. O. (1992) *Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 267p.
- Ribeiro, G. O. e Venturini, W.S. (1989) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno no Cálculo de Placas Através da Teoria de Reissner. *MECOM-89: Anais do X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia – II Encontro Nacional de Mecânica Computacional*; Porto, Portugal.
- Ribeiro G. O. e Venturini, W. S. (1998) Elastoplastic Analysis of Reissner's Plate Using the Boundary Element Method, in Plate Bending Analysis with Boundary Elements. *Advances in Boundary Elements*, chapter 3:101-125, Ed. Computational Mechanic Publications, England.
- Ribeiro, J. R. M. (1976) *Estudo da Validade da Hipótese de Kirchhoff-Love na Teoria das Placas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.
- Ricardella, P. C. (1973) *An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems of Elasticity and Elastoplasticity*. Thesis (Ph.D.) – Carnegie-Mellon University, 374p.

- Sapountzakis, E. J. and Katsikadelis, J. T. (1991) Boundary Element Solution of Plates of Variable Thickness. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(n.6):1241-1256.
- Silva, N. A. e Venturini, W. S. (1990) Aplicação do MEC à Análise de Placas com Vinculação Interna Utilizando a Teoria de Reissner. *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, 925-935.
- Stern, M. (1979) A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Bending Problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15: 769-782.
- Supriyono and Aliabadi, M. H. (2006) Boundary Element Method for Shear Deformable Plates with Combined Geometric and Material Nonlinearities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(n.1):31-42.
- Swedlow, J. L. and Cruse, T. A. (1971) Formulation of Boundary Integral Equation for Three-Dimensional Elastoplastic Flow. *International Journal of Solids and Structures*, 7:1673-1683.
- Taguti, Y. (2010) *Método dos Elementos de Contorno na Resolução do Problema de Segunda Ordem em Placas Delgadas*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Guaratinguetá – SP, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista – UNESP, 189p.
- Telles, J. C. F. (1983) *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.
- Telles, J. C. F. (1987) A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:959-973.
- Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. (1979) On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 3:466-470.
- Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. (1981) The Boundary Element Method in Plasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 5(n.4):275-281.
- Telles, J. C. F. and Carrer, J. A. M. (1991) Implicit Procedures for the Solution of Elastoplastic Problems by the Boundary Element Method. *Mathematical and Computer Modelling*, 15:303-311.

Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1970) *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.

Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger (1970) *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 580p.

Tottenham, H. (1979) The Boundary Element Method for Plates and Shells. *Developments Boundary Element Methods - I*. Banerjee, P. K. e Butterfiels, R. (eds.), London: Applied Science Publishers, 173-205.

Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J. (1956) Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Science*, 23(n.9):805-823.

Van der Weeën, F. (1982a) Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1-10.

Van der Weeën, F. (1982b) Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. *Boundary Elements in Engineering*, 487-499.

Waidemam, L. (2008) *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Placas Enrijecidas Considerando-se Não-Linearidades Física e Geométrica*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 222p.

Wu, B.C. and Altiero, N. J. (1979) A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions. *Computers & Structures*, 10(n.4):703-707.

Xiao-Yan, L., Mao-Kuang, H. and Xiuxi, W. (1990) Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element Method. *Computers & Structures*, 37(n.6):911-916.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS K_0 E K_1

As funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$ podem ser calculadas pelas expansões polinomiais seguintes, para um argumento z real (Abramowitz e Stegun, 1965):

a) Para $0 < z \leq 2$:

$$\begin{aligned}
 K_0(z) = & -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) - 0,57721566 + 0,42278420\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \\
 & + 0,23069756\left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,03488590\left(\frac{z}{2}\right)^6 + 0,00262698\left(\frac{z}{2}\right)^8 + \\
 & + 0,00010750\left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740\left(\frac{z}{2}\right)^{12}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(z) = & \frac{1}{z} \left[z \ln\left(\frac{z}{2}\right) I_1(z) + 1 + 0,15443144 \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \right. \\
 & - 0,67278579\left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897\left(\frac{z}{2}\right)^6 - 0,01919402\left(\frac{z}{2}\right)^8 - \\
 & \left. - 0,00110404\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0,00004686\left(\frac{z}{2}\right)^{12} \right]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 I_0(z) = & 1 + 3,5156229 t^2 + 3,0899424 t^4 + 1,2067492 t^6 + 0,2659732 t^8 + \\
 & + 0,0360768 t^{10} + 0,0045813 t^{12}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z) = & z \left[0,5 + 0,87890594 t^2 + 0,51498869 t^4 + 0,15084934 t^6 + 0,02658733 t^8 + \right. \\
 & \left. + 0,00301532 t^{10} + 0,00032411 t^{12} \right]
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

em que:

$$t = \frac{z}{3,75} \quad (\text{A.5})$$

b) Para $z > 2$:

$$\begin{aligned} K_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} & \left[1,25331414 - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \right. \\ & - 0,01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + 0,00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \\ & \left. + 0,00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} K_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} & \left[1,25331414 + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) - 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \right. \\ & + 0,01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 - 0,00780353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 + 0,00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 - \\ & \left. - 0,00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

As derivadas das funções K_0 e K_1 em relação ao argumento z podem ser obtidas pelas fórmulas de recorrência dadas em Abramowitz e Stegun (1965), ou seja:

$$e^{(\nu-1)\pi i} K_{\nu-1}(z) - e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} e^{\nu\pi i} K_{\nu}(z) \quad (\text{A.8a})$$

$$e^{\nu\pi i} K'_{\nu}(z) = e^{(\nu-1)\pi i} K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} e^{\nu\pi i} K_{\nu}(z) \quad (\text{A.8b})$$

$$e^{(\nu-1)\pi i} K_{\nu-1}(z) + e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1}(z) = 2e^{\nu\pi i} K'_{\nu}(z) \quad (\text{A.8c})$$

$$e^{\nu\pi i} K'_{\nu}(z) = e^{(\nu+1)\pi i} K_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} e^{\nu\pi i} K_{\nu}(z) \quad (\text{A.8d})$$

Com a utilização da fórmula de Euler dada por $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta$, obtém-se, das equações acima, as equações que se seguem.

De (A.8d), com $\nu=0$:

$$K_0'(z) = -K_1(z) \quad (\text{A.9})$$

De (A.8a) e (A.8c), com $\nu=1$:

$$K_0(z) - K_2(z) = -\frac{2}{z} K_1(z) \quad (\text{A.10})$$

$$K_0(z) + K_2(z) = -2K_1'(z) \quad (\text{A.11})$$

Isolando o valor de $K_2(z)$ na equação (A.10) e substituindo em (A.11), chega-se a:

$$K_1'(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z} K_1(z) \quad (\text{A.12})$$

As funções $A(z)$ e $B(z)$ são definidas pelas fórmulas:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (\text{A.14})$$

Considerando (A.9) e (A.12) e derivando as expressões (A.13) e (A.14) em relação ao argumento z , obtêm-se:

$$A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z^2} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{2}{z} \left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \quad (\text{A.15})$$

$$B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z^2} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{1}{z} \left[K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \quad (\text{A.16})$$

Reagrupando (A.15) e (A.16), obtêm-se:

$$A'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z} \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$B'(z) = -K_1(z) - \frac{1}{z} \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right] \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.13) em (A.17) e (A.18), encontram-se:

$$A'(z) = -\frac{1}{z} [z K_1(z) + 2A(z)] \quad (\text{A.19})$$

$$B'(z) = -\frac{1}{z} [z K_1(z) + A(z)] \quad (\text{A.20})$$

APÊNDICE B

CÁLCULO DE INTEGRAIS COM SINGULARIDADE LOGARÍTMICA UTILIZANDO UMA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As integrais com singularidades logarítmicas podem ser resolvidas utilizando-se integração numérica pela quadratura de Gauss, porém, fazendo-se, antes de integrar, uma transformação de coordenadas, conforme apresentada em Telles (1987). Esta transformação origina um jacobiano que tem valor zero no ponto onde ocorre a singularidade, anulando-a.

Seja $f(\eta)$ a função a ser integrada no intervalo $[-1,1]$, contendo o ponto singular $\bar{\eta}$. Tem-se, então:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{B.1})$$

Em Telles (1987) são apresentadas transformações de coordenadas do segundo ou do terceiro grau para resolver o problema. Os procedimentos, nos dois casos, são descritos a seguir.

B.1 – TRANSFORMAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Neste caso, tem-se a mudança de variável:

$$\eta(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c \quad (\text{B.2})$$

atendendo às seguintes condições:

$$\left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

Para este caso, obtém-se a solução:

$$a = -c$$

$$b = 1$$

$$c = \frac{\bar{\eta} \pm \sqrt{(\bar{\eta}^2 - 1)}}{2} \quad (\text{B.4})$$

em que deve-se ter $|\bar{\eta}|=1$ para que as raízes sejam reais.

Caso se tenha $|\bar{\eta}|=1$, fica:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[(1 - \theta^2) \frac{\bar{\eta}}{2} + \theta \right] (1 - \theta \bar{\eta}) d\theta \quad (\text{B.5})$$

Quando a singularidade ocorre num ponto $\bar{\eta}$ entre -1 e 1, a integral deve ser dividida da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{B.6})$$

Neste caso, obtém-se a expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[\frac{1 + \bar{\eta}}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right) + \frac{\bar{\eta} - 1}{2} \right] \frac{(1 + \bar{\eta})(1 - \theta)}{2} d\theta + \int_{-1}^1 f \left[\frac{1 - \bar{\eta}}{2} \left(\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta \right) + \frac{\bar{\eta} + 1}{2} \right] \frac{(1 - \bar{\eta})(1 + \theta)}{2} d\theta \quad (\text{B.7})$$

B.2 – TRANSFORMAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

A mudança de variável, neste caso, é da forma:

$$\eta(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \quad (\text{B.8})$$

e tem-se, além das condições (B.3), a condição:

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{B.9})$$

De acordo com Telles (1987), os coeficientes na equação (B.8) são:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{Q} \\ b &= -\frac{3\bar{\theta}}{Q} \\ c &= \frac{3\bar{\theta}^2}{Q} \\ d &= -b \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

em que se tem:

$$Q = 1 + 3\bar{\theta}^2 \quad (\text{B.11})$$

sendo $\bar{\theta}$ o valor de θ para o qual $\eta(\bar{\theta}) = \bar{\eta}$, calculado por:

$$\bar{\theta} = \sqrt[3]{(\bar{\eta} \eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta} \eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (\text{B.12})$$

em que:

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (\text{B.13})$$

Então, resulta a expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[\frac{1}{1+3\bar{\theta}^2} \left((\theta - \bar{\theta})^3 + \bar{\theta} (\bar{\theta}^2 + 3) \right) \right] \frac{3(\theta - \bar{\theta}^2)}{1+3\bar{\theta}^2} d\theta \quad (\text{B.14})$$

APÊNDICE C

CÁLCULO DE INTEGRAIS EM PARTES FINITAS PELA QUADRATURA DE KUTT

A quadratura de Kutt é utilizada para o cálculo do valor principal de Cauchy. Neste processo de cálculo, utilizam-se as partes finitas das integrais envolvidas (Kutt, 1975).

Seja a integral dada a seguir, no sentido de valor principal de Cauchy:

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-s)} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} \frac{f(x)}{(x-s)} dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx \right\} \quad (\text{C.1})$$

com $a < s < b$, em que $f(x)$ satisfaz a condição de Hölder em s e $f(s) \neq 0$, de modo que a singularidade é de ordem um.

Utilizando integração em partes finitas nas duas integrais à direita de (C.1), fica:

$$I = I' + I'' \quad (\text{C.2})$$

sendo:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)} dx \quad (\text{C.3})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx \quad (\text{C.4})$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis em (C.3) e (C.4), de tal forma que os intervalos de integração se tornem unitários, resultam as seguintes expressões:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)} dx = -\int_0^1 \frac{f[(a-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|a-s| \quad (\text{C.5})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx = \int_0^1 \frac{f[(b-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|b-s| \quad (\text{C.6})$$

Com a utilização das fórmulas de Kutt (1975) para a resolução das integrais (C.5) e (C.6), estas ficam:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)} dx \cong - \sum_{i=1}^n f[(a-s)t_i + s] w_i - f(s) \ln|a-s| \quad (\text{C.7})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx \cong \sum_{i=1}^n f[(b-s)t_i + s] w_i + f(s) \ln|b-s| \quad (\text{C.8})$$

em que t_i representa as coordenadas dos pontos de integração de Kutt e w_i são os fatores de peso correspondentes. Valores de t_i e w_i são dados em Kutt (1975) para diversos valores de n .