

**Análise Viscoplastica de Placas pelo MEC  
Utilizando a Teoria de Reissner**

**Jair Gonçalves de Oliveira Borges**

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Campos dos Goytacazes – RJ

Agosto – 2020



**Análise Viscopoplástica de Placas pelo MEC  
Utilizando a Teoria de Reissner**

**Jair Gonçalves de Oliveira Borges**

Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadora: Vânia José Karam

Campos dos Goytacazes – RJ  
Agosto – 2020

**FICHA CATALOGRÁFICA**

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

B732 Borges, Jair Goncalves de Oliveira.

Análise Viscoplastica de Placas pelo MEC Utilizando a Teoria de Reissner / Jair Goncalves de Oliveira Borges. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2020.

111 f. : il.

Bibliografia: 93 - 101.

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.

Orientadora: Vania Jose Karam.

1. Método dos elementos de contorno. 2. teoria de Reissner. 3. viscoplasticidade. 4. flexão de placas. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 624

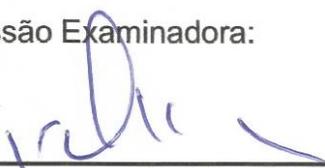
# Análise Viscopoplástica de Placas pelo MEC Utilizando a Teoria de Reissner

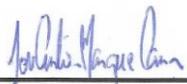
**Jair Gonçalves de Oliveira Borges**

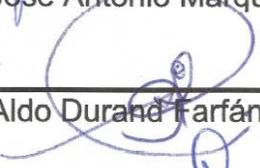
Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

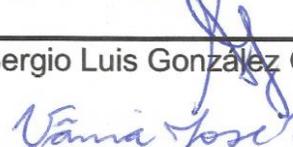
Aprovado em 31 de agosto de 2020

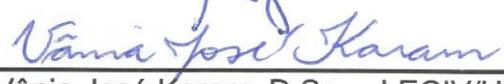
Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D. – COPPE/UFRJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc. – UFPR

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Aldo Durand Farfán, D.Sc. – LECIV/UENF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Sergio Luis González Garcia, D.Sc. – LECIV/UENF

  
\_\_\_\_\_  
Profª. Vânia José Karam, D.Sc. – LECIV/UENF

Orientadora

Ao meu pai (in memoriam)

À minha mãe

À minha irmã

À minha esposa

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pois sem Ele nada é possível.

Aos meus pais Maria Helena Gonçalves de Oliveira Borges e Antônio Lopes Borges, pelo amor, apoio e incentivo aos estudos.

À minha irmã Luciana Gonçalves de Oliveira Borges Padilha, pela confiança depositada em mim.

À minha esposa Ana Beatriz Carvalho e Silva Borges pelo amor, paciência, convívio e suporte ao longo destes anos.

À minha orientadora Vânia José Karam, pela valiosa orientação, colaboração e por todo conhecimento transmitido durante todos estes anos de doutorado.

Aos professores do Laboratório de Engenharia Civil (LECIV) desta Universidade, pela contribuição na minha formação desde a graduação.

A todos os funcionários e técnicos do LECIV.

Ao professor do Instituto Federal Fluminense, Sergio Rafael Cortes de Oliveira, por ceder os dados de sua pesquisa para eu pudesse utilizar como referência.

Aos membros da banca examinadora pela disponibilidade de avaliação, pelas sugestões e contribuições apresentadas.

A todos que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
RESUMO.....	xix
ABSTRACT .....	xx
CAPÍTULO 1 .....	1
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Considerações gerais.....	1
1.2. Análise de flexão de placas utilizando o MEC.....	5
1.3. Objetivo .....	9
1.4. Organização da tese .....	9
CAPÍTULO 2 .....	12
2. FORMULAÇÃO BÁSICA DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS.....	12
2.1. Expressões das tensões .....	12
2.2. Esforços resultantes.....	13
2.3. Equações de equilíbrio.....	14
2.4. Deslocamentos generalizados considerando pontos na superfície média .....	15
2.5. Deformações específicas generalizadas.....	16
2.6. Expressões dos esforços .....	17
2.7. Sistema de equações de Reissner.....	18
2.8. Condições de contorno .....	18
2.9. Formulação para placas incluindo não linearidade física.....	19
2.9.1. Fórmulas básicas da teoria de Reissner incluindo a não linearidade .....	20
CAPÍTULO 3 .....	22

3. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER .....	22
3.1. Equação integral básica .....	22
3.2. Solução fundamental.....	26
3.2.1. Deslocamentos generalizados.....	26
3.2.2. Forças de superfície generalizadas .....	29
3.2.3. Singularidade dos tensores .....	29
3.3. Equação integral para pontos no contorno.....	30
3.4. Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno.....	32
3.5. Momentos e esforços cortantes nos pontos internos .....	33
CAPÍTULO 4 .....	37
4. ANÁLISE VISCOPLÁSTICA.....	37
4.1. Introdução .....	37
4.2. Teoria básica.....	38
4.3. Equações constitutivas para placas considerando a viscoplasticidade.....	43
CAPÍTULO 5 .....	49
5. O MEC APLICADO À ANÁLISE VISCOPLÁSTICA DE PLACAS .....	49
5.1. Discretização das equações integrais para pontos no contorno .....	49
5.2. Sistema de equações.....	54
5.3. Elementos de contorno utilizados .....	57
5.3.1. Elemento quadrático contínuo .....	57
5.3.2. Elemento quadrático descontínuo .....	59
5.3.3. Descontinuidade da normal ou da condição de contorno .....	62
5.3.4. Integrais singulares.....	64
5.3.5. Células internas .....	65
5.4. Técnica de solução do problema viscoplástico .....	74
5.5. Estrutura do programa .....	77
CAPÍTULO 6 .....	79

6. APLICAÇÕES DA ANÁLISE VISCOPLÁSTICA.....	79
6.1. Considerações iniciais.....	79
6.1.1. Exemplo 1 – Placa quadrada simplesmente apoiada.....	79
6.1.2. Exemplo 2 – Placa circular simplesmente apoiada.....	81
6.1.3. Exemplo 3 – Placa quadrada engastada.....	85
6.1.4. Exemplo 4 – Viga simplesmente apoiada.....	87
CAPÍTULO 7 .....	90
7. CONCLUSÕES .....	90
7.1. Conclusões e considerações .....	90
7.2. Sugestões para trabalhos futuros .....	92
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	93
APÊNDICE A.....	102
FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS $K_0$ E $K_1$ .....	102
APÊNDICE B.....	106
CÁLCULO DE INTEGRAIS COM SINGULARIDADE LOGARÍTIMA UTILIZANDO UMA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	106
B.1. Transformação do segundo grau .....	106
B.2. Transformação do terceiro grau .....	108
APÊNDICE C .....	110
CÁLCULO DE INTEGRAIS EM PARTES FINITAS PELA QUADRATURA DE KUTT ..	110

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Sistema de coordenadas ( $x_1, x_2, x_3$ ).....	13
Figura 2.2 - Sentidos positivos dos momentos e esforços cortantes.....	14
Figura 2.3 - Elemento de placa em equilíbrio .....	15
Figura 3.1 - Região $\Omega^* \cup \Gamma^*$ que contém a placa $\Omega \cup \Gamma$ .....	23
Figura 3.2 - Placa com ponto $\xi$ no contorno.....	30
Figura 4.1 - Modelo unidimensional elasto/viscoplástico.....	39
Figura 5.1 - Discretização em elementos de contorno e células internas .....	49
Figura 5.2 - Elemento quadrático contínuo.....	58
Figura 5.3 - Elemento quadrático descontínuo.....	60
Figura 5.4 - Descontinuidade da normal .....	62
Figura 5.5 - Nó duplo.....	63
Figura 5.6 - Elemento descontínuo .....	64
Figura 5.7 - Célula triangular e sistema intrínseco de coordenadas.....	66
Figura 5.8 - Célula triangular com ponto singular $\gamma$ coincidindo com um dos vértices do triângulo .....	70
Figura 5.9 - Célula triangular com ponto singular $\gamma$ situado em um dos lados do triângulo .....	71
Figura 5.10 - Célula triangular com ponto singular $\gamma$ coincidindo com o ponto interno da célula.....	72
Figura 5.11 - Célula triangular com ponto fonte $\gamma$ fora da célula.....	74
Figura 5.12 - Fluxograma do programa com as principais etapas.....	78
Figura 6.1 - Discretização da placa quadrada: (a) elementos de contorno e células internas e (b) elementos finitos .....	80
Figura 6.2 - Curva carga-flecha para o ponto central da placa quadrada simplesmente apoiada .....	81
Figura 6.3 - Placa circular simplesmente apoiada: (a) malha 1 (b) malha 2.....	82
Figura 6.4 - Curva carga-flecha para o ponto central da placa circular simplesmente apoiada .....	83

Figura 6.5 – Perfis de deflexão para carga $\rho = 6,52$ , para $t = 0, t = \infty$ aplicada de uma única vez, e carregamento aplicado de forma incremental. ....	84
Figura 6.6 – Variação do momento efetivo $Me$ com o tempo para um ponto plastificado (Ponto p) e um ponto elástico (Ponto e).....	85
Figura 6.7 – Discretização da placa quadrada engastada em elementos de contorno e células internas .....	86
Figura 6.8 – Curva carga-flecha para o ponto central da placa engastada .....	87
Figura 6.9 – Discretização da viga simplesmente apoiada .....	88
Figura 6.10 – Curva carga-flecha adimensional para o ponto central da viga.....	89

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Abreviaturas:

- MDF → Método das Diferenças Finitas.  
MEC → Método dos Elementos de Contorno.  
MEF → Método dos Elementos Finitos.

### Índices:

- gregos ( $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ ) → variam de 1 a 2.  
latinos ( $i, j, k$ ): → variam de 1 a 3.

### Operadores matemáticos:

- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$  → operador de Laplace.  
 $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$  → operador bi-harmônico.

### Letras romanas maiúsculas:

- $A$  → matriz de coeficientes, cheia e não-simétrica, que multiplica o vetor de incógnitas no sistema de equações  $A\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{f}} + T\dot{\mathbf{M}}^a$   
 $B$  → vetor cujas componentes são expressas por integrais associadas às forças de domínio.  
 $C_i$  → matriz de elementos  $C_{ij}$ .  
 $C_{\alpha\beta\gamma\theta}$  → componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas.  
 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  → rigidez à flexão da placa.  
 $E$  → módulo de elasticidade longitudinal.  
 $E_T$  → módulo tangente.

$F(\sigma, \kappa)$	→ função escalar de escoamento dependente do tensor de tensões e do parâmetro de dureza $\kappa$ .
$F_k^*$	→ componentes das forças de domínio, que se distribuem ao longo da espessura, definidas a fim de se obter a solução fundamental.
$G$	→ matriz que multiplica as forças de superfície generalizadas no sistema de equações $H\dot{U} = G\dot{P} + B + T\dot{M}^a$ .
$H$	→ matriz que multiplica os deslocamentos generalizados no sistema de equações $H\dot{U} = G\dot{P} + B + T\dot{M}^a$ .
$H'$	→ inclinação da curva momento equivalente-deformação plástica equivalente.
$J_2'$	→ segundo invariante da tensão desviadora.
$J_3'$	→ terceiro invariante da tensão desviadora.
$ J $	→ jacobiano para integração nos elementos de contorno.
$K_0(z)$ e $K_1(z)$	→ funções de Bessel modificadas de ordem inteira.
$L$	→ número de elementos de contorno.
$M$	→ matriz que contém as funções de interpolação para coordenadas de pontos dos elementos de contorno.
$\bar{M}$	→ matriz que contém as funções de interpolação para as coordenadas de pontos das células internas.
$M_{\alpha\beta}$	→ componentes de momentos fletores e torçores por unidade de comprimento.
$\bar{M}_{\alpha\beta}$	→ componentes de momentos prescritos.
$M_0$	→ momento de escoamento.
$M_y$	→ momento de escoamento inicial.
$M_e$	→ momento equivalente.
$M'_{ij}$	→ momentos desviadores.
$M_{\alpha\beta}^a$	→ componentes de momentos inelásticos.
$M_{\alpha\beta}^P$	→ componentes de momentos plásticos.

$N$	→ matriz que contém as funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície em pontos dos elementos de contorno.
$\bar{N}$	→ matriz que contém as funções de interpolação para momentos plásticos.
$P_j$	→ intensidade da carga unitária.
$P_i^*$	→ matriz que contém as forças de superfície da solução fundamental.
$\dot{P}^{(j)}$	→ vetor que contém as taxas de forças de superfície relativas a um ponto qualquer do elemento de contorno.
$\dot{P}^{(n)}$	→ vetor que contém as taxas forças de superfície relativas aos pontos nodais do elemento de contorno.
$Q_\alpha$	→ esforços cortantes por unidade de comprimento.
$\bar{Q}_\alpha$	→ esforços cortantes prescritos.
$S_i^*$	→ vetor em que as componentes são expressas por: $S_k^* = \left[ v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha}^* \right] n_\alpha$
$T$	→ matriz que multiplica os momentos plásticos.
$U_i^*$	→ matriz que contém os deslocamentos da solução fundamental.
$\dot{U}^{(j)}$	→ vetor que contém as taxas de deslocamentos relativas a um ponto qualquer do elemento de contorno.
$\dot{U}^{(n)}$	→ vetor que contém as taxas de deslocamentos relativos aos pontos nodais do elemento de contorno.
$Z$	→ número de células internas.

### Letras romanas minúsculas:

$a$ e $b$	→ distâncias dos nós às extremidades do elemento descontínuo.
$b_i$	→ componentes das forças de domínio.
$\hat{f}, \hat{f}'$ e $\hat{f}''$	→ vetores que contêm os valores prescritos, incluindo a influência da carga transversal.
$h$	→ espessura da placa.

$\ell$	→ comprimento do elemento de contorno.
$l$	→ menor dimensão do plano da placa.
$n_\beta$	→ co-senos diretores da normal exterior ao contorno em relação ao eixo $x_\beta$ .
$p_i$	→ componentes das forças de superfície generalizadas.
$\bar{p}_i$	→ componentes das forças de superfície generalizadas prescritas.
$p_{ij}^*$	→ componentes do tensor de forças de superfície da solução fundamental.
$p_{i\beta k}^*$	→ componentes do tensor que multiplica os deslocamentos na expressão dos esforços nos pontos internos.
$q$	→ carregamento transversal aplicado.
$r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha}$	→ distância entre o ponto fonte ( $\xi$ ) e o ponto campo ( $x$ ).
$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha}$	→ derivada de $r$ em relação à coordenada $x_\alpha$ .
$t$	→ tempo.
$u_i$	→ componentes dos deslocamentos generalizados.
$\bar{u}_i$	→ componentes dos deslocamentos generalizados prescritos.
$u_{ij}^*$	→ componentes do tensor de deslocamentos da solução fundamental.
$u_{i\beta k}^*$	→ componentes do tensor que multiplica as forças de superfície na expressão dos esforços nos pontos internos.
$w$	→ deslocamento transversal (flecha).
$w_{,\alpha} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}$	→ primeira derivada da flecha em relação às coordenadas $x_\alpha$ .
$w_{i\beta}^*$	→ componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos.
$x$	→ ponto campo.
$x_i$	→ eixos coordenados cartesianos.
$\mathbf{x}^{(j)}$	→ vetor que contém as coordenadas de pontos quaisquer dos elementos de contorno.

- $\mathbf{x}^{(n)}$  → vetor que contém as coordenadas dos pontos nodais dos elementos de contorno.
- $\dot{\mathbf{y}}$  → vetor de incógnitas.
- $z$  → produto expresso por  $\lambda r$ .

### Letras gregas maiúsculas:

- $\Gamma$  → contorno da região definida por  $\Omega$ .
- $\Gamma_j$  → parte do contorno correspondente ao elemento  $j$ .
- $\Gamma_u$  → parte do contorno em que os deslocamentos generalizados são prescritos.
- $\Gamma_p$  → parte do contorno em que as forças de superfície generalizadas são prescritas.
- $\Gamma^*$  → contorno da região definida por  $\Omega^*$ .
- $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  → contorno adicional.
- $\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) \rangle$  → função que define a existência de deformações viscoplásticas.
- $\Delta_{ij}^*$  → componentes do operador de Navier.
- $\Delta t$  → incremento de tempo.
- $\Psi(\kappa)$  → função de escoamento dependente do parâmetro de dureza  $\kappa$ .
- $\Omega$  → domínio da região analisada.
- $\Omega^*$  → domínio da região que contém  $\Omega$  e cujo contorno está infinitamente distante da placa.
- $\Omega_j$  → domínio da célula  $j$ .

### Letras gregas minúsculas:

- $\gamma$  → parâmetro de fluidez.
- $\delta_{\alpha\beta}$  → delta de Kronecker.
- $\delta(x - \xi)$  → função generalizada delta de Dirac.
- $\varepsilon$  → raio do setor circular.

$\varepsilon$	→ deformação.
$\zeta_\alpha$	→ coordenada homogênea associada com a célula interna.
$\eta$	→ coordenada adimensional associada com o elemento de contorno.
$\eta_0$ e $\eta_1$	→ parâmetros para definição do incremento de tempo.
$\theta$	→ ângulo de desvio (parâmetro de Lode).
$\kappa$	→ parâmetro de dureza.
$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$	→ constante característica das equações de Reissner.
$\lambda_0$	→ fator de carga inicial.
$\nu$	→ coeficiente de Poisson.
$v_i^*$	→ funções que satisfazem determinada equação de Poisson.
$\xi$	→ ponto fonte ou ponto carga.
$\sigma_0$	→ tensão de escoamento uniaxial do material.
$\sigma_y$	→ tensão de escoamento uniaxial inicial do material.
$\sigma_{\alpha\beta}$	→ componentes do tensor de tensões.
$\phi_\alpha$	→ rotações da normal à superfície média nos planos $x_\alpha - x_3$ .
$\bar{\phi}_\alpha$	→ rotações prescritas.
$\psi_\alpha$	→ componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes transversais.
$\psi_\alpha^e$	→ componentes do tensor de deformações específicas cisalhantes elásticas transversais.
$\chi_{\alpha\beta}$	→ componentes do tensor de deformações específicas de flexão.
$\chi_{\alpha\beta}^a$	→ componentes do tensor de deformações específicas que consideram as contribuições inelásticas.
$\chi_{\alpha\beta}^e$	→ componentes do tensor de deformações específicas elásticas de flexão.
$\chi_{\alpha\beta}^P$	→ componentes do tensor de deformações específicas plásticas de flexão.
$\chi_{\alpha\beta}^c$	→ componentes do tensor de deformações específicas de flexão devido a fluência.

- $\chi_{\alpha\beta}^t$  → componentes do tensor de deformações específicas de flexão devido a cargas térmicas.
- $\chi_e$  → deformação total equivalente de flexão.
- $\chi_e^e$  → deformação elástica equivalente de flexão.
- $\chi_e^p$  → deformação plástica equivalente de flexão.
- $\chi_{\alpha\beta i}^*$  → componentes do tensor que multiplica o momento plástico na equação de deslocamentos.
- $\chi_{i\beta\gamma\theta}^*$  → componentes do tensor que multiplica o momento plástico nas equações dos momentos e dos esforços cortantes
- $d\chi_{\alpha\beta}^p$  → incremento de deformação plástica.
- $d\chi_e^p$  → incremento de deformação plástica equivalente.

## RESUMO

O desenvolvimento de uma formulação com o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para aplicação em análise não linear de flexão de placas considerando a viscoplasticidade é apresentada neste trabalho. É utilizada a teoria de Reissner, válida para placas delgadas e espessas. Inicialmente, é apresentada a teoria de flexão de placas de Reissner, inclusive com a consideração de não linearidade física e, em seguida, são mostradas as equações integrais para aplicação do Método dos Elementos de Contorno a placas de Reissner. A teoria básica para consideração de viscoplasticidade é apresentada, bem como os procedimentos para sua utilização com o MEC. Para a implementação numérica, são empregados elementos de contorno quadráticos de geometria linear e células internas constantes, também de geometria linear. A fim de resolver as equações que regem o problema, é utilizado um procedimento incremental, considerando os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca. Para a validação da formulação, alguns exemplos são apresentados e seus resultados são comparados com resultados encontrados na literatura existente.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, teoria de Reissner, viscoplasticidade, flexão de placas.

## ABSTRACT

The development of a formulation with the Boundary Element Method (BEM) for the application in nonlinear analysis of plate bending considering the viscoplasticity is presented in this work. Reissner's theory is used, valid for thin and thick plates. Initially, Reissner's plate bending theory is presented, including the consideration of physical non-linearity, and then, the integral equations for applying the Boundary Element Method to Reissner's plates are shown. The basic theory for considering viscoplasticity is presented, as well as the procedures for its use with the BEM. For the numerical implementation, quadratic boundary elements of linear geometry and constant internal cells, also of linear geometry, are employed. In order to solve the equations that govern the problem, an incremental procedure is used, considering von Mises' and Tresca's yield criteria. For the validation of the formulation, some examples are presented and their results are compared with results found in the existing literature.

Keywords: Boundary element method, Reissner's theory, viscoplasticity, plate bending.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Considerações gerais

Alguns problemas de Engenharia são muito complexos devido a sua geometria ou à lei constitutiva dos materiais que os compõem e, assim, suas soluções analíticas tornam-se, muitas vezes, inviáveis, devendo-se, então, fazer uso de métodos numéricos que forneçam as soluções mais próximas possíveis das exatas.

Dentre os métodos numéricos existentes, os principais e mais conhecidos são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). No MDF, consideram-se aproximações nas derivadas das equações diferenciais definidas para o domínio problema. No MEF, são consideradas equações diferenciais ou integrais escritas para o domínio do problema, admite-se que o domínio é discretizado em uma malha de elementos e são empregadas funções aproximadoras nesses elementos. No MEC, consideram-se equações integrais escritas apenas com integrais de contorno, admite-se que o contorno é discretizado em elementos e são consideradas funções de aproximação nesses elementos, embora, em certos casos, possam ser consideradas também algumas integrais de domínio nas equações integrais do problema e, nesses casos, são utilizadas células internas no domínio ou em parte do domínio. Atualmente, outros métodos, que não consideram malhas de elementos, também estão sendo desenvolvidos.

O MEF e o MEC são de aplicação bastante geral e muito usados atualmente para resolução de problemas em diversas áreas, tais como mecânica estrutural, mecânica dos fluidos, mecânica dos solos e eletromagnetismo, dentre outras. Além disso, ambos os métodos são adequados a aplicações em diversos tipos de problemas, tais como problemas unidimensionais, bidimensionais, tridimensionais, vigas, placas e cascas e possibilitam análises elásticas, lineares, não lineares, estáticas e dinâmicas, mesmo com geometrias, carregamentos ou condições de contorno com maiores complexidades.

O Método dos Elementos Finitos é muito popular entre os engenheiros e possui maior número de programas comerciais à disposição para sua aplicação; porém, em

certas condições onde se exige melhor precisão devido a locais com concentração de tensões ou em problemas com domínio infinito ou semi-infinito, o Método dos Elementos de Contorno se apresenta como uma melhor alternativa.

A principal característica do MEC é a redução da dimensão do problema. Por exemplo, em um problema com geometria tridimensional, a discretização será reduzida à superfície do problema; em um problema bidimensional, a discretização será reduzida à linha de contorno do problema, o que, em geral, conduz a uma economia computacional.

Para se formular um problema com o Método dos Elementos de Contorno, é necessário que uma solução fundamental do problema a ser analisado seja conhecida. No MEC, todos os valores calculados nos pontos internos, deslocamentos e tensões ou esforços solicitantes, possuem a mesma precisão, pois as derivadas são efetuadas nos tensores da solução fundamental, não acarretando perda de precisão. Porém, no MEC, costumam existir integrais singulares nas equações, que requerem tratamentos especiais na sua resolução.

O estudo do comportamento de placas tem importância em diversas áreas da Engenharia, tais como civil, mecânica, aeronáutica e naval. Em especial, na Engenharia Civil, o estudo de placas tem importância, por exemplo, na análise e dimensionamento de lajes de edifícios, radier, reservatórios, barragens, contenções e tabuleiros de pontes.

Placas são elementos estruturais que possuem uma das três dimensões muito menor do que as demais, com superfícies médias planas e submetidos a carregamentos transversais, podendo também ser carregados paralelamente à superfície média.

Em relação à espessura, as placas podem ser classificadas em finas ou delgadas, espessas e moderadamente espessas. Ugural (1981), por exemplo, classifica em finas as placas com relação  $h/l < 1/20$ , em que  $h$  é a espessura e  $l$  é a menor dimensão do plano da placa. Já para Szilard (2004), as placas se classificam de acordo com a relação  $h/l$  em: finas quando  $h/l < 1/10$ , moderadamente espessas quando  $1/10 < h/l < 1/5$  e espessas quando  $h/l > 1/5$ .

As teorias para análise de placas representam uma aproximação bidimensional do problema tridimensional da teoria da elasticidade. As teorias mais conhecidas e mais utilizadas para análise de flexão placas são as de Kirchhoff, de Mindlin e de Reissner.

A teoria de Kirchhoff (Kirchhoff, 1850; Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959) é conhecida como teoria clássica. Nesta teoria, tem-se uma equação diferencial de quarta ordem, em que podem ser consideradas duas condições de contorno por bordo, apesar de existirem três condições físicas de contorno. Para superar esta dificuldade, Kirchhoff condensou o esforço cortante e o momento torsor em uma única condição de contorno denominada força cortante efetiva.

Na teoria de Kirchhoff, considera-se a hipótese de que segmentos de reta normais à superfície média, antes da flexão, permanecem retos e normais à superfície média e inalterados no comprimento após a flexão. Neste caso, consideram-se nulas as deformações cisalhantes transversais e esta teoria é restrita a placas delgadas.

Já as teorias de Reissner (Reissner, 1944, 1945 e 1947) e de Mindlin (Mindlin, 1951) são bem semelhantes, e conhecidas por vezes como teoria de Reissner- Mindlin.

Tais teorias são mais refinadas do que a teoria clássica, levando a um sistema de equações diferenciais de sexta ordem em que devem ser satisfeitas três condições de contorno por bordo. Nestas teorias, retas normais à superfície média antes da flexão não permanecem mais normais a essa superfície após a flexão e, assim, são levados em consideração os efeitos das deformações cisalhantes transversais e a influência da espessura da placa nos resultados. Estas teorias possibilitam a análise de placas delgadas, moderadamente espessas e espessas, sendo consideradas mais gerais. Os resultados são mais exatos do que os da teoria de Kirchhoff especialmente em locais próximos aos bordos e cantos de placa, assim como próximos de furos da ordem de grandeza da espessura da placa.

A obtenção de deslocamentos e esforços em placas pode ser realizada através de modelos no regime linear elástico ou em regime não linear. Pode-se considerar que, para muitos casos, a análise linear pode ser suficiente para alcançar resultados satisfatórios; porém, dependendo do problema a ser analisado, pode ser necessário considerar a não-linearidade, que pode ser física ou geométrica.

Uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear, mesmo que obedeça a lei de Hooke. É o caso de grandes deslocamentos, que podem trazer como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais, chamados de momentos de segunda ordem, em virtude da presença de esforço normal. Esse tipo de não linearidade é chamada de não linearidade geométrica.

A não linearidade física acontece quando o material não atende a lei de Hooke, isto é, não se encontra no regime linear elástico, podendo-se ter plasticidade, viscoplasticidade, fluência e outros fenômenos.

Pela teoria clássica da plasticidade, as deformações plásticas não dependem do tempo de atuação do carregamento; porém, quando se considera a viscoplasticidade, leva-se em conta o tempo de atuação do carregamento. Em um modelo no qual se considera a viscoplasticidade, é possível avaliar a evolução de tensões e deformações, desde o início do carregamento até a carga que provoca a ruptura da estrutura. Além disso, o modelo viscoplástico se apresenta como uma forma alternativa de se obter resultados para o modelo elastoplástico, através de um processo incremental de cargas.

A utilização do MEC para análise de problemas considerando a plasticidade foi iniciada por Swedlow e Cruse (1971), para problemas tridimensionais, mas ainda sem resultados numéricos. Seguiram-se os trabalhos de Mendelson (1973) e Ricardella (1973), que apresentaram dificuldades na obtenção das equações para cálculo das tensões em pontos internos de forma apropriada, relacionadas aos termos livres gerados pela derivação das equações integrais de deslocamentos. No trabalho de Bui (1978), estes termos livres foram considerados pela primeira vez. Destacam-se os trabalhos de Telles e Brebbia (1979;1982) e Telles (1983), que apresentaram formulações e procedimentos para o MEC aplicados à análise de problemas bi e tridimensionais com vários tipos de não linearidade física, tais como: elastoplasticidade, fluência e viscoplasticidade.

Inserido no contexto apresentado, o presente trabalho aborda a resolução do problema de flexão de placas com teoria de Reissner pelo Método dos Elementos de Contorno e com a consideração da viscoplasticidade.

As equações constitutivas são desenvolvidas com base no modelo elasto/viscoplástico de Perzyna (1966) e nos mesmos procedimentos adotados por Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) para os casos bi e tridimensionais. Para a resolução do problema viscoplástico pelo MEC, é utilizado um método de passo simples de Euler, com uma técnica de momentos iniciais e empregando os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca. Estes critérios são adequados ao caso de metais.

## 1.2. Análise de flexão de placas utilizando o MEC

Os trabalhos sobre flexão de placas com a utilização do MEC tiveram início com Jaswon *et al.* (1967), que propuseram a solução da equação biarmônica decomposta em duas equações harmônicas resolvidas por meio de equações integrais, para a teoria clássica de Kirchhoff, de forma indireta. Utilizando a formulação de forma indireta, citam-se também os trabalhos de Jaswon e Maiti (1968), Segedin e Bricknell (1968), Maiti e Chakrabary (1974), Hansen (1976).

Ainda com a utilização do método de forma indireta, Altieiro e Sikarski (1978) resolveram problemas de placas engastadas. Posteriormente, Wu e Altieiro (1979) estenderam essa técnica a condições de contorno arbitrárias. Trabalho semelhante foi desenvolvido por Tottenham (1979), estendendo sua análise a placas sobre base elástica e a cascas abatidas.

Forbes e Robinson (1969) utilizaram, pela primeira vez, o MEC em forma direta para análise de flexão de placas. Posteriormente, Bezine (1978), utilizando o MEC de forma direta com a teoria de Kirchhoff, empregou elementos constantes na formulação integral, porém as integrais de domínio provenientes do carregamento não foram transformadas em integrais de contorno e a análise se limitou aos casos de carregamentos concentrados. Já Stern (1979) realizou a análise de flexão de placas com a teoria de Kirchhoff também pela forma direta do MEC, porém, com uma formulação mais geral, empregando aproximações lineares nos elementos. Em Paiva e Venturini (1985) e Paiva (1987), o método dos elementos de contorno é aplicado à análise de pavimentos de edifícios, com a teoria clássica de Kirchhoff.

Van der Weeën (1982a; 1982b) apresenta, pela primeira vez, uma análise de flexão de placas utilizando a teoria de Reissner aplicando o MEC. Nesta formulação, tem-se, para cada ponto do contorno, três equações integrais, que se referem à flecha e às rotações. A solução é obtida numericamente, aproximando o contorno a partir de elementos quadráticos isoparamétricos. Baseando-se nestes trabalhos, Karam (1986) analisou placas elásticas, homogêneas e isotrópicas pelo MEC, utilizando a teoria de Reissner. A fim de evitar a ocorrência de algumas integrais singulares, Ribeiro e Venturini (1989) escreveram o sistema de equações lineares utilizando os pontos de carga fora do domínio.

O estudo de placas pelo MEC se desenvolveu de forma a abordar técnicas que permitam, além da análise linear elástica, análise de outros problemas, como interação solo-estrutura, problemas dinâmicos, de vibrações e análises não lineares. As formulações que envolvem análise não linear de placas, geométrica e/ou física, despertou e ainda tem despertado o interesse de muitos pesquisadores.

Inserido neste contexto da análise não linear, Morjaria e Mukherjee (1980) desenvolveram um trabalho para análise de placas considerando um modelo viscoplástico. Nesse trabalho, foram analisadas placas simplesmente apoiadas e engastadas a partir da teoria Kirchhoff, considerando o carregamento transversal uniformemente distribuído e variando linearmente com o tempo.

Em seguida, Moshaiav e Vorus (1986) desenvolveram uma formulação para o método dos elementos de contorno incluindo a análise elastoplástica utilizando a teoria clássica, a partir de um procedimento incremental-iterativo que considera momentos plásticos iniciais. A discretização do contorno foi feita com elementos constantes e parte do domínio com células internas constantes.

Já Xiao-Yan *et al.* (1990) realizaram uma análise com consideração de não linearidade geométrica utilizando a teoria de Reissner.

Posteriormente, Karam (1992) realizou análises elásticas pelo método dos elementos de contorno para placas utilizando a teoria clássica de Kirchhoff e a teoria de Reissner, comparando seus resultados para placas delgadas. Em seguida, aplicou a teoria de Reissner para análise elastoplástica. Para a análise não linear, foram utilizados elementos de contorno contínuos e descontínuos quadráticos de geometria linear. Parte do domínio onde se espera a plastificação foi discretizada com células constantes triangulares. Foram empregados procedimentos de tensão inicial e os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca foram utilizados. A resolução do problema elastoplástico foi realizada através de procedimento incremental iterativo. Em Karam e Telles (1992), é apresentada uma formulação para análise de flexão de placas de Reissner com elastoplasticidade pelo MEC, considerando um procedimento de tensão inicial; e em Karam e Telles (1998), o MEC também é aplicado a placas não lineares.

Na mesma linha de trabalho, Ribeiro (1992) apresenta uma formulação para o método dos elementos de contorno pelas teorias de Kirchhoff e de Reissner para análise elástica linear. Uma formulação para análise não linear é também desenvolvida para a

teoria de Reissner, considerando não linearidade física e adotando procedimento de momento inicial e processo incremental iterativo baseado no método da rigidez inicial. Nesse trabalho, foram utilizadas células internas com aproximação linear.

No ano seguinte, Providakis (1993) utilizou o MEC em sua forma direta, através da equação biarmônica não homogênea para análise inelástica dependente do tempo de placas, com condições de contorno arbitrárias e carregadas transversalmente. A formulação integral é obtida usando uma combinação de MEC e MEF. Os exemplos utilizados para validação são os mesmos de Morjaria e Mukherjee (1980).

Chueiri (1994) fez a análise de placas pela teoria Kirchhoff nos regimes elástico e elastoplástico. Nesse trabalho, foram utilizados momentos iniciais a partir do campo de deformações e o domínio foi discretizado em células triangulares constantes. Para resolução do problema não linear, foi utilizado um algoritmo incremental iterativo. Nesse trabalho ainda foi apresentado um modelo constitutivo para análise elastoplástica de lajes de concreto armado

No mesmo ano, Providakis e Beskos (1994) realizaram análise dinâmica para placas elastoplásticas de condições de contorno e geometria arbitrárias utilizando a teoria clássica e Fortiu *et al.* (1994), também utilizando a teoria clássica de Kirchhoff, realizaram análises de vibrações de placas elastoplásticas.

Seguiram-se outros trabalhos, como: Ribeiro e Venturini (1998), que empregaram o método dos elementos de contorno para análise de placas elastoplásticas de Reissner considerando procedimento de tensão inicial.

Considerando a análise dinâmica e um procedimento de tensão inicial, Providakis e Beskos (2000) utilizaram o método dos elementos de contorno juntamente com a teoria de Reissner para estudo de placas com plasticidade.

Em Barcarji (2001), é realizada a análise de pavimentos de edifícios pelo MEC considerando a não linearidade física e utilizando um procedimento de momentos iniciais.

No ano seguinte, Auatt (2002) apresenta análise elástica e elastoplástica de contato de placa com base rígida pelo MEC, utilizando a teoria de Reissner. Nesse trabalho, a plasticidade foi considerada em camadas. Fernandes e Venturini (2002) desenvolveram uma formulação não linear com o MEC para flexão de placas baseada na teoria de Kirchhoff, a fim de modelar placas de concreto armado. Consideraram dois

modelos constitutivos para o concreto: um elasto-plástico, onde o critério utilizado é o de von Mises, sem considerar resistência à tração, e o outro é o modelo de dano de Mazars.

Posteriormente, Cresce (2003) utilizou a o MEC para análise não linear de pavimentos de concreto armado com a teoria de Reissner. Neste trabalho foi admitido procedimento de tensão inicial e foi utilizado procedimento incremental-iterativo para resolução do problema. Foram admitidos carregamentos concentrados e distribuídos.

Supriyono e Aliabadi (2006) fizeram análise pelo MEC em placas sujeitas a deformações cisalhantes, com a combinação de não linearidade geométrica e do material. É apresentada uma formulação baseada em tensões iniciais e o critério de Von Mises é utilizado para avaliar a região plastificada.

Waidemam e Venturini (2010) apresentaram uma formulação do MEC para análise elastoplástica de placas com não linearidade geométrica. As equações integrais utilizadas são baseadas na teoria de Kirchhoff, incorporando termos que permitem a consideração da não linearidade geométrica baseada na teoria de von Kármán. O critério elastoplástico utilizado é o de von Mises.

Taguti (2010) apresenta estudos de segunda ordem de placas elásticas delgadas pelo método dos elementos de contorno e, além disso, é feito um estudo comparativo com a teoria de primeira ordem. Foi considerada, para a montagem do sistema de equações algébricas, apenas a equação integral do deslocamento transversal da placa e as variáveis de canto como incógnitas.

Santana (2014) apresentou formulações estáticas do MEC para problemas de placas isotrópicas e ortotrópicas com as teorias de Reissner e de Mindlin. Apenas o contorno foi discretizado em elementos constantes nas formulações apresentadas.

Uma nova formulação para análise de flexão de placas de Reissner com elastoplasticidade pelo MEC foi apresentada por Oliveira (2015) e Oliveira e Karam (2016) utilizando a teoria clássica da plasticidade, com um procedimento de deformação inicial e usando os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

Baseado na formulação de Karam e Telles (1992), Supriyono *et al.* (2017) fizeram a análise de placas elastoplásticas incluindo um novo termo não linear na formulação e utilizaram o método de incremento total, desenvolvido por Wen e Aliabadi (2005) para placas com grandes deflexões, em vez do procedimento incremental-iterativo. A

discretização do contorno foi feita com elementos quadráticos isoparamétricos e o domínio foi discretizado utilizando células quadrilaterais de 9 nós.

Observando a literatura existente, verifica-se a falta de um trabalho que utilize o método dos elementos de contorno para análise viscoplástica de placas utilizando a teoria de Reissner, o que justifica a elaboração deste trabalho.

### **1.3. Objetivo**

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação e implementação computacional para análise de flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) utilizando a teoria de Reissner e considerando os efeitos da viscoplasticidade.

### **1.4. Organização da tese**

O presente trabalho está dividido em 7 (sete) capítulos e 3 (três) apêndices, os quais são apresentados de forma resumida a seguir.

O primeiro capítulo apresenta, inicialmente, conceitos iniciais e revisão bibliográfica, a qual mostra os principais trabalhos envolvendo análise de placas, em regime linear elástico e em regime não linear. Em seguida, é apresentado o objetivo do trabalho e a organização do texto da tese.

No segundo capítulo, apresenta-se a teoria de flexão de placas elásticas utilizando a teoria de Reissner. São mostradas as expressões de tensões e esforços, as equações de equilíbrio, expressões para cálculo de deslocamentos e deformações generalizadas, o sistema de equações que representa um problema de integração de sexta ordem, bem como as condições de contorno a serem satisfeitas que, neste caso, são três condições por bordo. Em seguida, esta formulação é estendida para o caso de placas com consideração de não linearidade física.

No terceiro capítulo, são mostradas as equações integrais básicas do método dos elementos de contorno para placas utilizando a teoria de Reissner considerando a não linearidade física. São apresentadas as equações de deslocamentos em pontos internos e pontos do contorno, momentos fletores e esforços cortantes em pontos internos e as soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície generalizadas. Neste trabalho, considera-se que o carregamento está distribuído sobre toda a placa e, então,

é apresentada a equação de deslocamentos quando se transforma a integral de forças de domínio em integrais de contorno.

O Capítulo 4 apresenta, primeiramente, a teoria da viscoplasticidade aplicada ao caso unidimensional. São mostradas as principais relações entre tensões e deformações para este caso. Posteriormente, com base no modelo de Perzyna (1966) e nos procedimentos apresentados por Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) para os casos bi e tridimensionais, são apresentadas as equações constitutivas aplicadas a placas de Reissner para a consideração de um modelo elasto/viscoplástico. São mostradas também as fórmulas utilizadas para os critérios de escoamento de Von Mises e de Tresca.

No quinto capítulo, são mostrados os procedimentos para implementação do método dos elementos de contorno aplicado às equações dos capítulos 3 e 4. Assim, são mostradas as equações de deslocamentos discretizadas para pontos internos e pontos do contorno, além das equações discretizadas de momentos fletores e esforços cortantes para pontos internos. Neste trabalho, são utilizados elementos de contorno quadráticos contínuos e descontínuos, além de células internas que são utilizadas para discretizar o domínio ou parte do domínio onde se espera que ocorram deformações plásticas. Para integração referente a elementos de contorno e células internas, é utilizada a quadratura de Gauss, quando a integral é regular. Quando a integral é singular, são utilizados procedimentos numéricos especiais. Após a discretização das equações integrais, o sistema de equações pode ser montado e o problema elasto/viscoplástico é resolvido através de um procedimento incremental de passo simples de Euler, que permite a avaliação dos efeitos da viscoplasticidade e também a obtenção de resultados, de modo alternativo, para a teoria clássica da plasticidade.

No capítulo 6, são apresentados os resultados de alguns exemplos resolvidos de acordo com a teoria apresentada neste trabalho e os resultados obtidos são comparados com os da literatura existente.

O capítulo 7 apresenta as principais conclusões do trabalho, bem como observações e sugestões para trabalhos futuros.

O Apêndice A apresenta as funções de Bessel modificadas de ordem inteira  $K_0$  e  $K_1$ .

No Apêndice B, são apresentados os procedimentos para transformação de coordenadas de segundo e terceiro graus para o cálculo de integrais com singularidade logarítmica.

O Apêndice C apresenta o processo de Kutt para a resolução, em partes finitas, das integrais interpretadas no sentido de valor principal de Cauchy.

Ao longo do texto, é utilizada a notação tensorial cartesiana, com índices gregos variando de 1 a 2 e índices latinos variando de 1 a 3. A repetição de índices em um mesmo termo representa somatório. As derivadas em relação ao espaço são representadas por vírgulas e as derivadas em relação ao tempo são indicadas por pontos acima das variáveis.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO BÁSICA DA TEORIA DE REISSNER PARA PLACAS

A teoria de Reissner para flexão de placas (Reissner, 1944; 1945 e 1947) baseia-se na teoria da elasticidade e no princípio de Hellinger-Reissner. Obtém-se, desta forma, um problema de integração de sexta ordem, o qual satisfaz a três condições de contorno por bordo.

São mostradas, neste capítulo, as expressões básicas de tensões e de esforços, as equações de equilíbrio, as expressões para cálculo de deslocamentos e deformações generalizados, o sistema de equações que representa o problema de integração de sexta ordem e as condições de contorno a serem satisfeitas. Em seguida, esta formulação é estendida para o caso de placas com consideração de não linearidade física.

#### 2.1. Expressões das tensões

Para a determinação das equações básicas da teoria de Reissner, para flexão de placas, considera-se uma placa de espessura  $h$  constante, sujeita a um carregamento transversal  $q$  por unidade de área, sendo o material da placa isotrópico, homogêneo e linear.

Os eixos cartesianos  $x_\alpha$  são definidos na superfície média indeformada (plana) e o eixo  $x_3$ , na direção transversal, como mostrado na Figura 2.1.

As condições de carga nas faces da placa são:  $\sigma_{33} = \pm q/2$  e  $\sigma_{\alpha 3} = 0$  para  $x_3 = \pm h/2$ , em que  $\sigma_{\alpha 3}$  são as componentes tangenciais de tensão e  $\sigma_{33}$  são as componentes normais (Van der Weeën, 1982a).

As tensões variam ao longo da espessura em função dos esforços resultantes, segundo as expressões a seguir (Van der Weeën, 1982a):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3$$

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3Q_{\alpha}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

$$\sigma_{33} = \frac{qx_3}{2h} \left[ 3 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

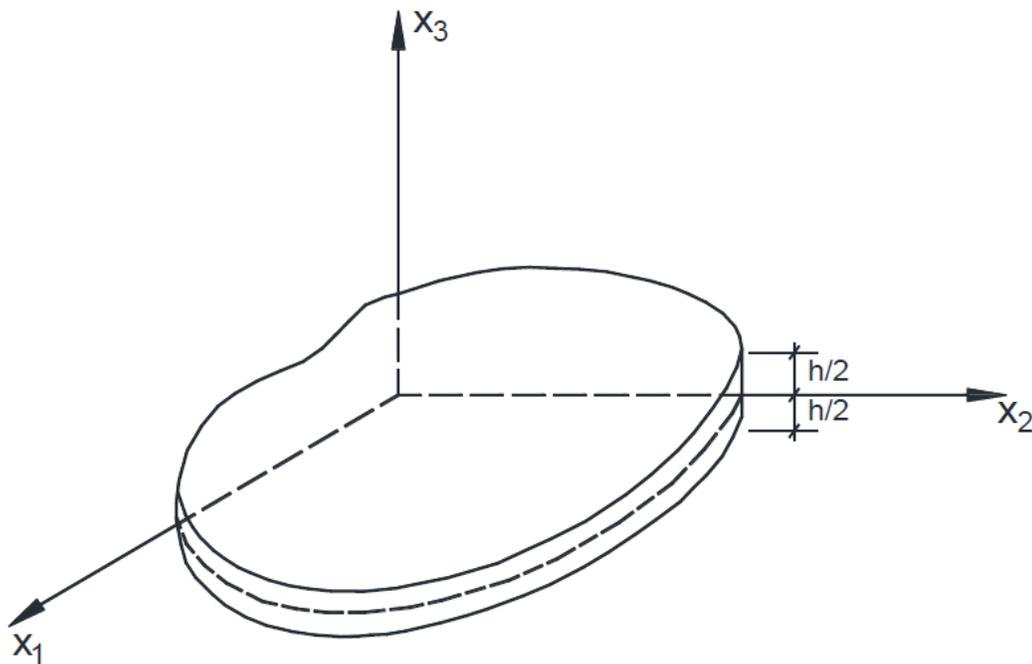


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas ( $x_1, x_2, x_3$ )

Pode-se observar, pelas equações (2.1), que as tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  variam linearmente ao longo da espessura e  $\sigma_{\alpha 3}$  variam parabolicamente ao longo da mesma. As tensões  $\sigma_{33}$ , que atuam na direção transversal, variam cubicamente e seus valores são pequenos em relação aos valores das demais tensões.

## 2.2. Esforços resultantes

Para obtenção das expressões de momentos  $M_{\alpha\beta}$  e esforços cortantes  $Q_{\alpha\beta}$ , por unidade de comprimento, atuantes sobre a superfície média, é necessário integrar as tensões  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\sigma_{\alpha 3}$  ao longo da espessura. Assim, têm-se:

- Momentos Fletores e Torsores

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (2.2)$$

- Esforços cortantes

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.3)$$

Os sentidos positivos destes esforços estão indicados na Figura 2.2.

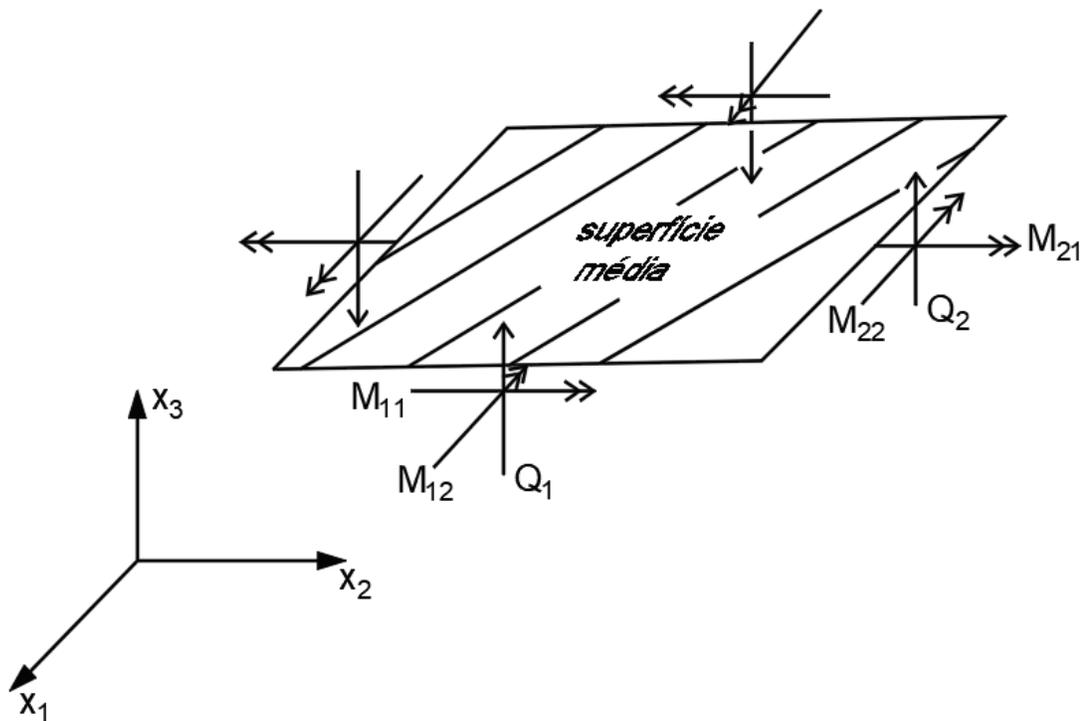


Figura 2.2 - Sentidos positivos dos momentos e esforços cortantes

### 2.3. Equações de equilíbrio

Fazendo-se o equilíbrio de forças na direção  $x_3$  e de momentos em relação a  $x_\alpha$  para um elemento infinitesimal de placa, considerando as forças atuantes e os esforços solicitantes, como mostrado na Figura 2.3, e considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos, são obtidas as seguintes equações de equilíbrio:

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0 \quad (2.4)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.5)$$

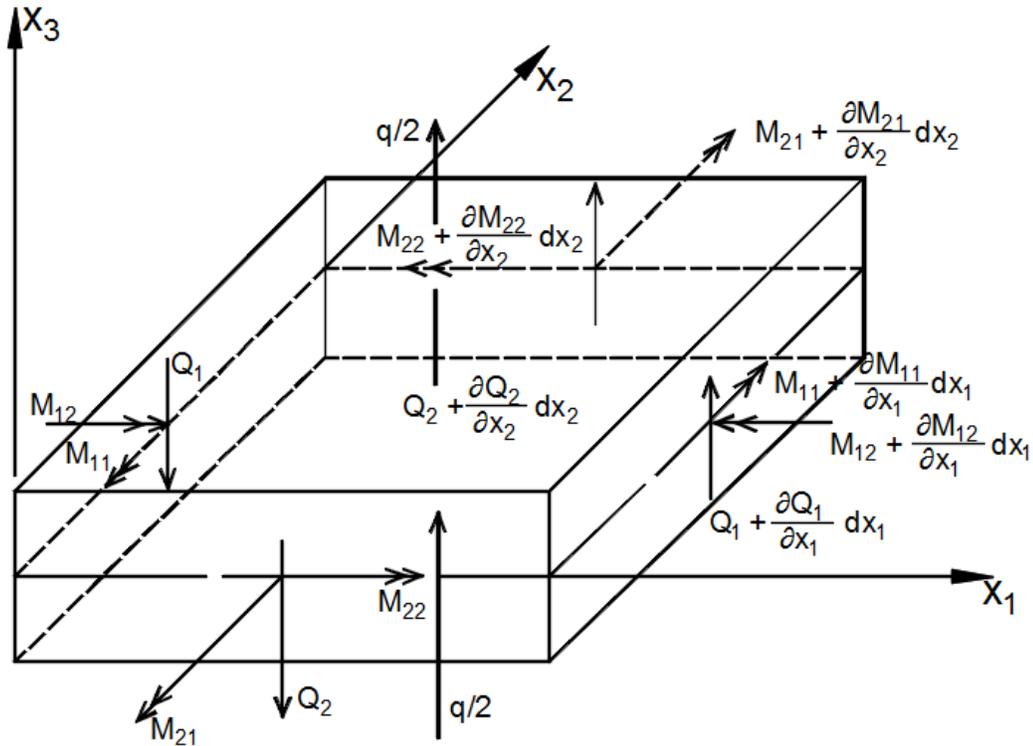


Figura 2.3 - Elemento de placa em equilíbrio

#### 2.4. Deslocamentos generalizados considerando pontos na superfície média

Os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$ , considerados para pontos da superfície média, representam a média ponderada dos deslocamentos  $v_i$  de pontos situados ao longo da espessura nas direções dos eixos coordenados (Reissner, 1947). As respectivas expressões são apresentadas a seguir.

- Rotação da normal à superfície média nos planos  $x_\alpha - x_3$ .

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_\alpha x_3 dx_3 \quad (2.6)$$

- Deslocamento transversal (flecha)

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} u_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.7)$$

## 2.5. Deformações específicas generalizadas

As deformações específicas generalizadas, em função da rotação  $\phi_\alpha$  e da flecha  $w$ , quando se utiliza a teoria linear, tomando-se como base o regime de pequenos deslocamentos e deformações, são:

- Deformações específicas de flexão (curvatura):

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (2.8)$$

- Deformações específicas cisalhantes transversais:

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha} \quad (2.9)$$

As deformações específicas cisalhantes transversais ocorrem devido a consideração de que uma reta normal ao plano da superfície média da placa, antes da deformação, não permanece mais normal à superfície média após a deformação. Neste caso, as deformações  $\psi_\alpha$  são calculadas pela soma da rotação  $\phi_\alpha$  com a derivada da flecha  $w_{,\alpha}$ .

Na teoria de Kirchhoff, considera-se que, após a deformação da placa, as retas perpendiculares ao plano da superfície média continuam retas e normais à superfície média deformada; portanto, as deformações específicas por cisalhamento da placa são desprezadas. Assim, considerando-se  $\psi_\alpha = 0$  na equação (2.9), obtém-se  $\phi_\alpha = -w_{,\alpha}$ , ou seja, as rotações são obtidas por meio de derivadas da flecha, o que não ocorre na teoria de Reissner.

Os sentidos positivos das rotações são dados na Figura 2.4.

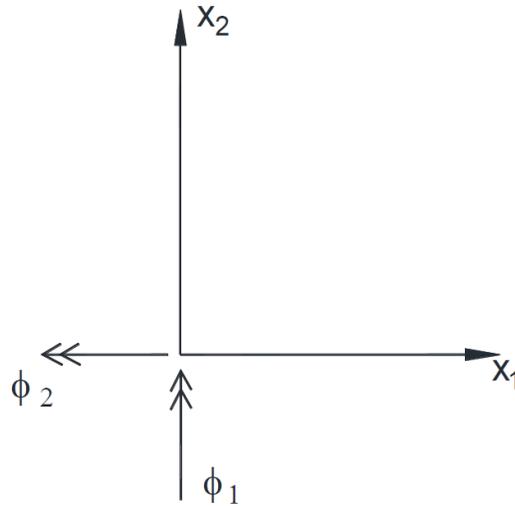


Figura 2.4 - Sentidos positivos das rotações

## 2.6. Expressões dos esforços

Considerando a teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos aliada a princípios variacionais, os momentos e esforços cortantes em função dos deslocamentos generalizados podem ser expressos pelas equações a seguir, como apresentado em Van der Weeën (1982a):

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

$$Q_{\alpha} = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_{\alpha} + w_{,\alpha}) \quad (2.11)$$

sendo:

$\nu$  - coeficiente de Poisson;

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - rigidez à flexão da placa;

$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$  - constante característica das equações de Reissner;

$\delta_{\alpha\beta}$  - delta de Kronecker, que corresponde a  $\begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$ .

## 2.7. Sistema de equações de Reissner

O sistema formado pelas três equações de equilíbrio apresentadas em (2.4) e (2.5), em conjunto com as cinco equações apresentadas em (2.10) e (2.11), constitui a base da teoria de Reissner e representa um sistema de oito equações diferenciais, que atendem a três condições de contorno por bordo.

Substituindo as expressões (2.10) e (2.11) nas equações de equilíbrio (2.4) e (2.5), podem-se condensar as oito equações diferenciais, obtendo-se um sistema com três equações diferenciais parciais da seguinte forma:

$$Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{,\alpha} = -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\nabla^2 w)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q = q$$
(2.12)

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \text{ - operador de Laplace;}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2 \text{ - operador bi-harmônico.}$$

## 2.8. Condições de contorno

O sistema de equações diferenciais da teoria de Reissner permite que sejam satisfeitas três condições de contorno por bordo, sendo que podem ser prescritas, para cada uma das três direções generalizadas, deslocamento ou força de superfície.

Considerando  $\Gamma$  o contorno total da placa,  $\Gamma_u$  o contorno onde os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$  são prescritos e  $\Gamma_p$ , onde as forças de superfície generalizadas  $p_\alpha$  e  $p_3$  são prescritas, tem-se:

$$\text{em } \Gamma_u: \quad \phi_\alpha = \bar{\phi}_\alpha$$

$$w = \bar{w}$$

$$\text{em } \Gamma_p: \quad p_\alpha = \bar{p}_\alpha$$

$$p_3 = \bar{p}_3$$

sendo:

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$p_3 = Q_\beta n_\beta$$

$$\bar{p}_\alpha = \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$\bar{p}_3 = \bar{Q}_\beta n_\beta$$

onde  $n_\beta$  são os co-senos diretores da normal dirigida para fora do contorno.

Pela teoria clássica (Kirchhoff), como as deformações cisalhantes transversais são consideradas desprezíveis, chega-se a uma equação de quarta ordem, satisfazendo apenas duas condições de contorno por bordo, o que acarreta a perda de precisão em cantos ou proximidades de furos com diâmetros da ordem de grandeza da espessura da placa.

Na teoria de Reissner, essa perda de precisão não ocorre, pois as três condições de contorno do problema são satisfeitas independentemente e a influência da espessura sobre os deslocamentos e esforços resultantes é levada em consideração (Reissner, 1945).

## 2.9. Formulação para placas incluindo não linearidade física

A formulação apresentada nos itens anteriores para análise elástica pode ser estendida para análise de flexão de placas com a consideração de não linearidade física. Considera-se que a placa sofre deformações plásticas apenas de flexão que dependem do tempo de atuação do carregamento, e de forma aproximada que, quando qualquer ponto da seção se plastifica, toda a seção transversal sofre plastificação simultaneamente. As equações são escritas em termos de taxas, a fim de considerar a variação com o tempo. Os pontos acima das variáveis indicam a derivada relacionada ao tempo.

### 2.9.1. Fórmulas básicas da teoria de Reissner incluindo a não linearidade

Seja, agora, uma placa de espessura  $h$  constante, sujeita a carregamento transversal  $q$  por unidade de área, sendo o material da placa isotrópico, homogêneo e não linear.

Considerando as deformações plásticas somente devido à flexão, a taxa de deformação total de flexão  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}$  e a taxa de deformação total cisalhante  $\dot{\psi}_\alpha$  são dadas pelas seguintes expressões:

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta} = \dot{\chi}_{\alpha\beta}^e + \dot{\chi}_{\alpha\beta}^a \quad (2.13)$$

$$\dot{\psi}_\alpha = \dot{\psi}_\alpha^e \quad (2.14)$$

em que  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}^e$  e  $\dot{\psi}_\alpha^e$  são as partes elásticas e  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}^a$  é a contribuição inelástica devido à flexão.

A parcela inelástica de deformação pode ser expressa na seguinte forma:

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta}^a = \dot{\chi}_{\alpha\beta}^p + \dot{\chi}_{\alpha\beta}^c + \dot{\chi}_{\alpha\beta}^t \quad (2.15)$$

onde  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}^p$  é a taxa de deformação plástica,  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}^c$  é a taxa de deformação devido à fluência e  $\dot{\chi}_{\alpha\beta}^t$  é a taxa de deformação devido a cargas térmicas. Neste trabalho, será considerada apenas a parcela referente à taxa de deformação plástica.

As taxas de momentos fletores e esforços cortantes são expressas por:

$$\dot{M}_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ 2\dot{\chi}_{\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} \dot{\chi}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{\nu \dot{q}}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - \dot{M}_{\alpha\beta}^a \quad (2.16)$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \dot{\psi}_\alpha \quad (2.17)$$

em que  $\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $D$  foram definidos no item 2.6 e  $\dot{M}_{\alpha\beta}^a$  representa as taxas das componentes de momentos inelásticos, definidos em formulação de tensão inicial por (Karam, 1992):

$$\dot{M}_{\alpha\beta}^a = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ 2\dot{\chi}_{\alpha\beta}^a + \frac{2\nu}{1-\nu} \dot{\chi}_{\gamma\gamma}^a \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.18)$$

As demais equações definidas no item 2.8 também são escritas, neste caso, em termos das taxas das variáveis.

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PLACAS DE REISSNER

Para aplicação do método dos elementos de contorno, é necessária a obtenção das equações integrais que definem o problema. As equações integrais podem ser obtidas a partir de um Procedimento de Resíduos Ponderados, utilizando a solução fundamental como função ponderadora, conforme apresentado por Karam (1992).

Assim, neste capítulo, são apresentadas as equações integrais básicas do método dos elementos de contorno para placas utilizando a teoria de Reissner e considerando a não linearidade física. São mostradas as equações para deslocamentos em pontos internos e em pontos do contorno, para momentos fletores e esforços cortantes em pontos internos e também as soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície generalizadas.

#### 3.1. Equação integral básica

Seja uma placa de espessura constante  $h$ , em que  $\Omega$  define o domínio representado pela superfície média e  $\Gamma$  representa o contorno, definido pela linha que circunda a superfície média. Considera-se a placa em equilíbrio e submetida a um carregamento transversal  $q$  atuando em  $\Omega$ .

Para uma maior conveniência nas expressões que serão utilizadas a seguir, os deslocamentos generalizados  $\phi_\alpha$  e  $w$  serão representados por  $u_\alpha$  e  $u_3$ , ou, genericamente, por  $u_k$ .

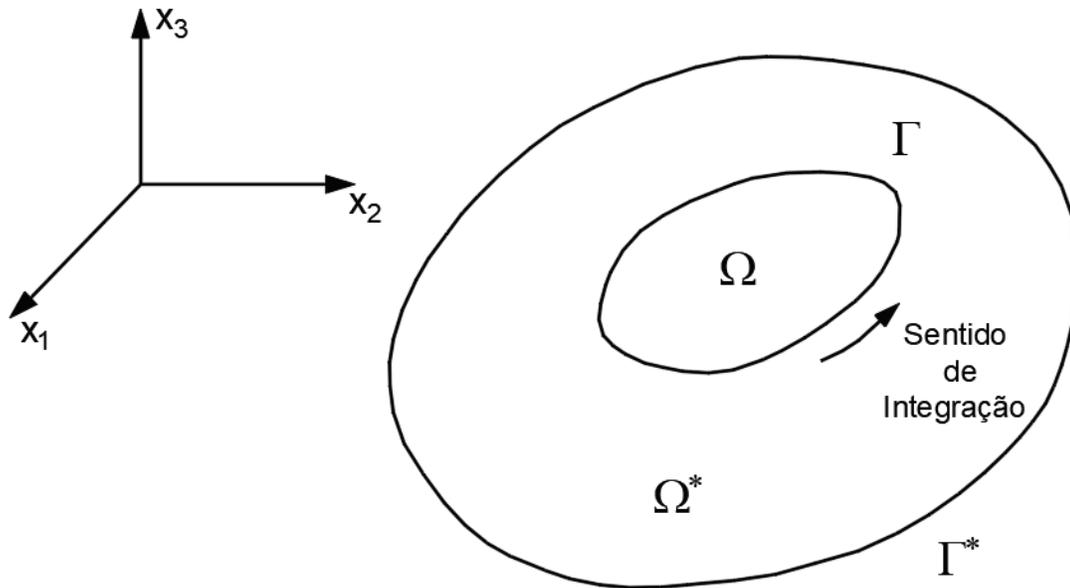
Pode-se, então, reescrever as condições de contorno para as três direções generalizadas:

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= \bar{u}_k \text{ em } \Gamma_u \\ \dot{p}_k &= \bar{p}_k \text{ em } \Gamma_p \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$$

Seja também uma placa em equilíbrio, com domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$  e que contém a placa de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , conforme a Figura 3.1.



**Figura 3.1 - Região  $\Omega^* \cup \Gamma^*$  que contém a placa  $\Omega \cup \Gamma$**

Assim, para as equações apresentadas anteriormente, tem-se:

i) Para a região  $(\Omega \cup \Gamma)$

- Deslocamentos:  $\dot{u}_k$

- Forças de superfície:  $\dot{p}_k$

sendo:

$$\dot{p}_\alpha = \dot{M}_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$\dot{p}_3 = \dot{Q}_\alpha n_\alpha$$

(3.2)

- Deformações específicas:

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi}_{\alpha} = \dot{u}_{\alpha} + \dot{u}_{3,\alpha}$$

- Esforços:

$$\dot{M}_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \dot{u}_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha,\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha,\beta} - \dot{M}_{\alpha\beta}^a \quad (3.4)$$

$$\dot{Q}_{\alpha} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\dot{u}_{\alpha} + \dot{u}_{3,\alpha})$$

- Equações de equilíbrio:

$$\dot{M}_{\alpha\beta,\beta} - \dot{Q}_{\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

$$\dot{Q}_{\alpha,\alpha} + \dot{q} = 0$$

ii) Para a região  $(\Omega^* \cup \Gamma^*)$

- Deslocamentos:  $u_k^*$

- Forças de superfície:  $p_k^*$

sendo:

$$p_{\alpha}^* = M_{\alpha\beta}^* n_{\beta} \quad (3.6)$$

$$p_3^* = Q_{\alpha}^* n_{\alpha}$$

- Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^*) \quad (3.7)$$

$$\psi_{\alpha}^* = u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*$$

- Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha,\beta} \right] + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha,\beta} \quad (3.8)$$

$$Q_{\alpha}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*)$$

- Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + F_{\alpha}^* = 0 \quad (3.9)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

em que  $F_k^*$  representa as componentes das forças de domínio, que atuam na superfície média, a fim de se obter a solução fundamental. Estas forças são consideradas como cargas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas em um ponto que pertence à região  $\Omega^*$ . Este ponto será chamado de ponto fonte ou ponto carga e será representado por  $\xi$ .

A equação integral para os deslocamentos generalizados em pontos internos, incluindo efeitos de não linearidade física, pode ser obtida a partir do Método dos Resíduos Ponderados, conforme apresentado por Karam (1992).

No presente trabalho, considera-se a forma geral desta equação para não linearidade física, que permite a aplicação a problemas dependentes do tempo, isto é, a problemas de análise elasto/viscoplástica. Assim, tem-se, para um ponto  $\xi$  qualquer situado no interior da região  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] \dot{q}(x) d\Omega(x) \\ & + \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta i}^*(\xi, x) \dot{M}_{\alpha\beta}^a(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde:

$u_{ij}^*(\xi, x)$ - deslocamentos generalizados na direção  $j$  do ponto  $x$ , correspondentes a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ ;

$p_{ij}^*(\xi, x)$ - forças de superfície generalizadas na direção  $j$  do ponto  $x$ , correspondentes a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ ;

$\chi_{\alpha\beta i}^*$ - deformações generalizadas na direção  $j$  do ponto  $x$ , correspondentes a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ ;

sendo:

$\xi$  - ponto fonte, isto é, ponto onde são aplicadas as cargas concentradas generalizadas unitárias;

$x$  - ponto campo, isto é, ponto onde são observados os efeitos das cargas unitárias aplicadas.

### 3.2. Solução fundamental

Para a resolução do problema pelo MEC, é necessário que se considere uma solução fundamental, a qual satisfaz as equações de equilíbrio e pode ser interpretada como o efeito, no ponto campo  $x$ , de uma força concentrada generalizada unitária aplicada no ponto fonte  $\xi$ , de uma placa infinita de domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$  e que contém a placa de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ .

#### 3.2.1. Deslocamentos generalizados

Os tensores dos deslocamentos generalizados representados por  $u_{ij}^*(\xi, x)$  na equação (3.10) representam os deslocamentos da solução fundamental e são obtidos como mostrado a seguir.

As equações de equilíbrio podem ser expressas em função de deslocamentos generalizados, substituindo-se as expressões dos esforços resultantes (2.10) e (2.11) nas equações de equilíbrio (2.4) e (2.5), obtendo-se:

$$A_{ij}^* \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u_j(\xi) + b_i = 0 \quad (3.11)$$

em que  $\Delta_{ij}^*$  representa as componentes do operador de Navier e suas expressões são dadas por:

$$\Delta_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ (\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha(\xi) \partial x_\beta(\xi)} \right]$$

$$\Delta_{\alpha 3}^* = -\Delta_{3\alpha}^* = -D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha(\xi)} \quad (3.12)$$

$$\Delta_{33}^* = D \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \nabla^2$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha(\xi) \partial x_\alpha(\xi)} = \text{operador de Laplace} \quad (3.13)$$

e  $b_i$  representa as componentes de forças de domínio, que podem ser expressas por:

$$b_\alpha = \frac{\nu q_{,\alpha}}{\lambda^2(1-\nu)} \quad (3.14)$$

$$b_3 = q \quad (3.15)$$

Pode-se reescrever a equação (3.12) como:

$$\Delta_{ij}^* \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{kj}^* + b_{ki}^* = 0 \quad (3.16)$$

sendo  $k$  a direção da carga concentrada unitária aplicada em  $\xi$ .

O campo de deslocamentos  $u_{jk}^*$  representa a solução desta equação, sendo chamada de solução fundamental.

Neste caso,  $b_{kj}^*$  é expresso por:

$$b_{kj}^* = \delta(x - \xi) \delta_{kj} \quad (3.17)$$

sendo  $\delta(x - \xi)$  o delta de Dirac no ponto  $\xi$ .

As expressões da solução fundamental  $u_{jk}^*$  podem ser obtidas pelo método de Hörmander, de acordo com Van der Weeën (1982a), e são dadas por:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2 \ln z - 1)] \delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)] r_{,\alpha} r_{,\beta} \right\}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln z - 1) r r_{,\alpha} \quad (3.18)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(\ln z - 1) - 8 \ln z]$$

onde:

$$r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha} \rightarrow \text{distância entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (3.19)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r} \quad (3.20)$$

sendo:

$$r_\alpha = x_\alpha(x) - x_\alpha(\xi) \quad (3.21)$$

$$z = \lambda r \quad (3.22)$$

$$A(z) = K_0(z) + 2z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.23)$$

$$B(z) = K_0(z) + z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.24)$$

Nas expressões (3.18), tem-se  $A = A(z)$  e  $B = B(z)$ , sendo  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  funções de Bessel modificadas de ordem inteira, as quais podem ser calculadas através de expansões polinomiais, apresentadas em Abramowitz e Stegun (1965) e também no APÊNDICE A.

### 3.2.2. Forças de superfície generalizadas

As forças de superfície generalizadas correspondentes à solução fundamental,  $p_{ij}^*$ , são obtidas substituindo-se as derivadas das expressões (3.18) em (3.8) e, em seguida, substituindo-se as expressões assim obtidas em (3.6), resultando em:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\gamma}r_{,n} + r_{,\alpha}n_{\gamma}) + (4A + 1 + \nu)r_{,\gamma}n_{\alpha} - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\gamma}r_{,n}]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [Bn_{\gamma} - Ar_{,\gamma}r_{,n}] \quad (3.25)$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_{\alpha} + 2r_{,\alpha}r_{,n} \right]$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n}$$

onde  $r_{,n}$  é a derivada de  $r$  em relação à normal no ponto  $x$ , sendo definida por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} r_{,\alpha}n_{\alpha}$$

### 3.2.3. Singularidade dos tensores

Quando o ponto fonte tende para o contorno, o que será mostrado no próximo item, os pontos  $\xi$  e  $x$  podem coincidir. Neste caso, tem-se  $r = 0$  e os tensores  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  apresentam singularidades que necessitam ser analisadas.

Ao se considerar as expansões de  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  e substituir nas expressões  $A(z)$  e  $B(z)$ , verifica-se que: para  $A(z)$ , as parcelas com singularidade logarítma e singularidade  $r^{-2}$  se cancelam e, assim,  $A(z)$  não possui singularidade; já para  $B(z)$ , somente as parcelas com singularidade  $r^{-2}$  se cancelam e conclui-se que  $B(z)$  possui singularidade de ordem  $\ln r$ . Portanto, o tensor  $u_{ij}^*$  possui singularidade  $\ln r$  e o tensor  $p_{ij}^*$  possui singularidades  $\ln r$  e  $r^{-1}$ .

### 3.3. Equação integral para pontos no contorno

A fim de se resolver o problema pelo MEC, pode-se reescrever a equação (3.10), levando o ponto fonte até o contorno e envolvendo-o por um setor circular de raio  $\varepsilon$  centrado em  $\xi$ , criando um contorno adicional  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , conforme apresentado na Figura 3.2.

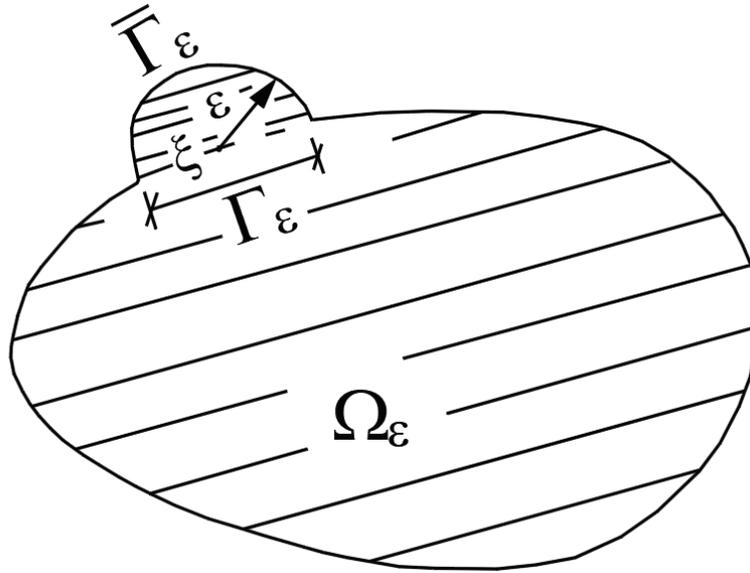


Figura 3.2 - Placa com ponto  $\xi$  no contorno

Então, tira-se o limite das integrais resultantes na equação (3.10), quando  $\varepsilon$  tende a zero, ou seja,  $\xi$  tende para  $\Gamma$ . Este procedimento é mostrado em detalhes em Karam (1986) para as três primeiras integrais da equação (3.10), sendo que a quarta não apresenta problemas, pois possui singularidade fraca. Logo, para um ponto do contorno, tem-se a equação integral para deslocamentos escrita na forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(\xi)\dot{u}_j(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)\dot{p}_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)\dot{u}_j(x)d\Gamma(x) + \\
 &+ \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] \dot{q}(x)d\Omega(x) \\
 &+ \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta i}^*(\xi, x) \dot{M}_{\alpha\beta}^a(x)d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

sendo  $c_{ij}(\xi)$  um termo que depende da geometria do contorno no ponto  $\xi$ .

A equação (3.26) é a equação integral básica para análise de flexão de placas com consideração da não linearidade física em uma formulação que considera momentos plásticos iniciais.

A equação (3.26) pode ser considerada válida para um ponto  $\xi$  de  $\Omega$  ou  $\Gamma$ , onde:

- para pontos internos, tem-se  $c_{ij} = \delta_{ij}$ ;

- para pontos do contorno cuja normal é contínua, ou seja, no caso de contornos suaves, tem-se  $c_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2}$ .

As expressões para  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  são apresentadas nas equações (3.18) e (3.25), respectivamente. O tensor que multiplica o momento plástico é obtido de:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{2}(u_{\gamma\alpha,\beta}^* + u_{\alpha\beta,\alpha}^*) \quad (3.27)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{2}(u_{3\alpha,\beta}^* + u_{3\beta,\alpha}^*) \quad (3.28)$$

Podem-se obter as derivadas de  $u_{ij}^*$  para substituir nas equações (3.27) e (3.28), derivando-se as equações (3.18) em relação às coordenadas do ponto  $x$ .

Levando em consideração as equações (3.19), (3.20) e (3.22), pode-se obter:

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(x)} = \lambda r_{,\alpha} \quad (3.29)$$

A partir das equações (3.23) e (3.24) e fazendo uso das fórmulas de recorrência de Abramowitz e Stegun (1965) e também da equação (3.29), obtêm-se:

$$\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r}(zK_1 + 2A) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(x)} = -\frac{r_{,\alpha}}{r}(zK_1 + A) \quad (3.31)$$

A partir das equações (3.20), (3.30) e (3.31) e derivando as equações (3.18), podem ser obtidas as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha\beta,\gamma}^* = & -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} [(4A + 4zK_1)r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \\
 & -2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + \\
 & + (4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta}r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha})]
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$u_{\alpha 3,\beta}^* = -u_{3\alpha,\beta}^* = \frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2 \ln z - 1) + 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] \tag{3.33}$$

$$u_{33,\alpha}^* = -\frac{r_{,\alpha}}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2 r} [(1-\nu)z^2(2 \ln z - 1) - 8] \tag{3.34}$$

Substituindo-se as equações (3.32) a (3.34) em (3.27) e (3.28), podem-se obter os tensores que multiplicam os momentos plásticos na equação (3.26).

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\beta\gamma}^* = & -\frac{1}{8\pi D(1-\nu)r} [(8A + 4zK_1 + 2 - 2\nu)(r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma}) - \\
 & -4(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + 2(4A + 1 - \nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}]
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\chi_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2 \ln z - 1) + 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] \tag{3.36}$$

### 3.4. Transformação das integrais de domínio em integrais de contorno

Pode-se transformar a integral de domínio relacionada a carga transversal  $q$  que aparece na equação (3.26) em integral de contorno para diversos tipos de carregamento.

Aplicando-se o teorema da divergência e considerando um carregamento uniformemente distribuído, ou seja,  $\dot{q}(x) = \dot{q}$ , obtém-se a expressão contendo apenas integrais de contorno, exceto a última, na forma:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)\dot{u}_j(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)\dot{p}_j(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)\dot{u}_j(x)d\Gamma(x) + \\
&+ \dot{q} \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x)d\Gamma(x) \\
&+ \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta i}^*(\xi, x)\dot{M}_{\alpha\beta}^a(x)d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

sendo as expressões de  $v_{i,\alpha}^*$  dadas por (Karam, 1992):

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3)r_{,\alpha}r_{,\beta}] \tag{3.38}$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{rr_{,\beta}}{128\pi D(1-\nu)\lambda^2} [32(2 \ln z - 1) - z^2(1-\nu)(4 \ln z - 5)] \tag{3.39}$$

### 3.5. Momentos e esforços cortantes nos pontos internos

Para calcular os momentos fletores e esforços cortantes nos pontos internos, substitui-se a expressão (3.37), com  $C_{ij} = \delta_{ij}$ , e suas derivadas em relação às coordenadas do ponto  $\xi$  nas expressões (2.8) e (2.9). Substituindo as expressões resultantes em (2.16) e (2.17) e após alguns procedimentos, obtêm-se as expressões a seguir (Karam, 1992):

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{\alpha\beta} &= \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*\dot{p}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*\dot{u}_k d\Gamma + \\
&+ \dot{q} \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \dot{M}_{\gamma\theta}^a d\Omega + \\
&+ \frac{\nu\dot{q}}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{8} [2(1+\nu)\dot{M}_{\alpha\beta}^a + (1-3\nu)\delta_{\alpha\beta}\dot{M}_{\theta\theta}^a]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\beta &= \int_\Gamma u_{\alpha\beta k}^* \dot{p}_k d\Gamma - \int_\Gamma p_{\alpha\beta k}^* \dot{u}_k d\Gamma + \dot{q} \int_\Gamma w_{\alpha\beta}^* d\Gamma + \\ &+ \int_\Omega \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* \dot{M}_{\gamma\theta}^a d\Omega \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma}) - \\ &- 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + (4A + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma}] \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{1}{8\pi} [(2(1 + \nu) \ln z - 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} + 2(1 - \nu)r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (3.43)$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - Ar_{,\beta} r_{,\gamma}] \quad (3.44)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta\gamma}^* &= \frac{D(1 - \nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\alpha} n_\beta + \delta_{\gamma\beta} n_\alpha) + \\ &+ (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta} n_\gamma - (16A + 6zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) \cdot \\ &\cdot [(n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha})r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha})r_{,\gamma} n] - \\ &- 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,\gamma n} + n_\gamma r_{,\alpha} r_{,\beta}) + \\ &+ 4(24A + 8zK_1 + z^2 K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\gamma n} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) -$$

$$-2(4A + zK_1)(r_{,\alpha} r_{,\beta} r_n + 2A\delta_{\alpha\beta} r_n)] \quad (3.47)$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta} r_n + r_{,\gamma} n_\beta) -$$

$$-2(4A + zK_1) r_{,\gamma} r_{,\beta} r_n + 2An_\gamma r_{,\beta}] \quad (3.48)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2B + 1)n_\beta - (z^2A + 2)r_{,\beta} r_n] \quad (3.49)$$

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \{(4 \ln z - 3) [(1-\nu) (r_{,\beta} n_\alpha + r_{,\alpha} n_\beta) +$$

$$+(1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta} r_n] + 4[(1-\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta}] r_n\} -$$

$$-\frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.50)$$

$$w_{3\beta}^* = -\frac{1}{8\pi} [(2 \ln z - 1)n_\beta + 2 r_{,\beta} r_n] - \frac{\nu}{(1-\nu)} u_{3\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.51)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = -\frac{\lambda^2}{16\pi r} [(8A + 4zK_1)(r_{,\theta}\delta_{\gamma\beta} + r_{,\gamma}\delta_{\theta\beta}) -$$

$$-4(8A + 2zK_1)r_{,\theta} r_{,\gamma} r_{,\beta} + 8A\delta_{\gamma\theta} r_{,\beta}] \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = & \frac{1}{16 \pi r^2} [4(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\theta\beta} + \delta_{\theta\alpha}\delta_{\gamma\beta}) + \\
& +4(4A + 1 + \nu)\delta_{\gamma\theta}\delta_{\alpha\beta} - 8(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)\delta_{\gamma\theta}r_{,\alpha}r_{,\beta} - \\
& -(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}r_{,\theta} - \\
& -4(16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu)(\delta_{\gamma\alpha}r_{,\theta}r_{,\beta} + \delta_{\theta\alpha}r_{,\gamma}r_{,\beta} + \\
& +\delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha}r_{,\theta} + \delta_{\theta\beta}r_{,\gamma}r_{,\alpha}) + \\
& +16(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,\theta}]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

## CAPÍTULO 4

### ANÁLISE VISCOPLÁSTICA

Neste capítulo, são apresentadas as principais relações entre tensões e deformações para a teoria da viscoplasticidade aplicada a um modelo unidimensional. Posteriormente, são apresentadas as equações constitutivas da viscoplasticidade aplicadas a placas, bem como as expressões utilizadas para os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca.

#### 4.1. Introdução

Muitos problemas de Engenharia são modelados e resolvidos considerando o regime linear-elástico; porém, em alguns casos específicos como, por exemplo, quando se quer conhecer o comportamento da estrutura até o colapso ou determinar a carga máxima suportada pela estrutura, é necessário considerar o problema de forma não linear. A análise com consideração da não linearidade física prevê o estudo de deformações plásticas, ou seja, deformações que são irreversíveis após o material atingir seu limite elástico, mesmo quando cessado o carregamento.

A teoria clássica da plasticidade considera que as deformações plásticas são independentes do tempo de atuação do carregamento, ocorrendo instantaneamente após a aplicação do carregamento. Logo, pela teoria clássica da plasticidade, não é possível avaliar a evolução das deformações ao longo do tempo. Porém, as deformações evoluem com o tempo, em maior ou menor grau, dependendo das condições físicas do problema analisado.

Em alguns problemas, a não consideração dessas propriedades não afeta o resultado; porém, em certos problemas, tais propriedades podem ter grande relevância e a dependência do tempo no processo de deformação pode ser uma importante característica na avaliação do comportamento inelástico. As deformações inelásticas dependem do tempo de atuação, bem como da forma de aplicação do carregamento. Em

consequência disso, diferentes resultados são obtidos para diferentes trajetórias e tempo de atuação de carregamento.

Exemplos de problemas em que a avaliação de deformações ao longo do tempo pode se tornar importante são: problemas de interação solo-estrutura, como escavação em túneis, valas a céu aberto, análise de estruturas de concreto em situações em que as deformações não imediatas são significativas. Pode-se mencionar, ainda, que metais sob altas temperaturas apresentam, simultaneamente, os fenômenos de fluência (“*creep*”) e viscoplasticidade, sendo a fluência a redistribuição de tensões e deformações ao longo do tempo sob resposta elástica do material, e a viscoplasticidade a deformação plástica variando ao longo do tempo.

A teoria da viscoplasticidade permite a modelagem dos efeitos da variação no tempo do processo de deformação plástica. Assim, após o início do escoamento, as tensões e deformações resultantes variam ao longo do tempo. Através da utilização de um modelo elasto/viscoplástico, como será visto na próxima seção, pode-se determinar, além dos efeitos ao longo do tempo, a carga que provoca o início da plastificação, bem como a carga que provoca o colapso da estrutura.

## **4.2. Teoria básica**

O uso de modelos elasto/viscoplásticos possibilita uma análise do comportamento estrutural até a iminência do colapso, pois leva em conta a evolução de tensões e deformações ao longo do tempo de atuação do carregamento.

Este comportamento pode ser apresentado de forma simplificada, por meio de modelos reológicos unidimensionais, em que podem ser associados, em série ou em paralelo, elementos reológicos básicos que representam as componentes elástica, viscosa e plástica do material, que pode ser com ou sem encruamento. Alguns modelos foram desenvolvidos por Perzyna (1966), Phillips e Wu (1973) e Nicholson e Phillips (1974) para caracterizar o comportamento elasto/viscoplástico

A componente elástica é representada por uma mola que apresenta comportamento linear e atende a lei de Hooke. Quando solicitada, surgem deformações imediatas sendo totalmente recuperáveis quando do descarregamento.

O elemento viscoso é representado por um cilindro ou amortecedor contendo um líquido de certa viscosidade, que se move dentro de um êmbolo, podendo ter

comportamento linear ou não linear. Assim, quando solicitado, o amortecedor armazena toda a energia que é, então, dissipada ao longo do tempo, gerando deformações não imediatas no decorrer do tempo e que são irreversíveis quando do descarregamento. Este é então o elemento responsável pelo aparecimento da variável tempo nos modelos elasto/viscoplásticos.

Já o elemento sólido rígido-plástico ou deslizador, que representa o comportamento plástico, não se deforma para valores inferiores ao limite de escoamento  $\sigma_0$  e sofre deslizamento para valores iguais ou superiores, gerando deformações plásticas, que são imediatas e irreversíveis.

O modelo unidimensional da Figura 4.1 (Perzyna, 1966) é formado pela associação em paralelo do amortecedor com o sólido rígido-plástico, que se associam em série com a mola. Assim, tem-se que a taxa de deformação total do modelo,  $\dot{\epsilon}$ , devido a qualquer carregamento, será a soma da parcela elástica ( $\dot{\epsilon}^e$ ) com a parcela viscoplástica ( $\dot{\epsilon}^p$ ).

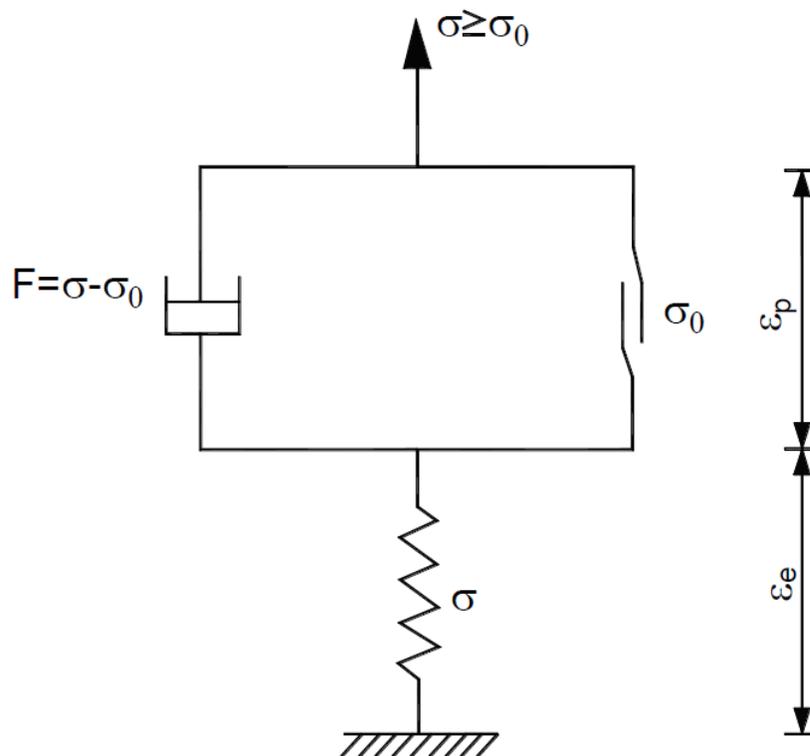


Figura 4.1 - Modelo unidimensional elasto/viscoplástico

Assim, pode-se escrever:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (4.1)$$

onde a taxa de deformação elástica é calculada de acordo com a tensão total, por:

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (4.2)$$

em que o ponto sobre as variáveis representa a diferenciação no tempo.

A condição inicial para que ocorra comportamento viscoplástico é dada pela expressão seguinte, denominada critério estático de escoamento, expresso em função do nível de tensão e parâmetro de dureza  $\kappa$ .

$$F(\sigma, \kappa) = \sigma - \sigma_0 = 0 \quad (4.3)$$

A equação (4.3) refere-se ao mesmo critério utilizado para a teoria clássica da plasticidade; porém no caso da consideração da viscoplasticidade, é possível que  $F(\sigma, \kappa) \geq 0$ , o que não é permitido pela teoria clássica da plasticidade, em que é obrigatório que o estado de tensão esteja sobre a superfície de escoamento.

Considerando o caso de endurecimento linear ( $H' \neq 0$ ) como um caso mais geral (Telles, 1983), o limite de escoamento  $\sigma_0$  pode ser expresso por:

$$\sigma_0 = \sigma_y + H' \varepsilon^p \quad (4.4)$$

onde  $\sigma_y$  representa a tensão uniaxial de escoamento do material e  $H'$  pode ser entendido como a inclinação do diagrama tensão-deformação após a retirada da componente elástica (Owen, 1980) e pode ser calculado por:

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (4.5)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente, que representa a inclinação da curva tensão deformação após o primeiro escoamento.

Assim, no modelo de Perzyna (1966), mostrado na Figura 4.1, é admitido que o material apresenta propriedades viscosas somente na região plástica, o que significa que, para valores inferiores ao limite de escoamento,  $\sigma_0$ , ou seja, quando  $F < 0$ , apresenta comportamento puramente elástico (deformações elásticas). O comportamento viscoplástico é visualizado para valores maiores que o limite de escoamento, pois o elemento rígido-plástico torna-se ativo e o excesso de tensão ( $F = \sigma - \sigma_0$ ) é transferido ao elemento viscoso, dissipando-se ao longo do tempo. O modelo elasto/viscoplástico, tem, como casos particulares, os modelos elástico, viscoelástico e elasto-plástico.

Torna-se necessária a definição de uma lei para determinar a taxa de deformação viscoplástica. Uma forma explícita é dada por Telles (1983):

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) \right\rangle \quad (4.6)$$

em que:

$\gamma$  é o parametro de fluidez do material em função tempo, temperatura, etc. e

$$\left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) \right\rangle \begin{cases} 0 & \text{para } F \leq 0 & \text{Não ocorrerá deformação viscoplástica;} \\ \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) & \text{para } F > 0 & \text{Ocorrerá deformação viscoplástica.} \end{cases} \quad (4.7)$$

A função  $\Phi$  é selecionada a partir de resultados experimentais e diferentes tipos são propostos por Perzyna (1966), como por exemplo:

$$\Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) = \left( \frac{F}{\sigma_0} \right); \quad \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) = \left( \frac{F}{\sigma_0} \right)^n; \quad \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) = e^{\left( \frac{F}{\sigma_0} \right)} - 1$$

sendo:

$$F = \sigma - \sigma_0 \quad (4.8)$$

A equação (4.7) mostra que o aumento da taxa de deformação viscoplástica é função do excesso de tensão acima do critério de escoamento estático. Este excesso de tensão gera a taxa de deformação viscoplástica representada no modelo reológico da Figura 4.1.

Para o caso de um modelo unidimensional de um material com endurecimento ( $H' \neq 0$ ), depois de algum tempo sob uma tensão constante  $\sigma$ , o elemento rígido-plástico tende a tornar-se rígido novamente e uma configuração estática assintótica ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ) é alcançada, satisfazendo ao critério estático de escoamento  $F = 0$  e estabilizando a deformação total, mesmo depois de o nível de tensão ter ultrapassado o limite de escoamento. Assim, quando o tempo tende a  $t = \infty$ , isso equivale à resposta do modelo unidimensional de comportamento elastoplástico devido a uma carga aplicada e mantida constante. Para um modelo unidimensional sem endurecimento ( $H' = 0$ ), os valores de deformação crescerão a uma taxa constante ao longo do tempo.

Existe uma diferença importante entre a teoria clássica da plasticidade e a da viscoplasticidade. Para a teoria da plasticidade, a condição de escoamento apresentada na equação (4.8) é uma condição necessária para que o comportamento plástico ocorra. Assim, quando  $F = 0$  e  $\dot{\sigma} < 0$ , ocorre um descarregamento, levando a um estado elástico e, quando  $F = 0$  e  $\dot{\sigma} > 0$ , ocorre um carregamento, levando a um novo estado plástico. Já na viscoplasticidade, quando  $F > 0$ , o comportamento viscoplástico continua ocorrendo independentemente se  $\dot{\sigma} \geq 0$ , ou seja, independe se está ocorrendo um carregamento ou um descarregamento da estrutura.

Uma característica interessante do modelo elasto/viscoplástico é que, para um processo de carregamento incremental, tem-se resultados próximos aos obtidos pela teoria clássica da plasticidade, fornecendo estado estacionário quando  $F = 0$ . Quando isto ocorre, a função  $\Phi$  e o parâmetro  $\gamma$  tornam-se imateriais, sendo que  $\gamma$  funciona como um fator de escala de tempo, tornando o tempo uma variável fictícia.

Essa característica do modelo elasto/viscoplástico pode ser demonstrada considerando a equação (4.6) para a situação em que  $F \geq 0$ , obtendo-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \Phi \left( \frac{F}{\sigma_0} \right) \quad (4.9)$$

A equação (4.9) pode ser rearranjada, fornecendo:

$$F = \sigma_0 \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma} \right) \quad (4.10)$$

ou, ainda, na seguinte forma:

$$F = \sigma_0 \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E}{\gamma} \right) \quad (4.11)$$

Verifica-se, a partir de (4.10) ou (4.11) que, para um processo incremental, as taxas de deformação viscoplástica tornam-se muito pequenas durante o processo de carregamento; assim,  $F = 0$  é alcançado por toda a estrutura, estabilizando a deformação total. Isto pode ser feito por meio de um programa com pequenos incrementos de carga aplicados instantaneamente. Assim, após cada incremento de carga, esta é mantida constante durante a evolução do tempo, até que seja atingida a estabilização das deformações, como se o elemento rígido-plástico estivesse “trancado” novamente, a cada incremento de carga. Desta forma, o carregamento completo pode ser aplicado com o critério de escoamento estático sendo satisfeito para um número discreto de pontos durante a evolução do carregamento (Telles, 1983).

Para casos uniaxiais, incrementos de qualquer tamanho podem ser aplicados, pois o resultado será sempre o mesmo. Problemas com mais dimensões não se comportam da mesma forma e, nestes casos, geralmente ocorre uma redistribuição de tensões. De uma forma geral, deve-se dar preferência a pequenos incrementos.

### 4.3. Equações constitutivas para placas considerando a viscoplasticidade

Com base no modelo de Perzyna (1966) e nos procedimentos utilizados por Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) para os casos bi e tridimensionais, são apresentadas, a seguir, as equações constitutivas aplicadas a placas com a consideração de um modelo elasto/viscoplástico.

Admite-se o critério de escoamento estático escrito agora em função de momentos  $M_{\alpha\beta}$  e do parâmetro de endurecimento  $\kappa$ , que indica a evolução da superfície de escoamento:

$$F(M_{\alpha\beta}, \kappa) = 0 \quad (4.12)$$

Esta condição pode ser melhor visualizada na seguinte forma:

$$f(M_{\alpha\beta}) = \Psi(\kappa) \quad (4.13)$$

em que  $F = f - \Psi$  e, para a hipótese *work hardening*, o parâmetro de endurecimento  $\kappa$  é expresso como função do trabalho plástico acumulado  $W^p$  durante as deformações e pode ser expresso por:

$$\kappa = W^p = \int M_{\alpha\beta} d\chi_{\alpha\beta}^p \quad (4.14)$$

em que  $d\chi_{\alpha\beta}^p$  é a parcela plástica de deformação ocorrida na placa durante um incremento de deformações.

Como  $f(M_{\alpha\beta})$  depende dos momentos  $M_{\alpha\beta}$ , deve-se considerar um momento  $M_e$ , designado momento equivalente, que pode ser calculado por diversos critérios, tais como: von Mises e Tresca. Considera-se, ainda, que  $\Psi(\kappa)$  seja igual a  $M_0$ , designado momento de escoamento unidirecional.

Pode-se definir o momento equivalente pelo critério de von Mises como:

$$M_e = \sqrt{3 J_2'} \quad (4.15)$$

Pelo critério de Tresca, o momento equivalente é definido da seguinte forma:

$$M_e = 2 \cos \theta \sqrt{J_2'} \quad (4.16)$$

em que  $\theta$  é similar ao parâmetro de Lode, definido em Hill (1950), expresso por:

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2' \sqrt{J_2'}} \right) \quad (4.17)$$

e tem-se também  $J_2'$  e  $J_3'$  análogos ao segundo e terceiro invariantes das tensões desviadoras, que são escritos em função dos “momentos desviadores”  $M'_{ij}$ , como:

$$J_2' = \frac{1}{2} M'_{ij} M'_{ij} \quad (4.18)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} M'_{ij} M'_{jk} M'_{ik} \quad (4.19)$$

sendo:

$$M'_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{kk} \quad (4.20)$$

O momento de escoamento unidirecional inicial pode ser calculado por:

$$M_y = \frac{\sigma_y h^2}{4} \quad (4.21)$$

em que  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento inicial do material.

Considerando um caso de endurecimento linear, como um caso mais geral, o momento de escoamento pode ser dado por:

$$M_0 = M_y + H' \chi_e^p \quad (4.22)$$

em que  $\chi_e^p$  é a deformação plástica equivalente e  $H'$  pode ser definido por:

$$H' = \frac{dM}{d\chi_e^p} \quad (4.23)$$

Pode-se entender  $H'$  como a inclinação do diagrama momento-curvatura após a remoção da componente elástica da curvatura, que pode ser calculada de forma análoga ao caso unidimensional por:

$$H' = \frac{EI_T}{1 - \frac{EI_T}{EI}} \quad (4.24)$$

Neste caso,  $EI$  é a rigidez à flexão elástica de uma placa de largura unitária e  $EI_T$  é a rigidez à flexão da mesma placa após o primeiro escoamento. Para o caso elastoplástico perfeito, tem-se  $EI_T = 0$  e, conseqüentemente,  $H' = 0$ .

Para este trabalho, considera-se que, quando o momento equivalente  $M_e$  atinge o momento de escoamento unidirecional  $M_0$ , toda a seção transversal se plastifica simultaneamente.

Considerando o conceito de trabalho de endurecimento (*work hardening*), pode-se definir a taxa de deformação viscoplástica equivalente  $\dot{\chi}_e^p$ , cujo incremento produz um incremento na energia de deformação plástica, ou seja:

$$M_e \dot{\chi}_e^p = M_{\alpha\beta} \dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \dot{\kappa} \quad (4.25)$$

Usando o princípio da normalidade (Perzyna, 1966), a taxa de deformação viscoplástica pode ser dada por:

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\Psi} \right) \right\rangle \frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}} \quad (4.26)$$

em que  $\gamma$ ,  $\Phi$  e o símbolo  $\langle \rangle$  têm os mesmos significados apresentados no item 4.1 deste trabalho.

A equação (4.26) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\Psi} \right) \right\rangle \frac{\partial f}{\partial M_{\alpha\beta}} \quad (4.27)$$

Então, multiplicando ambos os lados por  $M_{\alpha\beta}$ , tem-se:

$$M_{\alpha\beta} \dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\Psi} \right) \right\rangle M_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial M_{\alpha\beta}} \quad (4.28)$$

Considerando que  $f(M_{\alpha\beta})$  é homogênea de grau um (requisito satisfeito pelos critérios de escoamento adotados) e aplicando o teorema de Euler, obtém-se:

$$M_{\alpha\beta} \dot{\chi}_{\alpha\beta}^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\Psi} \right) \right\rangle f(M_{\alpha\beta}) \quad (4.29)$$

Então, da equação (4.29) e utilizando a equação (4.25), pode-se deduzir que a taxa de deformação viscoplástica equivalente será dada por:

$$\dot{\chi}_e^p = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\Psi} \right) \right\rangle \quad (4.30)$$

A partir da equação (4.30), para uma situação em que  $F > 0$  e rearranjando os termos, chega-se a:

$$f(M_{\alpha\beta}) = \Psi(\kappa) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\chi}_e^p}{\gamma} \right) \right] \quad (4.31)$$

A equação (4.31), quando comparada com a equação (4.13), demonstra a dependência explícita da superfície de escoamento sobre a taxa de deformação plástica equivalente.

Pode-se, ainda, mostrar que a taxa de deformação total equivalente ( $\dot{\chi}_e$ ) é igual à taxa de deformação elástica equivalente ( $\dot{\chi}_e^e$ ) mais a taxa de deformação plástica equivalente ( $\dot{\chi}_e^p$ ), considerando a seguinte equação:

$$\dot{\chi}_e = \dot{\chi}_e^e + \dot{\chi}_e^p \quad (4.32)$$

onde:

$$\dot{\chi}_e^e = \frac{\dot{M}_e}{D} \quad (4.33)$$

Então, tem-se:

$$\dot{\chi}_e = \frac{\dot{M}_e}{D} + \dot{\chi}_e^p \quad (4.34)$$

e substituindo (4.34) em (4.31), tem-se:

$$f(M_{\alpha\beta}) = \Psi(k) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\chi}_e - \dot{M}_e/D}{\gamma} \right) \right] \quad (4.35)$$

o que demonstra a dependência explícita de  $f(M_{\alpha\beta})$  sobre as taxas de tensões e deformações induzidas, análogo ao que foi demonstrado para o caso unidimensional.

Neste trabalho, a resolução do problema utilizando o método dos elementos de contorno é feita considerando uma técnica de tensões iniciais em um procedimento análogo ao apresentado em Telles (1983) para os casos de estados planos. Assim, as taxas de tensões iniciais, neste caso, apresentadas em função de taxas de momentos iniciais, podem ser calculadas por:

$$\dot{M}_{\alpha\beta}^p = \gamma \langle \Phi \rangle d_{\alpha\beta} \quad (4.36)$$

em que:

$$d_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \frac{\partial f}{\partial M_{\gamma\theta}} \quad (4.37)$$

onde:

$C_{\alpha\beta\gamma\theta}$  - tensor isotrópico de constantes elásticas

$\frac{\partial f}{\partial M_{\gamma\theta}}$  - vetor de fluxo plástico normal à superfície representativa do potencial plástico.

No item 5.4, apresenta-se a técnica de solução do problema de placas viscoplásticas utilizando um procedimento de passo simples de Euler aliado à técnica de tensões iniciais.

## CAPÍTULO 5

### O MEC APLICADO À ANÁLISE VISCOPLÁSTICA DE PLACAS

Neste capítulo, é apresentado o procedimento numérico para aplicação do MEC na solução de placas de Reissner com viscoplasticidade utilizando as equações mostradas nos capítulos anteriores. A fim de se utilizar o MEC, é necessário que as equações sejam escritas de forma discretizada, considerando a existência de elementos de contorno e, neste caso, células internas também. Foram utilizados elementos quadráticos contínuos e descontínuos de geometria linear. No caso de descontinuidade da normal, utilizaram-se nó duplo ou elementos descontínuos. São apresentados os procedimentos para tratamento de integrais singulares. A técnica utilizada para solução do problema viscoplástico é análoga à utilizada por Telles e Brebbia (1982) e por Telles (1983), e será mostrada neste capítulo. Ao final do capítulo, apresenta-se a estrutura do programa desenvolvido em FORTRAN para aplicação da formulação.

#### 5.1. Discretização das equações integrais para pontos no contorno

As equações integrais apresentadas no Capítulo 3 são escritas de forma discretizada, considerando que o contorno  $\Gamma$  é dividido em vários elementos, cada um consistindo em um trecho  $\Gamma_j$  de contorno, e o domínio ou a parte do domínio onde se espera que ocorram deformações plásticas é dividido em células internas, como ilustrado na Figura 5.1.

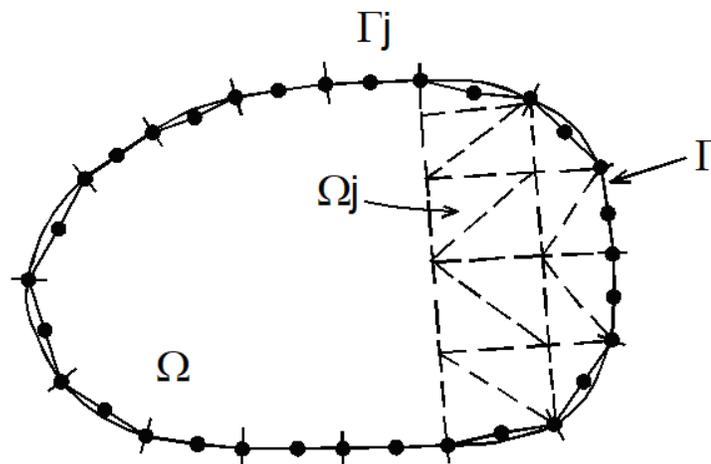


Figura 5.1 - Discretização em elementos de contorno e células internas

A obtenção de valores de incógnitas e de coordenadas em um ponto qualquer do elemento ou da célula pode ser feita a partir da interpolação de valores nodais.

As coordenadas para um ponto qualquer do elemento  $j$  podem ser calculadas utilizando a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{M} \mathbf{x}^{(m)} \quad (5.1)$$

onde

$\mathbf{x}^{(j)}$ - vetor que contém as coordenadas de um ponto qualquer do elemento;

$\mathbf{M}$  - matriz que contém as funções de interpolação para coordenadas;

$\mathbf{x}^{(m)}$ - vetor que contém as coordenadas dos pontos que definem a geometria do elemento.

Os deslocamentos generalizados e as forças de superfície generalizadas para um ponto qualquer do elemento  $j$  podem ser calculados utilizando as seguintes expressões, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(j)} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{U}}^{(n)} \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{(j)} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{P}}^{(n)}$$

onde

$\dot{\mathbf{U}}^{(j)}$ - vetor que contém as taxas de deslocamentos relativas a um ponto qualquer do elemento;

$\dot{\mathbf{U}}^{(n)}$ - vetor que contém as taxas de deslocamentos relativas aos pontos nodais do elemento;

$\dot{\mathbf{P}}^{(j)}$ - vetor que contém as taxas de forças de superfície relativas a um ponto qualquer do elemento;

$\dot{\mathbf{P}}^{(n)}$ - vetor que contém as taxas de forças de superfície relativas aos pontos nodais do elemento;

$\mathbf{N}$  - matriz que contém as funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície.

As coordenadas e os momentos plásticos para um ponto qualquer da célula  $j$  podem ser calculados utilizando as seguintes expressões, respectivamente:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{x}^{(m)} \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{M}}^{a(j)} = \bar{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{M}}^{a(n)} \quad (5.4)$$

onde

$\mathbf{x}^{(j)}$ - vetor que contém as coordenadas de um ponto qualquer da célula interna;

$\bar{\mathbf{M}}$  - matriz que contém as funções de interpolação para a célula;

$\mathbf{x}^{(m)}$ - vetor que contém as coordenadas dos pontos que definem a geometria da célula;

$\dot{\mathbf{M}}^{a(j)}$ - vetor que contém as taxas de momentos plásticos de um ponto do interior da célula;

$\bar{\mathbf{N}}$ - matriz que contém as funções de interpolação para momentos plásticos;

$\dot{\mathbf{M}}^{a(n)}$ - vetor que contém as taxas de momentos plásticos em um certo número de “pontos de momento”.

A equação (3.26) é discretizada para um ponto nodal  $\xi_i$  na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_i \dot{\mathbf{U}}_i = & \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{P}}^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{U}}^{(n)} - \\
& + \sum_{j=1}^L \left( \dot{q} \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_i} \chi_i^* \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \dot{\mathbf{M}}^{a(n)}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde:

$L$  – número de elementos no contorno;

$Z$  - número de células internas;

$\mathbf{C}_i$ - matriz cujos elementos são  $C_{ij}$ , sendo  $C_{ij} = \delta_{ij}/2$  para contorno suave;

$$\dot{\mathbf{U}}_i = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(\xi_i) \\ \dot{u}_2(\xi_i) \\ \dot{u}_3(\xi_i) \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{U}_i^*$  e  $\mathbf{P}_i^*$ - matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente;

$\mathbf{S}_i^*$ - vetor em que as componentes são expressas por:

$$S_k^* = \left[ v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha}^* \right] n_\alpha \tag{5.6}$$

A equação (5.5) também é válida para pontos internos de momento, com  $\mathbf{C}_i = \mathbf{I}$ .

Considerando que as funções de interpolação são escritas em função de uma coordenada intrínseca adimensional  $\eta$ , torna-se necessário transformar a diferencial  $d\Gamma$  para esse sistema. Assim, considerando  $|J|$  o jacobiano de transformação, pode ser utilizada a seguinte expressão:

$$d\Gamma = |J| d\eta \tag{5.7}$$

Nos casos de integrais regulares, ou seja, quando o ponto fonte  $\xi_i$  não pertence ao contorno  $\Gamma_i$  do elemento, a integração numérica é feita através da quadratura de Gauss, obtendo-se:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j}^1 \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} |J| d\eta = \sum_{k=1}^k (\mathbf{U}_i^* \mathbf{N})_k |J| w_k \quad (5.8)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j}^1 \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} |J| d\eta = \sum_{k=1}^k (\mathbf{P}_i^* \mathbf{N})_k |J| w_k \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j}^1 \mathbf{S}_i^* \mathbf{N} |J| d\eta = \sum_{k=1}^k (\mathbf{S}_i^*)_k |J| w_k \quad (5.10)$$

em que  $k$  é o número total de pontos de integração e  $w_k$ , o fator de peso associado a cada ponto de integração. O número de pontos de integração é determinado de acordo com a proximidade entre o ponto fonte e os pontos dos elementos onde se está integrando; assim quanto menor a distância entre estes pontos, maior será o número de pontos de integração utilizados.

Para o caso das células internas, as integrais regulares podem ser calculadas pela equação:

$$\mathbf{T}_{ij} = \int_{\Omega_i} \chi_i^* \bar{\mathbf{N}} d\Omega = \sum_{k=1}^k (\chi_i^* \bar{\mathbf{N}})_k |J| w_k \quad (5.11)$$

em que as coordenadas no interior da célula são consideradas em função de coordenadas triangulares  $(\zeta_1, \zeta_2)$  e o jacobiano também se refere a esse sistema de coordenadas. Para a integração numérica pela quadratura de Gauss, realiza-se uma transformação de coordenadas definindo um sistema de coordenadas polares  $(r, \phi)$  centrado no ponto fonte, sendo a integração realizada em relação a ambos,  $r$  e  $\phi$ . Para o valor principal de Cauchy, a quadratura de Kutt (Kutt, 1975) para integrais em partes finitas é utilizada para integrar em relação a  $r$ .

A partir das equações (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11), pode-se reescrever a equação (5.5), na seguinte forma:

$$C_i \dot{U}_i = \sum_{j=1}^L G_{ij} \dot{P}_j - \sum_{j=1}^L \hat{H}_{ij} \dot{U}_j + \sum_{j=1}^L B_{ij} + \sum_{j=1}^z T_{ij} \dot{M}_i^a \quad (5.12)$$

e sendo

$$\begin{cases} H_{ij} = \hat{H}_{ij}, & \text{para } i \neq j \\ H_{ij} = \hat{H}_{ij} + C_i, & \text{para } i = j \end{cases}$$

a equação (5.12) assume, então, a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^L H_{ij} \dot{U}_j = \sum_{j=1}^L G_{ij} \dot{P}_j + \sum_{j=1}^L B_{ij} + \sum_{j=1}^z T_{ij} \dot{M}_i^a \quad (5.13)$$

## 5.2. Sistema de equações

Após escrever as equações (5.5) para todos os pontos nodais, pode-se montar um sistema de equações para a resolução do problema na seguinte forma, em que o número total de equações é igual a três vezes o número de nós:

$$H\dot{U} = G\dot{P} + B + T\dot{M}^a \quad (5.14)$$

sendo:

$\dot{U}$  e  $\dot{P}$  - vetores que contêm as taxas de deslocamentos e taxas de forças de superfície, respectivamente;

$B$  - vetor que contém a parcela da carga distribuída;

$G$  e  $H$  - matrizes que contêm integrais sobre os elementos de contorno;

$\dot{M}^a$  - vetor contendo as taxas de momentos plásticos em pontos das células;

$T$  - matriz formada pelas integrais sobre as células internas.

Os momentos fletores e esforços cortantes nos pontos internos podem ser calculados usando as equações integrais correspondentes em forma discretizada, que ficam escritas como:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{M}}_i = & \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^{*'} \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{P}}^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^{*'} \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{U}}^{(n)} + \\
& + \sum_{j=1}^L \left( \dot{q} \int_{\Gamma_j} \mathbf{W}_i^{*'} d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_i} \chi_i^{*'} \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \dot{\mathbf{M}}^{a(n)} + \\
& + \frac{\nu \dot{q}}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} + \mathbf{E}'_i \dot{\mathbf{M}}_i^a
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Q}}_i = & \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^{*''} \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{P}}^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^{*''} \mathbf{N} d\Gamma \right) \dot{\mathbf{U}}^{(n)} + \\
& + \sum_{j=1}^L \left( \dot{q} \int_{\Gamma_j} \mathbf{W}_i^{*''} d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^Z \left( \int_{\Omega_i} \chi_i^{*''} \bar{\mathbf{N}} d\Omega \right) \dot{\mathbf{M}}^{a(n)}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Aplicando as equações (5.15) e (5.16) a todos os pontos internos, tem-se:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G}' \dot{\mathbf{P}} - \mathbf{H}' \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{W}' + \mathbf{V}') + (\mathbf{T}' + \mathbf{E}') \dot{\mathbf{M}}^a \tag{5.17}$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{G}'' \dot{\mathbf{P}} - \mathbf{H}'' \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{W}'' + \mathbf{T}'' \dot{\mathbf{M}}^a \tag{5.18}$$

sendo:

$\mathbf{G}', \mathbf{G}'', \mathbf{H}'$  e  $\mathbf{H}''$  - matrizes que contêm as integrais de contorno relativas à solução fundamental;

$\mathbf{W}'$  e  $\mathbf{W}''$  - vetores que contêm as integrais de contorno relativas à carga transversal;

$\mathbf{V}'$  - contém o termo livre referente à carga transversal;

$\mathbf{T}'$  e  $\mathbf{T}''$  - contêm as integrais de domínio que multiplicam os momentos plásticos;

$\mathbf{E}'$  - contém o termo livre relacionado com os momentos plásticos.

Considerando que:

$$\bar{T} = T' + E' \quad (5.19)$$

tem-se:

$$\dot{M} = G'\dot{P} - H'\dot{U} + (W' + V') + \bar{T}\dot{M}^a \quad (5.20)$$

Aplicando as condições de contorno, o sistema de equações original, bem como as equações dos momentos fletores e dos esforços contantes, podem ser reordenados, obtendo-se:

$$A\dot{y} = \dot{f} + T\dot{M}^a \quad (5.21)$$

$$\dot{M} = -A'\dot{y} + \dot{f}' + \bar{T}\dot{M}^a \quad (5.22)$$

$$\dot{Q} = -A''\dot{y} + \dot{f}'' + T''\dot{M}^a \quad (5.23)$$

em que os vetores  $\dot{f}$ ,  $\dot{f}'$  e  $\dot{f}''$  contêm os valores prescritos, incluindo a influência da carga transversal, e  $A$  é a matriz de coeficientes do sistema, cheia e não simétrica.

Pré-multiplicando a equação (5.21) por  $A^{-1}$  obtém-se:

$$\dot{y} = R\dot{M}^a + \dot{m} \quad (5.24)$$

onde:

$$R = A^{-1}T \quad (5.25)$$

$$\dot{m} = A^{-1}\dot{f} \quad (5.26)$$

Pode-se substituir a equação (5.24) em (5.22) e (5.23), obtendo-se:

$$\dot{M} = S'\dot{M}^a + \dot{n}' \quad (5.27)$$

$$\dot{Q} = S''\dot{M}^a + \dot{n}'' \quad (5.28)$$

em que:

$$S' = \bar{T} - A'R \quad (5.29)$$

$$S'' = T'' - A''R \quad (5.30)$$

$$\dot{n}' = \dot{f}' - A'\dot{m} \quad (5.31)$$

$$\dot{n}'' = \dot{f}'' - A''\dot{m} \quad (5.32)$$

Deve-se observar que  $\dot{m}$ ,  $\dot{n}'$  e  $\dot{n}''$  representam a solução elástica do problema.

### 5.3. Elementos de contorno utilizados

Os elementos de contorno utilizados no programa são elementos quadráticos com geometria linear e podem ser contínuos ou descontínuos.

Os elementos contínuos podem ser usados sempre que há continuidade da normal entre elementos adjacentes. Já os elementos descontínuos são utilizados nos casos de descontinuidade da normal ou da condição de contorno, quando uma mesma componente de esforço de contorno é descontínua e incógnita em dois elementos adjacentes.

Quando isto não ocorrer, mas houver descontinuidade da normal, podem ser empregados elementos contínuos com nós duplos entre elementos adjacentes.

São utilizadas também células internas, a fim de discretizar a parte do domínio onde se espera que haja plastificação.

#### 5.3.1. Elemento quadrático contínuo

Este tipo de elemento possui três pontos nodais sobre uma reta, sendo um ponto em cada uma das extremidades e o terceiro ponto situado entre os outros dois, como mostrado na Figura 5.2. As funções de interpolação utilizadas para definir a geometria são de ordem linear e as demais funções são de ordem quadrática. Este elemento assegura a continuidade das funções consideradas entre elementos e, por isso, é dito contínuo.

As funções de interpolação, em função da coordenada adimensional  $\eta$ , são dadas pelas seguintes equações, que têm valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos demais pontos nodais do elemento:

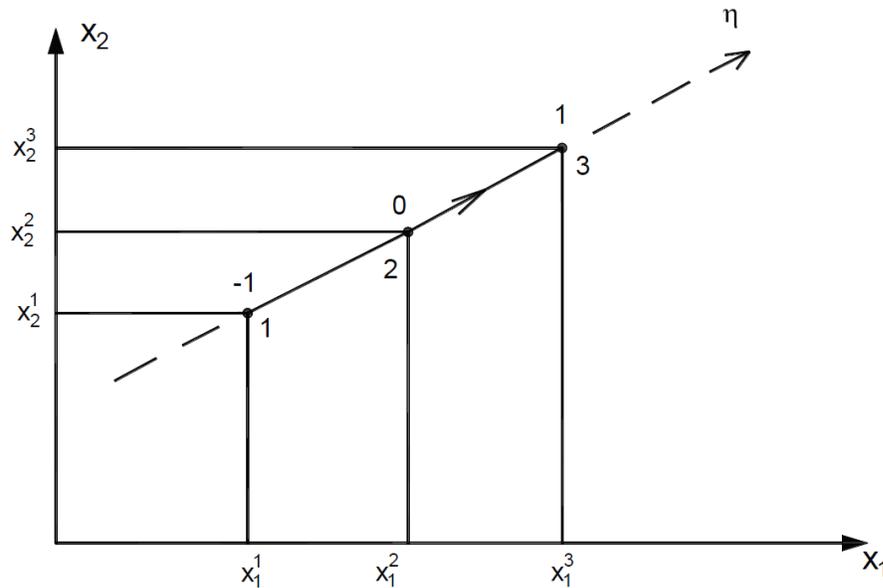


Figura 5.2 - Elemento quadrático contínuo

- Para deslocamentos e forças de superfície

$$N_1 = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1)$$

$$N_2 = (1 - \eta)(1 + \eta) \quad (5.33)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1)$$

- Para as coordenadas

$$M_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

(5.34)

$$M_3 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

As coordenadas em um ponto qualquer no elemento podem ser calculadas pela equação (5.1) e os deslocamentos e as forças de superfície, por (5.2).

### 5.3.2. Elemento quadrático descontínuo

As funções de interpolação, em função da coordenada adimensional  $\eta$ , são dadas pelas seguintes equações para o elemento descontínuo (Figura 5.3), tendo valor unitário no ponto nodal considerado e zero nos demais pontos nodais do elemento:

- Para deslocamentos e forças de superfície

$$N_1 = \frac{\ell\eta(\ell\eta - \ell + 2b)}{2(\ell - a - b)(\ell - 2a)}$$

$$N_2 = \frac{\ell\eta(2(a - b) - \ell\eta)}{(\ell - 2a)(\ell - 2b)} + 1 \quad (5.35)$$

$$N_3 = \frac{\ell\eta(\ell\eta + \ell - 2a)}{2(\ell - a - b)(\ell - 2b)}$$

- Para as coordenadas

$$M_1 = \frac{\ell(1 - \eta) - 2b}{2(\ell - a - b)} \quad (5.36)$$

$$M_3 = \frac{\ell(1 + \eta) - 2a}{2(\ell - a - b)}$$

em que:

$a$  é a distância do ponto nodal 1 até a extremidade do elemento;

$b$  é a distância do ponto nodal 3 até a extremidade do elemento;

$\ell$  é o comprimento total do elemento.

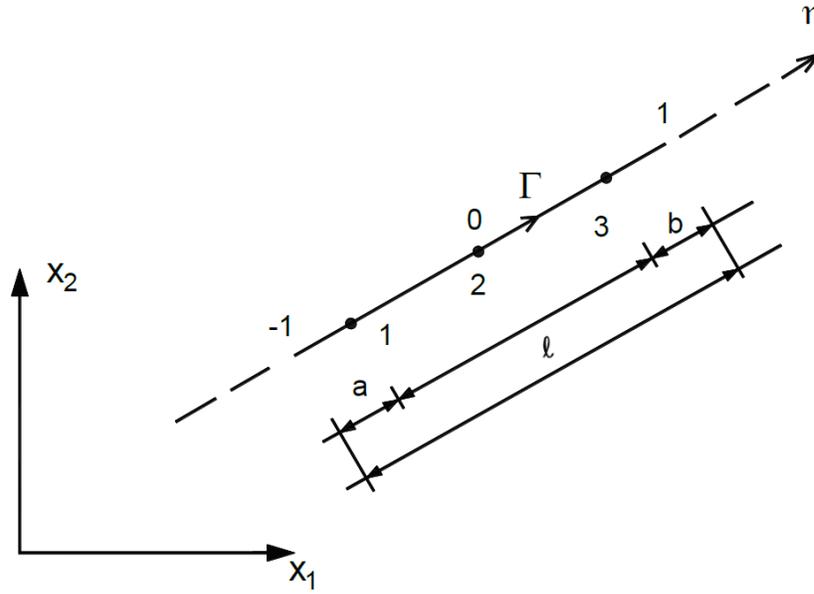


Figura 5.3 - Elemento quadrático descontínuo

As coordenadas em um ponto qualquer no elemento, contínuo ou descontínuo, podem ser calculadas na forma:

$$x_1 = x_1^1 M_1 + x_1^3 M_3 \quad (5.37)$$

$$x_2 = x_2^1 M_1 + x_2^3 M_3 \quad (5.38)$$

Ou, em forma matricial, como na equação (5.1), sendo:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Neste caso, o jacobiano é calculado como:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \frac{l}{2} \quad (5.42)$$

Os deslocamentos e as forças de superfície podem ser interpolados usando as equações (5.2), sendo, neste caso:

$$\dot{\mathbf{U}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{(j)} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & & & \\ & N_1 & & & & & & \\ & & N_1 & & & & & \\ & & & N_2 & & & & \\ & & & & N_2 & & & \\ & & & & & N_3 & & \\ & & & & & & N_3 & \\ & & & & & & & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \dot{u}_3^1 \\ \dot{u}_1^2 \\ \dot{u}_2^2 \\ \dot{u}_3^2 \\ \dot{u}_1^3 \\ \dot{u}_2^3 \\ \dot{u}_3^3 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1^1 \\ \dot{p}_2^1 \\ \dot{p}_3^1 \\ \dot{p}_1^2 \\ \dot{p}_2^2 \\ \dot{p}_3^2 \\ \dot{p}_1^3 \\ \dot{p}_2^3 \\ \dot{p}_3^3 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

O jacobiano, neste caso, é calculado por:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (5.48)$$

### 5.3.3. Descontinuidade da normal ou da condição de contorno

Quando o contorno não possui continuidade da normal (Figura 5.4), tem-se direções da normal diferentes para um mesmo nó que pertence a dois elementos adjacentes e, portanto, não é assegurada a continuidade das forças de superfícies no contorno.

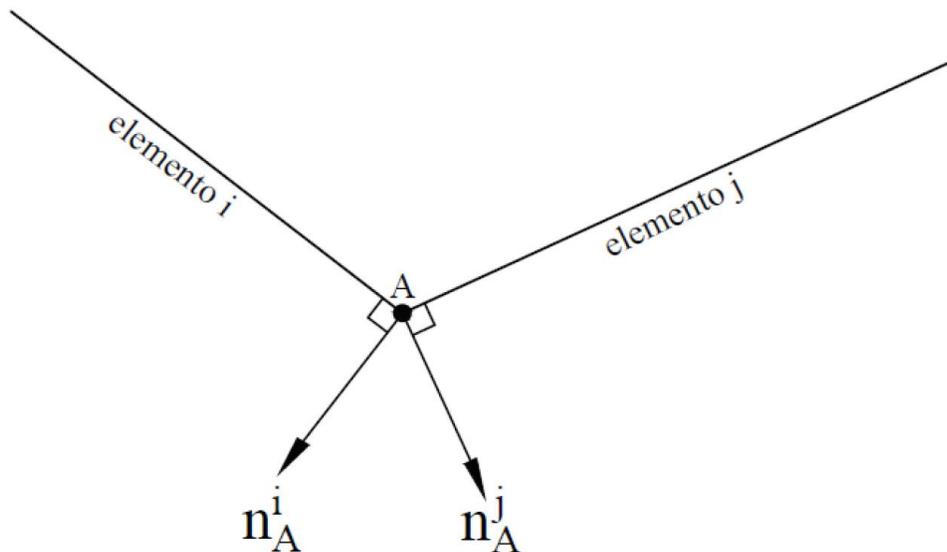


Figura 5.4 - Descontinuidade da normal

A fim de resolver este problema, pode-se utilizar o nó duplo ou o elemento descontínuo. Estas soluções também podem ser empregadas quando existe continuidade da normal, mas as condições de contorno são descontínuas.

#### 5.3.3.1. Nó duplo

O nó duplo é utilizado para pontos onde existe descontinuidade da normal ou da condição de contorno e é conhecida a força de superfície nos dois elementos adjacentes ou, então, é conhecido o deslocamento em um elemento e a força no outro. Assim, considera-se que existem dois pontos nodais no mesmo ponto geométrico, sendo que cada um pertence a um elemento diferente, como mostrado na Figura 5.5. Para assegurar

a continuidade de deslocamentos no ponto de interseção, é imposto que nesses dois nós o deslocamento é o mesmo.

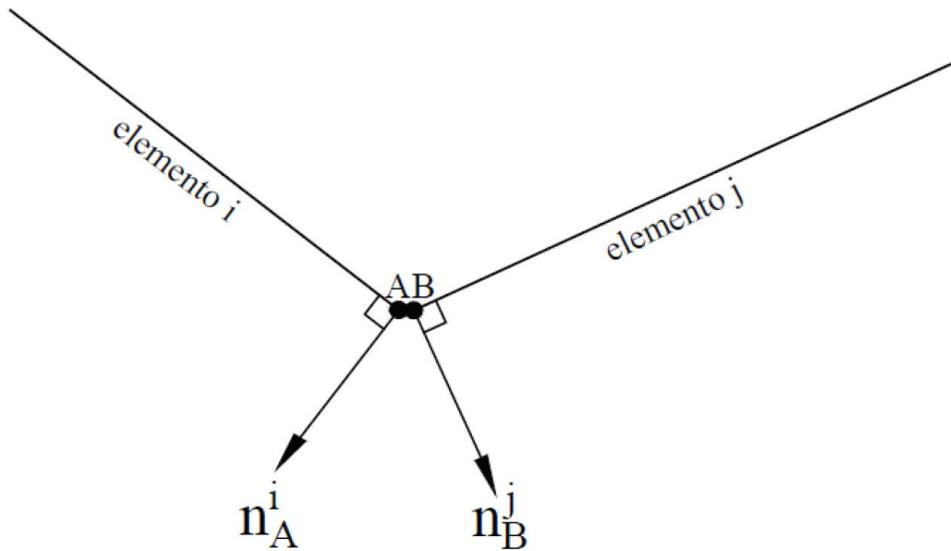


Figura 5.5 - Nó duplo

### 5.3.3.2. Elemento descontínuo

Quando as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes onde ocorre a descontinuidade da normal, a solução com o nó duplo não resolve o problema, devido ao número de equações independentes, para esse nó, ser menor do que o número de incógnitas, devido ao fato dos deslocamentos serem contínuos e as forças de superfície poderem não ser nesse ponto.

Existem algumas soluções possíveis e uma destas é a utilização de elementos descontínuos (Figura 5.6), que possui precisão de mesma ordem do elemento contínuo, quando se escolhe convenientemente o número de pontos de integração e a distância dos nós até a extremidade dos elementos. Os dois nós não possuem as mesmas coordenadas e, portanto, tem-se equações independentes no sistema para cada um deles.

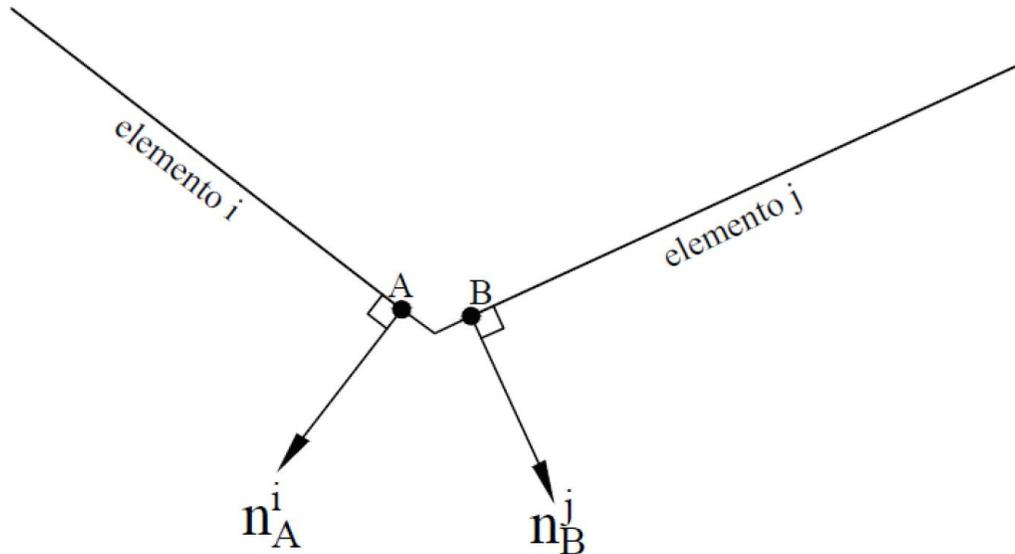


Figura 5.6 - Elemento descontínuo

### 5.3.4. Integrais singulares

Quando os pontos fonte  $\xi$  e campo  $x$  situam-se em um dado elemento  $\Gamma_j$ , ocorre o caso em que  $r = 0$  e, portanto, as integrais que correspondem às matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  e ao vetor  $\mathbf{B}$  possuem singularidades de ordem  $\ln r$  e  $r^{-1}$ .

Utilizar integração numérica com funções de peso logarítmicas é uma das formas de resolver o problema de singularidades da matriz  $\mathbf{G}$  e do vetor  $\mathbf{B}$ , que são de ordem logarítmica ( $\ln r$ ). Outra forma, que é a utilizada neste trabalho, é fazer uma transformação de coordenadas de segundo grau (Telles, 1987), envolvendo as coordenadas dos pontos de integração. Esta transformação produz um jacobiano que anula a singularidade no ponto considerado (APÊNDICE B). A transformação de coordenadas de terceiro grau também é utilizada para resolver o problema de integrais quase singulares, que ocorrem no cálculo de esforços em pontos internos quando estes situam-se muito próximos do contorno.

No caso da matriz  $\mathbf{H}$ , as submatrizes da diagonal, que possuem singularidades, podem ser obtidas indiretamente, considerando que, para movimento de corpo rígido, não há forças aplicadas e, portanto:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = 0 \quad (5.49)$$

As soluções não-triviais da equação (5.49) para o movimento de corpo rígido são:

$$\mathbf{u} = (1; 0; r_1 = x_1(\xi) - x_1(x))$$

$$\mathbf{u} = (0; 1; r_2 = x_2(\xi) - x_2(x)) \quad (5.50)$$

$$\mathbf{u} = (0; 0; 1)$$

Assim, as submatrizes de ordem  $3 \times 3$  da diagonal de  $\mathbf{H}$  são calculadas pela expressão

$$\mathbf{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NN} H_{pq} D_{qp} \quad p = 1, 2, \dots, NN \quad (5.51)$$

em que  $NN$  é o número de pontos nodais e  $\mathbf{D}_{qp}$  é a matriz que contém os deslocamentos de corpo rígido, dada por:

$$\mathbf{D}_{qp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_1 = x_1(p) - x_1(q) & r_2 = x_2(p) - x_2(q) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

### 5.3.5. Células internas

As células internas utilizadas têm forma triangular (Figura 5.7) e considera-se que possuem um sistema de coordenadas intrínseco  $(\zeta_1, \zeta_2)$ .

As coordenadas em um ponto qualquer no interior da célula podem ser calculadas pela equação (5.3), em que a matriz de interpolação  $\bar{\mathbf{M}}$ , é dada por:

$$\bar{\mathbf{M}} = [\mathbf{I}\zeta_1 \quad \mathbf{I}\zeta_2 \quad \mathbf{I}\zeta_3] \quad (5.53)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 2, e a coordenada  $\zeta_3$  é calculada por:

$$\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 \quad (5.54)$$

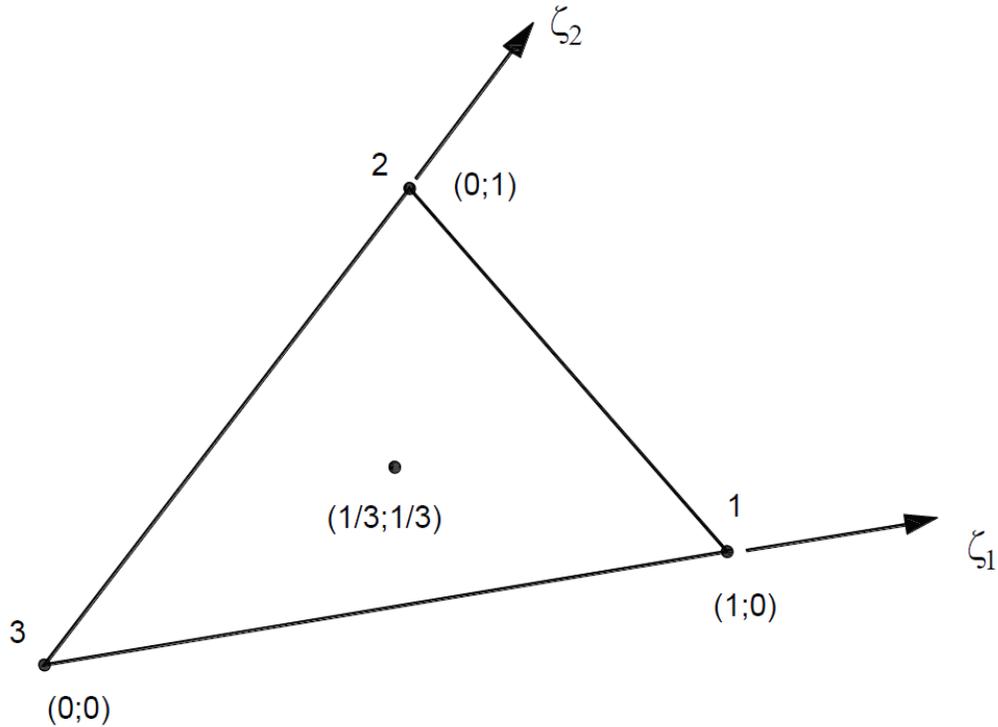


Figura 5.7 - Célula triangular e sistema intrínseco de coordenadas

Ainda na equação (5.3), tem-se:

$$\mathbf{x}^{(m)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

que contém as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  de cada um dos vértices do triângulo.

O jacobiano de transformação é dado por:

$$|\bar{J}| = 2A \quad (5.56)$$

em que  $A$  é a área do triângulo.

As células são constantes e, portanto, para o cálculo dos momentos plásticos pela equação (5.4), tem-se:

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{I} \quad (5.57)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 3, e também:

$$\dot{\mathbf{M}}^{\alpha(n)} = \begin{Bmatrix} \dot{M}_{11}^{\alpha} \\ \dot{M}_{12}^{\alpha} \\ \dot{M}_{22}^{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

que representam os valores de momentos plásticos no baricentro de cada célula.

As coordenadas homogêneas  $\zeta_{\alpha}$  podem ser reescritas em função das coordenadas cartesianas  $x_1$  e  $x_2$ , obtendo-se:

$$\zeta_{\alpha} = \frac{1}{2A} = (2A_{\alpha}^0 + b_{\alpha}x_1 + a_{\alpha}x_2) \quad (5.59)$$

sendo  $\alpha$  o ponto ao qual a função se refere, e tem-se ainda:

$$a_{\alpha} = x_1^{\gamma} - x_1^{\beta} \quad (5.60)$$

$$b_{\alpha} = x_2^{\beta} - x_2^{\gamma} \quad (5.61)$$

$$2A_{\alpha}^0 = x_1^{\beta}x_2^{\gamma} - x_1^{\gamma}x_2^{\beta} \quad (5.62)$$

$$A = \frac{1}{2}(b_1a_2 - b_2a_1) \quad (5.63)$$

com  $\alpha = 1,2,3$  para  $\beta = 2,3,1$  e  $\gamma = 3,1,2$ .

Considerando a equação (5.11) e que a matriz de interpolação é dada pela equação (5.57), tem-se que cada célula contribui com uma matriz 3x3 da seguinte forma:

$$\mathbf{t} = \int_{\Omega_j} \boldsymbol{\chi}_i^* d\Omega \quad (5.64)$$

sendo:

$$\chi_i^* = \begin{bmatrix} {}_1\chi_i^* \\ \dots \\ {}_2\chi_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{111}^* & 2\chi_{121}^* & \chi_{221}^* \\ \chi_{112}^* & 2\chi_{122}^* & \chi_{222}^* \\ \dots \\ \chi_{113}^* & 2\chi_{123}^* & \chi_{223}^* \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Para o cálculo de  $T'$  e  $T''$ , cada célula contribui com uma matriz 5x3 da forma apresentada a seguir, sendo que duas matrizes são englobadas em uma única:

$$\bar{t} = \int_{\Omega_j} \chi_i^* d\Omega \quad (5.66)$$

em que:

$$\bar{\chi}_i^* = \begin{bmatrix} \chi_i^{*'} \\ \dots \\ \chi_i^{*''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{1111}^* & 2\chi_{1112}^* & \chi_{1122}^* \\ \chi_{1211}^* & 2\chi_{1212}^* & \chi_{1222}^* \\ \chi_{2211}^* & \chi_{2212}^* & \chi_{2222}^* \\ \dots \\ \chi_{3111}^* & 2\chi_{3112}^* & \chi_{3122}^* \\ \chi_{3211}^* & \chi_{3212}^* & \chi_{3222}^* \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Em função da singularidade existente nos casos em que o ponto fonte coincide com algum ponto da célula, torna-se conveniente a definir um sistema de coordenadas polares  $(r, \phi)$  centrado no ponto fonte  $\gamma$  e efetuar a integração em relação  $r$  e em relação a  $\phi$ . Tem-se, então:

$$d\Omega = r dr d\phi \quad (5.68)$$

$$x_1(x) = x_1^\gamma + r \cos \phi \quad (5.69)$$

$$x_2(x) = x_2^\gamma + r \sin \phi \quad (5.70)$$

A partir das equações (5.69) e (5.70), as equações que correspondem ao tensor  $\chi_i^*$  são escritas como:

$${}_1\chi_i^*(\xi, x) = \frac{1}{r} {}_1\Lambda(\xi, x) \quad (5.71)$$

$${}_2\chi_i^*(\xi, x) = {}_2\Lambda(\xi, x) \quad (5.72)$$

e as equações correspondentes a  $\bar{\chi}_i^*$  são escritas como:

$$\chi_i^{*'}(\xi, x) = \frac{1}{r^2} {}_1\Lambda(\xi, x) \quad (5.73)$$

$$\chi_i^{*''}(\xi, x) = \frac{1}{r} {}_2\Lambda(\xi, x) \quad (5.74)$$

Nos casos da matriz  $t$ , quando o ponto singular  $\gamma$  está situado em um dos vértices da célula, como apresentado na Figura 5.8, as submatrizes  ${}_1t$  e  ${}_2t$  são consideradas da seguinte forma:

$${}_1t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{r} {}_1\Lambda r dr d\phi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_1\Lambda dr d\phi \right) \quad (5.75)$$

$${}_2t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_2\Lambda r dr d\phi \right) \quad (5.76)$$

sendo:

$$R(\phi) = \frac{-2A}{b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi} \quad (5.77)$$

em que:

$$\cos \phi = \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (5.78)$$

$$\sin \phi = \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (5.79)$$

Pode ser observado que a singularidade é eliminada e pode-se efetuar a integração utilizando a quadratura de Gauss em relação a  $r$  e também em relação a  $\phi$ . Neste caso, a variável  $\phi$  é expressa por:

$$\phi = \frac{\eta}{2}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \quad (5.80)$$

e a variável  $r$ , por:

$$r = \frac{R(\phi)}{2} \eta \quad (5.81)$$

sendo  $\eta$  uma coordenada adimensional, definida no intervalo  $[-1,1]$ .

Os jacobianos destas transformações são dados por:

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (5.82)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{R(\phi)}{2} \quad (5.83)$$

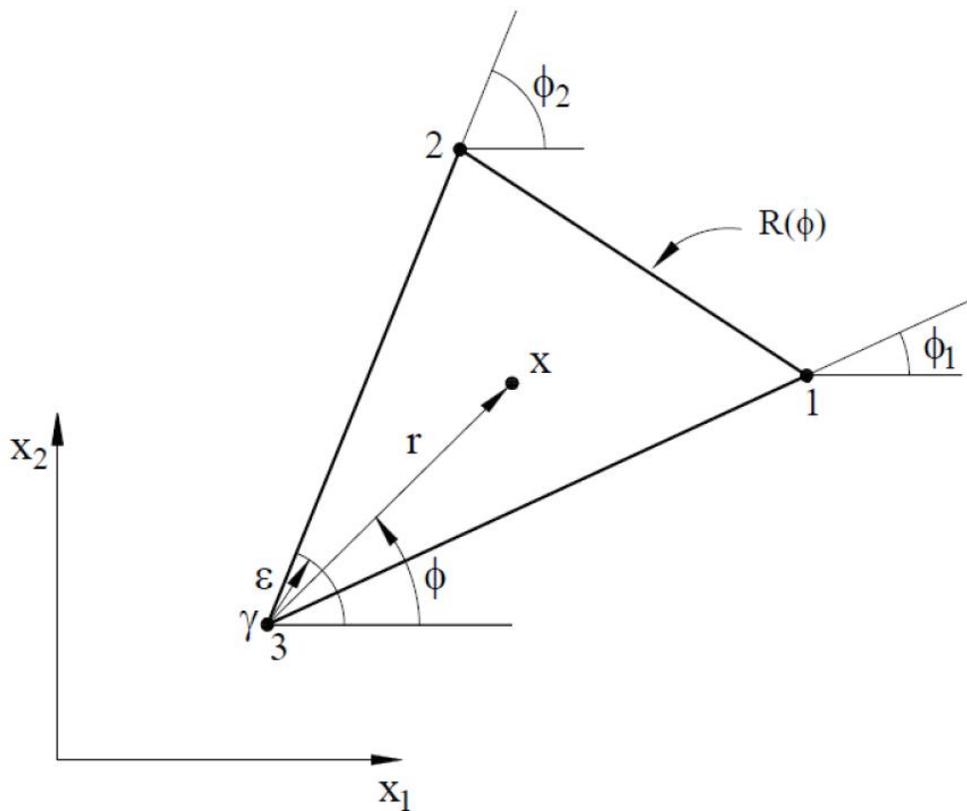


Figura 5.8 - Célula triangular com ponto singular  $\gamma$  coincidindo com um dos vértices do triângulo

Outra situação que ocorre para a matriz  $t$ , é quando o ponto singular  $\gamma$  situa-se em um ponto qualquer de um dos bordos da célula, como mostrado na Figura 5.9.

Neste caso, pode-se considerar a célula dividida em duas partes, integrar separadamente em cada parte e somar os resultados correspondentes.

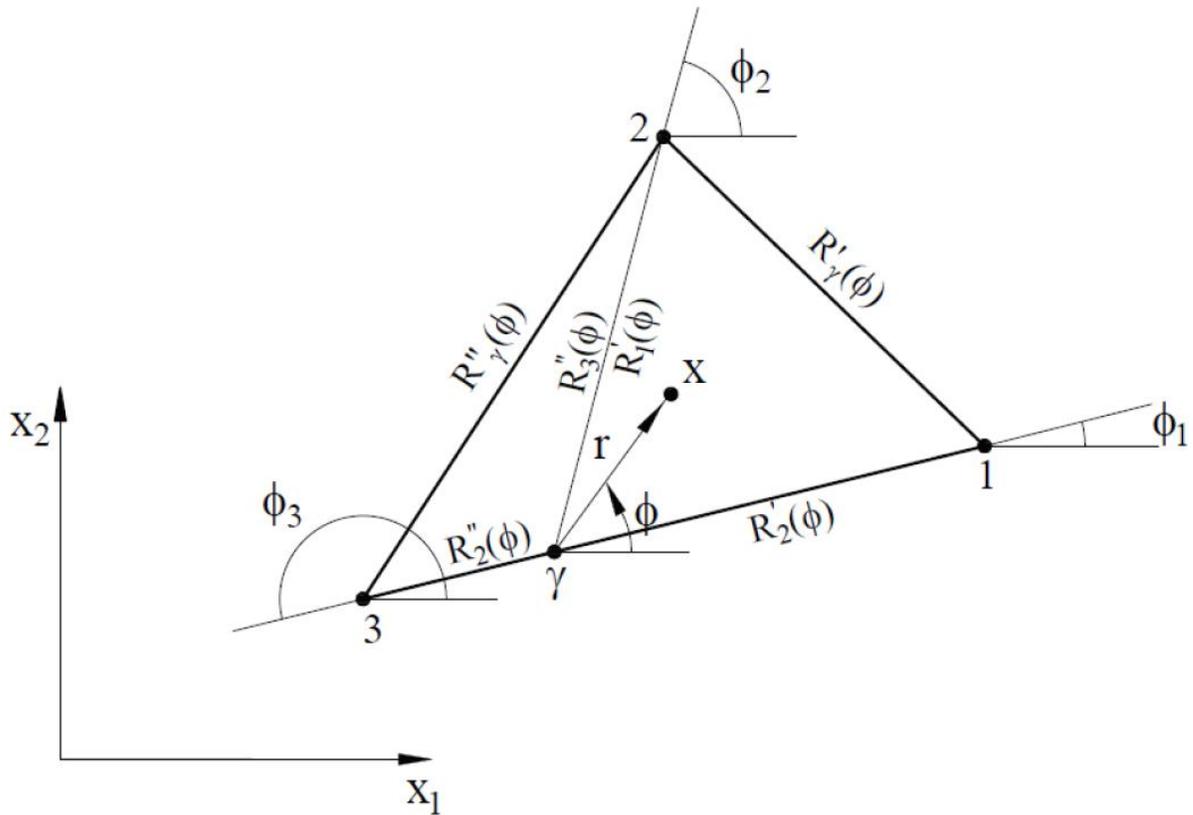


Figura 5.9 - Célula triangular com ponto singular  $\gamma$  situado em um dos lados do triângulo

Assim, tem-se:

$${}_{1}\mathbf{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} {}_1\Lambda dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} {}_1\Lambda dr d\phi \right) \quad (5.84)$$

$${}_{2}\mathbf{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\Lambda r dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} {}_2\Lambda r dr d\phi \right) \quad (5.85)$$

onde:

$$R'_\gamma(\phi) = \frac{-2A'}{b'_\gamma \cos \phi + a'_\gamma \sin \phi} \quad (5.86)$$

$$R_{\gamma}''(\phi) = \frac{-2A''}{b_{\gamma}'' \cos \phi + a_{\gamma}'' \sin \phi} \quad (5.87)$$

Neste caso, a quadratura de Gauss também é utilizada para integrar numericamente em relação a  $r$  e também em relação a  $\phi$ .

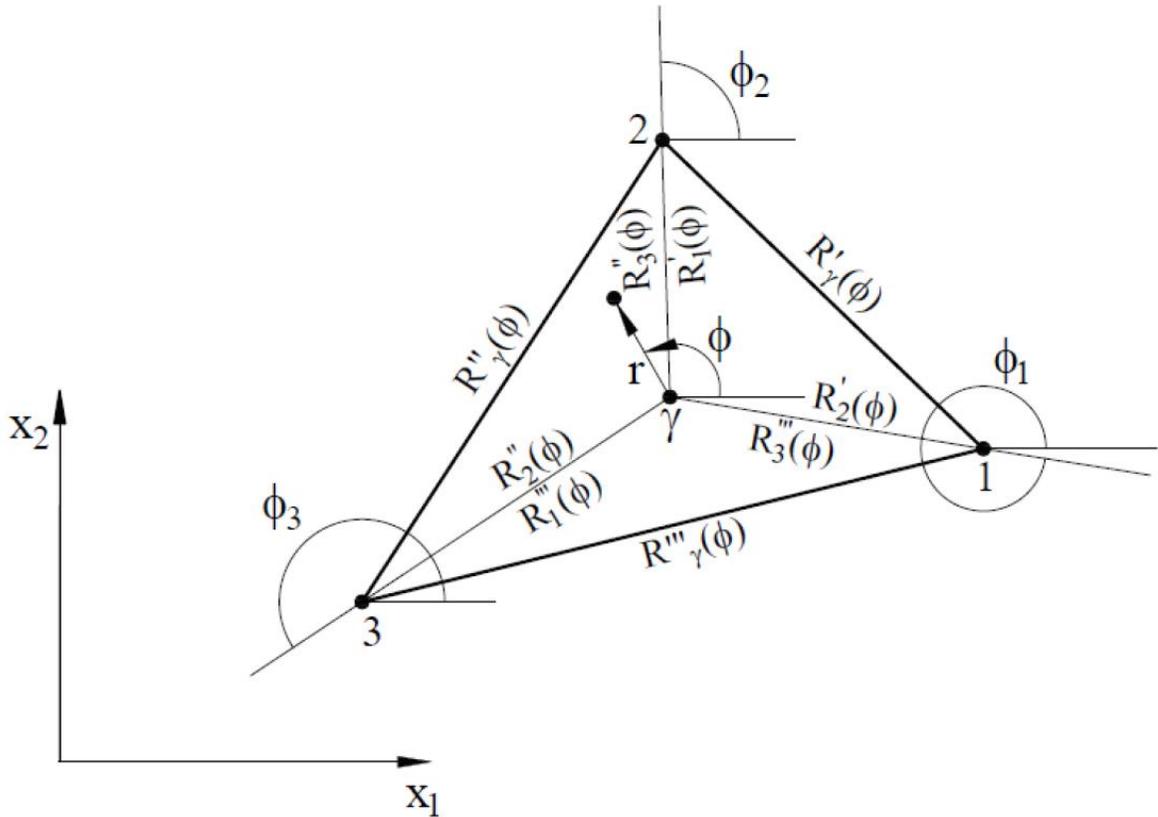


Figura 5.10 - Célula triangular com ponto singular  $\gamma$  coincidindo com o ponto interno da célula

Para o caso da matriz  $\bar{t}$ , quando o ponto singular  $\gamma$  coincidir com o ponto no interior da célula onde se está integrando, como mostrado na Figura 5.10, deve-se dividir a célula em três partes, o que leva a:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_{\gamma}(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{\Lambda}' dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_{\gamma}(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{\Lambda}' dr d\phi \right. \\ & \left. + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'''_{\gamma}(\phi)} \frac{1}{r} \mathbf{\Lambda}' dr d\phi \right) \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} \Lambda'' dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} \frac{1}{r} \Lambda'' dr d\phi \right. \\ & \left. + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'''_\gamma(\phi)} \Lambda'' dr d\phi \right) \end{aligned} \quad (5.89)$$

sendo  $R'_\gamma, R''_\gamma$  e  $R'''_\gamma$  calculados de forma análoga à que foi mostrada anteriormente.

As integrações em relação a  $r$  e a  $\phi$  podem ser feitas pela quadratura de Gauss para a matriz  $\mathbf{t}''$ . Já para a matriz  $\mathbf{t}'$ , pode-se integrar em relação a  $\phi$  pela quadratura de Gauss; porém, em relação a  $r$ , devido à singularidade  $r^{-1}$ , utiliza-se a quadratura de Kutt para integrais em partes finitas, como mostrado no APÊNDICE C.

No caso geral, em que o ponto singular  $\gamma$  não pertence à célula, como mostrado na Figura 5.11, pode-se utilizar a transformação de coordenadas para o sistema  $(r, \phi)$ , para ambas as matrizes,  $\mathbf{t}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$ , ficando:

$${}_1\mathbf{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\Lambda dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\Lambda dr d\phi \right) \quad (5.90)$$

$${}_2\mathbf{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\Lambda r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\Lambda r dr d\phi \right) \quad (5.91)$$

$$\mathbf{t}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \Lambda' dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \Lambda' dr d\phi \right) \quad (5.92)$$

$$\mathbf{t}'' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \Lambda'' dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \Lambda'' dr d\phi \right) \quad (5.93)$$

onde:

$$R_\alpha(\phi) = \frac{-2A^\gamma \xi_\alpha}{b_\alpha \cos \phi + a_\alpha \sin \phi} \quad (5.94)$$

sendo  ${}^\gamma \xi_\alpha$  o valor da função de interpolação no ponto fonte  $\gamma$ .

Como, neste caso, todas as integrais são regulares, pode-se integrar numericamente em relação a  $r$  e a  $\phi$  utilizando a quadratura de Gauss.

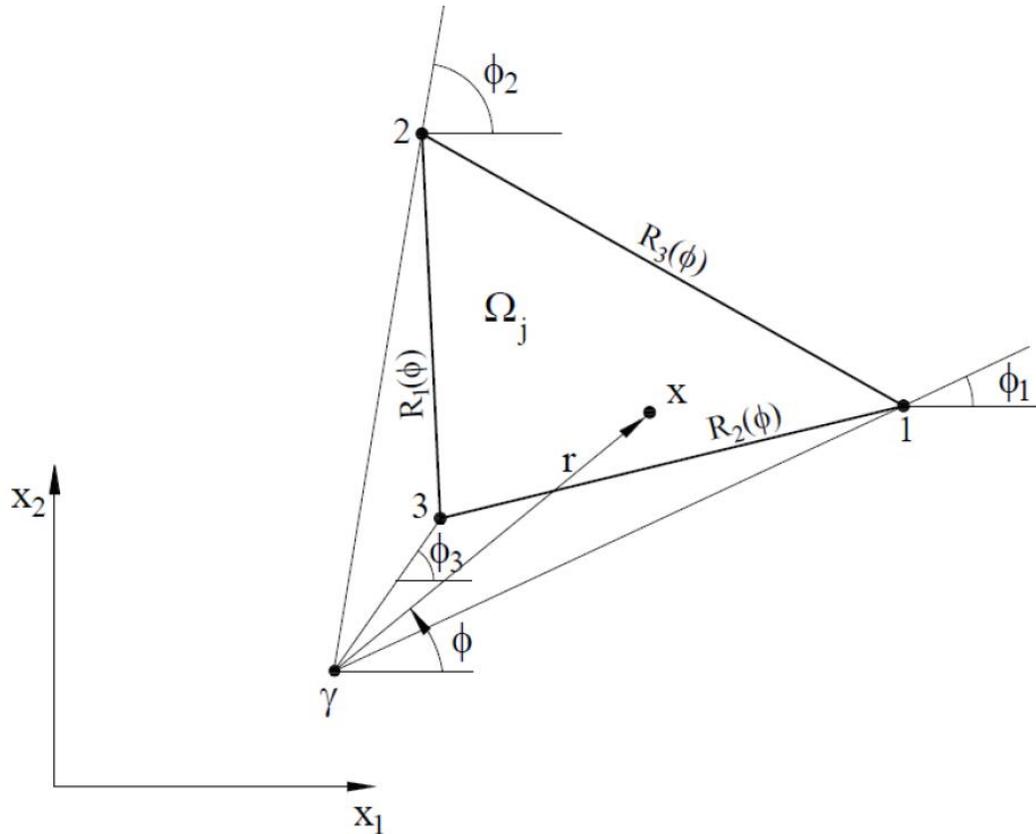


Figura 5.11 - Célula triangular com ponto fonte  $\gamma$  fora da célula

#### 5.4. Técnica de solução do problema viscoplástico

A resolução do problema viscoplástico se inicia com o cálculo de um fator de carga inicial  $\lambda_0$ , que representa a relação entre o momento de escoamento inicial  $M_0$  e o máximo momento equivalente  $M_{max}^e$ , calculado nos pontos das células internas de forma elástica:

$$\lambda_0 = \frac{M_0}{M_{max}^e} \quad (5.95)$$

Caso  $\lambda_0 > 1$ , as células internas ainda não atingiram o escoamento; logo, não existirá análise viscoplástica e o processo será encerrado.

Já para o caso  $\lambda_0 \leq 1$ , será realizada a análise viscoplástica, que pode ser feita para um determinado valor de carga específico. Assim, será considerado apenas um incremento de carga, ou através de um processo incremental de cargas considerando  $\lambda_0$  o início do carregamento. No último caso, os valores subsequentes de fator de carga são calculados por:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i \quad (5.96)$$

em que  $\Delta\lambda_i$  é um incremento definido em termos de uma dada porcentagem  $\beta_i$  em relação ao primeiro escoamento.

$$\Delta\lambda_i = \beta_i \lambda_0 \quad (5.97)$$

Para o desenvolvimento da formulação deste trabalho, adota-se um procedimento de passo simples de Euler. Assume-se que  $\lambda(t)$  é uma função conhecida no tempo. Assim, as equações (5.24), (5.27) e (5.28) podem ser integradas no tempo, fornecendo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{M}^p + \lambda(t)\mathbf{m} \quad (5.98)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}'\mathbf{M}^p + \lambda(t)\mathbf{n}' \quad (5.99)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}''\mathbf{M}^p + \lambda(t)\mathbf{n}'' \quad (5.100)$$

sendo  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}'$  e  $\mathbf{n}''$  os vetores que correspondem à solução elástica e que equivalem ao tempo  $t = 0$ .

A equação (5.99) é aplicada depois de cada passo discreto de tempo ( $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ ) com o valor de tensões iniciais computado para os pontos internos das células, pela formula de Euler:

$${}^{k+1}M_{\alpha\beta}^p = {}^kM_{\alpha\beta}^p + \Delta t \gamma \langle {}^k\Phi \rangle^k d_{\alpha\beta} \quad (5.101)$$

Durante este processo, pode-se deixar  $\lambda(t)$  constante durante algum tempo, criando uma situação em que, depois de um número suficiente de passos de tempo aplicados, os valores de  $\Delta t \dot{\chi}_e^p$  ou  ${}^{k+1}M_e = {}^kM_e$  tornam-se pequenos em todos os pontos,

considerados menores que um valor de tolerância admitida. Nestes casos, considera-se que ocorreu uma condição estacionária e o processo pode ser paralisado ou um novo incremento de carga é aplicado.

O sucesso deste processo depende da escolha adequada do tamanho dos incrementos de tempo. A experiência de muitos autores mostrou que o tamanho do incremento de tempo deve ser controlado pela relação entre taxas e valores acumulados de algumas variáveis para produzir valor automático. Isto pode ser considerado em cada ponto das células pela expressão seguinte:

$$\Delta t \leq \eta \frac{\chi_e}{\dot{\chi}_e^p} = \frac{\eta}{\dot{\chi}_e^p} \left( \frac{M_e}{D} + \chi_e^p \right) \quad (5.102)$$

atendendo a seguinte condição:

$${}^{k+1}\Delta t \leq \eta_0^k \Delta t \quad (5.103)$$

onde  $\eta$  e  $\eta_0$  são parâmetros dependentes do problema, que devem ser escolhidos de forma a atender um adequado incremento de tempo e a precisão do problema. Esses limites são empíricos e são indicados em Telles (1983) nas seguintes faixas:  $0,01 \leq \eta \leq 0,15$  e  $1,2 \leq \eta_0 \leq 2$ .

Uma desvantagem das relações anteriores é que não garantem uma completa estabilidade do esquema de integração explícito do tempo, particularmente próximo ao estado estacionário, o qual produz grandes valores de incremento de tempo.

Restrições de forma teórica para incremento de tempo foram apresentadas por Comeau (1975) para materiais perfeitamente viscoplásticos, em função do critério de escoamento.

Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) apresentam uma expressão mais geral para limitação dos incrementos de tempo, que considera as características de materiais viscoplásticos com endurecimento. Analogamente, desenvolveu-se a expressão a seguir, em função de momentos e curvaturas:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit.} = \frac{2M_0^2}{\gamma(DM_0 + M_e H')} \quad (5.104)$$

A relação anterior indica que, quando  $H' > 0$ , o efeito do endurecimento produz uma redução inicial no passo de tempo crítico quando comparado com o caso em que  $H' = 0$  e que, com o progresso do fluxo viscoplástico, este limite aumenta com o quadrado do momento de escoamento  $M_0$ . Isso não acontece quando se tem amolecimento,  $H' < 0$ , e neste caso, o passo de tempo limite aumenta inicialmente, mas diminui com o desenvolvimento da viscoplasticidade, produzindo uma redução na região de estabilidade, a qual não deve ser negligenciada nestes casos.

### 5.5. Estrutura do programa

O programa para análise de placas de Reissner considerando a viscoplasticidade pelo MEC foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN, a partir de um programa já existente que foi desenvolvido por Karam (1992), que realiza a análise elastoplástica.

Este programa é composto de uma rotina principal e modulado em subrotinas, contendo as seguintes etapas principais:

1. Leitura e impressão de dados;
2. Resolução do problema elástico e cálculo da carga no primeiro escoamento;
3. Definição do fator de carga inicial, que será  $\lambda_0$  ou outro fator de carga especificado, chamado no programa de FDC;
4. Processo incremental de tempo e/ou de carga;
5. Verificação da convergência;
6. Impressão de resultados.

O fluxograma mostrado na Figura 5.12 resume os procedimentos realizados pelo programa.

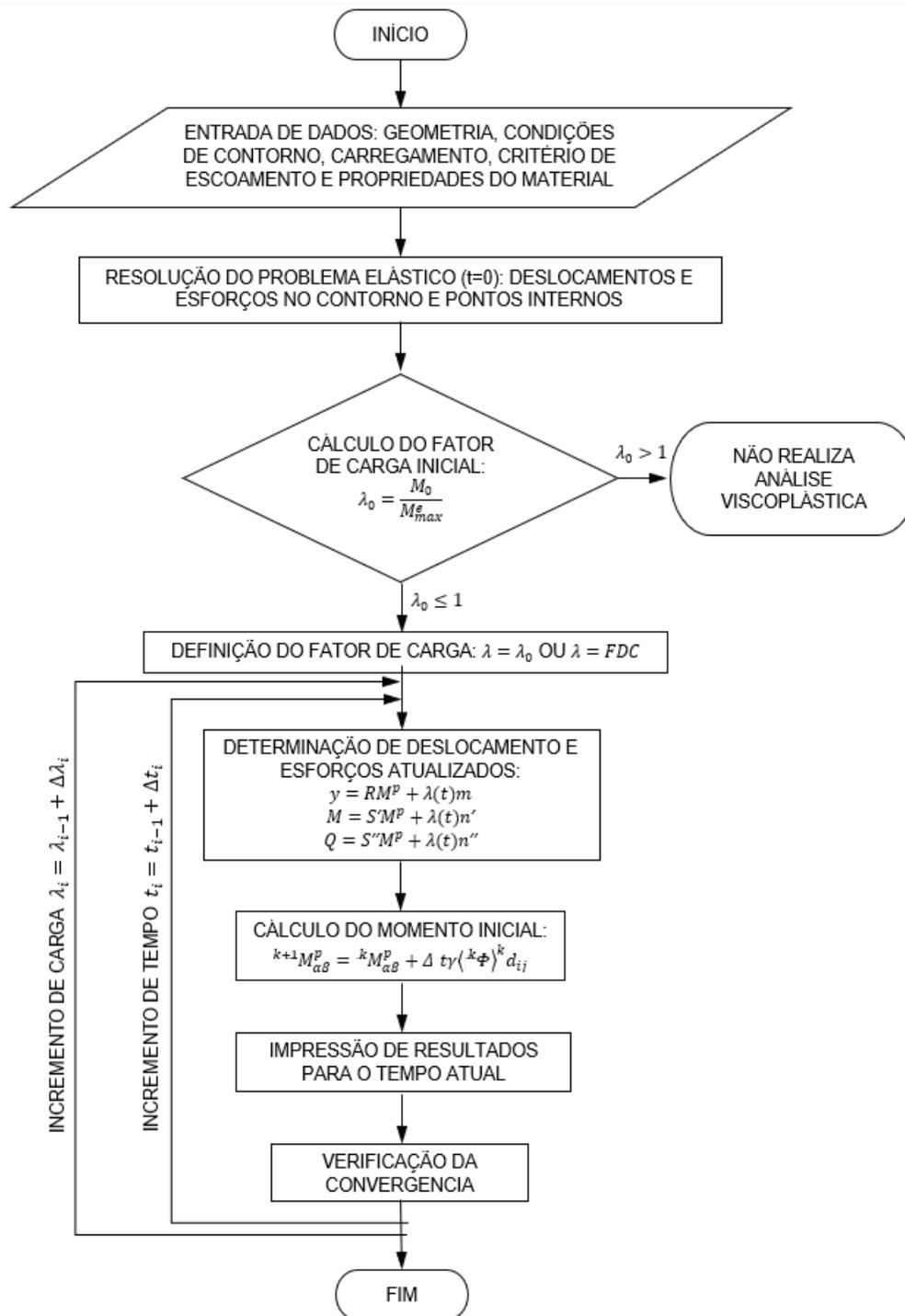


Figura 5.12 - Fluxograma do programa com as principais etapas

## CAPÍTULO 6

### APLICAÇÕES DA ANÁLISE VISCOPLÁSTICA

#### 6.1. Considerações iniciais

Neste capítulo, são apresentados exemplos de aplicação utilizando a formulação e a implementação computacional desenvolvidas neste trabalho. Os resultados são comparados com resultados da literatura existente, obtidos pelo método dos elementos finitos, por outras formulações do método dos elementos de contorno ou analiticamente.

##### 6.1.1. Exemplo 1 – Placa quadrada simplesmente apoiada

Este exemplo consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada, de lado  $l = 1$ , espessura  $h = 0,01$  e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído  $q$  aplicado de forma incremental. O material é idealmente viscoplástico ( $H' = 0$ ), com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , módulo de elasticidade  $E = 10,92$  e tensão de escoamento  $\sigma_0 = 1600$ . O parâmetro de fluidez considerado é  $\gamma = 0,001/minuto$  e os parâmetros utilizados para escolha automática do incremento de tempo são  $\eta = 0,08$  e  $\eta_0 = 1,5$ . Adotou-se a forma linear para a função  $\Phi(F/\Psi)$  e foram usados os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca. Ressalta-se que as propriedades geométricas e do material são apresentados de forma adimensional, conforme encontrado na literatura usada para comparação de resultados.

Devido à simetria da placa, apenas um quarto desta foi distretizado, utilizando 8 elementos de contorno e 16 células internas triangulares, sendo a mesma discretização utilizada por Karam (1992) e Karam e Telles (1992), em que foram usados os critérios de escoamento de von Mises e de Tresca. Esta placa foi também analisada por Owen e Hinton (1980), utilizando o método dos elementos finitos e empregando o critério de escoamento de von Mises. A Figura 6.1 mostra a discretização em elementos de contorno e células internas desenvolvida no presente trabalho e a discretização em elementos finitos.

A fim de se obterem resultados próximos aos da teoria da plasticidade, deve-se aplicar o carregamento de forma incremental, com pequenos valores, desde a carga que provoca o primeiro escoamento até que o processo atinja a convergência. Neste exemplo, foi considerado que  $\beta = 1\%$  em relação à carga correspondente ao primeiro escoamento.

Na Figura 6.2, apresenta-se a curva carga-flecha, de forma adimensional, para o ponto central da placa. Para cada incremento de carga, o deslocamento corresponde ao valor estacionário, obtendo-se, assim, a solução elastoplástica. Observa-se que os resultados encontrados no presente trabalho utilizando a formulação viscoplástica se apresentam coerentes com aqueles encontrados utilizando a teoria clássica da plasticidade em Karam (1992) e Karam e Telles (1992), com o método dos elementos de contorno, e por Owen e Hinton (1992), utilizando o método dos elementos finitos.

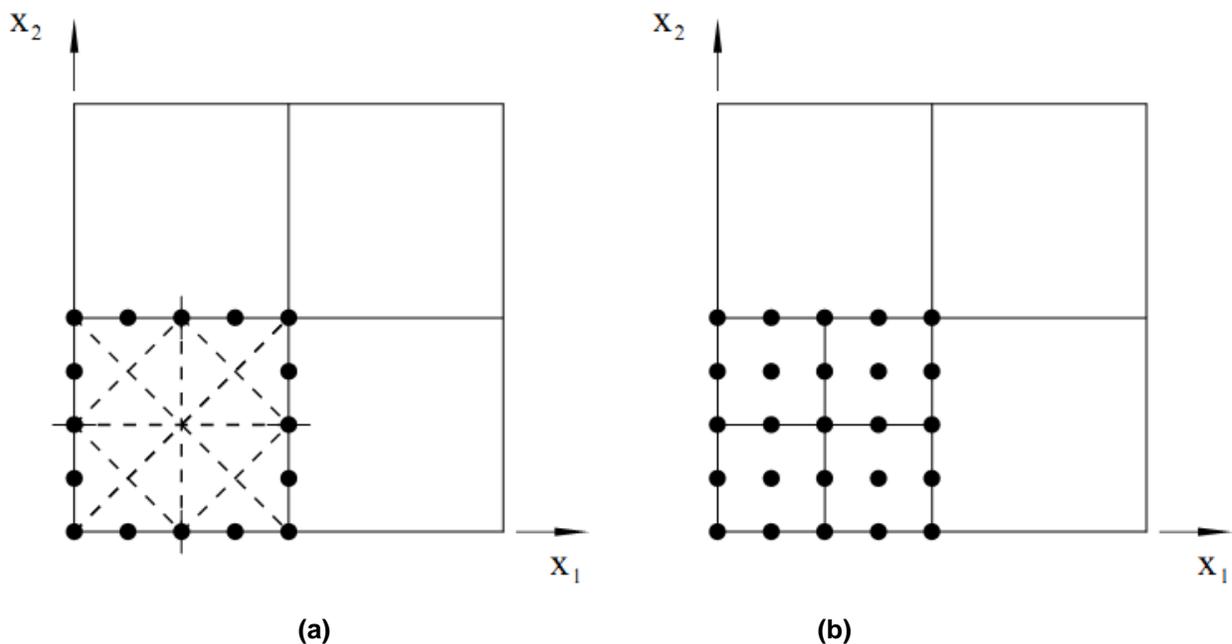


Figura 6.1 - Discretização da placa quadrada: (a) elementos de contorno e células internas e (b) elementos finitos

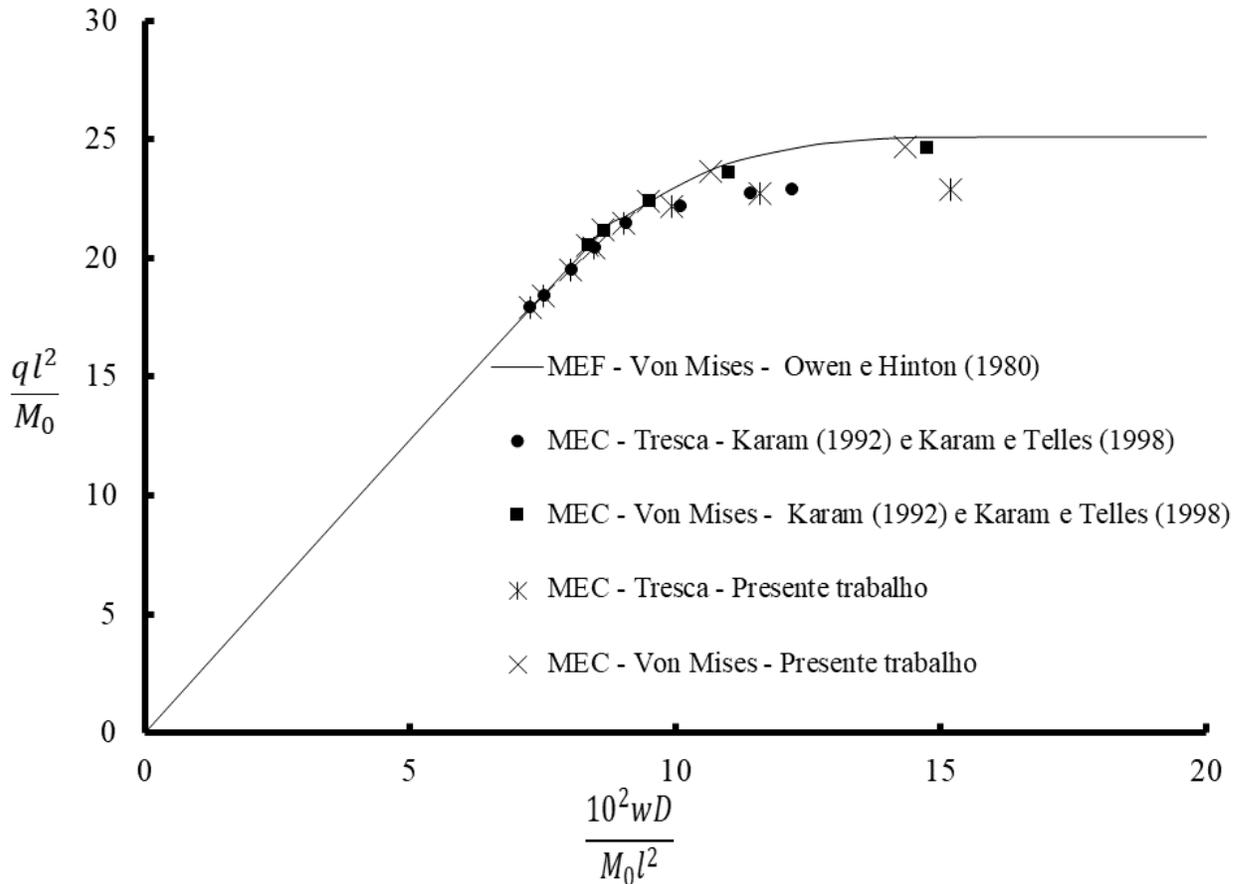


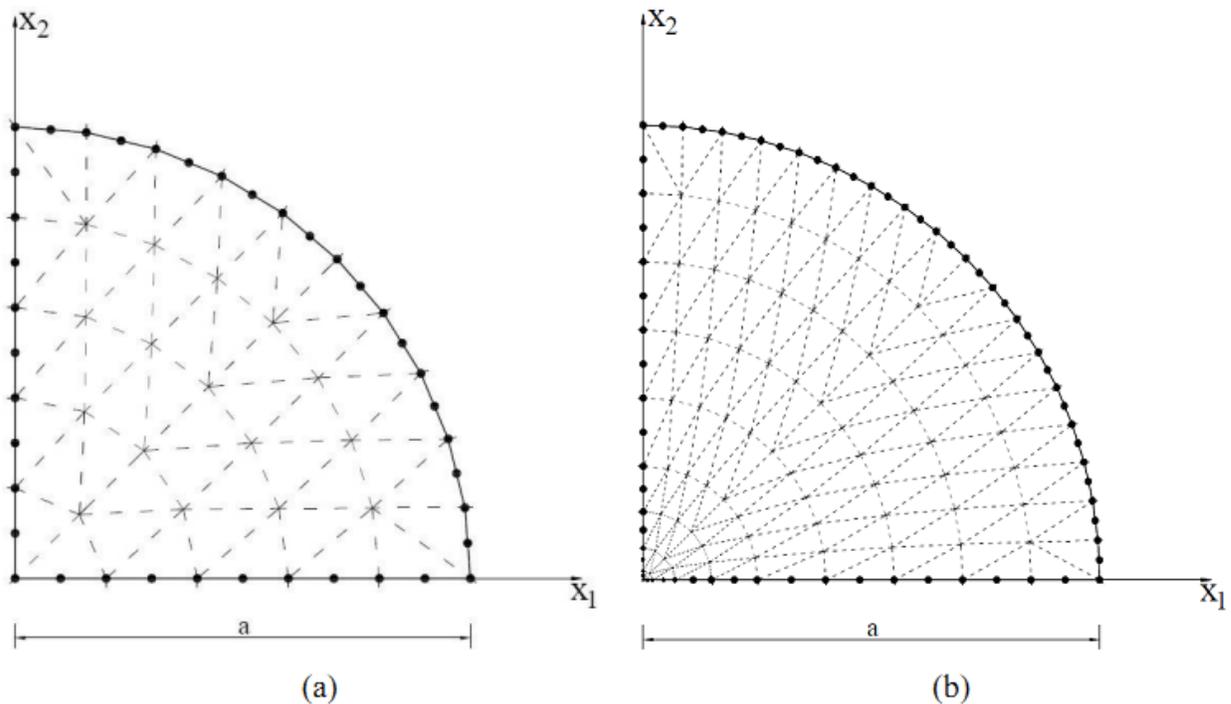
Figura 6.2 - Curva carga-flecha para o ponto central da placa quadrada simplesmente apoiada

### 6.1.2. Exemplo 2 – Placa circular simplesmente apoiada

Considera-se uma placa circular simplesmente apoiada, de raio  $a = 10 \text{ in}$  ( $254 \text{ mm}$ ) e espessura  $h = 1 \text{ in}$  ( $25,4 \text{ mm}$ ), com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade  $E = 10.000 \text{ ksi}$  ( $68.670 \text{ MPa}$ ), coeficiente de Poisson  $\nu = 0,24$ , tensão de escoamento  $\sigma_0 = 16 \text{ ksi}$  ( $109,872 \text{ MPa}$ ), parâmetro de fluidez  $\gamma = 0,001/\text{minuto}$ . Os parâmetros utilizados para escolha automática do incremento de tempo são  $\eta = 0,08$  e  $\eta_0 = 1,5$ . Considera-se que o material é idealmente viscoplástico ( $H' = 0$ ). Adotou-se a forma linear para a função  $\Phi(F/\Psi)$  e utilizou-se o critério de escoamento de von Mises.

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da placa foi discretizado. A Figura 6.3 apresenta as duas malhas que foram utilizadas na análise, sendo a primeira

com 20 elementos de contorno e 50 células internas e a segunda com 36 elementos de contorno e 162 células internas. As mesmas malhas foram empregadas por Karam e Telles (1998), que fizeram análise da mesma placa utilizando a teoria clássica da plasticidade.



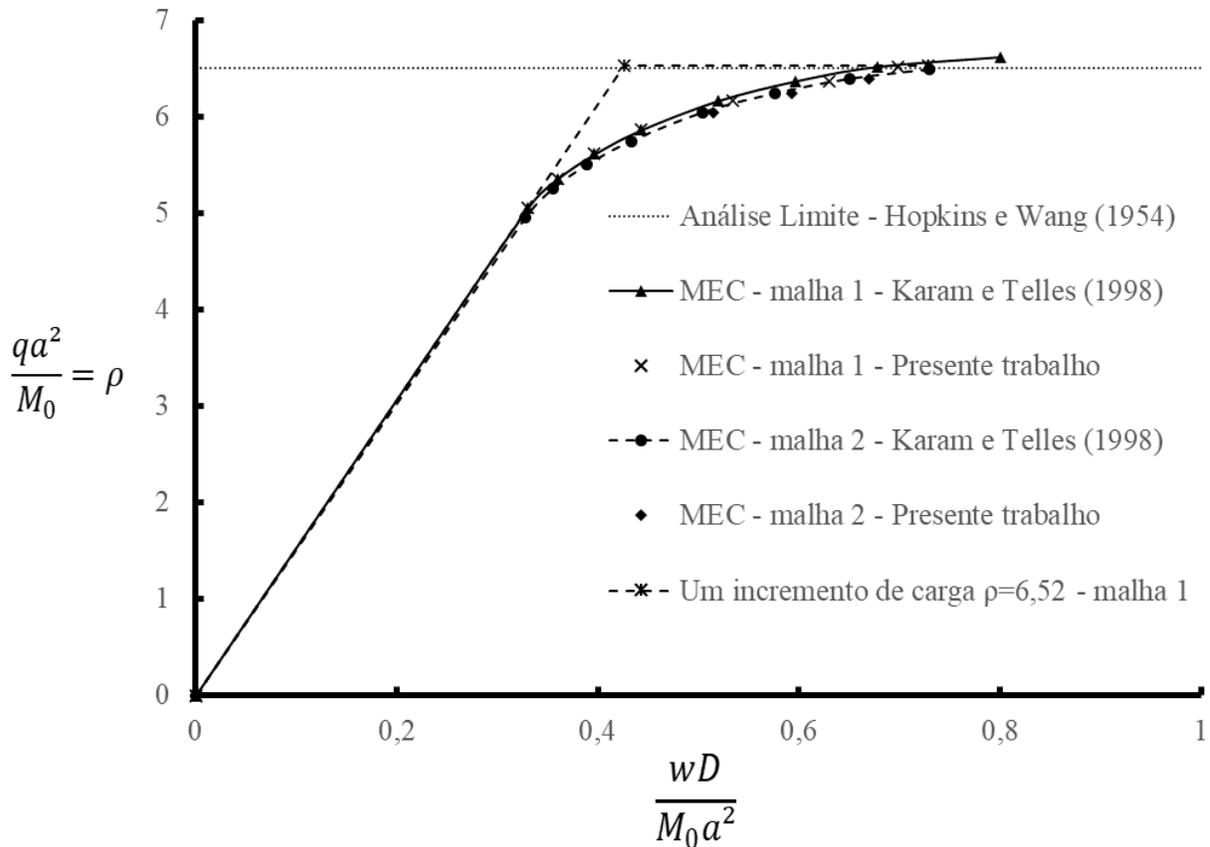
**Figura 6.3 - Placa circular simplesmente apoiada: (a) malha 1 (b) malha 2**

O mesmo problema foi analisado por Hopkins e Wang (1954), que fizeram uma análise limite, e por Armen Jr. et al. (1970), empregando o método dos elementos finitos, com critério de escoamento de von Mises e utilizando uma malha com 50 elementos triangulares. Hopkins e Wang (1954) encontraram carga limite  $\rho = 6,51$  e Armen Jr. et al. (1970) obtiveram carga de colapso de  $\rho = 6,50$ .

Karam e Telles (1998) encontraram valores que convergem até  $\rho = 6,62$  para a malha 1 enquanto, no presente trabalho, o valor encontrado foi  $\rho = 6,52$ . Para a malha 2, Karam e Telles (1998) apresentaram valores que convergem até  $\rho = 6,49$  e, no presente trabalho, encontrou-se  $\rho = 6,39$ .

A Figura 6.4 mostra a curva carga-flecha adimensional para o ponto central da placa, comparando os resultados do presente trabalho com os resultados de Karam e Telles (1998) e da análise limite de carga de Hopkins e Wang (1954). Verifica-se que as

curvas encontradas no presente trabalho estão de acordo com os resultados apresentados pelos autores citados. Para esta placa circular, foi considerada, além da aplicação de carga via processo incremental, a aplicação da carga de uma única vez, com valor adimensional  $\rho = 6,52$  para a malha 1, cujo resultado pode ser visto na Figura 6.4.



**Figura 6.4 - Curva carga-flecha para o ponto central da placa circular simplesmente apoiada**

Na Figura 6.5, pode-se verificar o perfil de deflexão da placa para tempo  $t = 0$  (solução elástica) e para tempo  $t = \infty$  quando a convergência é alcançada, para a carga de  $\rho = 6,52$ , e também o perfil encontrado quando se utiliza o processo incremental de carregamento.

Observando a Figura 6.5, é possível verificar que os deslocamentos tendem a ser um pouco maiores quando a carga é aplicada de uma única vez, comparando-se o caso  $t = \infty$ , quando o deslocamento atinge um valor estacionário, com o caso em que o carregamento é aplicado de forma incremental.

Considerando a carga de  $\rho = 6,52$  aplicada de forma constante, e com o parâmetro de escolha de tempo automático  $\eta = 0,03$  para melhor refinamento nos incrementos de tempo, na Figura 6.6, verifica-se a redistribuição de esforços ao longo do tempo. Enquanto o ponto denominado “p”, localizado no centro de gravidade da célula correspondente, já se encontra plastificado, o ponto denominado “e”, também no centro de gravidade da respectiva célula, se mantém em regime elástico.

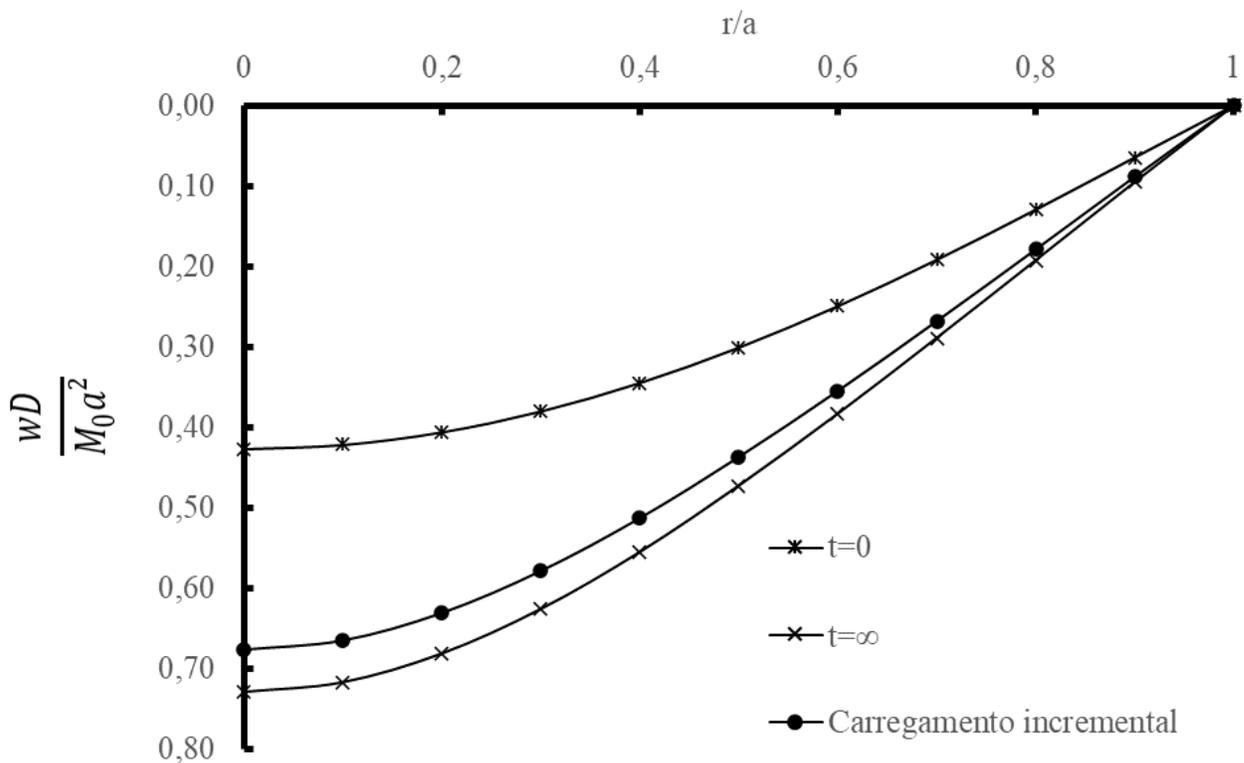


Figura 6.5 – Perfis de deflexão para carga  $\rho = 6,52$ , para  $t = 0$ ,  $t = \infty$  aplicada de uma única vez, e carregamento aplicado de forma incremental.

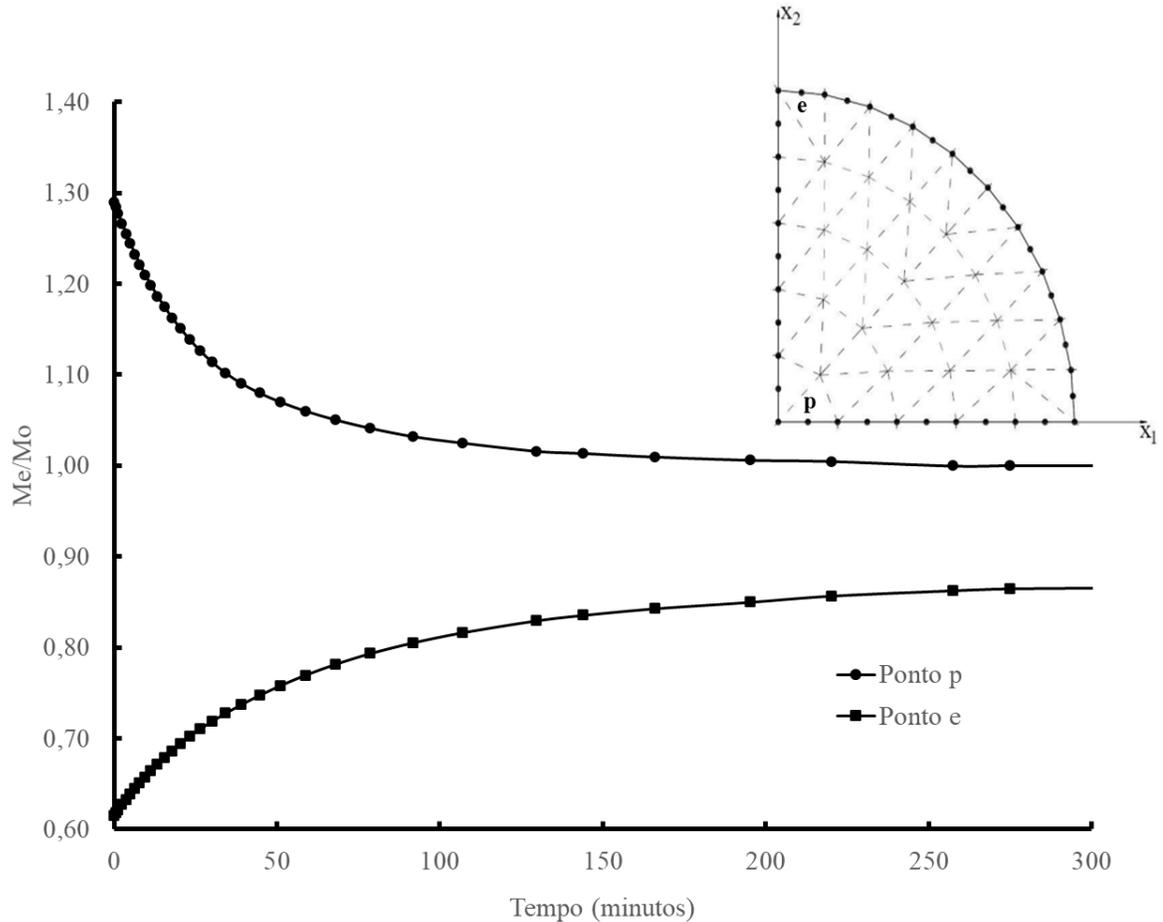


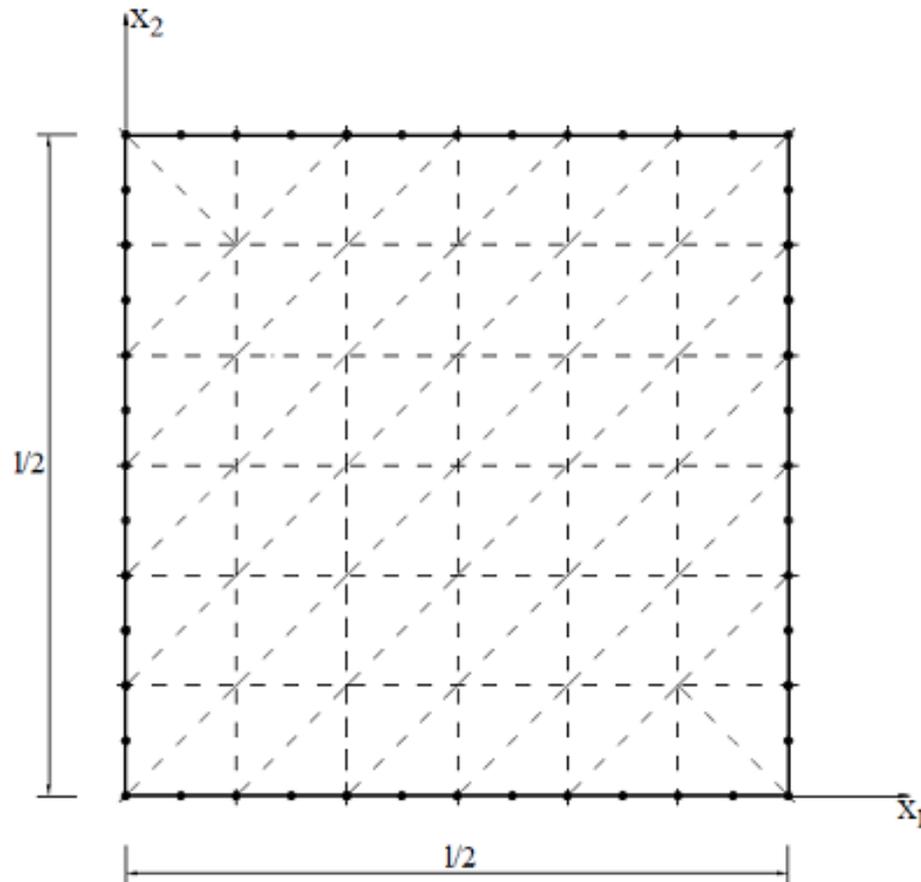
Figura 6.6 – Variação do momento efetivo  $M_e$  com o tempo para um ponto plastificado (Ponto p) e um ponto elástico (Ponto e)

### 6.1.3. Exemplo 3 – Placa quadrada engastada

Este exemplo consiste em uma placa quadrada de lado  $l = 6m$ , engastada nos quatro bordos. A placa possui espessura  $h = 0,2m$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , módulo de elasticidade  $E = 30.000 MPa$ , tensão de escoamento  $\sigma_0 = 30 MPa$  e está submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Admite-se que a placa possui endurecimento linear com  $E_T = 300 MPa$  e utiliza-se o critério de escoamento de von Mises.

Este mesmo problema foi analisado pelo MEF por Owen e Figueiras (1983) e por Owen e Liu (1985), discretizando um quarto da placa em 9 elementos finitos e empregando o critério de escoamento de von Mises. No presente trabalho, foi utilizada a

mesma discretização de Oliveira (2015), mostrada na Figura 6.7, em que foram empregados 24 elementos de contorno e 72 células internas, considerando a discretização somente na quarta parte da placa, devido à simetria do problema. Em Oliveira (2015), foi utilizado um método de deformações iniciais para análise elastoplástica de placas pelo MEC.



**Figura 6.7 – Discretização da placa quadrada engastada em elementos de contorno e células internas**

O carregamento foi aplicado de forma incremental, considerando  $\beta = 2\%$ , o parâmetro de fluidez é o mesmo utilizado por Owen e Liu (1985), sendo  $\gamma = 0,0001/h$ , e os parâmetros utilizados para escolha automática do incremento de tempo são  $\eta = 0,08$  e  $\eta_0 = 1,5$ . Adotou-se a forma linear para a função  $\Phi(F/\Psi)$ .

Pela Figura 6.8, verifica-se que a carga máxima ficou em torno de  $0,42 \text{ MN/m}^2$ , valor também encontrado por Oliveira (2015), enquanto Owen e Figueiras (1983)

encontraram  $0,4 \text{ MN/m}^2$ . No presente trabalho, a flecha alcançou valores um pouco maiores nos valores finais de carregamento do que os trabalhos citados.

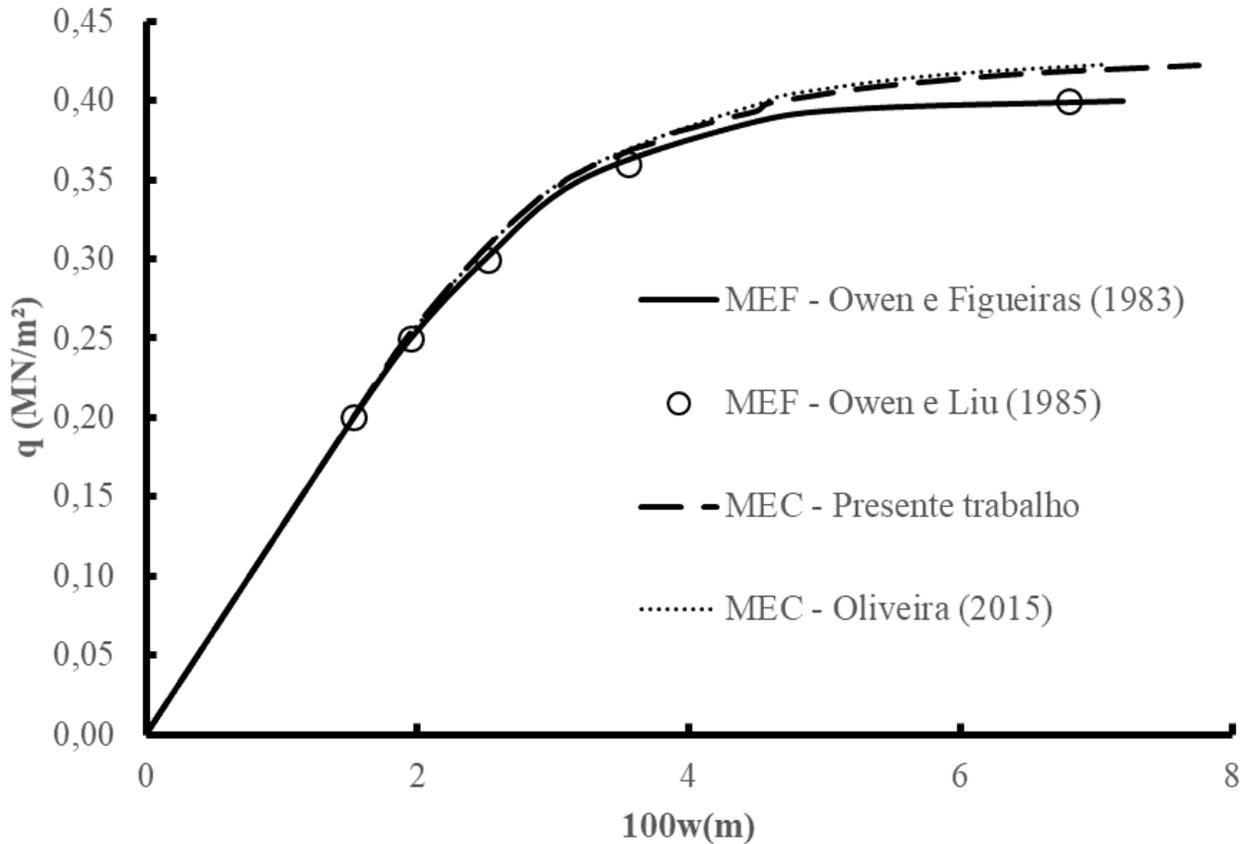


Figura 6.8 – Curva carga-flecha para o ponto central da placa engastada

#### 6.1.4. Exemplo 4 – Viga simplesmente apoiada

Neste exemplo, é analisada uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído  $q$ , com comprimento  $l = 16 \text{ in } (406,4\text{mm})$ , largura  $b = 1 \text{ in } (25,4\text{mm})$  e espessura  $h = 4 \text{ in } (101,6\text{mm})$ . O material é idealmente viscoplástico ( $H' = 0$ ), possui módulo de elasticidade  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi } (206.820 \text{ MPa})$ , tensão de escoamento  $\sigma_0 = 36 \times 10^3 \text{ psi } (248,2 \text{ MPa})$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e parâmetro de fluidez  $\gamma = 1/\text{segundo}$ . Os parâmetros utilizados para escolha automática do incremento de tempo são  $\eta = 0,05$  e  $\eta_0 = 1,5$ . Adotou-se a forma linear para a função  $\Phi(F/\Psi)$ , utilizou-se o critério de escoamento de Tresca e o carregamento foi aplicado de forma incremental, considerando  $\beta = 1\%$ ,

Esta placa também foi analisada considerando o estado plano de tensão, pelo MEF, por Anand *et al.* (1970 *apud* Telles, 1983) utilizando 272 elementos finitos triangulares lineares. Utilizando o MEC e também considerando o estado plano de tensão, Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) utilizaram 36 elementos de contorno e 68 células internas triangulares; e Liu e Antes (1999) fizeram a discretização com 18 elementos de contorno quadráticos e 12 células internas quadráticas. A malha utilizada no presente trabalho foi composta por 22 elementos de contorno e 8 células internas, como mostra a Figura 6.9.

Na Figura 6.10, apresenta-se a curva carga-flecha adimensional para o ponto do meio da viga, em que  $u_c$  representa a flecha. Na metodologia utilizada neste trabalho, não está prevista a plastificação em camadas; assim, quando as células iniciam o processo de plastificação, a carga de ruptura é logo alcançada, no valor de 0,12507. Este é bem próximo da carga limite calculada pela teoria de vigas. Verifica-se ainda que, no trecho elástico, os resultados obtidos são próximos dos resultados encontrados com os métodos MEC e MEF nos trabalhos citados, em que foram feitas análises da viga considerando o estado plano de tensão.

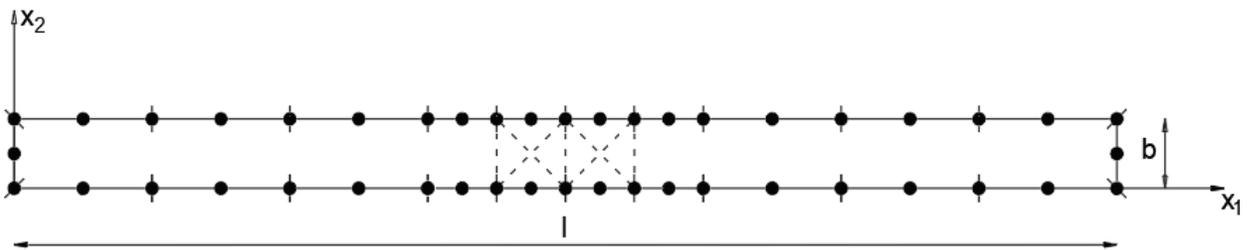


Figura 6.9 – Discretização da viga simplesmente apoiada

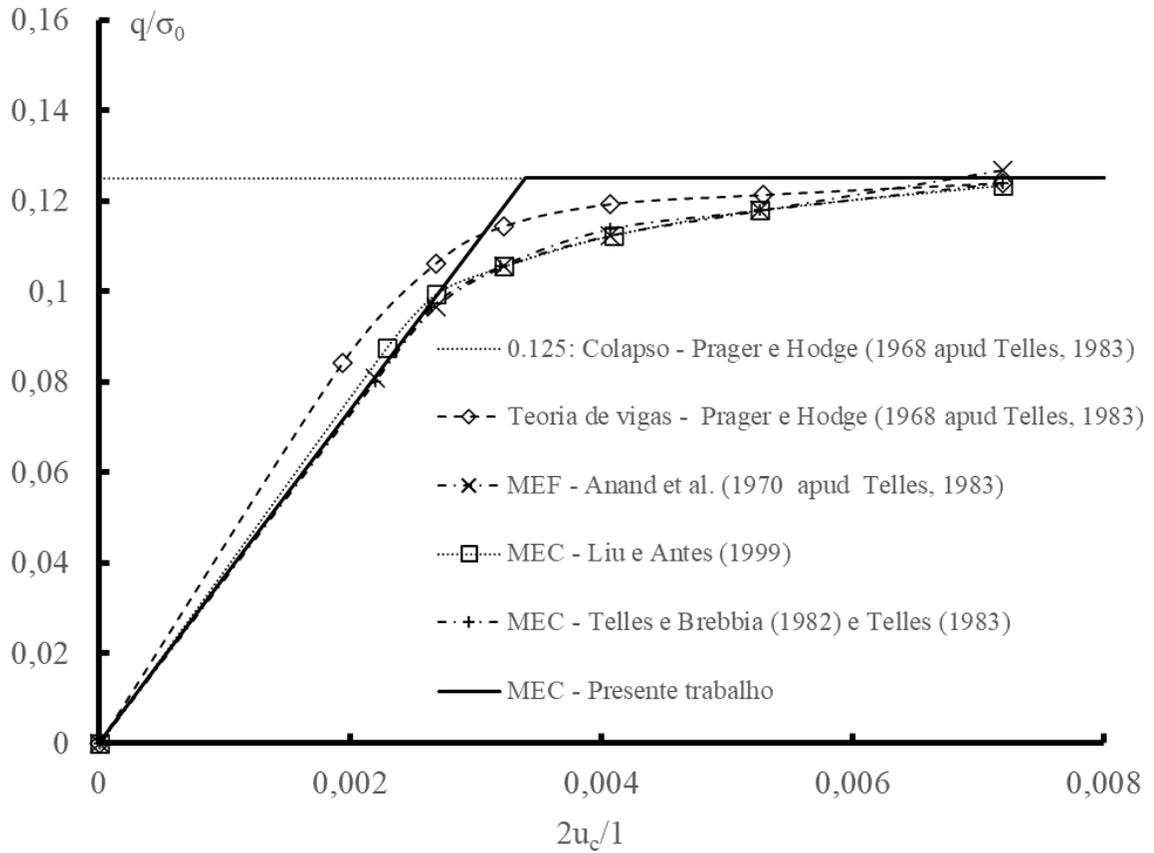


Figura 6.10 – Curva carga-flecha adimensional para o ponto central da viga

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

#### 7.1. Conclusões e considerações

Neste trabalho, foi desenvolvida uma formulação para análise viscoplástica de placas pelo método dos elementos de contorno utilizando a teoria de Reissner, que pode ser aplicada tanto para placas espessas quanto para placas delgadas.

Foram consideradas placas de espessura constante, de material homogêneo e isotrópico, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, sofrendo deformações plásticas apenas de flexão. Considerou-se um procedimento de tensões iniciais em termos de momentos, a fim de revolver o problema viscoplástico.

As equações integrais que governam o problema, para deslocamentos em pontos internos e pontos no contorno e para esforços em pontos internos foram apresentadas. As integrais de domínio relativas ao carregamento transversal foram transformadas em integrais de contorno.

As soluções fundamentais utilizadas são as mesmas apresentadas em Van der Weeën (1982a e 1982b) e Karam e Telles (1988), que não incorporam o efeito de não linearidade física. Assim, permanece uma integral de domínio relativa a este efeito, necessitando que parte de domínio seja discretizada em células internas.

As equações constitutivas desenvolvidas são baseadas no modelo de Perzyna (1966) e nos procedimentos apresentados em Telles e Brebbia (1982) e Telles (1983) para os casos de estados planos. Para a resolução do problema viscoplástico pelo MEC, foi utilizado um procedimento de passo simples de Euler e considerado um esquema explícito de integração no tempo.

Considerou-se a hipótese simplificadora de que toda a seção transversal se plastifica de uma única vez quando os critérios de escoamento são atendidos. Neste trabalho, utilizaram-se os critérios de von Mises e de Tresca.

A solução com a consideração do modelo viscoplástico de Perzyna (1966) permite que exista um estado de carregamento em que  $F > 0$ , o que não é possível pela consideração da teoria clássica da plasticidade. Assim, o excesso de deformação é

dissipado ao longo do tempo, de acordo com a fluidez do material. Quanto maior a fluidez, mais rápida é essa dissipação. Então, quando a deformação excedente se estabiliza, o resultado concorda com os resultados encontrados pela teoria clássica da plasticidade, o que acontece para o tempo  $t = \infty$ .

É possível se obter resultados bem próximos da solução elastoplástica quando o carregamento é feito de forma incremental, em que se verifica que as taxas de deformação viscoplástica tornam-se muito pequenas durante o processo de carregamento. Assim,  $\dot{F} = 0$  é alcançado, estabilizando a deformação total.

Para a implementação do MEC, foram utilizados elementos quadráticos para a discretização do contorno e células internas triangulares constantes para a discretização do domínio, ambos de geometria linear. Nós duplos e elementos descontínuos foram utilizados para resolver os problemas de descontinuidade da normal e das condições de contorno.

As integrações foram realizadas de forma numérica, utilizando a quadratura de Gauss, para as integrais regulares. Para as integrais singulares, foram utilizados procedimentos especiais, como transformação de coordenadas e a quadratura de Kutt.

Para a técnica de solução do problema viscoplástico, adotou-se um procedimento incremental de passo simples de Euler aliado à técnica tensões iniciais. A escolha dos incrementos de tempo é muito importante e deve ser feita segundo critérios empíricos ou teóricos, de modo a não influenciar nos resultados.

A formulação desenvolvida foi implementada em linguagem de programação FORTRAN e, a fim de se fazer a validação da formulação e do programa computacional, foram realizados alguns exemplos numéricos. No desenvolvimento do programa, foram previstas duas possibilidades de aplicação de carregamento, sendo em uma única vez ou em um processo incremental.

Os resultados encontrados neste trabalho foram comparados aos da literatura existente. Verificou-se que os resultados apresentam coerência com as referências.

Assim, pode-se concluir que a formulação desenvolvida e implementada se mostrou bastante satisfatória, permitindo a avaliação dos efeitos ao longo do tempo. Além disso, o procedimento oferece uma alternativa para análise elastoplástica, quando o carregamento é aplicado de forma incremental.

## **7.2. Sugestões para trabalhos futuros**

Para trabalhos futuros, é possível estender a formulação apresentada. Como sugestões de outras análises, pode-se considerar: a utilização de métodos implícitos para integração no tempo, de outros modelos constitutivos, a plastificação em camadas, o uso de outras funções de escoamento, de outros tipos de carregamento e de condições de contorno e a aplicação a problemas com materiais compósitos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M and Stegun, I.A. (1965) Handbook of Mathematical Function – Dover Publications, New York.

Armen Jr., H.; Pifko, A.; Levine, H. S. (1959) Finite element analysis of structures in the plastic range. N.A.S.A

Altiero, N. J. and Sikarskie, D.L. (1978) A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form. Computers & Structures, 9(2):163-168.

Auatt, S. S. M. (2002) Análise de Flexão de Placas pelo MEC Considerando Elastoplasticidade com Multicamadas e Contato Unilateral. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Campos dos Goytacazes – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, 122p.

Bacarji, E. (2001) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Pavimentos de Edifícios. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 160p.

Bezine, G. P. (1978) Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions. Mechanics Research Communications, 5(4):197-206.

Bhaumik, K.; Hanley, T. (1967) Elasto-plastic plate analysis by finite differences. A.S.C.E 279

Brebbia, C. A. (1978). The Boundary Element Method for Engineers, London: Pentech Press.

Bui, H. D. (1978) Some Remarks About the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations. International Journal of Solids and Structures, 14:935-939.

Chueiri, L. H. M. (1994) *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise Elastoplástica de Placas*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 219p.

Cormeau, I (1975) Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity. *Internat. J. Numer. Methods Engin.* 9:109-127.

Cresce, S. H. (2003) *Análise Não-Linear de Pavimentos de Concreto Armado pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 161p.

Dinis, L. M. S; Owen, D. R. J (1977) Elastic-Viscoplastic Analysis of Plates by the Finite Element Method. *Computers & Structures.* 8: 207-215.

Fortiu, P. A., Irschik, H. and Ziegler, F. (1994) Modal Analysis of Elastic-Plastic Plate Vibrations by Integral Equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14(n.1):81-97.

Fernandes, G. R. and Venturini, W. S. (2002) Non-Linear Boundary Element Analysis of Plates Applied to Concrete Slabs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26: 169-181.

Forbes, D. J. and Robinson, A. R. (1969) Numerical Analysis of Elastic Plates and Shallow Shells by an Integral Equation Method. *University of Illinois Structural Research Series Report*, n.346.

Hansen, E. B (1976) Numerical Solution of Integro-Differential and Singular Integral Equations for Plate Bending Problems, *Journal of Elasticity*, 6(1):39-56

Hill, R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press.

Hodge Jr., P. G., and Belytshko, T. (1968) Numerical methods for limit analysis of plates. J. Appl. Mech. 796

Jaswon, M. A., Maiti, M. and Symm, G. T. (1967) Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. International Journal of Solids and Structures, 3:309-332.

Jaswon, M. A., Maiti, M. (1968) An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems, J. Engng. Math, 2: 83-93

Karam, V. J. (1986) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 142p.

Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1992) The BEM Applied to Plate Bending Elastoplastic Analysis Using Reissner's Theory, Engineering Analysis with Boundary Elements, 9(4): 351-375.

Karam, V. J. (1992) Análise de Flexão de Placas pelo MEC Incluindo Não-Linearidade Física. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 158p.

Karam, V. J. and Telles, J. C. F. (1998) Nonlinear Material Analysis of Reissner's Plates, in Plate Bending Analysis with Boundary Elements. Advances in Boundary Elements. Chapter 4, 127-163, Ed. Computational Mechanics Publications, England.

Kirchhoff, G., (1850) Uber das Gleichgewicht and die Bewegung einer elastitischen Scheibe, J. Math, Crelle, 40: 51-58.

Kutt, H. R. (1975) Quadrature Formulae for Finite Part Integrals. Report Wisk 178. The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria.

Liu, Y.; Antes, H. (1999) Algorithm for the Elastic Viscoplastic Boundary Element Method  
Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 79(5), 317-333

Maiti, M. and Chakrabarty, S. K. (1974), Integral Equation Solutions for Simply Supported  
Polygonal Plates, Int. J. Engng, 12: 793-806

Mendelson, A. (1973) Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity. Report No.  
NASA TN D-7418, NASA.

Mindlin, R. D. (1951) Influence of rotatory Inertia and shear on flexural motion of isotropic,  
elastic plates. J. Appl. Mech. 13:31-38

Morjaria, M. and Mukherjee, S. (1980) Inelastic Analysis of Transverse Deflection of  
Plates by the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):291-296.

Moshaiov, A. and Vorus, W. S. (1986) Elasto-plastic Plate Bending Analysis by a  
Boundary Element Method with Initial Plastic Moments. *International Journal of Solids and  
Structures*, 22(11):1213-1229.

Oliveira, S. R. C. and Karam, V. J. (2016) Elastoplastic analysis of Reissner's plates by  
the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64: 247-  
254.

Oliveira, S. R. C. (2015) Análise de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno  
considerando a Não-Linearidade Física. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Rio de  
Janeiro – RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, 152p.

Owen, D. R. J. and Figueiras, J. A. (1983) Elastoplastic Analysis of Anisotropic Plates and  
Shells by the Semiloof Element. *International Journal for Numerical Methods in  
Engineering*, 19:521-539.

Owen, D. R. J. and Liu, G. Q. (1985) Elasto-viscoplastic Analysis of Anisotropic Laminated Plates and Shells. *Engineering Computations* 6:90–95

Owen, D.R.J., Hinton, E. (1980). *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, U. K.: Pineridge Press Limited.

Paiva, J. B. and Venturini, W. S. (1985) Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis. *First Boundary Element Technology Conference, Adelaide, Austrália*, 201-209.

Paiva, J. B. (1987) *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas*. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP

Perzyna, P. (1966) *Fundamental Problems in Viscoplasticity*. In *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press, New York

Phillips, A. and Wu, H. C. (1973) A Theory of Viscoplasticity. *Int. J. Solids Struct.* 9:15

Nicholson, D. W. and Phillips, A. (1974) On the structure of the theory of viscoplasticity. *Int. J. Solids Struct.* 10: 149

Providakis C. P. (1993) Quasi-static analysis of viscoplastic plates by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11: 265-2268.

Providakis C. P. and Beskos D. E. (1994) Dynamics Analysis of Elasto-Plastic Flexural Plates by the D/BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14(1):75-80.

Providakis C. P. and Beskos D. E. (2000) Inelastic Transient Dynamics Analysis of Reissner-Mindlin Plates by the D/BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:383-397.

Reissner E. (1944) On the Theory of Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 23:184-191.

Reissner, E., (1945) The Effect of Transverse Shear Deformation on Bending of Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, 12: A69-A77.

Reissner E. (1947) On Bending of Elastic Plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5:55-68.

Ribeiro, G. O. (1992) Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – São Carlos – SP, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – USP, 267p.

Ribeiro, G. O. e Venturini, W.S. (1989) Aplicação do Método dos Elementos de Contorno no Cálculo de Placas Através da Teoria de Reissner. MECOM–89: Anais do X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia – II Encontro Nacional de Mecânica Computacional; Porto, Portugal.

Ribeiro G. O. e Venturini, W. S. (1998) Elastoplastic Analysis of Reissner's Plate Using the Boundary Element Method, in *Plate Bending Analysis with Boundary Elements. Advances in Boundary Elements*, chapter 3:101-125, Ed. Computational Mechanic Publications, England

Ricardella, P. C. (1973) An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems of Elasticity and Elastoplasticity. Thesis (Ph.D.) – Carnegie-Mellon University, 374p.

Santana, A. P. (2014) Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas Espessas Isotrópicas e Ortotrópicas. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Brasília – DF, Universidade de Brasília – UnB, 202p.

Segedin, C. M. and Bricknell, D. G. A. (1968) Integral Equation Method for Corner Plates, J. Struct. Division, ASCE, 94:41-52

Stern, M. (1979) A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Bending Problems. International Journal of Solids and Structures, 15: 769-782.

Supriyono and Aliabadi, M. H. (2006) Boundary Element Method for Shear Deformable Plates with Combined Geometric and Material Nonlinearities. Engineering Analysis with Boundary Elements, 30(1):31-42.

Supriyono, Effendy, W. and Wijianto, (2017) Material nonlinearity plate bending analysis with boundary element method. Engineering. AIP Conference Proceedings 1855, 030023

Swedlow, J. L. and Cruse, T. A. (1971) Formulation of Boundary Integral Equation for Three-Dimensional Elastoplastic Flow. International Journal of Solids and Structures, 7:1673-1683.

Szilard, R. (2004) Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods, John Wiley & Sons, Inc.

Taguti, Y. (2010) Método dos Elementos de Contorno na Resolução do Problema de Segunda Ordem em Placas Delgadas. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Guaratinguetá – SP, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista – UNESP, 189p.

Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. (1979). On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity. Applied Mathematical Modelling, 3:466-470.

Telles, J. C. F.; Brebbia, C. A. (1982). Elastic/Viscoplastic Problems Using Boundary Elements. Int. J. Mech. Sci, 24 (10): 605-618.

Telles, J. C. F. (1983) *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Telles, J. C. F. (1987) A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integral, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24: 959-973.

Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York.

Tottenham, H. (1979) *The Boundary Element Method for Plates and Shells*. *Developments Boundary Element Methods - 1*. Banerjee, P. K. e Butterfiels, R. (eds.), London: Applied Science Publishers, 173-205.

Ugural, A.C., (1981) *Stress in plates and shells*, McGraw-Hill, New York.

Van der Weeën, F. (1982a) Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1-10.

Van der Weeën, F. (1982b) Application of the Direct Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. *Boundary Elements in Engineering*, 487-499.

Waidemam, L. and Venturini, W. S. (2010) A boundary element formulation for analysis of elastoplastic plates with geometrical nonlinearity. *Computational Mechanics* , 45: 335-347.

Wen, P. H. Aliabadi, M. H. and Young, A. (2005) Large deflection analysis of Reissner plate by boundary element method," *Computers & Structures*, 83(n.10–11), 870–879.

Wu, B.C. and Altiero, N. J. (1979) A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form and Arbitrary Boundary Conditions. *Computers & Structures*, 10(4):703-707.

Xiao-Yan, L., Mao-Kuang, H. and Xiuxi, W. (1990) Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element Method. *Computers & Structures*, 37(6):911-916.

## APÊNDICE A

### FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS $K_0$ E $K_1$

As funções de Bessel modificadas de ordem inteira  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  podem ser calculadas através das expansões polinomiais mostradas a seguir, para um argumento  $z$  real (Abramowitz e Stegun, 1965):

a) Para  $0 < z \leq 2$ :

$$\begin{aligned}
 K_0 = & -\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z) - 0,57721566 + 0,42278420\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \\
 & + 0,23069756\left(\frac{z}{2}\right)^4 + 0,03488590\left(\frac{z}{2}\right)^6 + 0,00262698\left(\frac{z}{2}\right)^8 + \\
 & + 0,00010750\left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0,00000740\left(\frac{z}{2}\right)^{12}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 = & \frac{1}{z}\left[z\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_1(z) + 1 + 0,15443144\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \right. \\
 & - 0,67278579\left(\frac{z}{2}\right)^4 - 0,18156897\left(\frac{z}{2}\right)^6 - 0,01919402\left(\frac{z}{2}\right)^8 - \\
 & \left. - 0,00110404\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0,00004686\left(\frac{z}{2}\right)^{12}\right]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 I_0(z) = & 1 + 3,5156229t^2 + 3,0899424t^4 + 1,2067492t^6 + 0,2656732t^8 + \\
 & + 0,0360768t^{10} + 0,0045813t^{12}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z) = & z[0,5 + 0,87890594t^2 + 0,51498869t^4 + 0,15084934t^6 + 0,02658733t^8 + \\
 & + 0,00301532t^{10} + 0,000324t^{12}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

sendo:

$$t = \frac{z}{3,75} \quad (\text{A.5})$$

b) Para  $z > 2$ :

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} \left[ 1,25331414 - 0,07832358 \left(\frac{2}{z}\right) + 0,02189568 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \right. \\ \left. - 0,01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + 0,00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0,00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \right. \\ \left. + 0,00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \quad (\text{A.6})$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{z} e^z} \left[ 1,25331414 + 0,23498619 \left(\frac{2}{z}\right) - 0,03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \right. \\ \left. + 0,01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 - 0,0078353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 + 0,00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 - \right. \\ \left. - 0,00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6 \right] \quad (\text{A.7})$$

As derivadas das funções  $K_0$  e  $K_1$  em relação ao argumento  $z$  podem ser obtidas pelas fórmulas de recorrência dadas em Abramowitz e Stegun (1965), ou seja:

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (\text{A.8a})$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (\text{A.8b})$$

$$e^{(v-1)\pi i} K_{v-1}(z) - e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} e^{v\pi i} K'_v(z) \quad (\text{A.8c})$$

$$e^{v\pi i} K'_v(z) = e^{(v+1)\pi i} K_{v+1}(z) - \frac{v}{z} e^{v\pi i} K_v(z) \quad (\text{A.8d})$$

Utilizando-se a fórmula de Euler dada por  $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ , obtém-se, a partir das equações acima, as seguintes expressões:

De (A.8d), com  $v = 0$ :

$$K'_0(z) = -K_1(z) \quad (\text{A.9})$$

De (A.8a) e (A.8c), com  $v = 1$ :

$$K_0(z) - K_2(z) = -\frac{2}{z} K_1(z) \quad (\text{A.10})$$

$$K_0(z) + K_2(z) = -2K'_1(z) \quad (\text{A.11})$$

A partir da equação (A.10), isola-se o valor  $K_2(z)$  e substitui-se na equação (A.11), obtendo-se:

$$K'_1(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z} K_1(z) \quad (\text{A.12})$$

As funções  $A(z)$  e  $B(z)$  são definidas por:

$$\begin{aligned} A(z) &= K_0(z) + \frac{2}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \\ B(z) &= K_0(z) + \frac{1}{z} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

As derivadas dessas expressões em relação ao argumento  $z$  são obtidas a partir de (A.9) e (A.12) e derivando-se (A.13), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 A'(z) &= -K_1(z) - \frac{2}{z^2} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{2}{z} \left[ K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right] \\
 B'(z) &= -K_1(z) - \frac{1}{z^2} \left[ K_1(z) - \frac{1}{z} \right] - \frac{1}{z} \left[ K_0(z) + \frac{K_1(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

Reagrupando (A.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A'(z) &= -K_1(z) - \frac{2}{z} \left[ K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right] \\
 B'(z) &= -K_1(z) - \frac{1}{z} \left[ K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) - \frac{2}{z^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

Substituindo a primeira das equações (A.13) em (A.15), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 A'(z) &= -\frac{1}{z} [zK_1(z) + 2A(z)] \\
 B'(z) &= -\frac{1}{z} [zK_1(z) + A(z)]
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

## APÊNDICE B

### CÁLCULO DE INTEGRAIS COM SINGULARIDADE LOGARÍTMICA UTILIZANDO UMA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Utilizando a quadratura de Gauss, é possível resolver integrais com singularidades logarítmicas, fazendo-se, antes de integrar, uma transformação de coordenadas, como apresentado por Telles (1987). Com esta transformação, origina-se um jacobiano que tem valor zero no ponto onde ocorre a singularidade e, assim, esta é anulada.

Para uma função  $f(\eta)$  a ser integrada no intervalo  $[-1,1]$  e contendo o ponto singular  $\bar{\eta}$ , tem-se:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{B.1})$$

As transformações de coordenadas propostas por Telles (1987) para resolver o problema podem ser do segundo e do terceiro graus.

#### B.1. Transformação do segundo grau

A mudança de variável para este caso tem a seguinte forma:

$$\eta(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c \quad (\text{B.2})$$

a qual atende às seguintes condições:

$$\left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

A solução para este caso será:

$$a = -c$$

$$b = 1$$

(B.4)

$$c = \frac{\bar{\eta} \pm \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

em que se deve ter  $|\bar{\eta}| \geq 1$ , para que as raízes sejam reais.

Caso  $|\bar{\eta}| = 1$ , tem-se:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ (1 - \theta^2) \frac{\bar{\eta}}{2} + \theta \right] (1 - \theta \bar{\eta}) d\theta \quad (\text{B.5})$$

Caso a singularidade ocorra em um ponto em  $-1 < |\bar{\eta}| < 1$ , a integral deve ser dividida da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{B.6})$$

e a expressão a seguir -e obtida para este caso:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1 + \bar{\eta}}{2} \left( \frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right) + \bar{\eta} - 1 \right] \frac{(1 + \bar{\eta})(1 - \theta)}{2} d\theta + \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1 - \bar{\eta}}{2} \left( \frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta \right) + \bar{\eta} + 1 \right] \frac{(1 - \bar{\eta})(1 + \theta)}{2} d\theta \quad (\text{B.7})$$

## B.2. Transformação do terceiro grau

A mudança de variável para este caso tem a seguinte forma:

$$\eta(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \quad (\text{B.8})$$

e, além das condições expressas por (A.3), tem-se a seguinte condição:

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{B.9})$$

De acordo com o apresentado por Telles (1987), pode-se expressar os coeficientes da equação (B.8) por:

$$a = \frac{1}{Q}$$

$$b = -\frac{3\bar{\theta}}{Q}$$

$$c = \frac{3\bar{\theta}^2}{Q}$$

$$d = -b$$

em que:

$$Q = 1 + 3\bar{\theta}^2 \quad (\text{B.11})$$

sendo  $\bar{\theta}$  o valor de  $\theta$  para que  $\eta(\bar{\theta}) = \bar{\eta}$ , calculado por:

$$\bar{\theta} = \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (\text{B.12})$$

onde:

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (\text{B.13})$$

Neste caso, obtém-se a expressão a seguir:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1}{1 + 3\bar{\theta}^2} \left( (\theta - \bar{\theta})^3 + \bar{\theta}(\bar{\theta}^2 + 3) \right) \right] \frac{3(\theta - \bar{\theta}^2)}{1 + 3\bar{\theta}^2} d\theta \quad (\text{B14})$$

## APÊNDICE C

### CÁLCULO DE INTEGRAIS EM PARTES FINITAS PELA QUADRATURA DE KUTT

O valor principal de Cauchy pode ser calculado pela quadratura de Kutt. Neste processo, as partes finitas das integrais envolvidas são utilizadas (Kutt,1975).

Considere a integral mostrada na equação a seguir, no sentido de valor principal de Cauchy:

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-s)} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} \frac{f(x)}{(x-s)} dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx \right\} \quad (\text{C.1})$$

com  $a < s < b$ , em que  $f(x)$  satisfaz a condição de Hölder em  $s$  e  $f(s) \neq 0$ , de modo que a singularidade é de ordem um.

Utilizando integração em partes finitas nas duas integrais à direita de (C.1), obtém-se:

$$I = I' + I'' \quad (\text{C.2})$$

sendo:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \quad (\text{C.3})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx \quad (\text{C.4})$$

Pode-se fazer uma mudança de variáveis em (C.3) e (C.4), de tal forma que os intervalos de integração se tornem unitários, resultando nas seguintes equações:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx = - \int_0^1 \frac{[f(a-s)t+s]}{f} dt + f(s) \ln|a-s| \quad (\text{C.5})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx = \int_0^1 \frac{[f(b-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|b-s| \quad (\text{C.6})$$

Utilizando as fórmulas de Kutt, para resolução das integrais (C.5) e (C.6), obtém-se:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \cong - \sum_{i=1}^n f[(a-s)t_i + s]w_i - f(s) \ln|a-s| \quad (\text{C.7})$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx = \sum_{i=1}^n f[(b-s)t_i + s]w_i - f(s) \ln|b-s| \quad (\text{C.8})$$

em que  $t_i$  representa as coordenadas dos pontos de integração de Kutt e  $w_i$  são os fatores de peso correspondentes. Tais valores,  $t_i$  e  $w_i$ , são apresentados em Kutt (1975) para vários valores de  $n$ .