

**ANÁLISE DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS  
PERFURADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

**KAIO RIBEIRO CARVALHO**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY  
RIBEIRO – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ  
MARÇO – 2021**



**ANÁLISE DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS  
PERFURADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

**KAIO RIBEIRO CARVALHO**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.”

Orientadora: Vânia José Karam

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MARÇO – 2021

### **FICHA CATALOGRÁFICA**

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

C331

Carvalho, Kaio Ribeiro.

Análise da concentração de tensões em placas perfuradas submetidas a flexão pelo método dos elementos de contorno / Kaio Ribeiro Carvalho. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.

63 f. : il.

Bibliografia: 56 - 60.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2021.

Orientadora: Vania Jose Karam.

1. flexão de placas. 2. MEC. 3. Teoria de Reissner. 4. concentração de tensões. 5. placas com furos. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 624

**ANÁLISE DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS  
PERFURADAS SUBMETIDAS A FLEXÃO PELO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

**KAIO RIBEIRO CARVALHO**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e  
Tecnologia da Universidade Estadual do Norte  
Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das  
exigências para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Civil.”

Aprovada em 26 de março de 2021.

Comissão Examinadora:



---

Ângelo Vieira Merdonça (D.Sc., Engenharia Civil) - UFPB



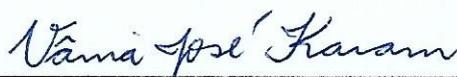
---

Gines Arturo Santos Falcon (D.Sc., Engenharia Civil) - UENF



---

Aldo Durand Farfán (D.Sc., Engenharia Civil) - UENF



---

Prof<sup>a</sup>. Vânia José Karam (D.Sc., Engenharia Civil) – UENF

Orientadora

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao constante apoio e incentivo da minha família.

Agradeço a todos amigos que participaram desta caminhada e em especial a Rodolfo e a Flaviano que são verdadeiros irmãos que a UENF me concedeu.

Agradeço por todo suporte, ajuda e ensinamentos dados pela minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Dr. Vânia José Karam, que com experiência e paciência me auxiliou no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha companheira, Raysa, que sempre esteve ao meu lado para dar apoio e ânimo em todos momentos difíceis neste percurso.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

*“Queremos buscar a verdade, não importa aonde ela nos leve. Mas para encontrá-la, precisaremos tanto de imaginação quanto de ceticismo. Não teremos medo de fazer especulações, mas teremos o cuidado de distinguir a especulação do fato.”*

*(Carl Sagan)*

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Justificativa.....	4
1.3 Objetivo .....	4
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>5</b>
2.1 Principais Trabalhos sobre Flexão de Placas com o MEC .....	5
2.2 Principais Trabalhos sobre Flexão de Placas Perfuradas .....	5
<b>CAPÍTULO 3 - A TEORIA DE REISSNER PARA FLEXÃO DE PLACAS .....</b>	<b>8</b>
3.1 Considerações Iniciais.....	8
3.2 Formulação.....	8
3.3 Condições de Contorno .....	12
<b>CAPÍTULO 4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER .....</b>	<b>14</b>
4.1 Considerações Iniciais.....	14
4.2 Equação Integral Básica.....	14
4.2.1 Considerações Preliminares .....	15
4.2.2 Dedução da Equação Integral Básica Através do Segundo Teorema de Betti .....	17
4.3 Solução Fundamental.....	21
4.4 Forças de Superfície Generalizadas .....	22
4.5 Equação Integral para um Ponto no Contorno .....	23
4.6 Deslocamentos nos Pontos Internos.....	24
4.7 Esforços nos Pontos Internos.....	24
4.8 Esforços no Contorno.....	26
4.9 Regiões Infinitas.....	28
<b>CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>30</b>
5.1 Considerações Iniciais.....	30
5.2 Cálculo do Problema no Contorno .....	31
<b>CAPÍTULO 6 - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS FLETIDAS ....</b>	<b>33</b>

<b>CAPÍTULO 7 - METODOLOGIA .....</b>	<b>36</b>
7.1 Cálculos com MEC.....	36
7.2 Cálculos com MEF .....	40
<b>CAPÍTULO 8 - RESULTADOS.....</b>	<b>44</b>
8.1 Flexão Simples.....	44
8.2 Flexão Cilíndrica.....	48
8.3 Torção.....	50
<b>CAPÍTULO 9 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
<b>CAPÍTULO 10 - CONCLUSÕES .....</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>56</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>61</b>
a) Transformação do Segundo Grau .....	61
b) Transformação do Terceiro grau .....	62

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 (a, b, c) - Exemplos de furos em placas submetidas a flexão na Engenharia Civil. Disponíveis em: (a) <<https://www.nei.com.br/produto/2010-12-sistema-de-icamento-rapido-a-r-trejo-com-ltda?id=e523353f-5ba7-11e4-8697-0e94104de12e>> acesso em jan. 2019 (b) <<http://www.hotpar.com.br/locacao-de-andaimes/furos-e-cortes-em-concreto/furos-de-concreto-para-construcao-civil/furos-em-lajes-de-concreto-preco-sorocaba>> acesso em jan.2019 (c)<<http://www.lord.eng.br/areadeatucao/cortes-e-furos/>> acesso em jan. 2019 ....1

Figura 3.1 – Resultante das tensões na placa e convenção de sinais. .... 10

Figura 4.1 – Placa  $\Omega + \Gamma$  contida na região  $\Omega^* + \Gamma^*$  ..... 15

Figura 4.2- Ponto  $\xi$  no contorno de uma placa.....23

Figura 4.3 – Sistema de coordenada local no contorno  $\Gamma$ . .....26

Figura 4.4 - Região infinita com uma cavidade. ....28

Figura 4.5 – Sentido da normal ao contorno e da integração para o caso de placa infinita.....29

Figura 6.1 – Tensão máxima em uma placa fletida.....34

Figura 7.1 – Superposição de efeitos – placa infinita.....37

Figura 7.2 – M20. ....38

Figura 7.3 – M36. ....39

Figura 7.4 – M180. ....40

Figura 7.5 – Malha da placa de 2,5 metros de espessura. ....41

Figura 7.6 – Região de malha refinada da placa de 2,5 metros de espessura. ....42

Figura 7.7 – Condições de contorno. ....42

Figura 7.8 – Modelo de placa sem furo de espessura  $h=2,5$ . ....43

Figura 8.1 -  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão simples ( $h=2,5$ ) - ABAQUS. ....45

Figura 8.2 – Detalhe de  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão simples ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.....46

Figura 8.3 -  $\sigma_{11}$  em placa sem furo submetida a flexão simples - ABAQUS .....46

Figura 8.4 - K em função da relação  $d/h$  para resultados obtidos por MEC, Reissner (1945), Shivakumar (1992) e obtidos por ABAQUS. ....47

Figura 8.5 –  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão cilíndrica - ABAQUS. ....48

Figura 8.6 – Detalhe de $\sigma_{11}$ em placa perfurada submetida a flexão cilíndrica (h=2,5) 4- ABAQUS.....	49
Figura 8.7 – $\sigma_{11}$ em placa sem furo submetida a flexão cilíndrica (h=2,5) - ABAQUS.....	49
Figura 8.8 – K em função de d/h para resultados obtidos por MEC, Goodier (1936) e.....	50
Figura 8.9 – $\sigma_{11}$ em placa perfurada submetida a torção (h=2,5) - ABAQUS. ....	51
Figura 8.10 – Detalhe de $\sigma_{11}$ em placa perfurada submetida a torção (h=2,5) - ABAQUS.....	51
Figura 8.11 - $\sigma_{11}$ em placa sem furo submetida a torção (h=2,5) - ABAQUS.....	52
Figura 8.12 - K em função da relação d/h para resultados obtidos por MEC, Reissner (1945) e Abaqus. ....	52

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de $k$ para flexão simples de placa infinita com furo circular. ...	44
Tabela 2 - Erro relativo (%) de $k$ da .....	45
Tabela 3 – Valores de $K$ para flexão simples de placa infinita com furo circular e erro relativo (%).....	47

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### Abreviaturas:

MEC: Método dos Elementos de Contorno.

MEF: Método dos Elementos Finitos.

### Símbolos:

Índices gregos: variam de 1 a 2.

Índices latinos: variam de 1 a 3.

### Letras romanas maiúsculas:

A: Matriz de coeficientes, cheia e não simétrica, que multiplica o vetor de incógnitas no sistema de equações.

B: Vetor cujas componentes são expressas por integrais associadas às forças de domínio.

$C_i$ : Matriz de elementos  $C_{ij}$ .

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ : Rigidez à flexão da placa.

E: Módulo de elasticidade longitudinal.

G: Matriz que multiplica as forças de superfície generalizadas no sistema de equações  $HU=GP+B$

H: Matriz que multiplica as forças de superfície generalizadas no sistema de equações  $HU=GP+B$

$|J|$ : Jacobiano para integração nos elementos de contorno.

M: Matriz que contém as funções de interpolação para as coordenadas dos pontos dos elementos de contorno.

$M_{\alpha\beta}$ : Momentos fletores e torsões por unidade de comprimento.

N: Matriz que contém as funções de interpolação para deslocamentos e forças de superfície em pontos dos elementos de contorno.

$P_j$ : Intensidade da carga unitária.

$Q_\alpha$ : esforços cortantes por unidade de comprimento.

K: fator de concentração de tensões.

### **Letras romanas minúsculas:**

$b_i$ : componentes das forças de domínio.

$h$ : espessura da placa.

$l$ : comprimento do elemento de contorno.

$d$ : diâmetro do furo.

$n_\beta$ : cossenos diretores do normal exterior ao contorno em relação ao eixo  $x_\beta$

$p_i$ : componentes das forças de superfícies generalizadas.

$q$ : carregamento transversal aplicado.

$r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha}$ : distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha}$ : derivada de  $r$  em relação à coordenada  $x_\alpha$ .

$u_i$ : componentes dos deslocamentos generalizados.

$\bar{u}_i$ : componentes dos deslocamentos generalizados prescritos.

$w$ : deslocamento transversal (flecha).

$\bar{w}$ : deslocamento transversal prescrito.

$w_{,\alpha} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}$ : primeira derivada da flecha em relação às coordenadas  $x_\alpha$ .

$w_{i\beta}^*$ : componentes do tensor que multiplica as forças de domínio na expressão dos esforços nos pontos internos.

$x$ : ponto campo.

$x_i$ : eixos coordenados cartesianos.

$x^{(j)}$ : vetor que contém as coordenadas dos pontos nodais dos elementos de contorno.

$y$ : vetor de incógnitas.

$z$ : produto expresso por  $\lambda r$ .

### **Letras gregas maiúsculas**

$\Gamma$ : contorno da região definida por  $\Omega$ .

$\Gamma_j$ : contorno do elemento  $j$ .

$\Gamma_u$ : parte do contorno em que os deslocamentos generalizados são prescritos.

$\Gamma_p$ : parte do contorno em que as forças de superfície generalizadas são prescritas.

### **Letras gregas minúsculas**

$\delta_{\alpha\beta}$ : delta de Kronecker.

$\delta(x - \xi)$ : função generalizada delta de Dirac.

$\varepsilon$  : deformação.

$\eta$ : coordenada adimensional associada com o elemento de contorno.

$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$ : constante característica das equações de Reissner.

$\nu$ : coeficiente de Poisson.

$\xi$ : ponto fonte.

$\chi_{\alpha\beta}$ : componentes do tensor de deformações específicas de flexão.

## RESUMO

A presença de furos em placas estruturais muitas vezes é necessária por razões construtivas, funcionais ou estéticas. A presença de furos causa concentração de tensões nestas regiões que podem se tornar críticas na análise e no dimensionamento estrutural. O objetivo principal deste trabalho é analisar o emprego do Método dos Elementos de Contorno (MEC) no cálculo do fator concentração de tensões  $K$  em placas perfuradas submetidas a diferentes condições de flexão e torção. É considerada a teoria de Reissner para flexão de placas. As equações integrais do problema são apresentadas, inclusive com a abordagem para placas infinitas. Os resultados foram obtidos com diferentes malhas e foram comparados com resultados analíticos e também com resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando o programa ABAQUS® versão 6.14. Os resultados obtidos pelo MEC se aproximaram dos resultados analíticos com erros pequenos mesmo com a malha mais grosseira utilizada. O MEC mostrou-se efetivo em lidar com as concentrações de tensões enquanto constatou-se que o MEF exige custo computacional elevado para lidar com problemas de concentração de tensões e domínio infinito. A diferença entre a teoria de Reissner e do MEF aplicado a teoria tridimensional da elasticidade se faz significativa especialmente para razões diâmetro do furo/espessura da placa menores que 2.

**Palavras-chave:** flexão de placas, MEC, Teoria de Reissner, concentração de tensões, placas com furos.

## ABSTRACT

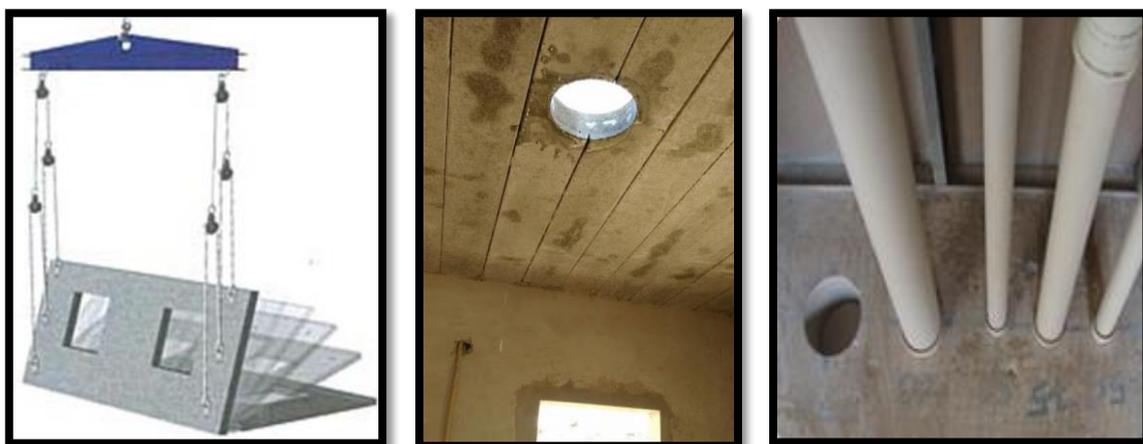
The presence of holes in structural plates is often necessary for constructive, functional or aesthetic reasons. The presence of holes causes stress concentration in these regions that can become critical in structural analysis and design. The main objective of this work is to analyze the use of the Boundary Element Method (BEM) in the calculation of the stress concentration factor  $K$  in perforated plates subjected to different bending conditions and torsion. Reissner's theory for plate bending is considered. Integral equations for the problem are presented, including the approach for infinite plates. The results were obtained with different meshes and were compared with analytical results and also with results obtained by the Finite Element Method (FEM) using the ABAQUS ® version 6.14 program. The results obtained by the MEC approached the analytical results with small errors even with the coarsest mesh used. The BEM proved to be effective in dealing with stress concentrations while it was found that the FEM requires high computational cost to deal with stress concentration problems and infinite domain. The difference between the BEM with Reissner's theory and the FEM applied to the three-dimensional theory of elasticity becomes significant especially for hole diameter / plate thickness ratios less than 2.

**Keywords:** Plate bending, BEM, Reissner's theory, stress concentration, perforated plates.

## Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Iniciais

Placas são elementos vastamente empregados em diversos ramos da Engenharia Civil. É possível encontrá-las, por exemplo, em edifícios, contenções, pontes, túneis, pavimentos e obras hidráulicas. A presença de furo nestes elementos, muitas vezes, se faz necessária devido a fatores construtivos, funcionais, para reduzir peso ou até mesmo por razões estéticas, como exemplificado na Figura 1.1 (a, b, c):



(a)

(b)

(c)

Figura 1.1 (a, b, c) - Exemplos de furos em placas submetidas a flexão na Engenharia Civil.

Disponíveis em:

(a) <<https://www.nei.com.br/produto/2010-12-sistema-de-icamento-rapido-a-r-trejor-com-ltda?id=e523353f-5ba7-11e4-8697-0e94104de12e>> acesso em jan. 2019

(b) <<http://www.hotpar.com.br/locacao-de-andaimes/furos-e-cortes-em-concreto/furos-de-concreto-para-construcao-civil/furos-em-lajes-de-concreto-preco-sorocaba>> acesso em jan.2019

(c)<<http://www.lord.eng.br/areadeatucao/cortes-e-furos/>> acesso em jan. 2019

A investigação da concentração de tensões pode ser feita por diferentes métodos, como análise numérica computacional, análise experimental ou pelo cálculo analítico com a teoria da elasticidade ou da plasticidade. Desde meados da década de 1970, a análise numérica computacional tem-se tornado uma ferramenta

fundamental para resolver uma grande variedade de problemas de engenharia cujas soluções analíticas são de difícil aplicação ou até inexistentes.

De acordo com Cheng e Cheng (2005), o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas têm sido as ferramentas mais populares entre os métodos numéricos para resolverem problemas de equações diferenciais parciais. O MEF permite resolver problemas com geometrias irregulares, carregamentos quaisquer, vários tipos de relações constitutivas, com comportamento linear ou não linear, em uma, duas ou três dimensões. Entretanto, para alguns casos, este método não é tão efetivo e demanda alto esforço computacional, sobretudo pela necessidade de refinamento da malha de elementos, enquanto o método dos elementos de contorno (MEC) pode ser efetivo, preciso e eficiente.

Dentre as desvantagens do MEF, destacam-se (Katsikadelis, 2002):

- É preciso discretizar todo o domínio do problema. Consequentemente, gerar e inspecionar a malha de elementos pode ser uma tarefa árdua e trabalhosa, especialmente quando a geometria não é simples. Por exemplo, quando há furos, fendas e cantos, se faz necessário um alto refinamento da malha nessas regiões críticas, de gradientes elevados;
- Para problemas regidos por equações diferenciais de quarta ordem ou superior, como é o caso de equações de placas e cascas, as formulações tornam-se extremamente trabalhosas e até mesmo impraticáveis com o MEF;
- Embora o MEF calcule precisamente a função campo, ele é menos efetivo em determinar suas derivadas, sobretudo porque os campos secundários são calculados derivando-se as funções de forma. A precisão destes resultados cai consideravelmente em áreas com altos gradientes;
- A equação diferencial é aproximada em todo o problema.

Em contrapartida, o MEC possui várias vantagens, como:

- No caso da formulação pura do MEC, é necessário discretizar apenas o contorno do problema, o que torna fácil a modelagem numérica e reduz a dimensão geométrica das incógnitas em uma ordem. Consequentemente, ajustes geométricos se tornam mais fáceis;

- Facilidade na implementação de problemas com domínio infinito;
- O método é efetivo no cálculo das derivadas das incógnitas. O MEC pode lidar facilmente com forças e momentos concentrados, tanto dentro do domínio quanto ao longo do contorno;
- O MEC é adequado para resolver problemas em domínios com peculiaridades geométricas, como trincas e furos;
- Apenas as condições de contorno são aproximadas, pois o uso do teorema de Gauss-Green e da solução fundamental na formulação do método permite cálculos sem aproximações no domínio.

Entretanto, o MEC possui algumas desvantagens perante o MEF:

- A aplicação do MEC requer uma solução fundamental, ou seja, não pode ser utilizado para um problema que não possua uma solução fundamental conhecida ou que não possa ser determinada.
- Embora as matrizes geradas pelo MEC possuem menor tamanho que as geradas pelo MEF, essa vantagem é relativa por serem cheias e não simétricas;
- A implementação normalmente é muito mais difícil comparada a implementação do MEF devido a maior complexidade da formulação matemática.

Dentre os modelos teóricos para estudo das placas submetidas a flexão, dois deles se destacam: a teoria de Kirchhoff, também chamada de teoria clássica, e a teoria de Reissner. A teoria de Kirchhoff se restringe às não deformáveis por cortante com pequenos deslocamentos. Uma das hipóteses desta teoria é que a normal à superfície média indeformada permanece normal após a deformação, ou seja, as deformações por cisalhamento transversal são desprezadas.

A teoria de Reissner considera as deformações por cisalhamento, sendo necessário satisfazer três condições de contorno ao longo do bordo, em vez de duas, requeridas pela teoria clássica. Esta teoria gera resultados mais precisos que a teoria de Kirchhoff, especialmente em pontos próximos ao contorno e ao redor de furos, cujos diâmetros sejam da mesma ordem de grandeza da espessura da placa (Reissner, 1945).

## 1.2 Justificativa

A concentração de tensões e deformações em furos torna estas regiões uma zona crítica em elementos estruturais e a descontinuidade física dificulta a análise dos esforços, já que as soluções analíticas de fácil utilização são escassas.

O conhecimento das concentrações de tensões nos bordos de furos é fundamental para permitir a elaboração de projetos com mais precisão, garantindo a segurança e o bom desempenho do elemento estrutural.

As soluções analíticas conhecidas para o problema de placas perfuradas são escassas e restritas a casos determinados devido à complexidade das expressões, especialmente quando se faz necessário considerar as deformações por cortante. Neste cenário, o MEC pode ser de grande valia, pois é capaz de gerar resultados com boa precisão e com eficiência computacional maior do que outros métodos, como o MEF (Fernandes *et al.* 2009).

Há escassez de trabalhos que avaliem o desempenho do MEC em lidar com concentrações de tensões na análise de placas fletidas.

## 1.3 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo analisar o emprego do método dos elementos de contorno para cálculo da concentração de tensões em placas com furo circular, de material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, submetidas a flexão, considerando a teoria de Reissner. Os resultados obtidos com o MEC serão comparados com resultados analíticos e com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

## Capítulo 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Principais Trabalhos sobre Flexão de Placas com o MEC

A formulação do método de elementos de contorno foi primeiramente aplicada a placas por Jaswon *et al.* (1967), ainda na forma indireta, que desenvolveu a solução diferencial biharmônica em termos de equações integrais e aplicou os resultados a problemas de placas submetidas a flexão. Em seguida, Hansen (1976), Bezine (1978), Stern (1979) e Tottenham (1979) apresentaram formulações do MEC na forma direta para análise de flexão de placas, inclusive perfuradas, e para qualquer condição de contorno.

Weeën (1982) foi pioneiro em aplicar o MEC à teoria de placas de Reissner. Em seu trabalho, é apresentada uma forma de obter as soluções fundamentais para os deslocamentos e forças de superfície, essenciais para aplicação do método. Weeën aplicou o método utilizando elementos isoparamétricos quadráticos apresentando resultados para placas circulares e retangulares. Em seguida, Karam (1986), Karam (1988), Karam (1992), Ribeiro (1992), entre outros, desenvolveram trabalhos com o MEC para flexão de placas pela teoria de Reissner, inclusive para problemas de plasticidade.

### 2.2 Principais Trabalhos sobre Flexão de Placas Perfuradas

Goodier (1936) estudou a influência de furos em placas submetidas à flexão e a distribuição de momentos ao redor dos mesmos baseando-se na teoria de Poisson-Kirchhoff para placas finas, ou seja, desconsiderando as deformações por esforço cortante. Em seu trabalho, são apresentadas as expressões para a deflexão e esforços na placa considerando a existência de furos circular e elíptico.

Chow (1961) apresentou as expressões dos esforços e deslocamentos do problema de placa moderadamente espessa submetida a flexão com um furo elíptico utilizando a teoria de Reissner.

Chen e Archer (1989) investigaram e apresentaram as expressões para tensões próximas a furos circulares em placas espessas submetidas à flexão utilizando uma teoria de placa de décima segunda ordem. Os autores compararam os resultados de sua teoria com os resultados obtidos pela teoria de Reissner e

pelas expressões que Alblas (1957) obteve através do desenvolvimento das equações da teoria da elasticidade tridimensional.

Patel e Sharma (2015) desenvolveram expressões analíticas através da formulação de variáveis complexas de Muskhelishvili e analisaram a resistência a flexão de uma placa com furo quadrado.

Shivakumar e Newman (1992) implementaram o MEF baseado na teoria da elasticidade tridimensional para estudar a concentração de tensões em placas perfuradas submetidas a tensão no plano da placa, flexão e carregamento aplicado na parede do furo. Para as placas fletidas, os autores comparam seus resultados com os gerados pelas teorias de Reissner (1945) e de Neuber (1946).

Louhghalam *et al.* (2011) desenvolveram uma abordagem numérica implementada com o MEF capaz de obter resultados satisfatórios de tensões nos bordos de furos retangulares de uma placa submetida a flexão. Essa abordagem foi bem-sucedida, inclusive para malhas relativamente grosseiras nos bordos dos furos, onde se localizam concentrações de tensões.

Tafreshi e Thorpe (1995) apresentaram um estudo sobre as concentrações de tensões ao redor de um furo oblíquo numa placa submetida a flexão. Os autores utilizaram o MEF e o MEC para obtenção dos resultados e variaram a relação espessura-diâmetro e o ângulo formado pelo eixo do furo e a normal da superfície média. Em alguns casos, o MEC, mesmo com nove vezes menos elementos, obteve precisão superior no cálculo das tensões em relação ao MEF.

Yang *et al.* (2010) utilizaram o MEF para investigar os campos de tensões e deformações numa placa infinita contendo um furo circular submetida a flexão.

Bert (1988) fez uma revisão sobre o fator de concentração de tensões, obtido por vários autores, para placas finas com furo circular sujeitas a diversos campos de tensões. Em 2001, o mesmo autor publicou as expressões obtidas para o mesmo tipo de placa submetida a um campo de momentos generalizado.

Hicks (1963) apresentou o campo de tensões e suas concentrações para diversas combinações de carregamento em placas com várias combinações de furos circulares.

Rubayi (1975) analisou a concentração de tensões em uma placa com formato e furo circular submetida a flexão, de forma experimental, através de método fotoelástico tridimensional.

Dumont (1939) analisou as concentrações de tensões aferindo as deformações e monitorando o carregamento aplicado, gerador de momento fletor, numa placa de alumínio com um furo circular. O experimento gerou resultados com erros insignificantes comparados aos previstos pelas expressões de Goodier (1936) para placas finas.

Ukadgaonker e Rao (2000) desenvolveram uma solução geral, a partir das formulações de Lekhnitskii (1968) e Savin (1961), para placas anisotrópicas perfuradas submetidas a flexão, e apresentaram as expressões dos momentos para furos circulares, elípticos, triangulares, quadrados e retangulares.

Hsieh e Hwu (2002) desenvolveram o formalismo de Stroh-like, que torna possível obter soluções analíticas de problemas de flexão de placas anisotrópicas com furos ou fissuras utilizando diretamente as soluções dos problemas bidimensionais correspondentes. Os autores ainda apresentam exemplos utilizando o citado formalismo e soluções analíticas, provando a sua exatidão, simplicidade e generalidade.

Wang e Hasebe (2000) analisaram a flexão de placas finas com furos e fissuras. Os autores chegaram a expressões finais de momentos e deslocamentos através de uma forma integral da função de Green.

Lee e Conlee (1968) desenvolveram expressões dos momentos e deslocamentos para uma placa infinita com um furo circular submetida a flexão baseadas na teoria tridimensional de placas espessas de Lee e Donnell (1958).

Pilkey e Pilkey (2008) reuniram em sua obra centenas de expressões para determinação de fatores de concentração de tensões para diversos tipos de problemas da engenharia. Sua publicação aborda diversos tipos de elementos como vigas, placas, eixos e cascas submetidos a vários tipos de carregamentos e condições. Sobre o problema de concentração de tensão no bordo de um furo numa placa submetida a flexão, Pilkey e Pilkey (2008) reuniram as expressões dos fatores de concentração de tensões para placa infinita com um ou mais furos circulares, placa com comprimento infinito e largura finita com furo circular, placa infinita com um ou mais furos elípticos e placa infinita com furo circular submetida a torção.

## Capítulo 3 - A TEORIA DE REISSNER PARA FLEXÃO DE PLACAS

### 3.1 Considerações Iniciais

No estudo da Engenharia, placas são elementos estruturais em que uma de suas dimensões é pequena em relação às demais e que está submetida a carregamento ortogonais ao seu plano. A superfície equidistante das superfícies limites é denominada superfície média.

Diversas teorias foram desenvolvidas para descrever o comportamento de placas. A teoria de Kirchhoff (1850), também chamada de teoria clássica por muitos autores, foi desenvolvida para a aplicação restrita a placas finas com pequenas deflexões, desprezando as deformações cisalhantes. Posteriormente, Karman (1910) apresentou uma teoria aplicável a placas finas com grandes deslocamentos. Reissner (1945) desenvolveu uma teoria capaz de considerar as deformações por cortante e é aplicável a problemas de placas finas e moderadamente espessas, sendo de grande utilidade para a engenharia.

Embora a teoria clássica seja capaz de produzir resultados com precisão satisfatória para placas finas, esta precisão decai à medida que se aumenta a espessura da placa. Análises exatas da placa pela teoria da elasticidade tridimensional revelam que este erro é da ordem da espessura da placa ao quadrado. Experimentos mostraram que a teoria clássica de Kirchhoff subestima as deflexões e superestima as frequências naturais e cargas críticas de flambagem para placas de espessura moderada. Estas discrepâncias são causadas pela desconsideração das deformações cisalhantes (Szilard, 2004).

### 3.2 Formulação

A teoria de flexão de placas de Reissner é uma teoria mais refinada que a teoria clássica. A teoria clássica ignora as deformações cisalhantes e produz resultados insatisfatórios nos bordos, cantos da placa e próximos a furos com diâmetro da ordem de grandeza da espessura, além de não ser aplicável para problemas de placas espessas. Na teoria de Reissner, a deformação cisalhante é considerada e os efeitos da espessura não são desprezados. Esta teoria baseia-se na teoria da elasticidade e no princípio de Hellinger-Reissner, donde se obtém um

problema de integração de sexta ordem que satisfaz três condições de contorno para cada bordo. As principais hipóteses de Reissner são:

- A superfície média é indeformável;
- Os deslocamentos são pequenos;
- A placa é constituída de material elástico linear.

Considerando uma placa com espessura uniforme  $h$ , com coordenadas  $x_\alpha$  na superfície média e  $x_3$  transversal à mesma, as condições de contorno nas faces da placa são (Weeën, 1982):

$$\sigma_{\alpha 3} = 0 \quad \sigma_{33} = \pm \frac{q}{2} \quad \text{para} \quad x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

As tensões ao longo da espessura variam conforme as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3 \\ \sigma_{\alpha 3} &= \frac{3Q_\alpha}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \\ \sigma_{33} &= \frac{qx_3}{2h} \left[ 3 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $M_{\alpha\beta}$  são os momentos resultantes,  $Q_\alpha$  os cortantes resultantes. As tensões normais  $\sigma_{33}$ , transversais ao plano da placa, podem ser consideradas desprezíveis em relação às demais. Os índices  $\alpha$  e  $\beta$  variam de 1 a 2.

Como apresentado por Weeën (1982), baseado em Reissner (1945), é possível chegar nas seguintes equações de equilíbrio através da análise do equilíbrio de um elemento da placa:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo  $M_{\alpha\beta}$  os momentos resultantes,  $Q_\alpha$  os cortantes resultantes e  $q$  a carga transversal distribuída.

A Figura 3.1 apresenta um elemento de placa com as resultantes de tensões na superfície média e sua convenção de sinais positivos.

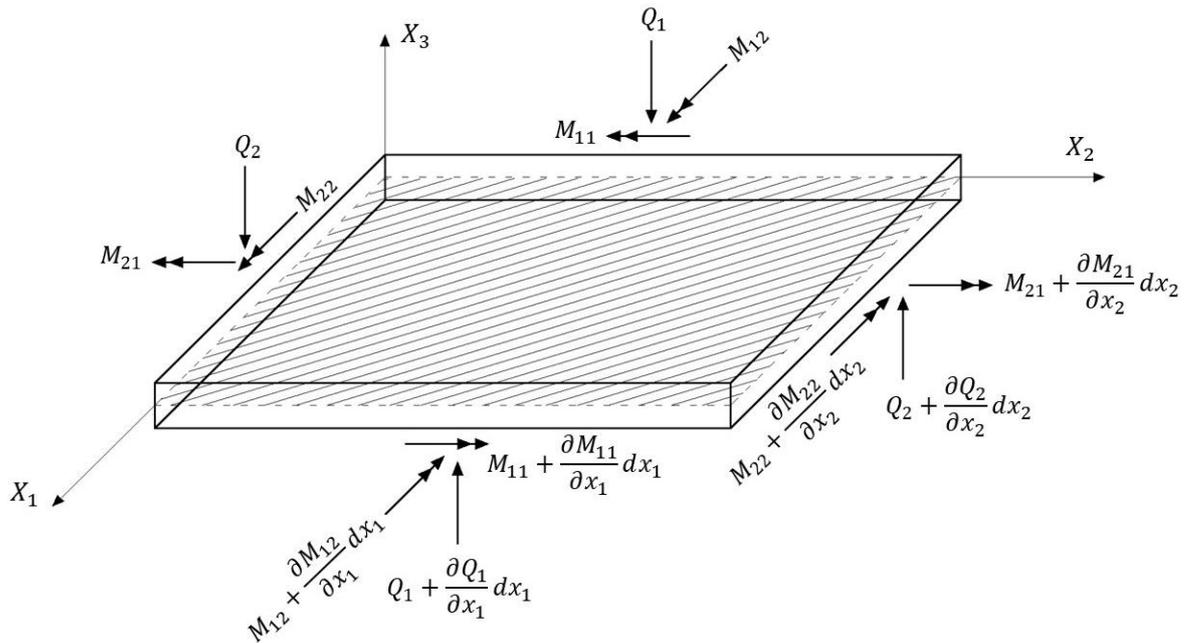


Figura 3.1 – Resultante das tensões na placa e convenção de sinais.

As tensões resultantes por unidade de comprimento na superfície média são obtidas integrando as componentes de tensão  $\sigma_{\alpha\beta}$  ao longo da espessura:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (3.4)$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3$$

Através de ponderações dos deslocamentos  $v_{\alpha}$  e  $v_3$ , onde  $v_{\alpha}$  é a rotação da normal à superfície média na direção  $\alpha$  e  $v_3$  é o deslocamento transversal num ponto na superfície média da placa, é possível chegar às seguintes expressões para os deslocamentos generalizados:

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_\alpha x_3 dx_3 \quad (3.5)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_3 \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3$$

Karam (1986) ainda apresenta as deformações específicas generalizadas em função dos deslocamentos generalizados, considerando regime elástico linear:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \quad (3.6)$$

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha}$$

onde  $\chi_{\alpha\beta}$  são as deformações específicas de flexão e  $\psi_\alpha$  as de cisalhamento.

Weeën (1982) apresenta as expressões dos esforços generalizados, que podem ser obtidos pelo teorema de Castigliano:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.7)$$

$$Q_\alpha = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (\phi_\alpha + w_{,\alpha})$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \text{rigidez à flexão da placa}$$

$\nu$  = coeficiente de Poisson

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h} = \text{constante característica das equações de Reissner}$$

$\delta_{\alpha\beta}$  = delta de Kronecker

As equações (3.7), se inseridas nas equações de equilíbrio dadas em (3.3), geram um sistema com oito equações, satisfazendo a três condições de contorno por bordo. Com manipulações matemáticas convenientes, é possível condensar estas equações num sistema com três equações diferenciais parciais (Karam, 1986):

$$Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{,\alpha} = -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\nabla^2 w) \quad (3.8)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q = q$$

### 3.3 Condições de Contorno

Para aplicação prática, é necessário prescrever o deslocamento  $\bar{u}_k$  ou a força de superfície  $\bar{p}_k$  em cada uma das três direções generalizadas ao longo dos bordos, satisfazendo, portanto, três condições de contorno. Desta forma, na parte do contorno onde os deslocamentos são prescritos, chamada de  $\Gamma_u$ , os deslocamentos são:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= \bar{\phi}_\alpha \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde a barra sobre as variáveis representa que a variável é prescrita.

De forma análoga, na parte do contorno onde as forças de superfícies são prescritas, chamada de  $\Gamma_p$ , as forças de superfícies são:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

O contorno total  $\Gamma$  é definido por:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p \quad (3.11)$$

e as forças se superfície são expressas por:

$$\begin{aligned}p_{\alpha} &= M_{\alpha\beta}n_{\beta} \\p_3 &= Q_{\beta}n_{\beta} \\ \bar{p}_{\alpha} &= \bar{M}_{\alpha\beta}n_{\beta} \\ \bar{p}_3 &= \bar{Q}_{\beta}n_{\beta}\end{aligned}\tag{3.12}$$

## Capítulo 4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À TEORIA DE REISSNER

### 4.1 Considerações Iniciais

O método dos elementos de contorno foi desenvolvido como um método numérico com o intuito de solucionar equações integrais. A principal característica do método é que as equações diferenciais que governam o problema são transformadas em equações integrais definidas no contorno do problema e, depois, escritas em forma discretizada, introduzindo-se um número finito de elementos localizados apenas no contorno. Consequentemente, as aproximações feitas no cálculo são restritas ao contorno, enquanto as equações são satisfeitas em todo o domínio. Portanto, não é necessária discretização do domínio, reduzindo a quantidade de incógnitas e, consequentemente, o esforço computacional (Szilard, 2004).

Uma das principais vantagens do MEC é a redução na ordem do sistema de equações que governam o problema, causada principalmente pela redução de uma dimensão do problema. No caso das placas, o contorno será referente à superfície média e os elementos serão bidimensionais. Além disso, o MEC requer menos dados de entrada que métodos tradicionais como o MEF e o método das diferenças finitas (Paiva, 2018).

### 4.2 Equação Integral Básica

Conforme apresentada por Weeën (1982) e Karam (1986), a equação integral do problema de placas de Reissner pode ser obtida através do teorema de Betti e por Resíduos Ponderados. A dedução da equação pelo teorema de Betti é apresentada a seguir. Os índices latinos variam de 1 a 3 e os romanos variam de 1 a 2. A partir deste capítulo  $\phi_\alpha$  e  $w$  serão chamados respectivamente por  $u_\alpha$  e  $u_3$ , ou genericamente por  $u_k$ .

### 4.2.1 Considerações Preliminares

Seja uma placa definida por um domínio  $\Omega$  representado pela sua superfície média e um contorno  $\Gamma$ , representado pela linha que a circunda, em estado de equilíbrio, sujeita a um carregamento transversal  $q$  atuando em  $\Omega$  e possuindo uma espessura constante  $h$ .

Sejam as condições de contorno para as três direções generalizadas da placa:

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_k & \text{em } \Gamma_u \\ p_k &= \bar{p}_k & \text{em } \Gamma_p \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$$

Seja ainda um domínio  $\Omega^*$  com um contorno  $\Gamma^*$ , também em equilíbrio, e contendo a referida placa

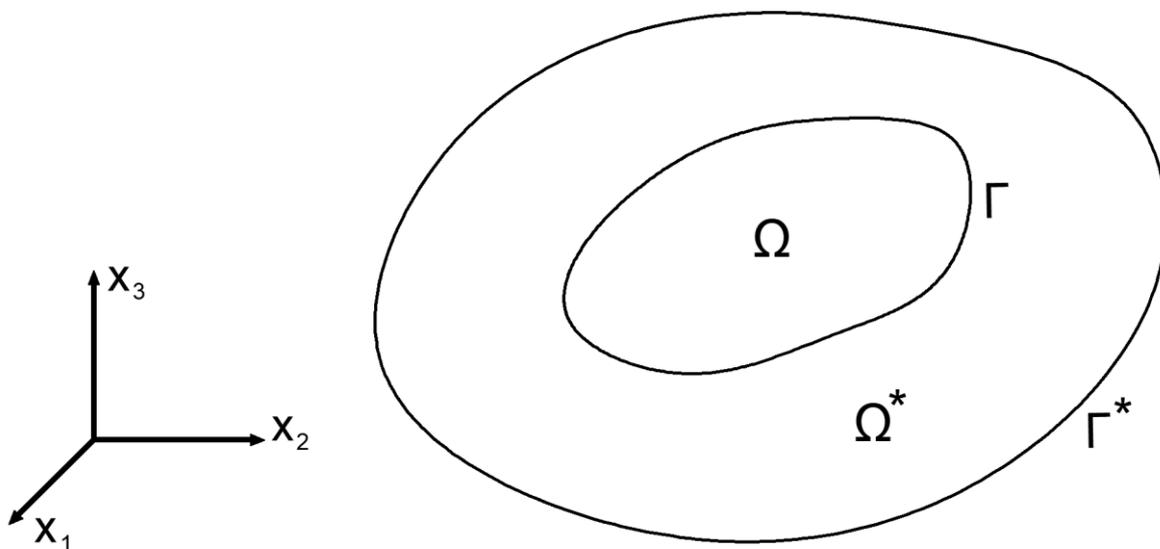


Figura 4.1 – Placa  $\Omega + \Gamma$  contida na região  $\Omega^* + \Gamma^*$

Considerando as equações dadas no capítulo anterior, tem-se:

- i) Para a região  $(\Omega + \Gamma)$ :  
 Deslocamentos:  $u_k$   
 Forças de superfície:  $p_k$   
 Sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= M_{\alpha\beta} n_\beta \\ p_3 &= Q_\alpha n_\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

Deformações específicas:

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} &= u_{\alpha,\beta} \\ \psi_\alpha &= u_\alpha + u_{3,\alpha} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esforços:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha &= D \frac{(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha + u_{3,\alpha}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha &= 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ii) Para a região  $(\Omega^* + \Gamma^*)$ :

Deslocamentos:  $u_k^*$

Forças de superfície:  $p_k^*$

Sendo:

$$\begin{aligned} p_\alpha^* &= M_{\alpha\beta}^* n_\beta \\ p_3^* &= Q_\alpha^* n_\alpha \end{aligned} \quad (4.6)$$

Deformações específicas:

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta}^* &= u_{\alpha,\beta}^* \\ \psi_\alpha^* &= u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

Esforços:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^* &= D \frac{(1-\nu)}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right) \\ Q_\alpha^* &= D \frac{(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_{\alpha}^* + F_{\alpha}^* = 0 \quad (4.9)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

onde  $F_k^*$  são componentes das forças de domínio definidas a fim de se obter a solução fundamental. Estas se distribuem ao longo da espessura como mostrado abaixo:

$$f_{\alpha}^* = \frac{12x_3}{h^3} F_{\alpha}^* \quad (4.10)$$

$$f_3^* = \frac{3F_3^*}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

#### 4.2.2 Dedução da Equação Integral Básica Através do Segundo Teorema de Betti

A primeira das expressões (4.4) pode ser escrita na forma:

$$M_{\alpha\beta} = \widehat{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q\delta_{\alpha\beta} \quad (4.11)$$

Sejam:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\theta} X_{\gamma\theta} \\ M_{\alpha\beta}^* &= C_{\alpha\beta\gamma\theta} X_{\gamma\theta}^* \\ Q_{\beta} &= C_{3\beta\gamma\theta} \psi_{\theta} \\ Q_{\beta}^* &= C_{3\beta 3\theta} \psi_{\theta}^* \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde:

$C_{i\beta j\theta}$  são as componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas (para o caso isotrópico).

Considerando as equações (4.12), pode-se escrever:

$$\widehat{M}_{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta}X_{\gamma\theta}X_{\alpha\beta}^* + C_{3\beta3\theta}\psi_{\theta}\psi_{\beta}^* \quad (4.13)$$

Reagrupando o segundo membro e considerando que:

$$C_{i\beta j\theta} = C_{j\theta i\beta} \quad (4.14)$$

fica:

$$\widehat{M}_{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = X_{\gamma\theta}(C_{\gamma\theta\alpha\beta}X_{\alpha\beta}^*) + \psi_{\theta}(C_{3\theta3\beta}\psi_{\beta}^*) \quad (4.15)$$

Ou ainda, considerando (4.11)(4.11) e (4.12):

$$\left( M_{\alpha\beta} - \frac{\nu q \delta_{\alpha\beta}}{(1-\nu)\lambda^2} \right) X_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta}\psi_{\beta}^* = X_{\gamma\theta}M_{\gamma\theta}^* + \psi_{\theta}Q_{\theta}^* \quad (4.16)$$

Assim, pode-se escrever a seguinte equação integral, envolvendo integrais de domínio:

$$\int_{\Omega} (M_{\alpha\beta}^* X_{\alpha\beta} + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}) d\Omega = \int_{\Omega} (M_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \psi_{\alpha}^*) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q \delta_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^* d\Omega \quad (4.17)$$

Substituindo as equações (4.3) e (4.7) em (4.17) e integrando por partes (usando a divergência) em ambos os lados, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha} n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} n_{\alpha} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} u_{\alpha}^* n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

Considerando as expressões (4.2) e (4.6), e ainda, as equações de equilíbrio (4.5) e (4.9), a expressão anterior fica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Cancelando os termos iguais e escrevendo de forma genérica para as três direções, tem-se a expressão a seguir, correspondente ao Segundo Teorema de Betti:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Omega} q \left( u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right) d\Omega \tag{4.20}$$

As forças de domínio  $F_j^*$  são forças generalizadas concentradas unitárias aplicadas em cada uma das três direções generalizadas de um ponto pertencente à região  $\Omega^*$ , o qual será chamado de ponto carga ou fonte e representado por  $\xi$ .

Essas forças podem ser representadas por:

$$F_j^* = \delta(x - \xi) p_j \tag{4.21}$$

onde:

$$P_j = 1 \tag{4.22}$$

sendo:

$\delta(x - \xi)$  = função generalizada delta de Dirac com singularidade em  $\xi$ .

A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(x - \xi) d\Omega(x) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \tag{4.23}$$

Considerando (4.21) e (4.23), a primeira integral de (4.20) fica como mostrado a seguir, sendo agora  $\xi$  pertencente à região  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = u_j(\xi) p_j \quad (4.24)$$

E, considerando (4.22):

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi) \quad (4.25)$$

Considerando agora cada carga concentrada generalizada unitária atuando independentemente, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x) P_i \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x) P_i \end{aligned} \quad (4.26)$$

sendo:

$\xi$ : ponto fonte, isto é, ponto onde são aplicadas as cargas concentradas generalizadas unitárias.

$x$ : ponto campo, isto é, ponto onde são observados os efeitos das cargas unitárias aplicadas.

$u_{ij}^*(\xi, x)$ : deslocamento generalizado na direção  $j$  do ponto  $x$ , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ .

$p_{ij}^*(\xi, x)$ : força de superfície generalizada na direção  $j$  do ponto  $x$ , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção  $i$  do ponto  $\xi$ .

Pode-se então escrever três equações da forma seguinte, sendo válidas para um ponto  $\xi$  qual quer situado no interior da região  $\Omega$ , onde as cargas unitárias são consideradas atuando em cada uma das três direções generalizadas:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] d\Gamma(x) \\ &+ \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Transformando a integral de domínio relacionada à carga transversal para uma integral no contorno, utilizando o teorema da divergência, e admitindo a carga constante, obtém-se:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)]d\Gamma(x) + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x)d\Gamma(x) \quad (4.28)$$

onde os termos com asterisco referem-se à solução fundamental de Kelvin.

### 4.3 Solução Fundamental

Para aplicar o MEC à teoria de Reissner para flexão de placas, se faz necessário determinar a solução fundamental do problema, cujos tensores aparecem nas equações integrais (4.27) e (4.28). A solução fundamental é uma solução particular do problema, que satisfaz as condições de equilíbrio quando se considera que as forças de domínio são forças concentradas generalizadas unitárias aplicadas no ponto fonte.

As seguintes expressões para a solução fundamental  $u_{ij}^*$  podem ser encontradas em Weeën (1982) e obtidas pelo método de Hörmander:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B - (1-\nu)(2\ln z - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \}$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1)rr_{,\alpha} \quad (4.29)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(\ln z - 1) - 8\ln z]$$

sendo:

$$r = \sqrt{r_{\alpha}r_{\alpha}} = \text{distância entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (4.30)$$

$$r_\alpha = x_\alpha(x) - x_\alpha(\xi) \quad (4.31)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)} \quad (4.32)$$

$$z = \lambda r \quad (4.33)$$

$$A(z) = K_0(z) + 2z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}] \quad (4.34)$$

$$B(z) = K_0(z) + z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}]$$

onde  $K_0(z)$  e  $K_1(z)$  são funções de Bessel modificadas de segunda espécie de ordem 0 e 1 respectivamente, cuja determinação pode ser feita pelas expansões polinomiais apresentadas em Abramowitz e Stegun (1965).

#### 4.4 Forças de Superfície Generalizadas

As forças de superfícies referentes à solução fundamental, presentes nas equações (4.27), são dados por:

$$p_{\gamma\alpha}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(r_{,n}\delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha}n_\gamma) + (4A + 1 + \nu)r_{,\gamma}n_\alpha - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\gamma}r_{,n}]$$

$$p_{\gamma 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} (Bn_\gamma - Ar_{,\gamma}r_{,n}) \quad (4.35)$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[ \left( 2\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln z - 1 \right) n_\alpha + 2r_{,\alpha}r_{,n} \right]$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n}$$

onde:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha}n_\alpha \quad (4.36)$$

#### 4.5 Equação Integral para um Ponto no Contorno

Para solucionar o problema no contorno, será necessário escrever a equação integral (4.27) para um ponto  $\xi$  do contorno. Para isto, será inserido um arco de circunferência no contorno, cujo centro será o ponto  $\xi$ , de raio  $\varepsilon$ , conforme Figura 4.2.

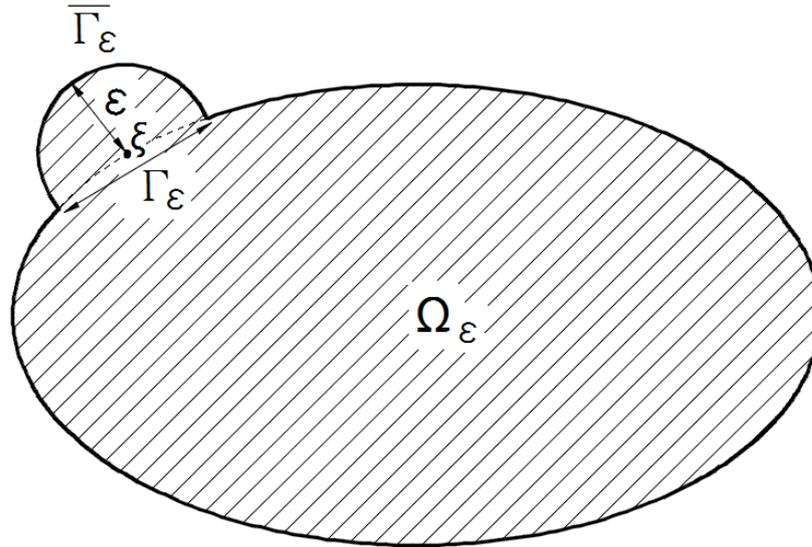


Figura 4.2- Ponto  $\xi$  no contorno de uma placa.

Desta forma, a equação integral (4.27) fica:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \\
 & + \int_{\Omega_\varepsilon} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Analisando o limite de cada termo da equação (4.37) para  $\varepsilon$  tendendo a zero, considerando as singularidades presentes nas expressões dos deslocamentos e forças de superfície generalizadas, é possível chegar na equação seguinte, escrita para um ponto  $\xi$  qualquer (Karam, 1986):

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(\xi) u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \\
 & + \int_{\Omega} \left[ u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] q(x) d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Têm-se os seguintes valores para os componentes da matriz **C**:

$$C_{ij} = \delta_{ij} \text{ quando } \xi \text{ é ponto interno}$$

$$C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \text{ quando } \xi \text{ é ponto de contorno suave}$$

A integral de domínio em (4.38) pode ser transformada em integral de contorno como no item 4.2, obtendo-se:

$$\begin{aligned} C_{ij}u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)]d\Gamma(x) \\ & + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.39)$$

#### 4.6 Deslocamentos nos Pontos Internos

Os deslocamentos nos pontos internos podem ser obtidos a partir da equação (4.28), ou seja:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x) - p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)]d\Gamma(x) \\ & + q \int_{\Gamma} \left[ v_{i,\beta}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\beta}^*(\xi, x) \right] n_{\beta}(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.40)$$

#### 4.7 Esforços nos Pontos Internos

Os esforços nos pontos internos podem ser determinados substituindo a expressão (4.40) e suas derivadas nas equações dadas em (3.7). É possível chegar na seguinte expressão para os momentos fletores:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} = & \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x)p_k(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x)u_k(x)d\Gamma(x) \\ & + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x)d\Gamma(x) + \frac{\nu q}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.41)$$

cujos termos relacionados à solução fundamental são:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = -\frac{1}{4\pi r} [(4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta}r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta}r_{,\beta}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\gamma}r_{,\beta}r_{,n} + (4A + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}] \quad (4.42)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1 - \nu)}{8\pi} \left[ \left( 2 \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \ln z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha}r_{,\beta} \right] \quad (4.43)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1 - \nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(r_{,\beta}n_{\alpha} + r_{,\alpha}n_{\beta}) - 2(4A + zK_1)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,n} + 2A\delta_{\alpha\beta}r_{,n}] \quad (4.44)$$

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \{ (4 \ln z - 3) [(1 - \nu)(r_{,\beta}n_{\alpha} + r_{,\alpha}n_{\beta}) + (1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,n}] + 4[(1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}]r_{,n} \} - \frac{\nu}{(1 - \nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (4.45)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1 - \nu)}{4\pi r^2} \{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\alpha}n_{\beta} + \delta_{\gamma\beta}n_{\alpha}) + (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta}n_{\gamma} - (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) \cdot [(n_{\alpha}r_{,\beta} + n_{\beta}r_{,\alpha})r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha}r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha})r_{,n}] - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}r_{,n} + n_{\gamma}r_{,\alpha}r_{,\beta}) + 4(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,n} \} \quad (4.46)$$

e pode-se chegar à seguinte expressão para os esforços cortantes:

$$Q_{\beta} = \int_{\Gamma} u_{3\beta k}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{3\beta k}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (4.47)$$

cujos termos relacionados à solução fundamental são:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\alpha\beta} - Ar_{,\gamma}r_{,\beta}] \quad (4.48)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{\beta} \quad (4.49)$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{-D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta}r_{,n} + r_{,\gamma}n_{\beta}) + 2An_{\gamma}r_{,\beta} - 2(4A + zK_1)r_{,\gamma}r_{,\beta}r_{,n}] \quad (4.50)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2B + 1)n_{\beta} - (z^2A + 2)r_{,\beta}r_{,n}] \quad (4.51)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2 \ln z - 1)n_{\beta} + 2r_{,\beta}r_{,n}] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (4.52)$$

#### 4.8 Esforços no Contorno

Para a obtenção dos esforços num ponto do contorno, as expressões (4.53) e (4.54) podem ser obtidas da relação entre forças de superfície e esforços solicitantes:

$$\bar{p}_{\alpha} = \bar{M}_{\alpha\beta} \cdot \bar{n}_{\beta} \quad (4.53)$$

$$\bar{p}_3 = \bar{Q}_{\beta} \cdot \bar{n}_{\beta} \quad (4.54)$$

onde  $\bar{p}_{\alpha}$  são as forças de superfície,  $\bar{M}_{\alpha\beta}$  os momentos e  $\bar{n}_{\beta}$  os cossenos diretores da normal ao contorno, referentes ao sistema local de coordenadas  $\bar{x}_1\bar{x}_2$  como ilustrado na Figura 4.3:

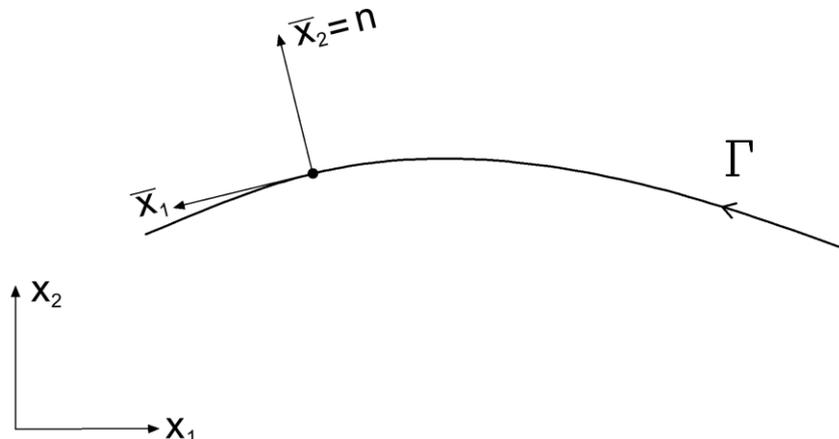


Figura 4.3 – Sistema de coordenada local no contorno  $\Gamma$ .

Conforme a Figura 4.3, os cossenos diretores da normal ao contorno em um ponto determinado são:

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \bar{n}_2 &= \cos 0 = 1\end{aligned}\tag{4.55}$$

Logo, substituindo os valores de  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$  em (4.53), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{M}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{Q}_2 &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{4.56}$$

Portanto, uma vez conhecidas as forças de superfície, sejam prescritas ou calculadas da resolução das equações integrais de contorno, é possível determinar duas componentes de momento e uma de esforço cortante. Para determinação da terceira componente de momento, conforme deduzido em (Ribeiro, 1992), é possível utilizar um esquema de diferenças finitas a partir da relação momento-curvatura. Com o emprego de elemento quadrático, obtêm-se as expressões do momento em cada nó  $k_i$  em função dos valores de deslocamentos nodais do elemento:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{11}^{e,k_1} &= D \cdot (1 - \nu^2) \left[ \frac{1}{l_j} (-3\bar{U}_1^{k_1} + 4\bar{U}_1^{k_2} - \bar{U}_1^{k_3}) \right] + \nu \cdot \bar{M}_{22}^{k_1} + \frac{\nu}{\lambda^2} q \\ \bar{M}_{11}^{e,k_2} &= D \cdot (1 - \nu^2) \left[ \frac{1}{l_j} (\bar{U}_1^{k_3} - \bar{U}_1^{k_1}) \right] + \nu \cdot \bar{M}_{22}^{k_2} + \frac{\nu}{\lambda^2} q \\ \bar{M}_{11}^{e,k_3} &= D \cdot (1 - \nu^2) \left[ \frac{1}{l_j} (3\bar{U}_1^{k_3} - 4\bar{U}_1^{k_2} + \bar{U}_1^{k_1}) \right] + \nu \cdot \bar{M}_{22}^{k_3} + \frac{\nu}{\lambda^2} q\end{aligned}\tag{4.57}$$

onde  $\bar{U}_1^{k_i}$  é o deslocamento nodal na direção 1 no nó  $k_i$ .

#### 4.9 Regiões Infinitas

É possível aplicar a presente formulação para o caso de placas infinitas. Para isso, como mostrado por Karam (1986), pode-se considerar um contorno infinitamente distante do ponto  $\xi$  e analisar o efeito que esta consideração tem nas equações integrais.

Seja uma placa com uma ou mais cavidades de contorno  $\Gamma$ . Imagina-se um contorno circular  $\Gamma_\rho$  infinitamente distante de seu centro,  $\xi$ , pertencente à cavidade, e cujo raio é  $\rho$  (Figura 4.4).

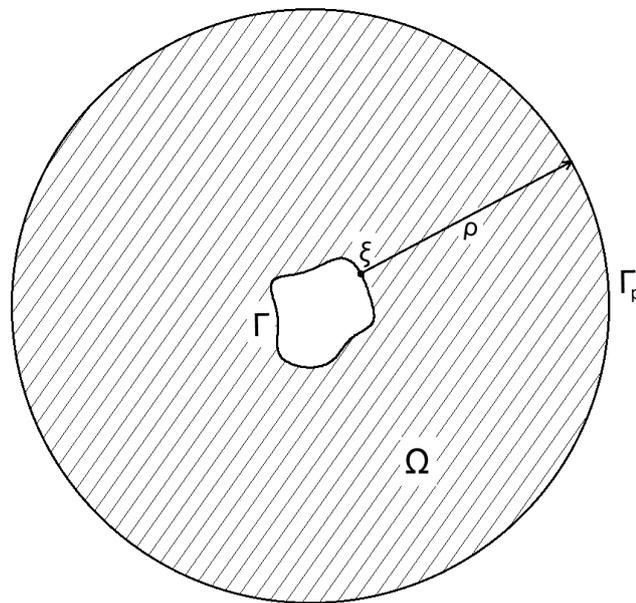


Figura 4.4 - Região infinita com uma cavidade.

Neste caso, pode-se escrever a equação (4.39) para a região  $\Omega$  de contorno  $\Gamma + \Gamma_\rho$ , onde  $\xi$  é um ponto de  $\Gamma$  e, considerando  $q$  nula, tem-se:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Se a condição de regularidade for atendida, ou seja, o limite das integrais em  $\Gamma_\rho$  for igual a zero, restarão na equação (4.58) apenas as integrais definidas em  $\Gamma$ :

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \quad (4.59)$$

É possível encontrar em Karam (1986) a demonstração do atendimento da condição de regularidade desta equação. A autora analisou o comportamento dos termos relacionados à solução fundamental presentes nas integrais em  $\Gamma_{\rho}$ , bem como o comportamento de  $u_j(x)$  e  $p_j(x)$  no infinito.

Deve-se garantir que a normal aos elementos aponte para fora de  $\Omega$ , ou seja, para o interior do furo e o sentido de integração será horário (Figura 4.5):

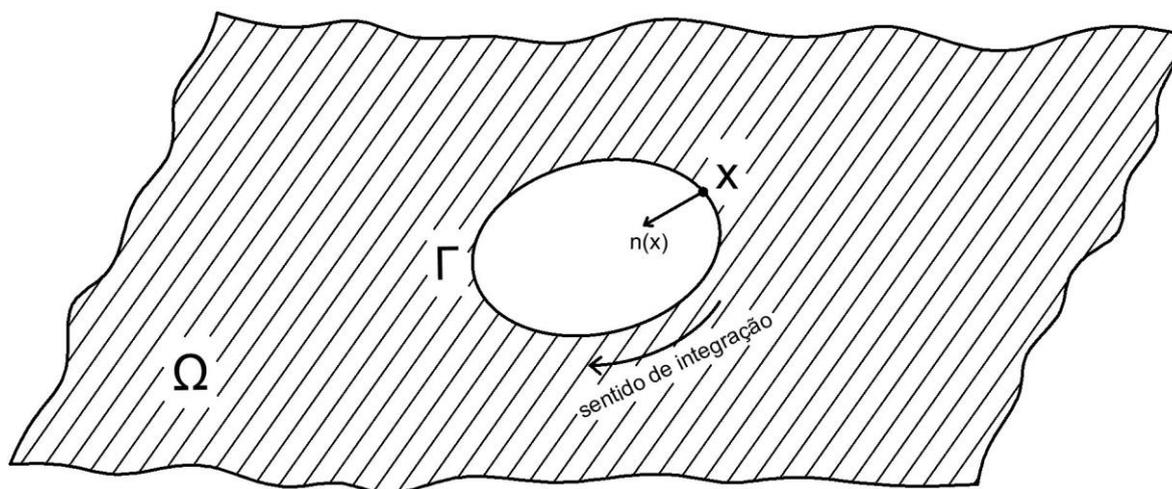


Figura 4.5 – Sentido da normal ao contorno e da integração para o caso de placa infinita.

## Capítulo 5 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 Considerações Iniciais

Para resolver o problema de placas por meio das equações integrais com o MEC, são consideradas funções aproximadas para as variáveis do problema e as equações integrais são transformadas em equações algébricas.

Para a implementação numérica, é necessário dividir o contorno em elementos, cada um destes consistindo em uma parte  $\Gamma_j$  do contorno e contendo certa quantidade de nós, o que depende das funções interpoladoras empregadas. Para o caso de presença de furo na placa, o contorno do furo também deve ser discretizado no sentido inverso ao sentido empregado no contorno da placa, para que a normal ao elemento aponte para fora do domínio  $\Omega$ .

Admitem-se funções interpoladoras que aproximaram os valores nodais previamente definidos ao longo do contorno da placa. As funções interpoladoras são utilizadas tanto para aproximar a geometria quanto os valores das incógnitas, e podem ser constantes, lineares, quadráticas ou ainda de ordens superiores. A fim de simplificar a implementação, muitas vezes utiliza-se a mesma função para aproximar incógnitas e geometria, sendo, neste caso, os elementos chamados de isoparamétricos.

As expressões seguintes mostram como os deslocamentos e forças de superfície de um elemento  $j$  são determinados em função dos valores nodais:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(j)} &= \mathbf{N}\mathbf{U}^{(n)} \\ \mathbf{P}^{(j)} &= \mathbf{N}\mathbf{P}^{(n)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Usualmente, as funções de interpolação são dadas em função de uma coordenada intrínseca adimensional  $\eta$ . Para realizar a conversão das coordenadas, utiliza-se o Jacobiano  $\mathbf{J}$  da transformação. Tem-se a relação:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (5.2)$$

onde:

$$|J| = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (5.3)$$

## 5.2 Cálculo do Problema no Contorno

Admitindo-se as condições de contorno descritas em (3.9) e (3.10), a equação (4.39) pode ser escrita de forma discretizada, em forma matricial, para um ponto nodal  $\xi_i$ :

$$C_i \mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^e \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{P}^n - \sum_{j=1}^e \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{U}^n + \sum_{j=1}^e \left( q \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma \right) \quad (5.4)$$

onde:

$C_i$  = matriz cujos elementos  $C_{ij}$  aparecem na equação (4.39);

$\mathbf{U}_i$  = vetor deslocamento do ponto fonte;

$e$  = número de elementos de contorno;

$\mathbf{N}$  = matriz que contém as funções de interpolação;

$\mathbf{U}_i^*$  e  $\mathbf{P}_i^*$  = matrizes que contém as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente;

$\mathbf{U}^n$  e  $\mathbf{P}^n$  = vetores que contém as componentes dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, referentes aos pontos nodais do elemento considerado;

$\mathbf{S}_i^*$  = vetor cujas componentes são dadas pela seguinte expressão (Karam, 1986):

$$S_k^* = \left( v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha} \right) n_\alpha \quad (5.5)$$

Em alguns pontos do domínio das integrais da equação (5.4), o ponto fonte e o ponto campo podem coincidir-se ou serem muito próximos, ou seja, a distância  $r$  entre os mesmos podem se equivaler a zero ou tender a zero, o que resulta em integrais singulares ou quase singulares. Foram usadas transformações de

coordenadas conforme apresentadas por Telles (1987) e presentes no Apêndice A deste trabalho para calcular as integrais nestes pontos.

Chamando:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (5.6)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma \quad (5.8)$$

e aplicando-se a equação (5.4) a todos os pontos nodais do contorno, gera-se um sistema linear de equações com dimensão igual a três vezes o número de nós:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{B} \quad (5.9)$$

Uma parte dos vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$  é preenchida por valores prescritos e a outra parte é incógnita.

Reorganizando o sistema de equações, de modo que as incógnitas formem um único vetor  $\mathbf{X}$  e os valores prescritos multiplicados pelos respectivos coeficientes da matriz  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{G}$  junto com a parcela da matriz  $\mathbf{B}$  formem um único vetor  $\mathbf{F}$ , é possível obter o seguinte sistema linear de equações, onde  $\mathbf{A}$  é a matriz cheia e não simétrica que multiplica as incógnitas:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (5.10)$$

O sistema linear (5.10) é resolvido e, com isso, todos os valores de deslocamentos e forças de superfícies nos nós passam a ser conhecidos nas três direções generalizadas.

Assim, torna-se possível obter também qualquer valor de deslocamento, momento e esforço cortante em qualquer ponto do domínio, a partir dos valores determinados no contorno, utilizando-se as equações (4.41) e (4.47) também discretizadas.

## Capítulo 6 - CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS FLETIDAS

A presença de ranhuras, furos, chavetas e outras descontinuidades geométricas geram alterações na distribuição de tensões num corpo, onde se observam elevados picos de tensão. Estas regiões com tensões concentradas são analisadas e estudadas através de fatores de concentração de tensões.

Goodier (1936) e Reissner (1945), entre outros autores, determinaram o fator de concentração de tensões para alguns casos de placas fletidas perfuradas. Sabe-se que este fator  $K$  depende da relação entre o diâmetro do furo  $d$  e a espessura da placa  $h$ , de forma inversamente proporcional, ou seja, a concentração de tensões aumenta à medida que se aumenta  $h$  ou se diminui  $d$ . As expressões determinadas pelos autores citados já foram comparadas com resultados experimentais de Goodier e Lee (1941) e Dumont (1939), convergindo para valores próximos de  $K$ .

O fator de concentração de tensão  $K$  pode ser definido como a razão entre a tensão máxima da região perturbada e uma outra tensão usada como tensão de referência:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (6.1)$$

No estudo das placas, é comum mensurar a concentração de tensões também em termos de momentos fletores:

$$k = \frac{M_{max}}{M_{nom}} \quad (6.2)$$

onde  $\sigma_{max}$  e  $M_{max}$  representam a tensão máxima e momento fletor máximo, respectivamente, na região em questão, e a tensão nominal  $\sigma_{nom}$  e o momento fletor nominal  $M_{nom}$  é a tensão e momento utilizados como referência, e normalmente são as tensões ou esforços que atuariam no mesmo ponto no caso de não haver a descontinuidade geométrica.

No caso da teoria de Reissner (1945),  $K$  e  $k$  se equivalem, pois as tensões normais ao longo da espessura da placa são diretamente obtidas em função do esforço fletor conforme a equação (3.2). Entretanto, em outras teorias de flexão de placas, os fatores  $K$  e  $k$  diferem entre si como é o caso da flexão de placas pela teoria tridimensional da elasticidade.

A Figura 6.1 mostra o ponto de ocorrência da maior tensão em uma placa submetida a flexão, que será um valor de  $\sigma_{11}$ , sendo o módulo do momento  $M_1$  maior ou igual ao módulo de  $M_2$ .

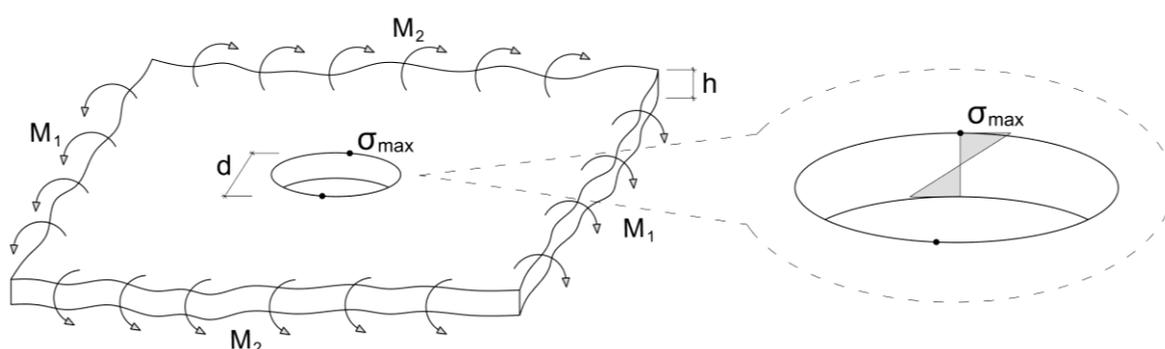


Figura 6.1 – Tensão máxima em uma placa fletida.

A tensão de referência para os casos de flexão de placas é a tensão normal esperada na superfície para a mesma placa sem o furo submetida a um momento  $M_1$  em apenas uma direção e, pela teoria de Reissner, é dada pela equação:

$$\sigma = \frac{6M_1}{h^2} \quad (6.3)$$

É possível fletir uma placa de diversas formas variando a intensidade e o sentido dos momentos aplicados nos bordos. Para o estudo da flexão de placas, três casos são de particular interesse: flexão simples com  $M_1=M$ ,  $M_2=0$  ou na forma normalizada  $M_1=1$  e  $M_2=0$ ; flexão cilíndrica com  $M_1=M$ ,  $M_2=\nu M$ , ou  $M_1=1$ ,  $M_2=\nu$ ; e torção com  $M_1=M$ ,  $M_2=-M$ , ou  $M_1=1$ ,  $M_2=-1$ . Os momentos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M$  são uniformemente distribuídos e com unidade de medida de momento por unidade de comprimento.

O caso de flexão cilíndrica anula a ocorrência da curvatura anticlástica causada pelo efeito do coeficiente de Poisson.

No início da aplicação dos momentos no caso de flexão simples, esta condição de momentos realmente ocorre no domínio da placa. Entretanto, à medida que as deformações aumentam, a curvatura anticlástica concentra-se apenas na região dos bordos e a região central mantém-se razoavelmente plana desde que a placa seja grande o suficiente para não haver influência dos bordos, conforme estudado em Conway e Nickola (1965). Logo, segundo Pilkey e Pilkey (2008), é razoável assumir que a condição de momento cilíndrico ocorre na região de um furo no interior da placa e que esta condição é mais apropriada, em geral, para utilização como critério de projeto do que o caso de flexão simples.

Para flexão isotrópica, onde  $M_1 = M_2$ ,  $K$  independe de  $d/h$ . Esta condição de flexão corresponde a um estado plano de tensões de um elemento fino com furo, onde os planos ao longo da espessura da placa possuem diferentes módulos de tensão biaxial.

## Capítulo 7 - METODOLOGIA

Para a análise numérica da concentração de tensões em placas perfuradas submetidas a flexão simples, flexão cilíndrica e torção, utilizou-se neste trabalho programa implementado em FORTRAN que aplica o método dos elementos de contorno utilizando a teoria de Reissner.

Foi utilizado também o programa computacional ABAQUS ® versão 6.14, que utiliza o método dos elementos finitos, com elemento baseado na teoria tridimensional da elasticidade, para fins de comparação de resultados.

Os resultados de ambos foram comparados com resultados analíticos da bibliografia.

### 7.1 Cálculos com MEC

Para cálculo de tensões em uma placa infinita submetida a flexão ou torção utilizando o MEC, utilizou-se uma superposição de efeitos, pois não é possível, no programa implementado, aplicar esforços no contorno externo da placa com a formulação de placa infinita.

Assim, a primeira parcela da superposição é uma placa com dimensões de ordem muito maior que o diâmetro do furo com os esforços aplicados nos bordos e sem furo. Neste trabalho, a placa desta parcela da superposição possui cada lado com dimensão duzentas vezes maior que o diâmetro do furo. A segunda parcela é a placa, considerando a formulação de placas infinitas, com o furo e com os esforços aplicados no seu bordo multiplicados pelo cosseno diretor referente à mesma direção do esforço.

Desta forma, a força de superfície do contorno do furo é dada por:

$$p_i = M_0 n_i \quad (7.1)$$

A Figura 7.1 ilustra a superposição de efeitos considerada para o caso de flexão simples.

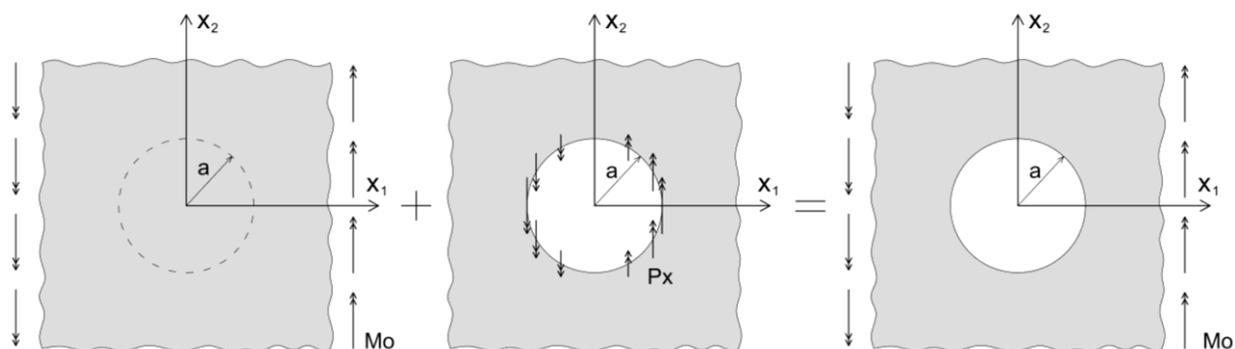


Figura 7.1 – Superposição de efeitos – placa infinita.

Foram utilizadas três malhas diferentes para obter os resultados pelo MEC, contendo 20, 36 e 180 nós, para análise da influência do refinamento da malha na precisão dos resultados e que serão chamadas neste trabalho de M20, M36 e M180, respectivamente.

O programa foi implementado com elementos de contorno quadráticos isoparamétricos.

As Figura 7.2, Figura 7.3 e Figura 7.4 ilustram as três malhas mencionadas. Os nós com marcadores triangulares simbolizam os nós iniciais e finais dos elementos e os marcadores circulares representam os nós centrais.

Para variação da relação  $d/h$ , manteve-se o mesmo diâmetro em todas as placas e alterou-se a espessura.

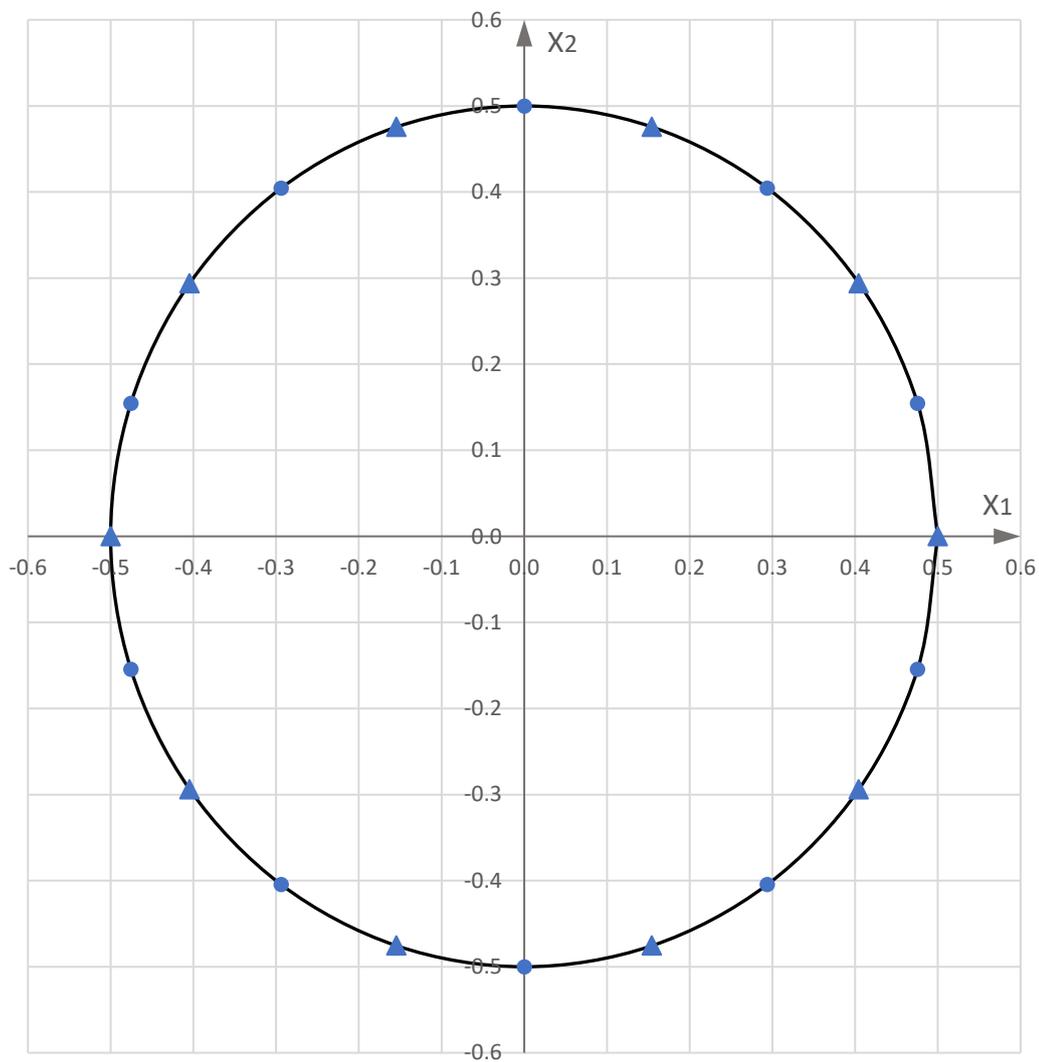


Figura 7.2 – M20.

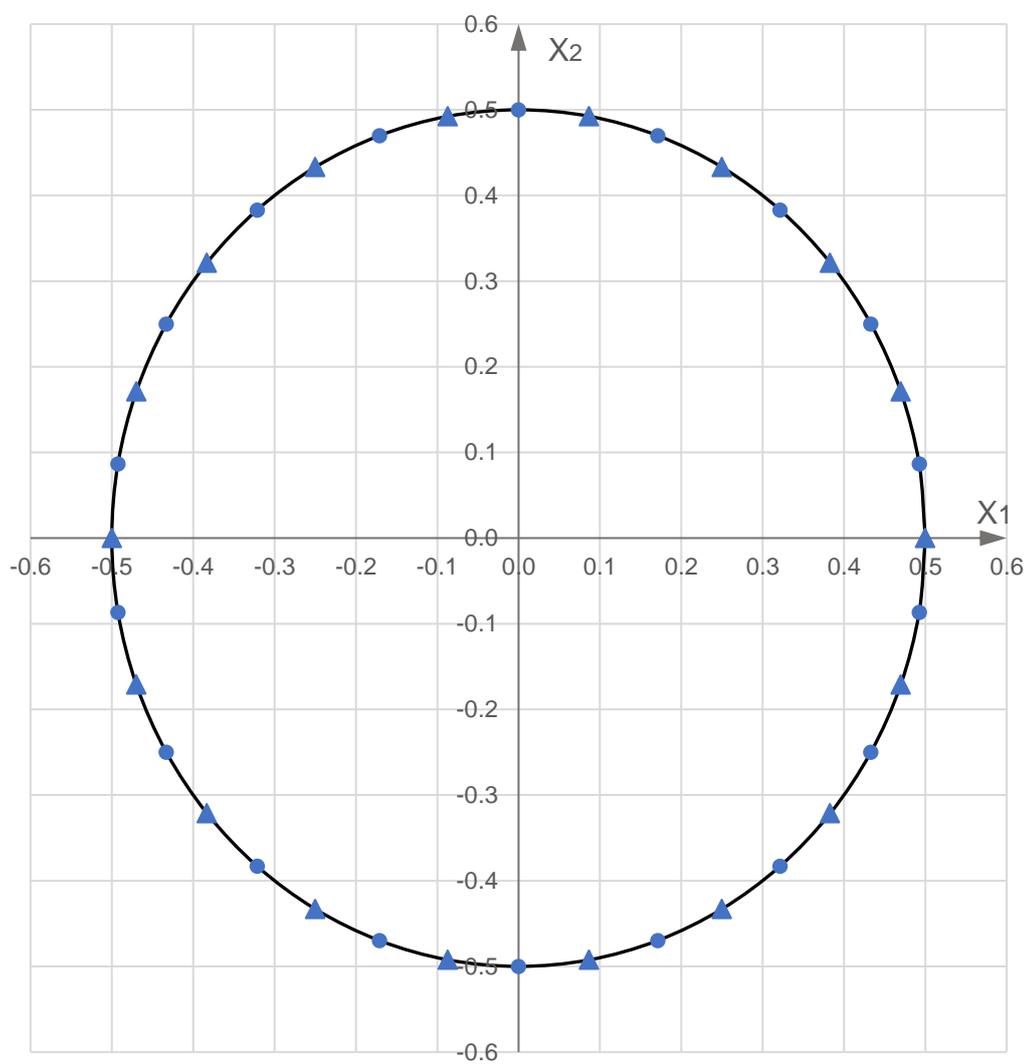


Figura 7.3 – M36.

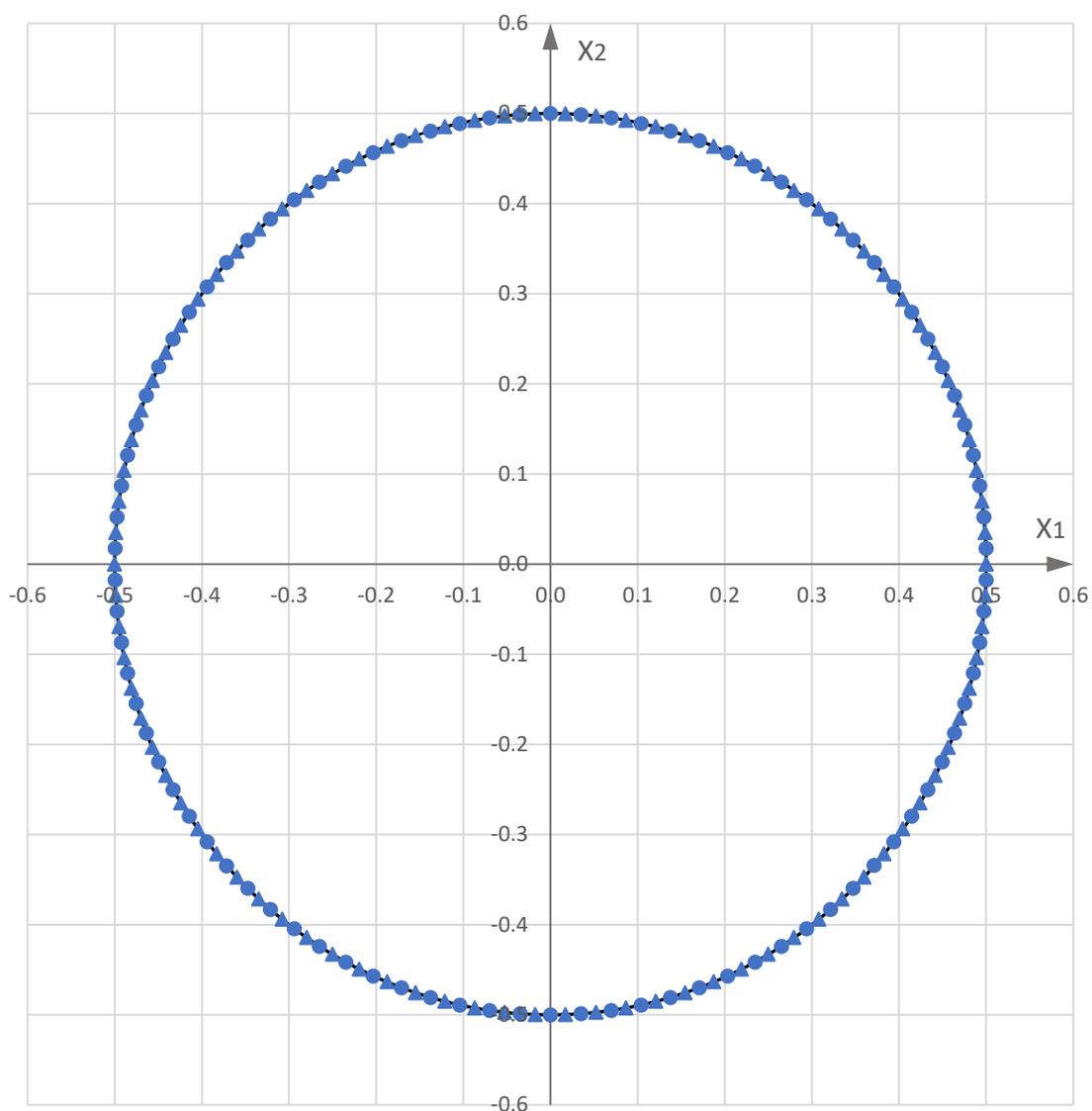


Figura 7.4 – M180.

## 7.2 Cálculos com MEF

O programa ABAQUS foi utilizado para gerar resultados pelo MEF. Para representar um domínio infinito utilizando o MEF, foi necessário construir um modelo suficientemente grande para que os resultados na região de interesse se aproximassem da solução do mesmo problema com domínio infinito. Todas as placas possuem lado de 100 metros e diâmetro de 5 metros. Construíram-se seis modelos com espessuras diferentes, que forneceram dados para relações  $d/h$  de 0,5, 1, 2, 3, 4 e 5.

Foi empregado o tipo de elemento C3D8R, elemento tridimensional linear de aplicação geral, em todas as placas.

Foram mantidas as mesmas dimensões dos elementos no plano das placas para todos os modelos. Entretanto, os modelos com espessuras diferentes possuem quantidades diferentes de elementos, pois foram criadas camadas ao longo da espessura da placa para evitar que os elementos ficassem excessivamente alongados.

As Figura 7.5 e Figura 7.6 mostram a placa de espessura 2,5 metros e a malha adotada, bem como o refinamento de malha utilizado na região do furo.

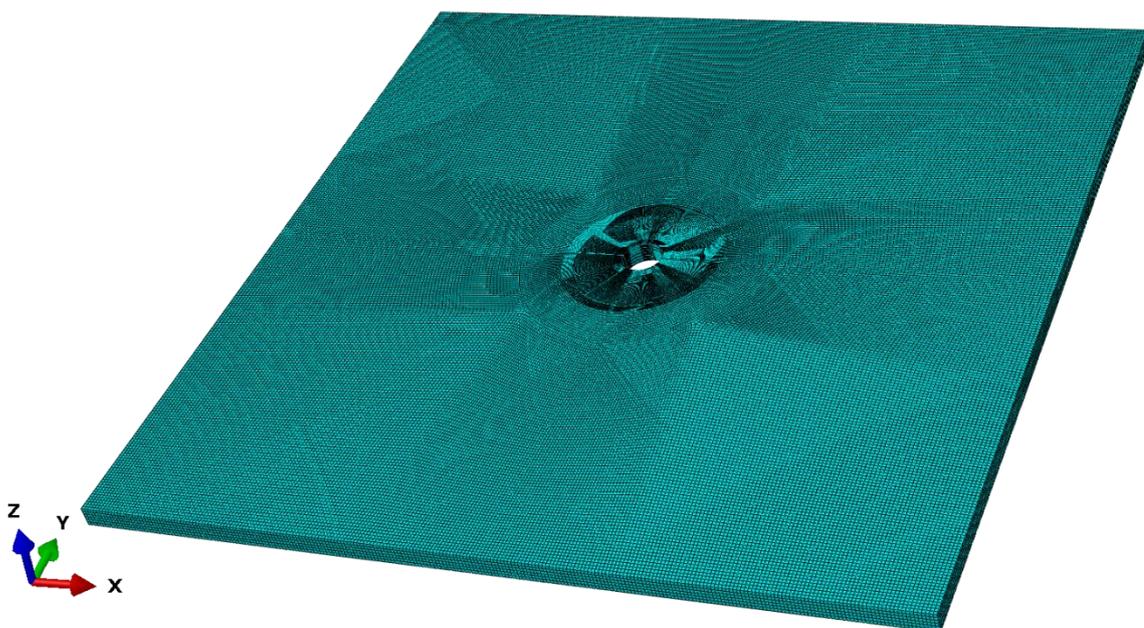


Figura 7.5 – Malha da placa de 2,5 metros de espessura.

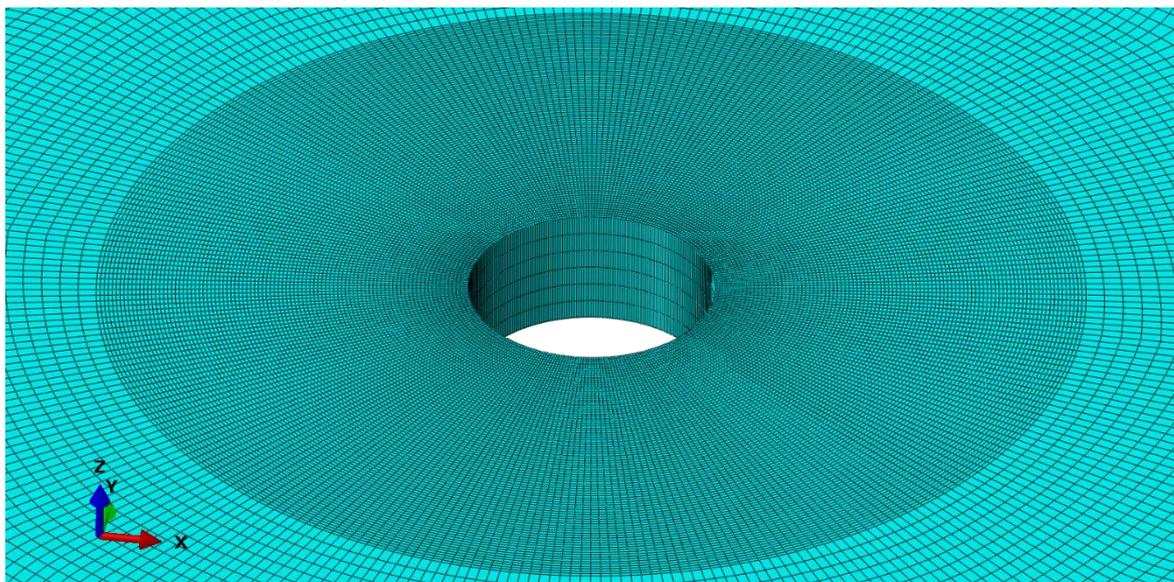


Figura 7.6 – Região de malha refinada da placa de 2,5 metros de espessura.

Todas as placas tiveram suas condições de contorno definidas apenas nos vértices das placas com restrição de deslocamento no eixo Z, conforme Figura 7.7. Esta condição foi escolhida para permitir a ocorrência da curvatura anticlástica nos bordos da placa, que ocorrerá no caso de flexão simples.

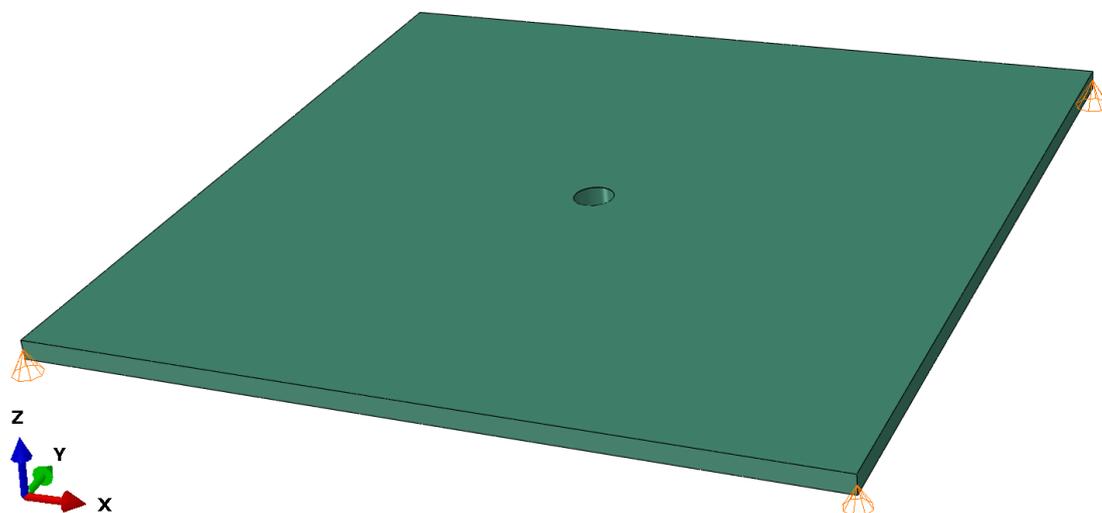


Figura 7.7 – Condições de contorno.

Conforme mostrado por Shivakumar e Newman (1992) e Yang *et al.* (2010), a tensão normal causada pela flexão da placa não possui distribuição linear ao longo da espessura em placas com pequena relação  $d/h$ , especialmente próximo às superfícies limites. Como a tensão de referência calculada pela equação (6.3)

admite a hipótese de que a tensão varia linearmente ao longo da espessura, foram criados seis modelos análogos de placas sem furos, como exemplifica a Figura 7.8, para a obtenção numérica da tensão de referência do cálculo de  $K$ . Estas placas possuem as mesmas espessuras e elementos de mesmo tamanho que os das placas perfuradas, com exceção da região dos furos que recebeu refinamento de malha.

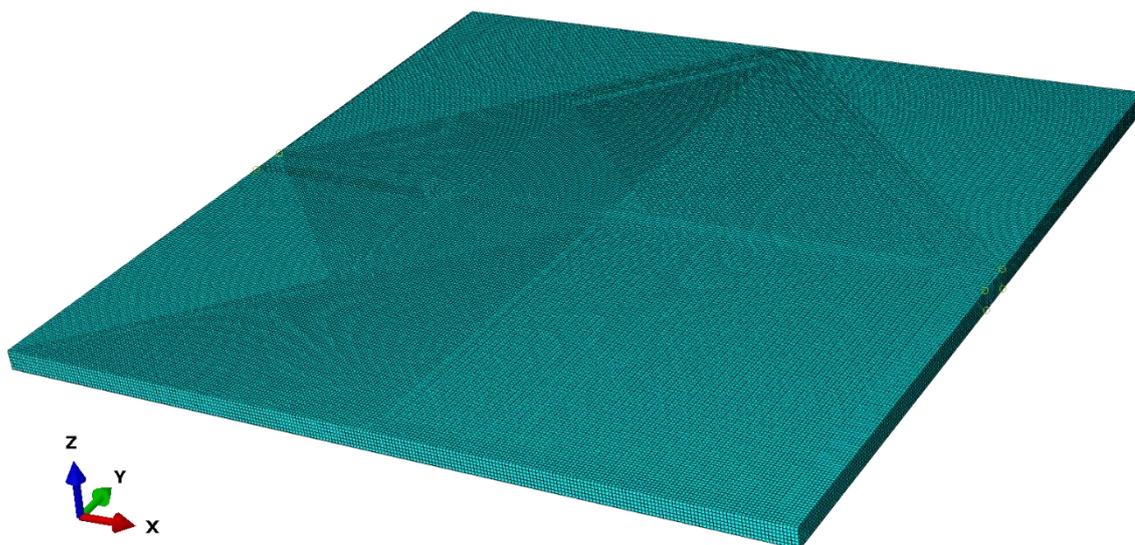


Figura 7.8 – Modelo de placa sem furo de espessura  $h=2,5$ .

## Capítulo 8 - RESULTADOS

Para obtenção dos resultados, o material dos modelos foi sempre considerado elástico linear, com módulo de elasticidade de 210 GPa. Foram utilizados diferentes valores de coeficiente de Poisson para comparação com resultados publicados na bibliografia.

### 8.1 Flexão Simples

Para cálculo de  $k$  para o caso de placa infinita com furo circular sujeita a flexão simples, foram utilizadas as três malhas mencionadas no item 5, contendo 20, 36 e 180 nós ao longo do contorno do furo.

Tabela 1 apresenta a comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com os obtidos por Chen e Archer (1989), oriundos de uma teoria de placas de décima segunda ordem, com os obtidos por Alblas (1957), que publicou valores analíticos de  $k$  pela teoria tridimensional da elasticidade, e com os resultados obtidos pelas equações de Reissner (1945), para  $\nu=0,25$ .

Tabela 1 - Valores de  $k$  para flexão simples de placa infinita com furo circular.

d/h	Reissner	Chen e Archer	Alblas	MEC (Reissner)		
				M180	M36	M20
0,000	3,000	-	-	-	-	-
0,002	-	3,000	-	2,994	2,991	2,964
0,500	2,500	2,538	-	2,501	2,499	2,479
1,000	2,243	2,264	2,268	2,239	2,237	2,221
2,000	2,038	2,050	2,045	2,035	2,035	2,021
3,000	1,956	1,964	1,960	1,953	1,954	1,941
4,000	1,912	1,918	1,914	1,909	1,911	1,899
5,000	1,885	1,890	1,896	1,882	1,885	1,873
6,000	-	1,871	-	1,864	1,867	1,856
20,000	-	1,800	-	1,797	1,802	1,795
40,000	-	1,785	-	1,782	1,787	1,785

A Tabela 2 apresenta o erro relativo dos resultados obtidos pelo MEC e pelos resultados analíticos de Reissner (1945).

Tabela 2 - Erro relativo (%) de  $k$  da

Tabela 1.

d/h	$\epsilon_{M180}$	$\epsilon_{M36}$	$\epsilon_{M20}$
0,5	-0,0422	0,2775	0,8360
1,0	0,1906	0,4840	0,9809
2,0	0,1444	0,3946	0,8262
3,0	0,1485	0,3567	0,7504
4,0	0,1364	0,3158	0,6761
5,0	0,1399	0,3065	0,6324
<b>Erro médio:</b>	0,1337	0,3559	0,7837

Foram calculados valores de  $K$  para diferentes relações  $d/h$  através do MEF utilizando o ABAQUS. A Figura 8.1 ilustra os resultados das tensões  $\sigma_{11}$  do modelo de espessura 2,5 metros.

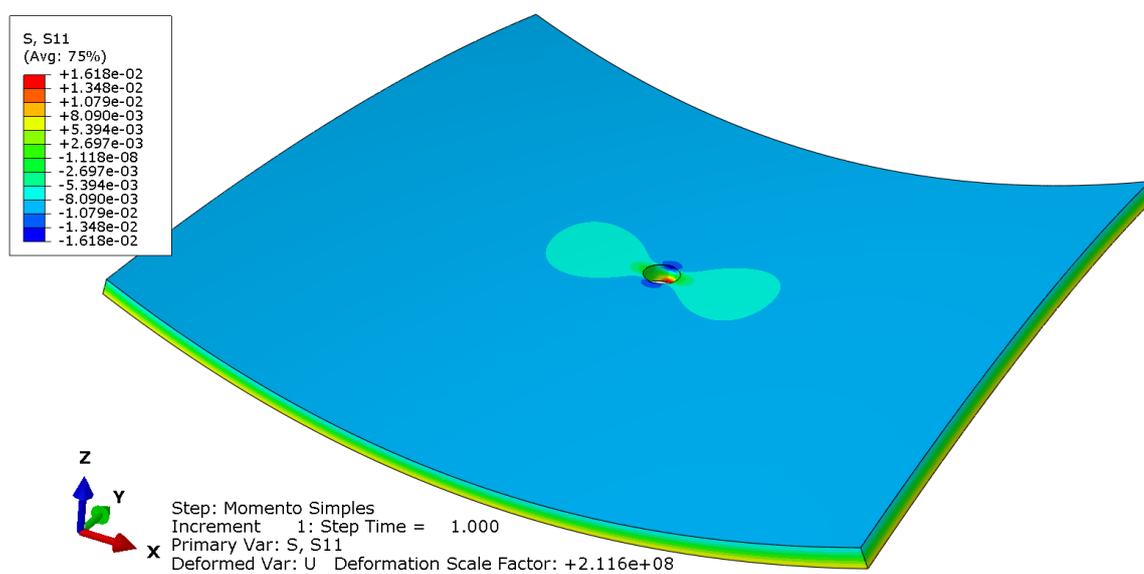


Figura 8.1 -  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão simples ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

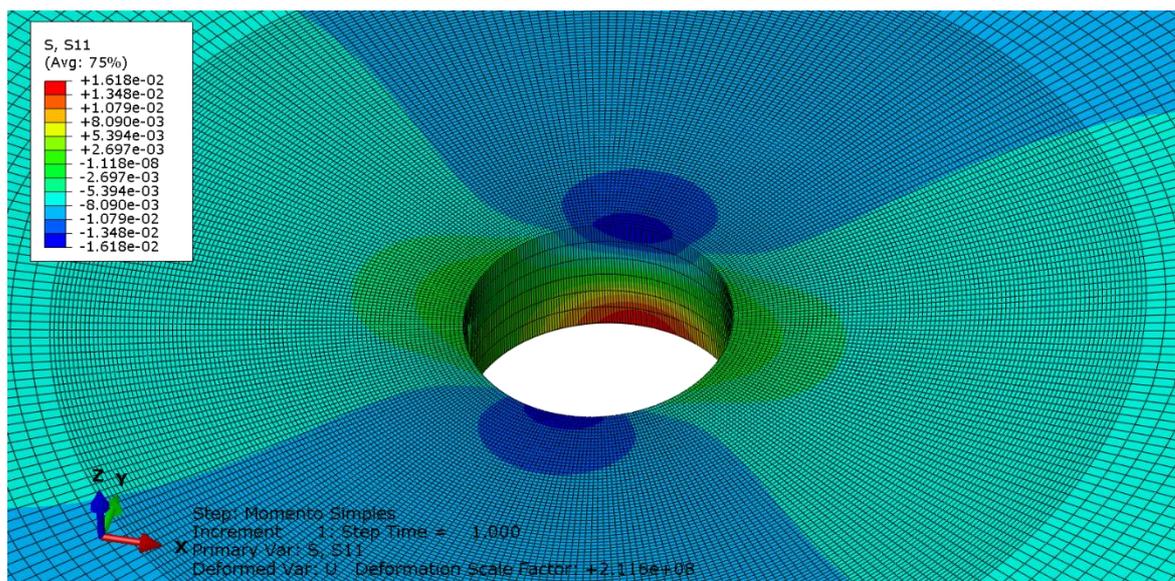


Figura 8.2 – Detalhe de  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão simples ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

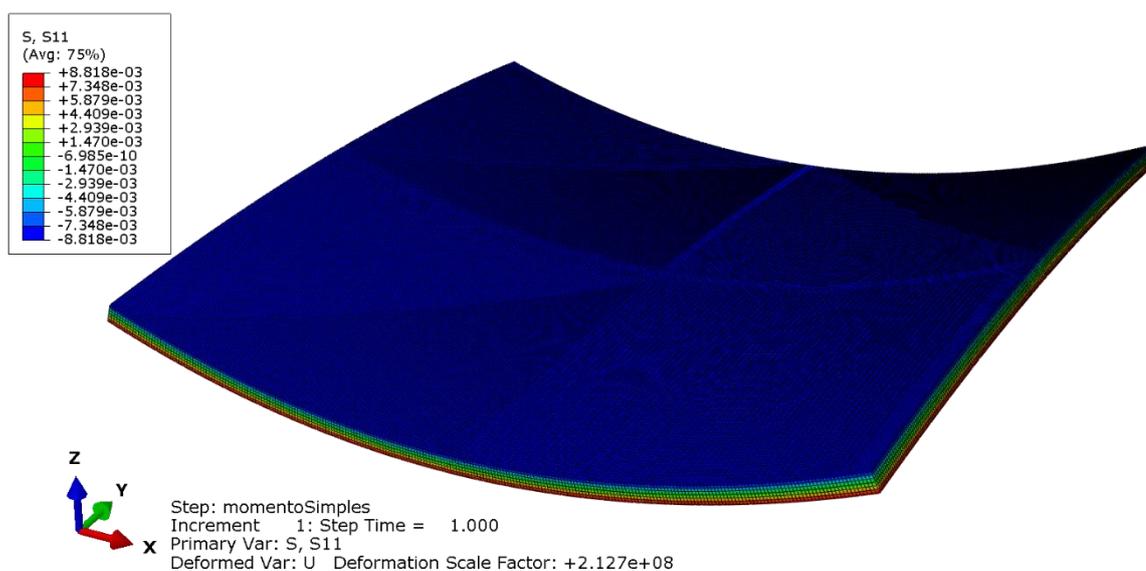


Figura 8.3 -  $\sigma_{11}$  em placa sem furo submetida a flexão simples - ABAQUS

A Figura 8.4 apresenta graficamente os valores de  $K$  em função de  $d/h$  obtidos pelo programa de MEC utilizando a malha de 180 nós, os resultados analíticos de Reissner (1945), resultados obtidos com o MEF por Shivakumar (1992) e os obtidos por MEF com o programa ABAQUS, para  $\nu=0,3$ .

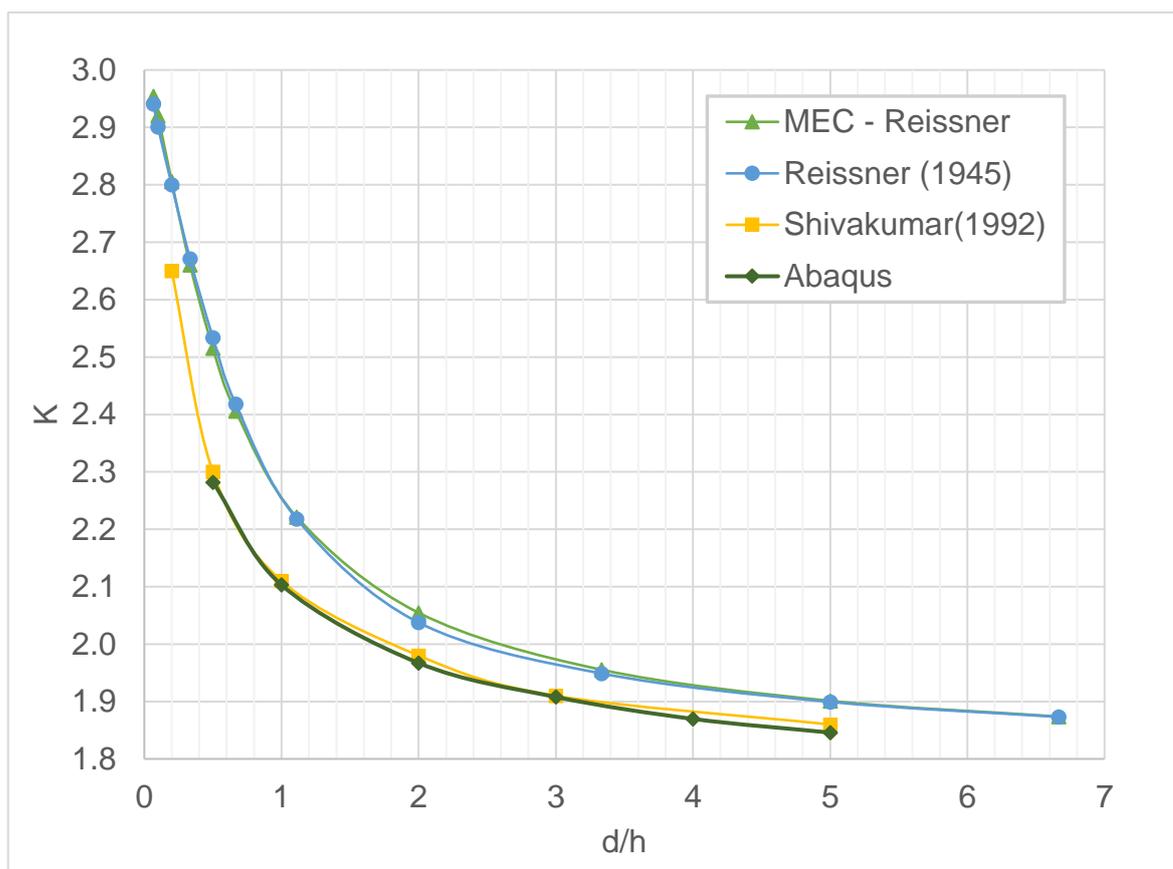


Figura 8.4 -  $K$  em função da relação  $d/h$  para resultados obtidos por MEC, Reissner (1945), Shivakumar (1992) e obtidos por ABAQUS.

Para avaliação da precisão obtida com a malha empregada nos modelos calculados com o MEF, obteve-se os valores de  $K$  com  $\nu=0,25$  para comparar com os resultados exatos obtidos por Alblas (1957) considerando a teoria da elasticidade tridimensional. Estes resultados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores de  $K$  para flexão simples de placa infinita com furo circular e erro relativo (%)

d/h	Alblas (1957)	Abaqus MEF	Erro relativo (%)
1	2,052	2,031	1,0234
2	1,938	1,953	-0,7740
3	1,865	1,883	-0,9651
4	1,841	1,877	-1,9555
5	1,830	1,852	-1,2022
<b>Erro médio:</b>			1,1840

## 8.2 Flexão Cilíndrica

Para obter  $K$  sob a condição de flexão cilíndrica pelo MEC, utilizou-se a mesma malha de 180 nós. Também foram obtidos resultados pelo MEF através do ABAQUS. As Figura 8.5 e Figura 8.6 ilustram os resultados do modelo de 2,5 metros de espessura com o furo e a Figura 8.7, sem o furo.

Estes resultados, juntamente com os de Goodier (1936), cuja teoria não considera as deformações cisalhantes, são apresentados graficamente na Figura 8.8.

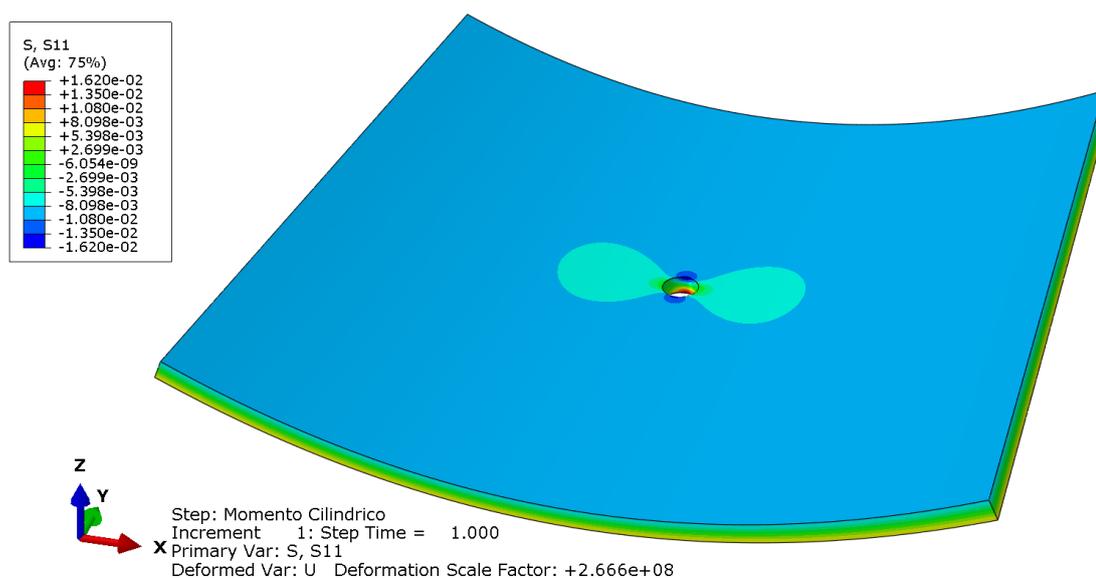


Figura 8.5 –  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão cilíndrica - ABAQUS.

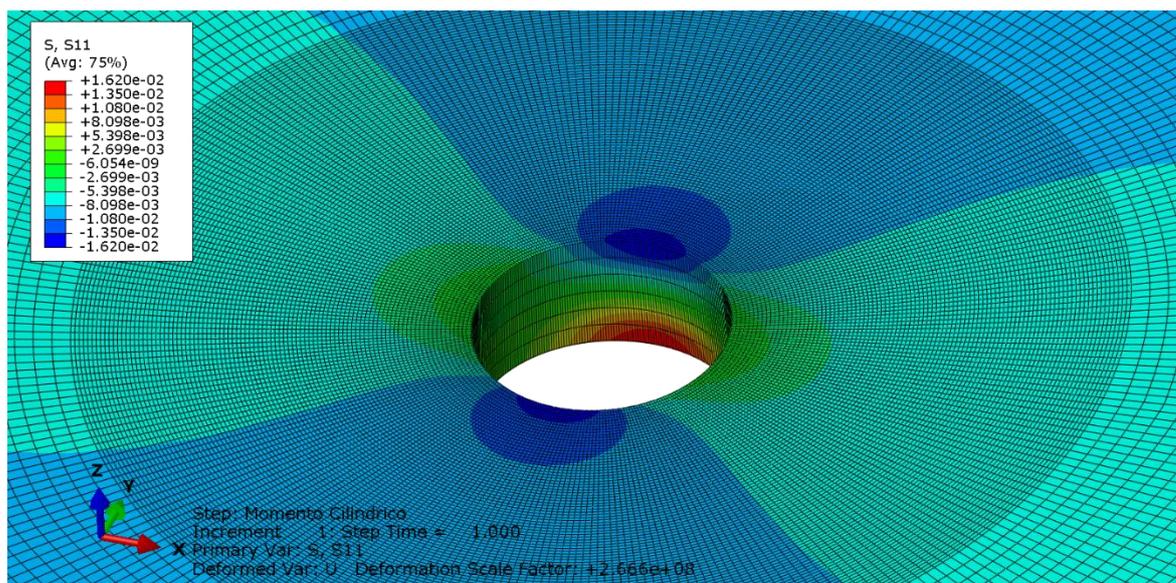


Figura 8.6 – Detalhe de  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a flexão cilíndrica ( $h=2,5$ ) 4-ABAQUS.

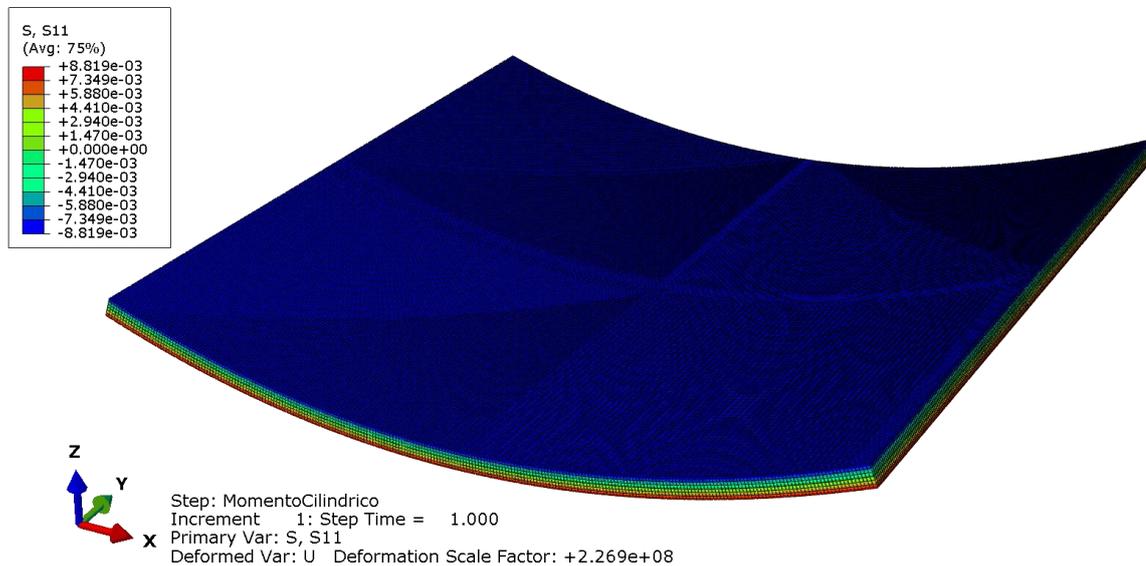


Figura 8.7 –  $\sigma_{11}$  em placa sem furo submetida a flexão cilíndrica ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

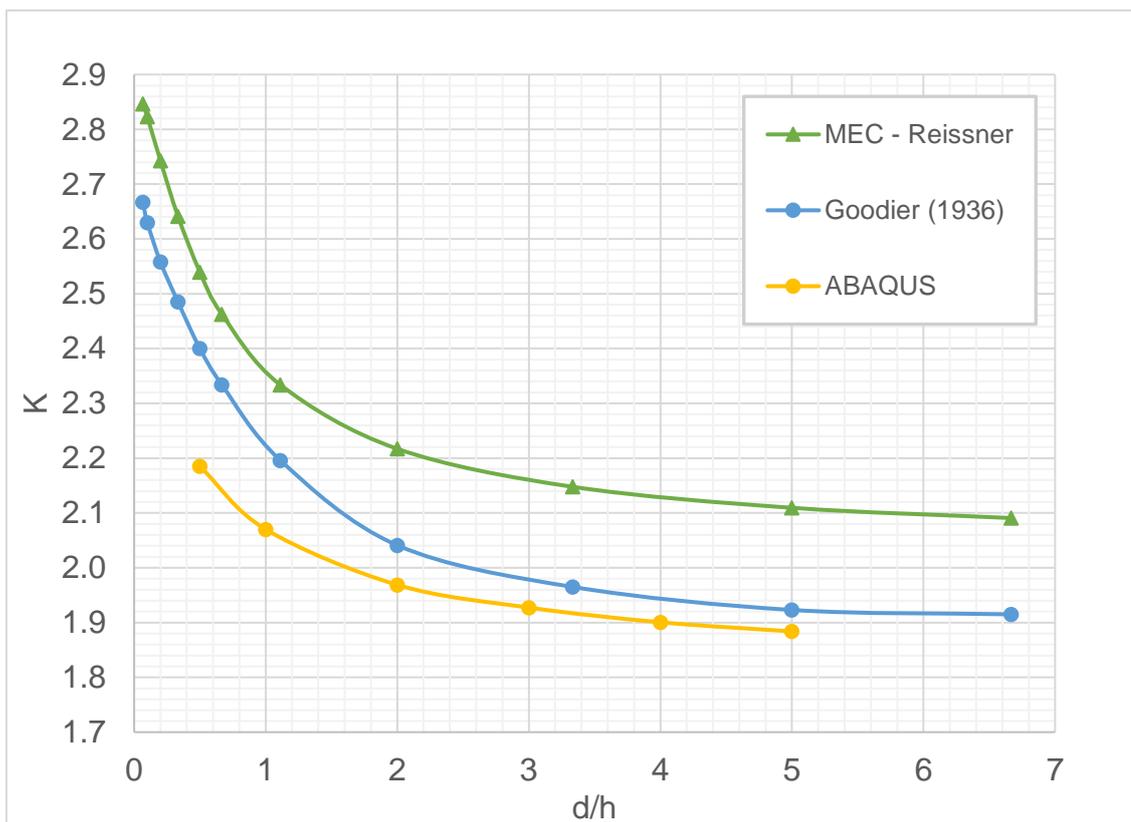


Figura 8.8 –  $K$  em função de  $d/h$  para resultados obtidos por MEC, Goodier (1936) e ABAQUS.

### 8.3 Torção

Para análise do caso de torção, foi utilizada a malha de 180 nós para cálculo do  $K$  com o MEC e também calculado pelo MEF com o programa ABAQUS. As Figuras Figura 8.9 e Figura 8.10 apresentam as tensões  $\sigma_{11}$  do modelo de espessura igual a 2,5 metros. A Figura 8.11 ilustra o resultado do modelo sem furo.

Os resultados obtidos com o MEC, analíticos de Reissner (1945) e com o MEC são apresentados graficamente na Figura 8.12.

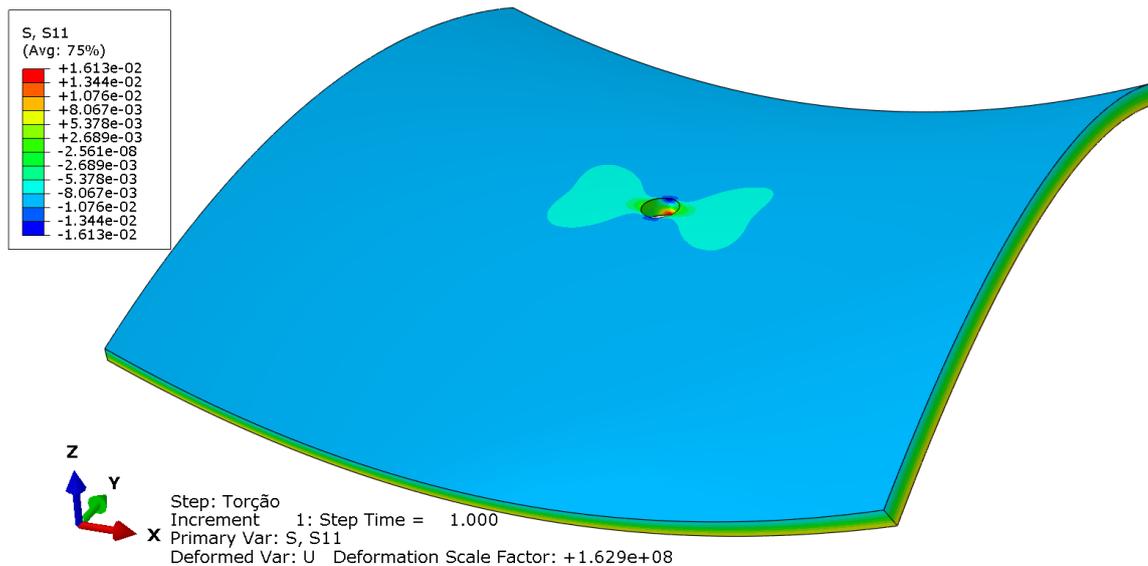


Figura 8.9 –  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a torção ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

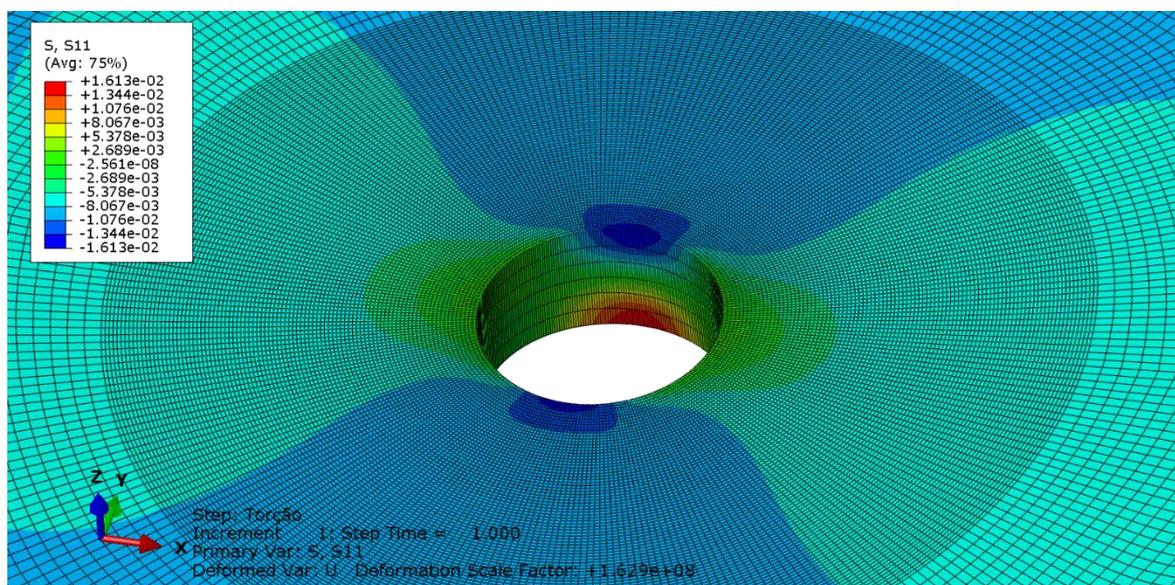


Figura 8.10 – Detalhe de  $\sigma_{11}$  em placa perfurada submetida a torção ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

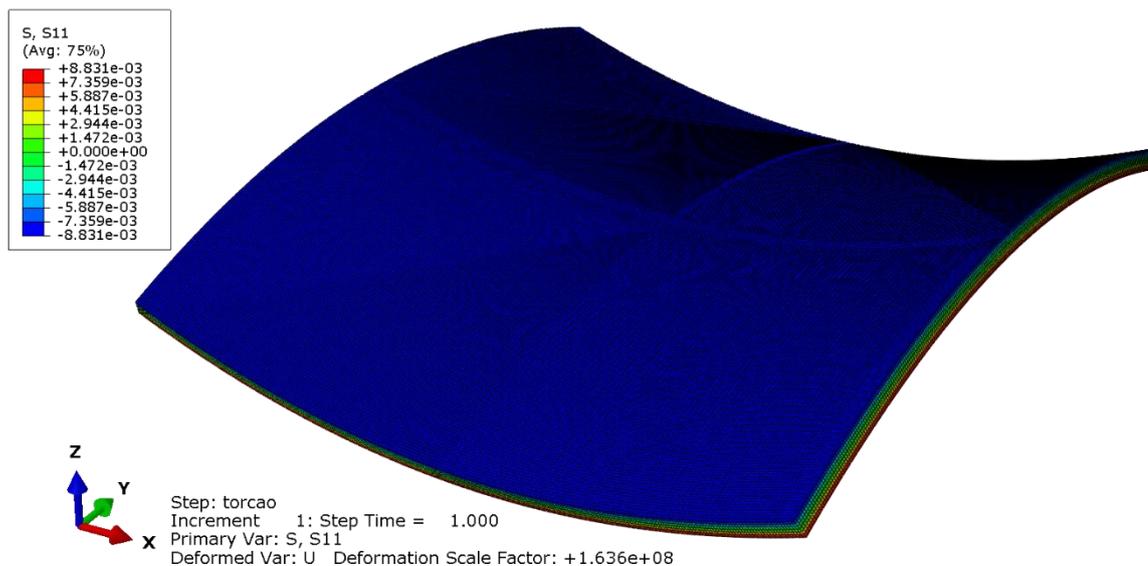


Figura 8.11 -  $\sigma_{11}$  em placa sem furo submetida a torção ( $h=2,5$ ) - ABAQUS.

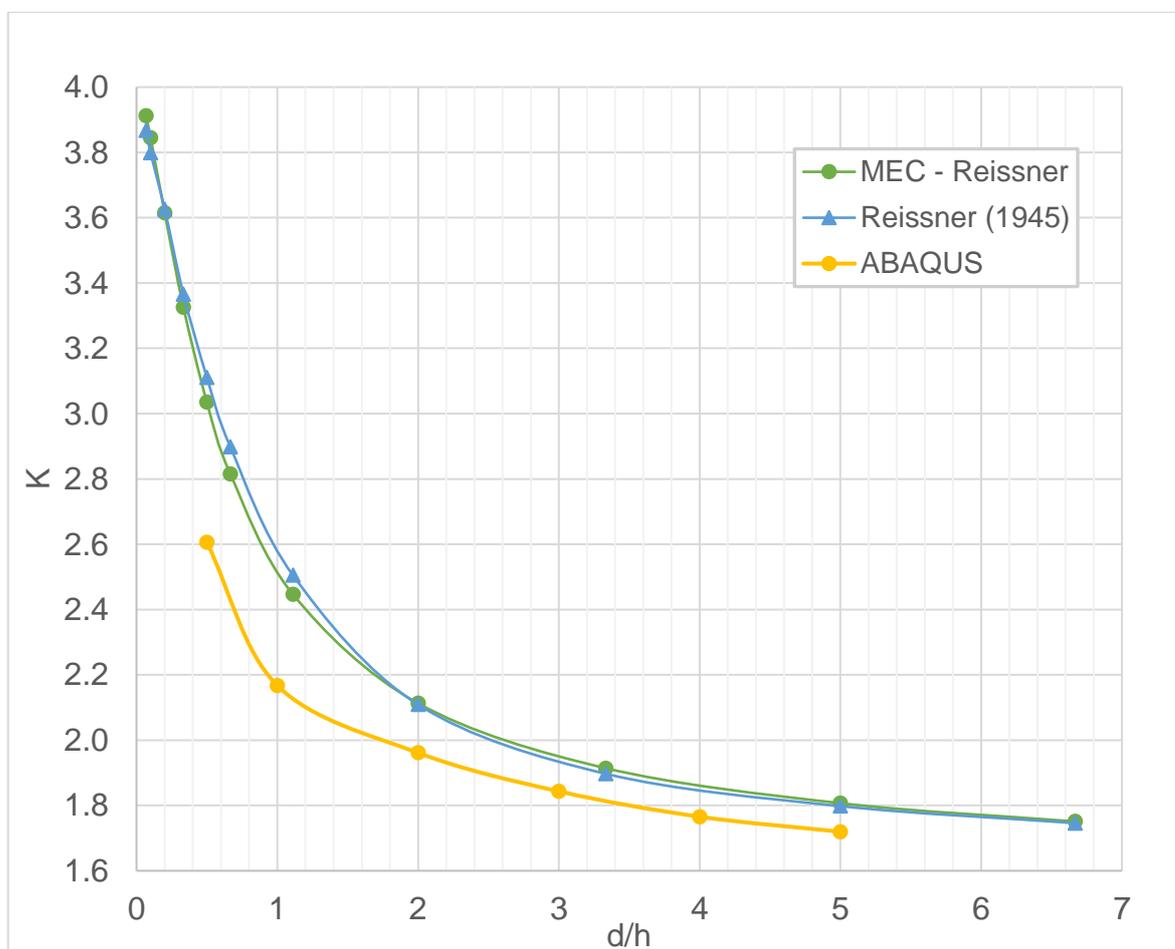


Figura 8.12 -  $K$  em função da relação  $d/h$  para resultados obtidos por MEC, Reissner (1945) e Abaqus.

## Capítulo 9 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Conforme esperado, o aumento do número de nós das malhas calculadas com o MEC gerou resultados com erros menores. O erro médio dos resultados da M180 comparada aos resultados analíticos de Reissner foi de 0,1337%, o que pode ser considerado um resultado extremamente próximo do exato. Os erros para as malhas M36 e M20, mesmo sendo muito mais grosseiras que a M180, também foram pequenos, ambos menores do que 1%.

A comparação com os resultados de Alblas (1957) revelou a obtenção de uma precisão também satisfatória nos resultados obtidos pelo programa ABAQUS com elementos finitos 3D, com erro médio de 1,1840%.

Foi observado durante a modelagem com o programa ABAQUS a necessidade de refinar a malha no local da ocorrência da concentração de tensões para que os resultados convergissem para os analíticos de Alblas (1957). Esse refinamento elevado, somado à necessidade de se construir um domínio grande para se aproximar do caso infinito, gerou matrizes proporcionalmente grandes e tornou os modelos bastante custosos para cálculo computacional. Enquanto isso, os modelos calculados com o MEC só necessitaram ser resolvidos no contorno do furo, sendo dispensável cálculos em pontos internos, já que o ponto de tensão máxima ocorre no contorno; logo geraram-se matrizes milhares de vezes menores e com um tempo de processamento praticamente instantâneo em todas as malhas utilizadas.

Em todas as condições de carregamento, o fator de concentração de tensões calculado via MEF foi menor que os fatores calculados pela teoria de Reissner e de Goodier. Para relações  $d/h$  maiores que 2, os valores de  $K$  se mantiveram relativamente próximos, sendo a maior diferença a de 10,8% no caso de flexão cilíndrica. Para relações  $d/h$  menores que 2, nota-se que a diferença das teorias e dos métodos leva a diferenças mais significativas. A principal diferença entre as teorias comparadas é que Goodier e Reissner consideram uma distribuição linear das tensões ao longo da espessura da placa fletida. Entretanto, conforme mostrado por Shivakumar e Newman (1992) e Yang *et al.* (2010), para relações  $d/h$  menores que 2, esta distribuição das tensões não é linear ao longo da espessura da placa.

## Capítulo 10 - CONCLUSÕES

Neste trabalho, o MEC foi empregado para cálculo do fator de concentração de tensão em placas perfuradas fletidas. Foram analisadas placas infinitas com furos circulares submetidas a flexão simples, cilíndrica e torção. Utilizou-se três malhas com quantidades distintas de nós para utilização do MEC e comparou-se com resultados analíticos. Também se modelou placas no programa ABAQUS para comparação dos fatores concentração de tensão calculados pelo MEF.

A análise dos resultados permite concluir que o MEC é efetivo no cálculo de problemas com concentração de tensão. Este método necessita de muito menos refinamento de malha que o MEF para calcular problemas com concentração de tensão em placas infinitas perfuradas submetidas a flexão. O MEF mostrou-se efetivo em calcular as tensões considerando a teoria da elasticidade tridimensional. Entretanto, a malha empregada no ABAQUS gerou resultados na ordem de nove vezes menos precisos que os resultados obtidos pela malha M180 calculada com MEC, mesmo aquela sendo mais refinada e com alto custo computacional.

A diferença da dimensão das matrizes para o problema de flexão de placa infinita do MEC e do MEF foi muito grande, causada sobretudo pela necessidade de construir um domínio grande e gerar refinamentos custosos na malha de elementos do MEF, o que não aconteceu na aplicação do MEC, que permite obter formulação apropriada para problemas infinitos, e foi necessário discretizar apenas o contorno do furo.

A teoria de Reissner é menos precisa que a teoria tridimensional da elasticidade para o estudo da concentração de tensões em placas perfuradas com relação  $d/h$  menor que 2. Isto porque a distribuição de tensão normal ao longo da espessura deixa de ser linear para este intervalo.

Para todas as condições de carregamento estudadas neste trabalho, flexão simples, flexão cilíndrica e torção, a teoria de Reissner e de Goodier forneceram valores de  $K$  superestimados em relação aos resultados vindos da teoria tridimensional da elasticidade aplicada pelo MEF, em especial para valores de  $d/h$  menores que 2.

Também se conclui que para o estudo particular do cálculo do fator  $K$ , só é necessário resolver o problema no contorno do furo, pois é nele que ocorre o ponto de tensão máxima.

Sugere-se, para trabalhos futuros, a continuidade da aplicação do MEC na análise de placas com outras formas de furos, como elípticos e quadrados, além de placas com combinações de furos. Aconselha-se também que se avalie a precisão do método ao lidar com a influência que os bordos possam ter no problema de concentração de tensão, estudando-se flexão de placas finitas, ou finitas em apenas uma direção.

## REFERÊNCIAS

Abramowitz, M., Stegun, I.A. (1965) *Handbook of mathematical functions*. 1. ed. Nova Iorque: Dover publications. 470p.

Alblas, J.B. (1957) *Theorie van de driedimensionale spanningstoestand in een doorboorde plaat*. Tese (doutorado em Ciências). Universidade de tecnologia de Delft, Holanda, 142p.

Bert, C.W. (2001) Generalized bending of a plate with a circular inclusion of arbitrary rigidity. *Journal of strain analysis*. 36(3):341–345.

Bert, C.W. (1988) Generalized bending of a large plate containing a circular hole. *Pergamon Press*. 15(1):55–60.

Bezine, G. (1978) Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Pergamon Press*. 5(4):197–206.

Chen, P.S., Archer, R.R. (1989) Stress concentration factors due to the bending of a thick plate with circular hole. *Ingenieur-Archiv*. 59:401–411.

Cheng, A.H.D., Cheng, D.T. (2005) Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 29:268–302.

Chow, F. (1961) The effect of a rigid elliptic inclusion on the bending of a thick elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*. 28(3):379–382.

Conway, H.D., Nickola, W.E. (1965) Anticlastic Action of Flat Sheets in Bending. *Experimental Mechanics*. 5(4):115–119.

Dumont, C. (1939) Stress concentration around an open circular hole in a plate subjected to bending normal to the plane of the plate. *National Advisory Committee for Aeronautics*. No. 740. 25p.

Fernandes, G.R., Araújo, D., Pituba, J.L.C. (2009) Non-linear analysis of reinforced concrete plates by the boundary element method and continuum damage mechanics. *Acta Scientiarum Technology*. 31(1): 25–33.

Goodier, J.N. (1936) The Influence of Circular and Elliptical Holes on the Transverse Flexure of Elastic Plates. *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 22:69–80.

Goodier, J.N., Lee, G. H. (1941) An extension of the photoelastic method of stress measurement to plates in transverse bending. *Journal of Applied Mechanics*. 63:A27.

Hansen, E.B. (1976) Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. *Journal of Elasticity*, 6(1):39–56.

Hicks, R. (1963) Stress concentrations around holes in plates and shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 178(2):50–59.

Hsieh, M.C., Hwu, C. (2002) Anisotropic elastic plates with holes/cracks/inclusions subjected to out-of-plane bending moments. *International Journal of Solids and Structures*. 39:4905–4925.

Jaswon, M.A., Maiti, M., Symm, G.T. (1967) Numerical biharmonic analysis and some applications. *International Journal of Solids Structures*. 3:309–332.

Karam, V.J. (1986) *Aplicação do método dos elementos de contorno à teoria de Reissner para flexão de placas*. Dissertação (mestrado em ciências) - Rio de Janeiro - RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 142p.

Karam, V. J. (1988) On boundary elements for Reissner's plate theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 5(1):21–27

Karam, V.J. (1992) *Análise de flexão de placas pelo MEC incluindo não-linearidade física*. Tese (doutorado em ciências) - Rio de Janeiro - RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 158p.

Karman, V. (1910) Festigkeitsprobleme im maschinenbau. *Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften*. 4:311–385.

Katsikadelis, J.T. (2002) *Boundary Elements - Theory and Applications*. New York: Elsevier, 448p.

Kirchhoff, G. (1850) Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal Reine Angew*. 40:51–88.

Lee, C.W., Conlee, G.D. (1968) Bending and twisting of thick plates with a circular hole. *Journal of the Franklin Institute*. 285:377–385.

Louhghalam, A., Igusa, T., Park, C., Choi, S., Kim, K. (2011) Analysis of stress concentrations in plates with rectangular openings by a combined conformal mapping – Finite element approach. *International Journal of Solids and Structures*, 48(13):1991–2004.

Love, A.E.H. (1888) The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the royal society of London*. 179:491–546.

Neuber, H. (1958) *Theory of notch stresses*. 2. ed. Washington: Office of Technical Services, U.S. Department of Commerce, 207p.

Paiva, J.B. (2018) Corner restrictions and their application to bending plate analyses by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 95:1–11.

Patel, N.P., Sharma, D.S. (2015) Bending of composite plate weakened by square hole. *International Journal of Mechanical Sciences*. 94(95):131–139.

Pilkey, W.D., Pilkey, D.F. (2008) *Stress concentration factors*. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 555p.

Reissner, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 3:69–77.

Ribeiro, G.O. (1992) *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner*. Tese (Doutorado em Universidade de São Carlos, São Carlos, 284p.

Rubayi, N.A. (1975) Bending stress concentration in a thick circular plate with central hole. *Pergamon Press*. 2:159–164.

Shivakumar, K.N., Newman, J. C. (1992) Stress Concentrations for Straight-Shank and Countersunk Holes in Plates Subjected to Tension, Bending, and Pin Loading. *NASA*, v. 3192, 36p.

Stern, M. (1979) A general boundary integral formulations for the numerical solution of plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*. 15(10):769–782.

Szilard, R. (2004) *Theories and Applications of Plate Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons. 1039p.

Tafreshi, A., Thorpe, T.E. (1995) Numerical analysis of stresses at oblique holes in plates subjected to tension and bending. *Journal of Strain Analysis*. 30(4):317–323.

Telles, J.C.F. (1987) A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng*. 24:959-973.

Tottenham, H. (1979) The boundary element method for plates and shells. *Developments in boundary element methods*. London: Applied Science Publishers. 173–205.

Ukadgaonker, V.G., Rao, D.K.N. (2011) A general solution for moments around holes in symmetric laminates. *Composite Structures*. 49:41–54.

Wang, X.F., Hasebe, N. (2000) Bending of a thin plate containing a rigid inclusion and a crack. *Engineering analysis with boundary elements*. 24:145–153.

Weeen, F.V. (1982) Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. *International Journal of Solids and Structures*. 18:1–10.

Yang, Z., Kim, C., Beom, H., Cho, C. (2010) The stress and strain concentrations of out-of-plane bending plate containing circular hole. *International Journal of Mechanical Sciences*. 52:836–846.

## APÊNDICE A

Conforme apresentado em Karam (1992), as integrais com singularidades logarítmicas podem ser resolvidas utilizando-se integração numérica pela quadratura de Gauss, porém, fazendo-se, antes de integrar, uma transformação de coordenadas apresentada por Telles (1987). Essa transformação origina um jacobiano que tem valor zero no ponto onde ocorre a singularidade, anulando-a.

Seja  $f(\eta)$  a função a ser integrada no intervalo  $[-1,1]$ , contendo o ponto singular  $\bar{\eta}$ . Tem-se então:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{A.1})$$

Telles (1987) propõe transformações de coordenadas do segundo ou do terceiro grau para resolver o problema. Os procedimentos, nos dois casos são apresentados a seguir.

### a) Transformação do Segundo Grau

Neste caso, tem-se a mudança de variável:

$$\eta(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c \quad (\text{A.2})$$

atendendo às seguintes condições:

$$\left. \frac{d\eta}{d\theta} \right|_{\bar{\eta}} = 0$$

$$\eta(1) = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$\eta(-1) = -1$$

Para este caso, obtém-se a solução:

$$a = -c \quad (\text{A.4})$$

$$b = 1$$

$$c = \frac{\bar{\eta} \pm \sqrt{(\bar{\eta}^2 - 1)}}{2}$$

onde deve-se ter  $|\bar{\eta}| \geq 1$ , para que as raízes sejam reais.

Caso se tenha  $|\bar{\eta}| = 1$ , fica:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ (1 - \theta^2) \frac{\pi}{2} + \theta \right] (1 - \theta \bar{\eta}) d\theta \quad (\text{A.5})$$

Quando a singularidade ocorre num ponto  $\bar{\eta}$  entre -1 e 1, a integral deve ser dividida da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{\bar{\eta}} f(\eta) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{A.6})$$

Neste caso, obtém-se a expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1 + \bar{\eta}}{2} \left( \frac{1}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right) + \bar{\eta} - 1 \right] \frac{(1 + \bar{\eta})(1 - \theta)}{2} d\theta \quad (\text{A.7})$$

$$+ \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1 - \bar{\eta}}{2} \left( \frac{1}{2} (\theta^2 - 1) + \theta \right) + \bar{\eta} + 1 \right] \frac{(1 - \bar{\eta})(1 + \theta)}{2} d\theta$$

### b) Transformação do Terceiro grau

A mudança de variável, no caso da transformação do terceiro grau, é da forma:

$$n(\theta) = a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \quad (\text{A.8})$$

e tem-se, além das condições (A.3), a condição:

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\theta^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Os coeficientes da equação (A.8) são:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{Q} \\ b &= -\frac{3\bar{\theta}}{Q} \\ c &= \frac{3\bar{\theta}^2}{Q} \\ d &= -b \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde se tem:

$$Q = 1 + 3\bar{\theta}^2 \quad (\text{A.11})$$

sendo  $\bar{\theta}$  o valor de  $\theta$  para o qual  $\eta(\bar{\theta}) = \bar{\eta}$ , calculado por:

$$\bar{\theta} = \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (\text{A.12})$$

onde:

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (\text{A.13})$$

Então, resulta a expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{1}{1 + 3\bar{\theta}^2} \left( (\theta - \bar{\theta})^3 + \bar{\theta}(\bar{\theta}^2 + 3) \right) \right] \frac{3(\theta - \bar{\theta}^2)}{1 + 3\bar{\theta}^2} d\theta \quad (\text{A.14})$$