LOGARITMOS E APLICAÇÕES

FERNANDO JOSÉ MARTINS DA ROCHA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

AGOSTO - 2013

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

FERNANDO JOSÉ MARTINS DA ROCHA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
AGOSTO - 2013

LOGARITMOS E APLICAÇÕES

FERNANDO JOSÉ MARTINS DA ROCHA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 21 de Agosto de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Geraldo de Oliveira Filho, D.Sc. - UENF

Profª. Joviana Sartori de Souza, D.Sc. - UFF

Prof. Oscar Paz La Torre, D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esta dissertação aos meus irmãos pelos bravos exemplos a mim dados. Aos meus leais amigos do Profmat pelo enorme prazer em lutarmos juntos nessa vitoriosa batalha. Todo o meu respeito, a minha admiração, meu muito obrigado e até breve.

Agradecimentos

Agradeço a DEUS, acima de tudo por mais uma vitória. Aos meus pais, por toda criação a mim prestada de forma especial. A minha esposa Fernanda, companheira e amiga em muitos momentos difíceis, sempre com seu ombro amigo. Ao meu orientador professor Rigoberto Sanabria pelo empenho demonstrado na condução desta pesquisa. Aos amigos de curso, em especial a Thiago Jacomino e Maurício Horta pelo apoio e grande ajuda, e por todos os momentos incríveis e árduos que passsamos juntos. Que aprendizado! Foi extraordinário ! E a todos os professores do programa PROFMAT-UENF,agradeço por seus conhecimentos e companheirismo notáveis. Desejando desde já que DEUS os abençoe plenamente.

"Clame a Mim e responder-te-ei e anunciar-te-ei
coisas grandes e firmes que não sabes"

Jeremias 33:3

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar, de forma conceitual e aplicada, os logaritmos, dando enfoque às suas atuações no nosso cotidiano de maneira clara e objetiva. Para ampliar a abordagem dos logaritmos em sala de aula, realizamos uma investigação sobre o assunto, visando direcionar o aluno à uma compreensão bastante significativa desse conteúdo através de suas aplicabilidades e mostrando suas relações interdisciplinares de maneira a solucionar as dificuldades dos alunos e, posteriormente, atingir o aprendizado. Este estudo investigativo possibilita a abordagem dos logaritmos em sala de aula de forma interdisciplinar e aplicada no cotidiano nas mais diversas áreas. Dessa maneira, algumas aplicações foram apresentadas com a intenção de tornar o assunto mais interessante e atrativo ao processo de ensino-aprendizagem, tais como desintegração radioativa, abalos sísmicos, juros compostos, escala de acidez, Lei de Benford e etc. Finalizamos, propondo algumas atividades que possam ser realizadas em sala de aula, buscando contribuir de maneira significativa para o alcance dos objetos mencionados.

Palavras-chave: Logaritmo. Napier e Briggs . Lei de Benford.

ABSTRACT

This work aims to present, from a conceptual and applied, logarithms, focusing their actions in our daily lives clearly and objectively. To extend the approach of logarithms in the classroom, we conducted an investigation on the matter, in order to direct the student to an understanding of this very significant content through their applicability and showing their interdisciplinary relationships in order to resolve the difficulties of the students and later achieve learning. This approach enables the investigative study of logarithms in the classroom in an interdisciplinary and applied in daily life in various areas. Thus, some applications were presented with the intention of making the subject more interesting and attractive to the process of teaching and learning, such as radioactive decay, earthquakes, compound interest, scale of acidity, Benford's Law and so on. We end by proposing some activities that can be undertaken in the classroom, in order to contribute significantly to achieving the objects mentioned.

Keywords: logarithm. Napier and Briggs. Benford's Law.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Muitas pessoas consideram a Matemática uma disciplina de difícil compreensão e aprendizado, por conta de alguns fatores, tais como: a linguagem formal, a interpretação do texto, na maioria das vezes, ser feita de maneira equivocada e o uso da simbologia exigida nessa disciplina ser bastante complexa. Essa dificuldade, tem levado muitos alunos a procurarem cursos superiores que não exigem a Matemática como requisito inicial, situação essa que tem chamado a atenção de vários pesquisadores da Educação Matemática.

Nas escolas de Ensino Médio, os professores se deparam com dificuldades dos alunos com operações matemáticas e suas relações com outras disciplinas, tais como Física, Química e Biologia. A aprendizagem e o uso dos conceitos e as aplicabilidades relacionados aos logaritmos é uma preocupação da disciplina e constitui o objeto deste trabalho, pois, nos dias atuais, a forma como este assunto é abordado não estimula o aluno a ter um maior interesse e a compreender como este tema é importante, não só para a Matemática em si como para outros campos de atuação. De acordo com os PCN (2000), as finalidades do ensino de Matemática no nível médio, indicam alguns objetivos, tais como:

- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*
- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*

- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.*

Vemos acima algumas habilidades que os alunos do Ensino Médio precisam desenvolver, mas os desafios ainda são muitos, pois outro fator que dificulta o aprendizado é o fato dos discentes, de antemão, julgarem os logaritmos como um assunto muito difícil e complicado, e consequentemente, acabam não assimilando e nem aprendendo o tema abordado.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN (2000)) exigem, observamos que a forma como é trabalhado um tema é primordial para o aprendizado efetivo dos alunos. Quando utilizamos certos recursos de aprendizagem, associamos aplicações ao assunto que vamos trabalhar com a proposta de envolver o aluno.

Podemos, com a forma diferenciada de ensinar e também a forma de como o aluno irá aprender, tornar o assunto mais interessante, fazendo o aluno compreender a relação de um assunto com situações reais. Quando o aluno consegue perceber de que maneira ele irá aplicar o conceito que está estudando, possivelmente irá ter mais interesse em aprender, o que pode tornar os logaritmos um assunto atrativo e de grande relevância.

A forma como os logaritmos são apresentados é muito importante; o trabalho versa desde o surgimento dos logaritmos, passando por sua definição, propriedades e finalizando com suas aplicações. Sempre de forma clara e objetiva, para que o processo ensino-aprendizagem seja realizado.

Por esse motivo, neste trabalho, relacionaremos o estudo dos logaritmos com outros conhecimentos, como as ciências da natureza, que será a aplicação desenvolvida, fazendo com que o educando possa usar maneiras diferentes de pensamento através de situações-problema que os levem a refletir que a Matemática está presente em diferentes áreas do conhecimento.

O objetivo central da presente pesquisa é desenvolver o estudo dos logaritmos, com uma abordagem investigativa que pode levar o aluno a aprender um assunto que para ele é de difícil compreensão. Essa metodologia pode ajudar em todo processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Este trabalho parte de informações históricas, faz uma complementação da abordagem didática dos logaritmos nos livros didáticos de modo a estimular o aluno a questionar, perguntar e contextualizar esse conteúdo em outras áreas.

Apresentamos a seguir, a forma como conduziremos o assunto abordado nesta pesquisa.

No capítulo 1, apresentamos um estudo histórico dos logaritmos (Resenha Histórica). Trata-se de uma visão de como foi o surgimento e o desenvolvimento dos logaritmos.

No capítulo 2, introduzimos a definição de logaritmos, as consequências da definição e posteriormente as suas propriedades e suas respectivas demonstrações.

No capítulo 3, abordamos algumas aplicações práticas dos logaritmos. Por fim, através de atividades e suas respectivas soluções, colocamos em prática o assunto abordado.

No capítulo 4, descrevemos uma aplicação bastante interessante dos logaritmos, conhecida como Lei de Benford, que funciona na avaliação de suspeita de fraudes, sonegação de impostos, entre outros.

Finalmente, no capítulo 5, realizamos as considerações finais em relação ao tema abordado.

Capítulo 1

Resenha Histórica

Segundo Boyer (1974), Jobst Bürgi, um relojoeiro suíço, a serviço do Duque de Hesse-Kassel, foi o primeiro a formar uma concepção sobre logaritmos. O método dos logaritmos naturais foi proposto pela primeira vez em 1614, em um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos) e em 1619 *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (Uma Construção da Maravilhosa Regra dos Logaritmos) escrito por John Napier, Barão de Merchiston na Escócia, quatro anos após a publicação de sua memorável invenção. Este método contribuiu para o avanço da ciência, especialmente a astronomia, fazendo com que cálculos muito difíceis se tornassem possíveis.

O aparecimento dos logaritmos ocorreu no começo do século XVII, quando já era premente a necessidade de facilitar os trabalhosos cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação. A ideia básica era substituir operações muito complicadas, como multiplicação e divisão, por operações mais simples, como adição e subtração. Os principais inventores dos logaritmos foram o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e John Napier, este nasceu em 1550, no castelo de Merchiston perto de Edimburgo, Escócia. Os trabalhos dos dois foram produzidos independentemente um do outro. De acordo com Boyer (1974):

> *Ficou sugerido, até agora, que a invenção do lagaritmo foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer. Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suiça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua* Descriptio*. A obra de Bürgi apareceu em Praga num livro intitulado* Arithmetische Und Geometrische Progress Tabulen*, e isso indica que as influências que guiaram seu trabalho foram semelhantes às que operaram no caso de Napier. Os dois partiram das propriedades da sequências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método de prostaférese.*

Anterior à invenção de calculadoras e computadores, os logaritmos eram constantemente usados em observações, navegação e outros ramos da matemática prática. Além de sua imensa utilidade na realização de cálculos práticos, os logaritmos também têm um papel muito importante em matemática teórica. De início, Napier chamou os logaritmos de “números artificiais” e os antilogaritmos de “números naturais”. Mais tarde, Napier formou a palavra logaritmo, para significar um número que indica uma razão: $\lambda\gamma\varsigma$ (logos) que significa razão, e $\alpha\rho\iota\theta\mu\varsigma$ (arithmos) significando número. Napier escolheu dessa forma porque a diferença entre dois logaritmos determina a razão entre os números dos quais eles são tomados, de forma que uma série aritmética de logaritmos corresponde a uma série geométrica de números.

O termo antilogaritmo foi introduzido no final do século XVII e, apesar de nunca ter sido usado muito na matemática, persistiu em coleções de tabelas até não ser mais usado. Napier não usou uma base como a concebemos hoje, mas seus logaritmos eram na base $\frac{1}{e}$. Para facilitar interpolações e cálculos, é útil fazer a razão r na série geométrica próximo de 1. Napier escolheu $r = 1 - 10^{-7} = 0,999999$, e Bürgi escolheu $r = 1 + 10^{-4} = 1,0001$.

Os logaritmos originais de Napier não tinham $\log 1 = 0$, em vez disso, tinham $\log 10^7 = 0$. Desse modo, se N é um número e L é seu logaritmo, tal qual calculado por Napier.

Segundo Boyer (1974):

> *A chave da obra de Napier pode ser explicada muito simplesmente. Para conservar próximo os termos numa progressão geométrica de potências inteiras do número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de 1. Napier por isso escolheu como seu número dado $1-10^7$ (ou $0,999999999$. Assim os termos na progressão de potências crescentes ficam realemente próximos - próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilibrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é, se $N = 10^7\left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^L$, então L é o "logaritmo"de Napier do número N.*

As primeiras tábuas de logaritmos de Napier apareceram em 1614, em Edimburgo, ao passo que as de Bürgi só apareceram em 1620, em Praga, onde ele trabalhou como assistente de Kepler. Portanto, quando Bürgi publicou suas tábuas, as de Napier já eram conhecidas em toda a Europa. No entanto, é provável que Bürgi tivesse concebido os logaritmos antes mesmo de Napier.

Os logaritmos foram reconhecidos como uma invenção realmente extraordinária, logo após a publicação de Napier em 1614.Convém mencionar que esses primeiros logaritmos neperianos tinham sérios inconvenientes e foram logo modificados por ele mesmo e por Henry Briggs (1561-1631), um dos primeiros e mais ardentes entusiastas do trabalho de Napier. O resultado foi o aparecimento dos logaritmos de Briggs, ou logaritmos decimais. Briggs publicou sua primeira tábua em 1617, depois, em 1624 uma versão bem mais ampliada.

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração. Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações.

Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como prostaférese, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia.

O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots, b^n, \ldots$ os termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$ então, ao produto de dois termos da primeira progressão, $b^m.b^p$, está associada a soma $m + p$ dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo:

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Para efetuar, por exemplo, $256 \cdot 32$, basta observar que:

- 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;
- 32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira;
- como 8+5=13, 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, $256 \cdot 32 = 8192$ resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica, ao que parece, de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos. Juntos, elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

Durante anos, ensinou-se a calcular com logaritmos na escola média ou no início dos cursos superiores de matemática. Também, por muitos anos, a régua de cálculo logarítmica foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário.

O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.

Segundo Dante (2011), com o advento das calculadoras eletrônicas, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não é mais uma dificuldade. Nem por isso, os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoentes (mérito do inglês John Wallis em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (do galês Wiliam Jones em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Euler e os Logaritmos

Na Matemática, o número de Euler, denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. As variantes do nome do número incluem: número de Napier, constante de Néper, número neperiano,constante matemática, número exponencial, entre outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618, na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$ke^r = \lim_{n\to\infty}\left(k\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)$$

para $r = k = 1$, ou seja

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ou ainda, substituindo-se n por $\frac{1}{h}$

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Cujo valor é aproximadamente $2,718281828459045235360287$.

Figura 1.1: Leonhard Euler

Um encontro memorável

Segundo Hygino H. Domingues (*apud* Iezzi (1990)) em campos como a astronomia, a navegação, o comércio e a engenharia, de um modo geral, a necessidade de métodos e instrumentos de cálculo cada vez mais rápidos e acurados vem se acelerando naturalmente ao longo dos tempos. Quatro invenções, principalmente, marcam as etapas em que essa demanda eclodiu em grandes avanços matemáticos: a notação indo-arábica, a forma decimal, os logaritmos e, nos nossos tempos, os computadores.

Os logaritmos representaram, para a época em que surgiram (primeira metade do século XVII), guardadas as proporções, o mesmo que os computadores representam para o nosso tempo. Sua finalidade inicial era unicamente facilitar os cálculos longos e exaustivos, além de sujeitos a muitos erros, em que os astrônomos, por exemplo, gastavam grande parte de seu tempo.

Assim é que o sucesso dos logaritmos na comunidade científica foi imediato e total. Inclusive a figura do autor de tão brilhante invento, o Sr. John Napier (Neper em latim) como não poderia deixar de ser, tornou-se desde logo objeto de curiosidade, tanto mais por se tratar de um proprietário rural da distante Escócia, e não de um luminar universitário ou coisa que o valha.

Foi na esteira desse êxito que Neper recebeu a notícia de que seria visitado (em 1615) pelo eminente professor de geometria da Universidade de Oxford, Henry Briggs (1556-1630). E, afinal, de quem seria a honra maior? Conta o historiador F. Cajori que Briggs se atrasou na viagem e Neper queixou-se a um amigo comum: “Ah, John, o Sr. Briggs não virá!". Neste exato momento bateram à porta e Briggs encontrou. Levaram quase um quarto de hora se abraçando, sem dizer uma palavra. Por fim Briggs começou: “Senhor fiz esta longa viagem exclusivamente para vir conhecê-lo e saber por que razões de talento e engenhosidade o senhor foi o primeiro a pensar nesses excelentes auxiliares da astronomia, os logaritmos, mas, meu caro, tendo sido descobertos pelo senhor, eu me admiro como ninguém o fez antes, agora que sabemos que seria tão fácil".

Nesse encontro, Briggs sugeriu a Neper o uso da base 10, já que este último partira de uma ideia diferente para sua definição de logaritmo. Napier respondeu que já tinha pensado nisso e achava boa a ideia. Estavam nascendo, assim, os logaritmos comuns ou decimais. Mas Neper morreria em 1617 e assim não teria tempo de levar a cabo essa tarefa. Boyer (1974) corrobora a mesma história:

> *A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admirados mais entusiásticos estava Henri Briggs, o primeiro “Savilian professor"de geometri em Oxford. Em 1615 ele visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de* 10*, e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava.[...] Os dois homens finalmente concordaram em que o logaritmo de um deveria ser zero e que o lagaritmo de dez deveria ser um. Mas Napier já não tinha energia suficiente para por em prática essas ideias. Morreu em 1617.*

Em 1624, Briggs publicou sua *Arithmetica logarithmica*, um trabalho que continha uma tabela dos logaritmos comuns, com 14 casas decimais, dos números 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Enquanto Briggs elaborava suas tabelas, John Speidell calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas, publicando-os em 1619.

Se naquele tempo Napier, Briggs e outros estavam certos em privilegiar a base 10, a verdade é que muita coisa mudou de lá para cá. As tábuas de logaritmos, por exemplo, já não têm mais utilidade. Os computadores estão aí para oferecer rapidez e segurança nos cálculos. Assim, no que toca aos logaritmos, o que importa hoje são certas propriedades funcionais da função logaritmo e de sua inversa a função exponencial. E, nesse sentido, deve-se privilegiar, isto sim a base $e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + ... = 2,7182...$

Capítulo 2

Definições e Consequências

Abordamos neste capítulo, o estudo de logarítmos, desde sua definição até suas consequências e propriedades operatórias, bem como suas demonstrações.

2.1 Definição de Logaritmo

Segundo Boyer (1974), os logaritmos foram criados por John Napier (1550-1617) e desenvolvidos por Henry Briggs (1531-1630); foram introduzidos no intuito de facilitar cálculos mais complexos. Através de suas definições podemos transformar multiplicações em adições, divisões em subtrações, potenciações em multiplicações e radiciações em divisões.

Dados dois números reais positivos a e b, onde $a \neq 1$ e $a > 1$ e $b > 0$, existe somente um número real x, tal que $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$.

Temos:

a = base do logaritmo

b = logaritmando

x = logaritmo

Lê-se: O logaritmo de b na base a é igual a x , ou ainda, $\log$ de b na base a é x.

É importante lembrar que o logaritmo é um número, independente da forma que está apresentado, ou seja, o logaritmo de um número, também é um número.

Segundo Elon Lima (apud Dante (2011)) um matemático de hoje acha que a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, ocupam uma posição central na Análise Matemática por causa de suas propriedades funcionais, especialmente a equação diferencial $x' = c.x$, que descreve a evolução de grandezas que, em cada instante, sofrem variação proporcional ao valor naquele instante. Exemplos de grandezas com essa propriedade são um capital empregado a juros compostos, uma população (de animais ou bactérias), a radioatividade de uma substância, resfriamento de corpo entre outras.

2.2 Equivalência Fundamental e Condição de Existência

Para que o logaritmo exista é necessário que a seguinte equivalência chamada de **equivalência fundamental** seja verificada:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a, \tag{2.1}$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$.

Consequências da definição:

Consequência 2.2.1 $\log_b 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

Demonstração:

Aplicando a equivalência fundamental temos: $b^c = 1$. Mas pelas propriedades de potenciação temos que $x^0 = 1$ para $x \neq 0$. Então $b^0 = 1$. Ou seja, qualquer número elevado a zero é um, desde que este número seja diferente de zero, caso contrario chega-se a uma forma indeterminada (neste estudo não trataremos de indeterminações), então: $b^c = 1 = b^0$ e assim, $c = 0$. Aqui se aplica a propriedade do cancelamento das bases. Ou seja, quando numa equação as bases forem iguais podemos igualar os expoentes.

Consequência 2.2.2 $\log_b b = c \Leftrightarrow c = 1$

Demonstração:

$b^c = b$

$c = 1$

Portanto, quando o logaritmando for igual à base, o logaritmo será 1 .

Consequência 2.2.3 $\log_b(a)^b = c \Leftrightarrow c = b$

Demonstração:

$a^c = a^b$

$c = b$

Consequência 2.2.4 $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Demonstração:

$\log_a b = x = \log_a c$

$a^x = b$ e $a^x = c$

Logo: $b = c$

Consequência 2.2.5 $a^{\log_a b} = c \Leftrightarrow c = b$

Demonstração:

Definindo

$$\log_a b = y \tag{2.2}$$

temos $a^y = c$, assim a equação acima pode ser reescrita como:

$$\log_a c = y \tag{2.3}$$

Igualando (2.2) com (2.3) , temos:

$\log_a b = \log_a c$

$b = c$

2.3 Propriedades dos Logaritmos

É importante lembrarmos que a definição e a condição de existência são sempre aplicadas.

Propriedade 2.3.1 ***(prostaférese)***

$$\log_c(A.B) = \log_c A + \log_c B \tag{2.4}$$

Demonstração:

A primeira propriedade chama-se prostaférese, que significa a transformação de um produto numa soma. Ela pode ser demonstrada de duas formas, primeiro partindo do lado direito ou partindo do lado esquerdo da igualdade (2.4).

Partindo do lado direito da igualdade (2.4). Se x é um número real, então podemos escrever x como uma soma de logaritmos.

$x = \log_c A + \log_c B$

$c^x = c^{\log_c A + \log_c B}$

$c^x = c^{\log_c A}.c^{\log_c B}$

Aplicando a Consequência 2.2.5 no lado direito da igualdade:

$c^x = A.B$

Agora aplicando a equivalência fundamental (2.1):

$\log_c(A.B) = x$

Portanto, $\log_c(A.B) = \log_c A + \log_c B$.

Propriedade 2.3.2 $\log_b A^n = n.\log_b A$

Demonstração:

Esta propriedade decorre imediatamente da primeira Propriedade (2.3.1).

$A^n = A.A.A...A$ (n vezes A)

Então, aplicando a Propriedade 2.3.1:

$\log_b(A.A.A...A) = \log_b A + \log_b A + ... + \log_b A$ (ou seja, a soma enésima do $\log_b A$)

Portanto, $\log_b(A.A.A...A) = n.\log_b A$

Propriedade 2.3.3 *Esta propriedade consiste na transformação de uma diferença em um quociente, ou vice e versa. Notemos que a ordem do logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador não pode ser alterada. Ou seja, o logaritmo que ficar com sinal negativo será o denominador.*

$$\log_c\left(\frac{A}{B}\right) = \log_c A - \log_c B \tag{2.5}$$

Demonstração:

Admita x como um número real e que possamos escrever x como uma diferença de logaritmos.

$x = \log_c A - \log_c B$

$c^x = c^{\log_c A - \log_c B}$

$c^x = c^{\log_c A}.c^{-\log_c B}$

$c^x = c^{\log_c A}.c^{\log_c B^{-1}}$

$c^x = A.B^{-1}$

$c^x = \frac{A}{B}$

Aplicando a equivalência fundamental temos:

$$\log_c\left(\frac{A}{B}\right) = x$$

Portanto,

$$\log_c\left(\frac{A}{B}\right) = x = \log_c A - \log_c B \tag{2.6}$$

Propriedade 2.3.4 ***(Mudança de base)*** $\log_b A = \dfrac{\log_c A}{\log_c b}$, $c > 0, c \neq 1$

Chamamos esta propriedade de mudança de base, pois é justamente o que se faz, quando for útil trocarmos a base do logaritmo para a simplificação do cálculo

Ou seja, escolhemos uma base qualquer (que seja útil) desde que seja maior que zero e diferente de um.

Demonstração:

Admita que possamos escrever um número x como a razão de dois logaritmos, isto é:

$x = \dfrac{\log_c A}{\log_c b}$

Então utilizando as propriedades vistas anteriormente, chegamos à:

$x. \log_c b = \log_c A$

$c^{x \log_c b} = c^{\log_c A}$

$c^{\log_c b^x} = c^{\log_c A}$

$b^x = A$

Aplicando a equivalência fundamental:

$\log_b A = x$

Portanto $\log_b A = x = \dfrac{\log_c A}{\log_c B}$

Propriedade 2.3.5 *Esta propriedade nos diz que ao invertermos o logaritmo, a base troca de lugar com o logaritmando.*

$\log_b A = \dfrac{1}{\log_A b}$

Demonstração:

$\log_b A = x$

$\dfrac{\log_A A}{\log_A b} = x$

$\dfrac{1}{\log_A b} = x$

Portanto $\log_b A = x = \dfrac{1}{\log_A b}$

Propriedade 2.3.6 *Esta propriedade nos diz que dado um produto de dois logaritmos onde a base de um for igual ao logaritmando do outro, então podemos transformar este produto num único logaritmo.*

$\log_b A. \log_A c = \log_b c$

Demonstração:

$\log_b A. \log_A c = x$

Mas, $\log_A c = \dfrac{\log_b c}{\log_b A}$

Então, substituindo:

$\log_b A.\dfrac{\log_b c}{\log_b A} = x$

Logo , $x = \log_b c$.

Propriedade 2.3.7 $\log_{b^x} A = \dfrac{1}{x}.\log_b A$

Demonstração:

Esta propriedade é demonstrada da mesma forma que as provas anteriores junto com a Propriedade (2.3.4).

$\log_{b^x} A = \dfrac{\log_A A}{\log_A b^x} = \dfrac{1}{x.\log_A b} = \dfrac{1}{x}.\log_b A$

Capítulo 3

Aplicações dos Logaritmos

Neste capítulo, introduzimos algumas aplicações de logaritmos no nosso cotidiano. Sugerimos ainda, algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos.

3.1 pH e pOH

Segundo Harris (2005), o pH é o símbolo para a grandeza físico-química potencial hidrogeniônico ou potencial de hidrogênio, que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.

O termo pH foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. A letra "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e a letra "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).

pH é a sigla para potencial hidrogeniônico. pH é o negativo do $\log$ de base 10 da concentração molar de íons hidrogênio (H+)

$$pH = -\log[H+]$$

Exemplo: a concentração molar por litro do suco gástrico é $[10^{-1}]mol/l$. Qual seria seu pH?

$pH = -\log[H+]$

$pH = -\log[10^{-1}]$

Usando a Propriedade 2.3.2.

$$pH = --1\log[10]$$

No caso o exponete -1 irá multiplicar o -1 já presente.

Como a base do logaritmo é dez, então:

$$pH = \log[10] = 1$$

O pH do suco gástrico é 1. Se o expoente do logaritmando for negativo, o pH será positivo.

pOH é o símbolo para potencial hidroxiiônico. Para encontrar o valor do pOH , calculamos o valor do negativo do logaritmo de base 10 da concentração molar de hidroxilas [OH-] da solução.

$$pOH = -\log[OH-]$$

Escala de pH

A escala de pH foi criada pelos químicos. Ela é eficaz para classificar as substâncias em ácidas ou básicas. Assim, se soluções a 25 °C tem pH variando de 0 até um valor inferior a 7 será uma solução ácida, se o pH for um valor superior a 7 e inferior a 14 a solução será uma base e se a solução tiver um pH de 7 a solução será neutra.

Quando o valor da concentração molar hidrogeniônica da solução: [H+] for grande o valor do pH será pequeno. Quando o valor do pH for pequeno, o valor da concentração hidrogeniônica: [H +] será grande.

Escala de pOH

Os valores de pH e pOH somados resultam 14, ou seja: pH + pOH = 14, como pode-se observar na Figura 3.1.

3.2 Meia Vida

A meia-vida é a quantidade de tempo característica de um decaimento exponencial. Se a quantidade que decai possui um valor no início do processo, na meia-vida a quantidade terá metade deste valor.

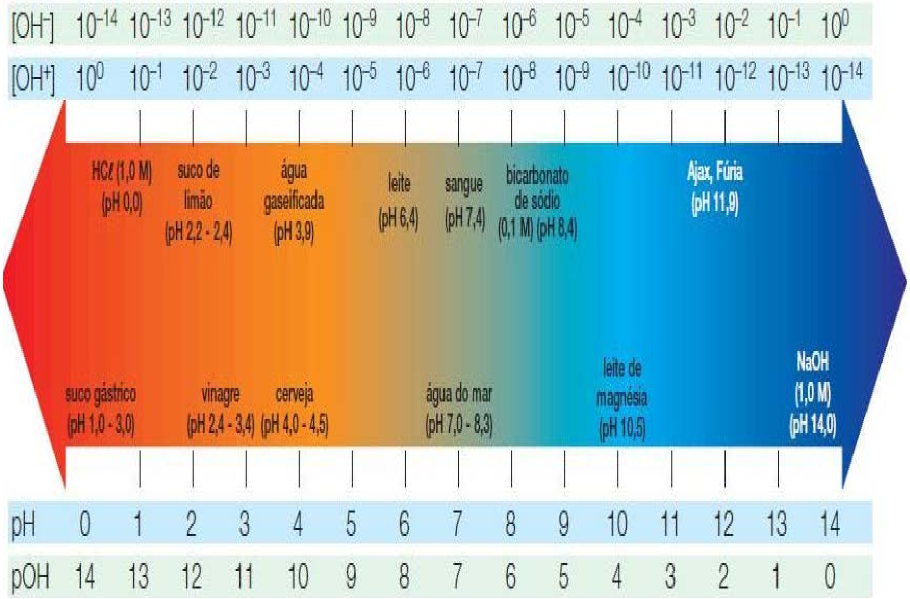

Figura 3.1: Representação da Escala de pH

Nos processos radioativos meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100 kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos; depois desses 100 anos, teremos 50 kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25 kg e assim sucessivamente.

No caso do carbono-14 a meia-vida é de 5.730 anos, ou seja, este é o tempo necessário para uma determinada massa deste isótopo instável decair para a metade da sua massa, transformando-se em nitrogênio-14 pela emissão de uma partícula beta. Esta medida da meia-vida é utilizada para a datação de fósseis.

Alguns elementos possuem meia-vida muito baixa, mesmo para os seus isótopos menos instáveis. Alguns elementos transurânicos (elementos com número atômico acima de 92) apresentam meias-vida de 1 segundo enquanto o Urânio-238 apresenta meia-vida de aproximadamente 5.000.000.000 anos que é a idade calculada da Terra.

A equação que gera a desintegração radioativa de uma substância é dada por $M = M_0 \cdot e^{-\lambda t}$ onde M é a massa da substância, M_0 é a massa da substância no início da contagem do tempo, λ é uma constante chamada constante de desintegração (taxa anual de desintegração) e t o tempo em anos.

Exemplo 1

Uma determinada substância se desintegra a uma taxa de 2% ao ano. A massa da substância estará reduzida à metade em quantos anos?

Dado: $ln2 = 0,69$ onde $\ln x$ é o logaritmo na base natural. Queremos calcular t para o qual $M = \frac{M_0}{2}$

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-0,02t}$$

$$e^{-0,02t} = \frac{1}{2}$$

$$-0,02t \cdot \ln e = (-1) \cdot \ln 2$$

$$-0,02t = -0,69 \Rightarrow t = 34,5$$

Exemplo 2

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2 % ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a equação dada por $M = M_0.e^{-\lambda t}$, em que M é a massa da substância, λ é a taxa e t é o tempo em anos.

$$200 = 1000 \cdot e^{-0,02t}$$

$$\frac{200}{1000} = e^{-0,02t}$$

$$\frac{1}{5} = e^{-0,02t}$$

(aplicando definição)

$$-0,02t = \log_e \frac{1}{5}$$

$$-0,02t = -\log_e 5$$

$$-0,02t = -\log_e 5$$

$$0,02t = \log_e 5$$

$$t = \frac{\log_e 5}{0,02}$$

$$t = \frac{1,6094}{0,02}$$

$$t = 80,47$$

A substância levará 80,47 anos para se reduzir a 200 g.

3.3 Escala Richter

Segundo Henrique (2006), em 1935, para comparar os tamanhos relativos dos sismos, Charles F. Richter, sismólogo americano, formulou uma escala de magnitude baseada na amplitude dos registros das estações sismográficas. O princípio básico da escala é que as magnitudes sejam expressas na escala logarítmica, de maneira que cada ponto na escala corresponda a um fator de 10 vezes na amplitude das vibrações. Por isso é usado o logaritmo de base 10, onde ele classifica cada grau da escala em 1,2,3... em vez de falar 10,100,1000.... o que dificultaria mais o processo para o cálculo. No entanto o modo de classificá-lo através da escala usada é bem fácil de se trabalhar, correspondendo assim que se houver um abalo de magnitude 4,0 ele será dez vezes maior que o de magnitude 3,0, cem vezes maior que o de magnitude 2,0, mil vezes maior que o de magnitude 1,0.

É importante relatar que cada ponto na escala de magnitude corresponde a uma diferença da ordem de 30 vezes na energia liberada. Ou seja um abalo de magnitude 4 libera 30 vezes mais energia que o de magnitude 3. A escala Richter é uma escala logarítmica a magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas de tipo P (pressão máxima) e S (superficial) a 100 Km do epicentro. Existem várias fórmulas diferentes para se calcular a magnitude Richter, dependendo do tipo da onda sísmica medida no sismograma.

Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935:

$\log E = 11,8 + 1,5M$

Onde,

E = energia liberada em ergs ($1erg = 10^7 J$, onde J é Joules)

M = magnitude do terremoto

As indicações $M1$ e $M2$, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionados pela fórmula:

$$M1 - M2 = \log_{10}\left(\frac{E1}{E2}\right)$$

Onde E1 e E2 são as medidas de energia liberada pelos terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

3.4 Outras Aplicações

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. Iremos através de exemplos demonstrar a utilização das técnicas de logaritmos na busca de resultados para as variadas situações em questão.

Exemplo 1 (Matemática Financeira) Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Resolução: No caso de tempo e juros compostos,o uso de logaritmo é fundamental. Fórmula para o cálculo: $M = C \cdot (1+i)^t$. De acordo com a situação problema, temos:

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% = 0,035

t = ?

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$3500 = 500 \cdot (1+0,035)^t$$

$$\frac{3500}{500} = 1,035^t$$

$$1,035^t = 7$$

Aplicando logaritmo

$$\log 1,035^t = \log 7$$

$$t \cdot \log 1,035 = \log 7$$

(utilize tecla log da calculadora científica)

$$t \cdot 0,0149 = 0,8451$$

$$t = \frac{0,8451}{0,0149}$$

$$t = 56,7$$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

Exemplo 2 (Geografia) Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base $= P_0$

População após um ano $= P_0 \cdot (1,03) = P_1$

População após dois anos $= P_0 \cdot (1,03)^2 = P_2$

População após x anos $= P_0 \cdot (1,03)^x = P_x$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$$P_x = 2.P_0$$

$$P_0 \cdot (1,03)^x = 2 \cdot P_0$$

$$1,03^x = 2$$

Aplicando logaritmo

$$\log 1,03^x = \log 2$$

$$x \cdot \log 1,03 = \log 2$$

$$x \cdot 0,0128 = 0,3010$$

$$x = \frac{0,3010}{0,0128}$$
$$x = 23,5$$

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

3.5 Atividades de Logaritmos

Estas atividades tem por objetivo demonstrar as aplicabilidades das propriedades logarítmicas mencionadas no Capítulo 2, bem como o uso deste tema nos mais variados assuntos multidisciplinares. Acreditamos, ainda, que esta lista de atividades possa ser utilizada por professores em suas aulas para contextualizar o uso de logaritmos no cotidiano.

Para a elaboração desta lista de atividades usamos como referência Dante (2011), Elon Lages Lima (2006), Iezzi (1990), Paiva (2005), Bianchini and Paccola (2004), Giovanni and Bonjorno (2000) e James Stewart and Watson (2001).

Atividade 3.1 *Transparência luminosa (Uerj)- Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar* $\frac{4}{5}$ *da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de* 10% *da original, foi necessário utilizar* n *filtros. Considerando* $\log 2 = 0,301$*, qual o menor valor de* n*?*

Comentário da questão:

Cada filtro deixa passar $\frac{4}{5}$ *da intensidade da luz que nele incide, usando* n *filtros, passará* $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ *da luz incidente.*

O objetivo é reduzir essa intensidade a menos de 10% *da original. Logo:*

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{10}{100}$$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^n < \frac{1}{10}$$

$$\log\left(\frac{8}{10}\right)^n < \log\frac{1}{10}$$

$$n(\log 8 - \log 10) < \log 1 - \log 10$$

$$n(3\log 2 - 1) < 0 - 1$$

$$n(-0,097) < -1$$

$$n > \frac{1}{0,097}$$

$$n > 10,3$$

Portanto, o menor valor de n *é* 11.

Atividade 3.2 *O pH de uma solução é definido por* $pH = \log\frac{1}{[H^+]}$ *, sendo* $[H^+]$ *a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Calcule o pH de uma solução que tem* $[H^+] = 12.10^{-8}$ *íons-grama por litro. (Use* $\log 2 = 0.30$ *e* $\log 3 = 0.48$.*)*

Atividade 3.3 *Multidisciplinar com progressão geométrica (Uerj) - Um soldado fez* n *séries de flexões de braço, cada uma delas com* 20 *repetições. No entanto, como consequência das alterações da contração muscular devidas ao acúmulo de ácido lático, o tempo de* *duração de cada série, a partir da segunda, foi sempre 28% maior do que o tempo gasto para fazer a série imediatamente anterior. A primeira série foi realizada em 25 segundos e a última em 1 minuto e 40 segundos. Considerando $\log 2 = 0,3$, qual a soma do número de repetições realizadas nas n séries?*

Comentário da questão:

Precisamos usar a relação da PG: $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Os tempos são de 25 segundos (inicial) e 100 segundos (final - 1min 40s), respectivamente, e o aumento do tempo de duração de cada série, que é sempre 28% maior que o anterior. Queremos um aumento, basta fazer $100\% + 28\% = 128\% = 1,28$ é o valor da razão (q) para a PG acima. Temos:

$$100 = 25.(1,28)^{n-1}$$

$$4 = (1,28)^{n-1}$$

Agora, precisamos inserir o logaritmo, para resolver:

$$\log 4 = \log(1,28)^{n-1}$$

$$\log 2^2 = (n-1).\log(1,28)$$

$$2.\log 2 = (n-1).\log\frac{128}{100}$$

$$2.(0,3) = (n-1).(\log 128 - \log 100)$$

(usamos nesse caso a regra da divisão no $\log$)

$$0,6 = (n-1).(\log 2^7 - \log 10^2)$$

$$0,6 = (n-1).(7\log 2 - 2\log 10)$$

$$0,6 = (n-1).(2,1-2,0)$$

$$\frac{0,6}{0,1} = n-1$$

$$n = 6+1$$

$$n = 7$$

Assim, temos 7 séries de 20 repetições cada , em um total de 140.

Atividade 3.4 *Relacionar conhecimentos sobre logaritmos para cálculo de pH.*

A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta $pH = 2,3$. Considerando $\log 2 = 0,3$, qual a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em $mol.L^{-1}$?

Comentário da questão:

A concentração de íons hidrogênio pode ser denotada como $[H^+]$.

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

$$2,3 = -\log_{10}[H^+]$$

$$-2,3 = \log_{10}[H^+]$$

$$10^{-2,3} = [H^+]$$

$$10^{-0,3}.10^{-2} = [H^+]$$

$$\frac{1}{10^{0,3}}.\frac{1}{10^{2}} = [H^+]$$

Como $\log_{10} 2 = 0,3$*, tem-se que* $10^{0,3} = 2$*. Logo:*

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{10} = [H^+]$$

$$[H^+] = \frac{1}{200}$$

$$[H^+] = 0,005mol.L^{-1}$$

Atividade 3.5 *Relacionando com dígitos de uma calculadora*

(UERJ) - Em uma calculadora científica de 12 *dígitos quando se aperta a tecla* $\log$*, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO.*

Depois de digitar 42 *bilhões, qual o número de vezes que se deve apertar a tecla* $\log$ *para que, no visor, apareça ERRO pela primeira vez?*

Comentário da questão:

Veja $10^{10} < 42.10^9 < 10^{11}$*, ou seja,* $x = \log 10^{10} < \log 42.10^9 < \log 10^{11}$*.*

Apertando a tecla $\log$ *pela primeira vez, o resultado é igual a:* $10 < x < 11$*.*

Note que $10 < x < 11$ *temos* $\log 10 < \log x < \log 11$*, portanto,* $1 < \log x < 2$*.*

Isso significa que quando apertarmos a tecla $\log$ *pela segunda vez aparece como resultado um número entre 1 e 2. Digamos que* $1 < y < 2$*.*

Temos agora $1 < y < 2$*, então* $\log 1 < \log y < \log 2$*, mas isso significa* $0 < \log y < 1$*, portanto, quando se aperta a tecla* $\log$ *pela terceira vez, aparece um número entre 0 e 1. Digamos que esse número seja* z*, tal que* $0 < z < 1$*.*

Quando apertar a tecla $\log$ *pela quarta vez o número* z *(*$\log z = w$*), ou seja,* $10^w = z$*. O resultado do logaritmo é negativo (*$w < 0$*).*

Quando apertamos a tecla $\log$ *pela quinta vez, sendo* $w < 0$*, aparecerá a palavra ERRO, pois os logaritmos são definidos quando o logaritmando é positivo.*

Resposta: Deve-se apertar a tecla $\log$ 5 *vezes.*

Atividade 3.6 *Relacionando com juros compostos.*

Qual é o tempo necessário para que um capital inicial empregado a taxa de 2% *ao mês de juros compostos, que são capitalizados mensalmente, dobre de valor? (Considere:* $\log 1,02 = 0,0086$ *;* $\log 2 = 0,3010$*).*

Comentário da questão:

Na Matemática financeira o regime de juros compostos é o mais usado. Neste regime o montante M *e o capital inicial* C *estão relacionados pela equação* $M = C(1+i)^n$*, onde* n *é o número de meses.*

Como queremos $M = 2C$*, segue que* $2C = C(1,02)^n$*. Daí, vem que* $(1,02)^n = 2$*.*

Logo, n *é o logaritmo de* 2 *na base 1,02.*

Mudando da base $1,02$ *para a base* 10 *(decimal), temos que:*
$n = \dfrac{\log 2}{\log(1,02)} = \dfrac{0,3010}{0,0086} = \dfrac{3010}{86} = 35$ *meses.*

Atividade 3.7 *Interdisciplinar com Geografia.*

O IDH - Índice de Desenvolvimento Humano - é um número entre 0 *e* 1*, calculado pela média aritmética de três índices: de educação, de expectativa de vida ao nascer e do PIB em dólares. Com base nesses dados e na comparação entre os países, é possível analisar a qualidade de vida e o desenvolvimento humano no planeta. O cálculo do índice do PIB é feito através da seguinte fórmula:*

$$\text{Índice do PIB} = \frac{\log \quad (PIB \quad per \quad Capita) - \log 100}{\log 40000 - \log 100}$$

onde PIB per capita é o valor da renda per capita do país analisado, em dólar; 40000 *dólares é o valor máximo de renda per capita no mundo.*

Um país que tenha o índice do PIB igual a 0,79, possui quanto de PIB per capita aproximado? (Dados $\log 2 = 0,30$*;* $\log 3 = 0,48$ *;* $\log 5 = 0,70$*).*

Comentário da questão:

Os logaritmos decimais $\log 100 = 2$ *e* $\log 1000 = 3$*.*

Segue que $\log 40000 = \log(8 \times 5 \times 1000) = \log 2^3 + \log 5 + \log 1000 = 3\log 2 + \log 5 + 3$*.*

Assim, $\log 40000 = 3(0,3) + 0,7 + 3 = 0,9 + 3,7 = 4,6$*.*

Seja x o PIB per capita. Na fórmula dada, ficamos com:

$0,79 = \dfrac{(\log x - \log 100)}{(\log 40000 - \log 100)} = \dfrac{(\log x - 2)}{(4,6-2)} = \dfrac{(\log x - 2)}{2,6}$.

Portanto, $\log x - 2 = 0,79.(2,6) = 2,054$*, implicando em,* $\log x = 2,054 + 2 = 4,054 = 4$.

Como $\log x = 4$*, concluimos que o PIB per capita* $x = 10^4 = 10000$ *dólares, aproximadamente.*

Atividade 3.8 *O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t, é dado pela função $N(t) = N_0.e^{xt}$, em que N_0 é o número inicial de bactérias e x é a taxa de crescimento. Se a taxa de crescimento é de 5% ao minuto, em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o dobro da inicial? (Dado:* $\ln 2 = 0.6931$*)*

Comentário da questão:

A população pedida é $2N_0$. Substituindo os valores indicados, temos:

$$N(t) = N_0.e^{0,005t}$$

$$N(t) = 2N_0$$

$$N_0.e^{0,005t} = 2N_0$$

$$e^{0,005t} = 2$$

$$0,005t = \log_e 2$$

$$0,005t = \ln 2$$

$$0,005t = 0,6931$$

$$t = \frac{0,6931}{0,005} \approx 13,862min$$

Atividade 3.9 *(UNICAMP-2007) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0.2^{bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.*

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b.

Resposta: $b = \dfrac{1}{29}$.

b) Dada uma concentração inicial P_0, de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0.

Considere $\log_2 10 = 3.32$.

Resposta: $67,28$ *anos.*

Atividade 3.10 *A teoria da cronologia do carbono, utilizada para determinar a idade de fósseis, baseia-se no fato de que o isótopo do carbono 14 (C-14) é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio e que a quantidade de C-14 na atmosfera é a mesma que está presente nos organismos vivos. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa, e a quantidade de C-14 presente no fóssil é dada pela função $C(t) = C_0.10^{nt}$, onde t é dado em anos a partir da morte do organismo, C_0 é a quantidade de C-14 para $t = 0$ e n é uma constante. Sabe-se que 5600 anos após a morte, a quantidade de C-14 presente no organismo é a metade da quantidade inicial (quando $t = 0$). No momento em que um fóssil foi descoberto, a quantidade de C-14 medida foi de $\dfrac{C_0}{32}$. Tendo em vista estas informações, calcule a idade do fóssil no momento em que ele foi descoberto.*

Resposta: $t = 28000$ *anos.*

Atividade 3.11 *O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+. Qual o pH de uma solução cuja concentração de H_3O^+ é $4.5.10^{-5} mol/l$?*

Resposta: $pH = 4,357$.

Atividade 3.12 *Calcule a meia-vida de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de 4% ao ano. (Meia-vida é o tempo que deve decorrer para que, em certo momento, metade dos átomos de uma substância radioativa se desintegre.)*

Resposta: $t \approx 17,3anos$.

Atividade 3.13 *Uma pessoa coloca* $R\$1000,00$ *num fundo de aplicação que rende, em média,* $1,5\%$ *a.m. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo* $R\$1300,00$*? (Use a calculadora)*

Resposta: $t \approx 17,6meses$.

Atividade 3.14 *A intensidade* I *de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre* $I = 8$ *até* $I = 8,9$ *para maior terremoto conhecido.* I *é dado pela fórmula:* $I = \dfrac{2}{3}\log_1 0\dfrac{E}{E_0}$ *na qual* E *é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e* $E_0 = 7.10^{-3}$ *kwh.*

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

Resposta: $E = 7.10^9 kwh$.

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Resposta: $E' = E.10\sqrt{10}$.

Atividade 3.15 *São necessários 5 anos para que o cobalto-60 perca a metade de sua radioatividade. Qual é a porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de 20 anos?*

Resposta: $N(t) = N_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$, $N(20) = 6,25\%.N_0$.

Atividade 3.16 *Com base na Figura 3.2, o comprimento da diagonal AC do quadrilátero ABCD, de lados paralelos aos eixos coordenados é:*

Resposta: $4\sqrt{5}u$.

Atividade 3.17 *Para uma onda plana de Nível de Intensidade Sonora (NIS) de 40 [dB] (decibéis), deslocando-se pelo ar, calcule a sua intensidade I (W/m2), sabendo-se que:* $NIS[dB] = 10\log\dfrac{I_{onda}}{I_{ref}}$, *com* $I_{ref} = 10^{-12}W/m^2$ *.*

Resposta: $10^{-8}W/m^2$.

Atividade 3.18 *Prove que o número* 4444^{4444} *tem mais de 15500 algarismos em sua representação decimal. A seguir com auxílio de uma calculadora, determine o número exato de algarismos.*

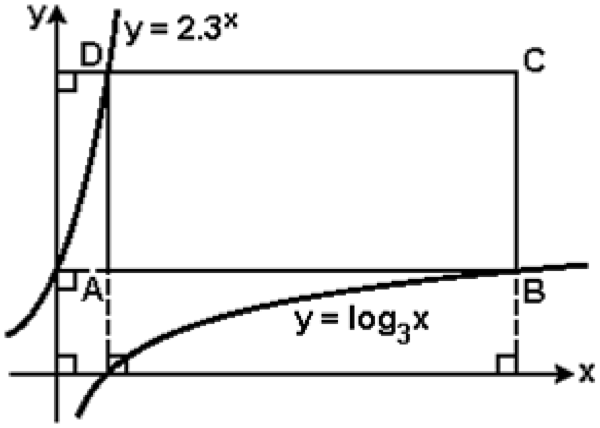

Figura 3.2: Atividade 3.16

Resposta: 16621 *algarismos.*

Atividade 3.19 *Quando um corpo aquecido permanece em um ambiente com temperatura constante (o corpo, tendo massa muito menor do que a do ambiente, não afeta a temperatura deste), a Lei do Resfriamento de Newton afirma que a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variacão proporcional a essa própria diferenca. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto ás 23 horas. O medico da polícia chegou às 23 : 30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8°. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1. A temperatura do quarto era mantida constante a 20°. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva e 36,5°.*

Resposta: 21h e 15 minutos.

Atividade 3.20 *Em uma colônia de bactérias, a cada meia hora, o número de bactérias dobra. Se inicialmente havia 500 bactérias, após quanto tempo haverá 500.000 bactérias, aproximadamente? Considere* $\log 2 = 0,3$.

Resposta: $t = 10$ *intervalos de meia hora* $= 300$ *minutos* $= 5$ *horas.*

Capítulo 4

Lei de Benford

Segundo Ribeiro et al. (2006), a Lei de Benford é também conhecida como "Primeira Lei dos Dígitos", "Primeiro Fenômeno do Dígito" ou "Fenômeno Principal do Dígito", é uma ferramenta poderosa e relativamente simples para apontar a suspeita de fraudes, sonegação de impostos, contabilistas medíocres e erros de digitação.

A maioria das pessoas supõem que em uma amostra de números aleatórios de alguma fonte de dados, o primeiro dígito não-zero poderia ser todo número de 1 a 9 e todos os nove seriam considerados igualmente prováveis. Percebeu que em amostras aleatórias de dados reais os números de 1 à 9 no primeiro dígito de um número não obedeciam a distribuição mais intuitiva, de $\frac{1}{9}$, porém os números menores apareciam com maior frequência, o dígito 1 aparece quase $\frac{1}{3}$ das vezes.

Em 1881, Sr. Simon Newcomb (1835-1909), astrônomo, matemático e escritor canadense, que trabalhou no United States Naval Observatory, em Washington, observou primeiramente o fenômeno das primeiras páginas dos livros de logaritmos da biblioteca que começavam com o número 1 se encontravam mais sujas e mais gastas que as demais. No mesmo ano em um breve artigo no jornal americano de matemática, Newcomb afirmou que a ocorrência de dígitos segue um distribuição particular de probabilidade. Newcomb neste artigo especulava a probabilidade de um número aparecer como o primeiro dígito seria de $\log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$, ele intitulou este artigo como "Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers".

Mas o Dr. Frank Albert Benford Jr (1887-1948), engenheiro elétrico e físico norte-

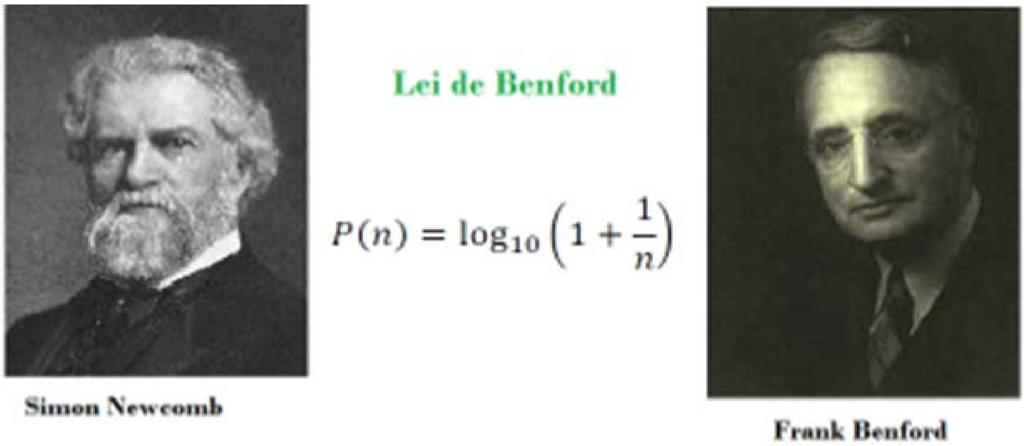

Figura 4.1: Simon Newcomb e Frank Benford

americano, que trabalhou na empresa General Eletric de 1910 a 1948 foi o responsável pela redescoberta e a generalização do trabalho de Newcomb, para o que ficou conhecida como Lei de Newcomb-Benford, indo mais além, aplicando a fórmula em uma variedade de números para detectar o fenômeno da ocorrência dos dígitos. Podemos dizer que o Sr. Newcomb foi o primeiro a verificar esta anomalia, entretanto foi o Dr. Benford quem decidiu se aprofundar e aplicar sua descoberta em dados reais.

Em 1995, Theodore P. Hill, professor do Institute of Techonology Georgia e Universidade de Washington, publicou uma demonstração matemática rigorosa e nela mostrou que os números da sequência de Fibonacci obedecem rigorosamente à lei.

Enunciamos agora esta lei:

"Dizemos que um conjunto satisfaz à Lei de Benford se o dígito inicial $d(d \in \{1, ..., 9\})$ ocorre com a seguinte probabilidade:

$$P(d) = \log_{10}(d+1) - \log_{10} d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

A Figura 4.2 mostra o cálculo dessas probabilidades para esses números.

Apesar de se aplicar a lei de Newcomb-Benford a diversos fenômenos, é importante destacar algumas limitações dessa técnica que não funciona para dados como números gerados aleatoriamente, como por exemplo os números do sorteios de loterias, lançamentos de dados, listagem de números aleatórios, conjuntos de números de telefone de uma cidade, em pequenas quantidades numéricas e com datas. A lei de Newcomb-Benford

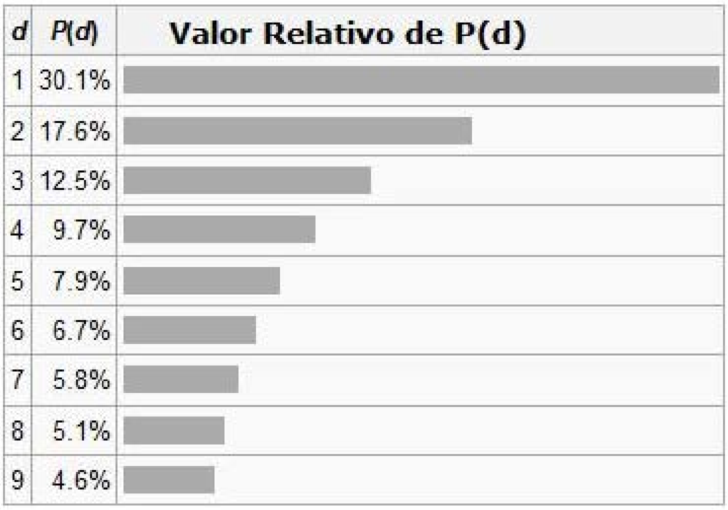

Figura 4.2: Valor Relativo de $P(d)$

também não funciona com números arredondados mas poderá denunciar o arredondamento.

4.1 Aplicações

4.1.1 Sucessão das potências de 2

Consideremos a sucessão das potências de 2, $(2, 2^2, 2^3, ...)$, e tomemos os primeiros dígitos dessas potências, vemos que obedecem à lei de benford. Para verificar isso, tomemos uma amostra dessa sucessão, suponha os números de 2 até 2^{100}, vejamos as que começam com o dígito 1:

$2^4 = 16$

$2^7 = 128$

$2^{10} = 1024$

$2^{14} = 16384$

$2^{17} = 131072$

$2^{20} = 1048576$

...

$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$

Um fato interessante é que as potências obedecem à uma P.A. de razão alternando na sequência $3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 4, ...$, ou seja, temos 32 potências que começam com o algarismo 1, isso dá 32% dos casos, veja como esse valor se aproxima da lei, se continuássemos esse processo veríamos que esse valor se aproximaria de $30,1\%$.

4.1.2 Sequência de Fibonacci

Os primeiros dígitos da sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$ também obedecem à lei de benford. No caso dos 100 primeiros números da sequência temos a Tabela 4.1.

DÍGITO	OCORRÊNCIA	PROBABILIDADE
1	30	30%
2	18	18%
3	13	13%
4	9	9%
5	8	8%
6	6	6%
7	5	5%
8	7	7%
9	4	4%

Tabela 4.1: 100 primeiros números da sequência

No caso da sequência com os 10.000 primeiros elementos temos a Tabela 4.2.

Note que os valores se aproximam dos valores da lei.

4.1.3 Contabilidade: Auditoria Fiscal

Uma importante aplicação da Lei de Benford (porque não dizer a principal) é na Auditoria Fiscal, esse ramo da contabilidade examina se existem fraudes nas contas de em-

DÍGITO	OCORRÊNCIA	PROBABILIDADE
1	301	30.1%
2	177	17.7%
3	125	12.5%
4	96	9.6%
5	80	8.0%
6	67	6.7%
7	56	5.6%
8	53	5.3%
9	45	4.5%

Tabela 4.2: 10000 primeiros números da sequência

presas, bancos, instituições, e se utilizam da lei de Benford para checar se os dados são verídicos ou se foram inventados. Foi Mark Nigrini, professor The College of New Jersey e da Universidade do Sul de Methodist em Dallas, Texas, que abriu caminho para a aplicação da Lei de Benford à sonegação de imposto e a detecção de fraudes. Nos EUA, evidências baseadas na Lei de Benford é legalmente admissível em casos criminais de níveis federais, estatais e locais.

Na prática, a aplicação da lei de Benford a detecções de fraudes geralmente usam mais do que o primeiro dígito.

A lei de Benford (ou teorema de Hill) possui, precisamente pela sua generalidade, aplicações inimagináveis. Em primeiro lugar, no teste de modelos matemáticos: se construírmos um modelo, por exemplo, para prever evoluções de cotações de Bolsa ou dados demográficos e o conjunto de números que obtemos não satisfaz a lei de Benford, essa é uma boa indicação de que os dados obtidos não são fiáveis - e de que o modelo não é realista. Outro exemplo é a concepção de computadores. Se os números que os computadores tratam não se distribuem uniformemente (e há generalizações da lei de Benford para um número de algarismos superior ao primeiro), podemos tirar partido desse facto ao desenhar um processador aritmético. Em suma: podemos tirar partido de o algarismo 9 aparecer muito menos frequentemente do que o 1. Podemos fazer essas constatações em Hill (1996).

O exemplo mais espectacular é sem dúvida a aplicação da lei de Benford à fiscalização de impostos e à auditoria financeira. A observação essencial é a seguinte: dados contabilísticos reais constantes das declarações fiscais satisfazem com probabilidade 1 a lei de Benford. O que se verifica é que as pessoas são, do ponto de vista da lei de Benford, ruins em inventar dados, pois dados fictícios fabricados pela mão humana raramente satisfazem a lei de Benford - talvez por razões psicológicas: pela falsa intuição de que a distribuição do primeiro algarismo é uniforme.

TIPO DE DADOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lei de Benford	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6
Dados fiscais verídicos	30,5	17,8	12,6	9,6	7,8	6,6	5,6	5,0	4,5
Dados fraudulentos	0,0	1,9	0,0	9,7	61,2	23,3	1,0	2,9	0,0

Figura 4.3: A lei de Benford no combate à fraude fiscal

Há assim a possibilidade de utilizar a lei de Benford para detectar eventuais fraudes fiscais, como observou Mark Nigrini na sua tese de doutoramento (orientada por Hill) em 1992. Se uma declaração de IRS ou IRC possui, nos números que apresenta, desvios estatisticamente significativos à lei de Benford, é provável que os dados sejam fictícios no todo ou em parte. Ou seja, existe uma probabilidade acima do nível de acaso de se tratar de fraude fiscal. Ou seja, a administração fiscal deve investigar esse contribuinte.

O sistema proposto por Nigrini não é uma hipótese acadêmica: está já em vigor nos EUA desde 1998. É que a lei de Benford já não é uma observação empírica plausível: tem agora a dignidade de um teorema matemático. Os resultados são significativos: na tabela 2 mostram-se dados reais de declarações americanas de IRS fraudulentas detectadas por este processo, comparadas com os dados de 91 022 declarações verídicas.

Nigrini publicou nos Estados Unidos, em 2002, o livro Digital Analysis Using Benford's Law, em que propõe a aplicação deste método a auditorias financeiras. Baseado nestes resultados, Nigrini é hoje consultor de administrações fiscais de vários países, entre os quais a Holanda, procurando introduzir este sistema. Não sabemos se Portugal se encontra entre esses países; em todo o caso, essa possibilidade seria uma forma estatisticamente muito relevante de combate à evasão fiscal, a custo econômico e político virtualmente zero.

4.2 Generalização da Lei de Benford

Nas aplicações mencionamos que os números de Fibonacci seguem a Lei de Benford. Mas, de um certo modo, a Lei de Benford é subjetiva, uma vez que ela depende da base 10 na qual representamos nossos números. Em alguma base b com $b \neq 10$, os dígitos não nulos são os elementos do conjunto $\{1, ..., b-1\}$, e a Lei de Benford na base b diz que a frequência do primeiro dígito significativo i é $B_b(i) = \log_b\left(1 + \frac{1}{i}\right)$. Os números de Fibonacci seguem a Lei de Benford em qualquer base b. A Lei de Benford é invariante por mudanças de bases. E é a única lei de probabilidade não trivial que é invariante por mudanças de bases.

A função densidade da Lei de Benford é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 10}, & 1 \leq x < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $P(a \leq M < b)$ representa a probabilidade que $a \leq M < b$, então isto significa dizer que

$$P(a \leq M < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Isso é realmente uma generalização da Lei de Benford, pois

$$\begin{aligned} B(i) = P(i \leq M < i+1) &= \int_i^{i+1} \frac{1}{x \ln 10} dx \\ = \frac{1}{\ln 10}(\ln(1+i) - \ln(i)) &= \frac{1}{\ln 10} \ln\left(\frac{1+i}{i}\right) \\ = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{i}\right)}{\ln 10} &= \log\left(1 + \frac{1}{i}\right) \end{aligned}$$

A Lei de Benford é fascinante: ela desafia nossa intuição e é algo que você pode testar por si mesmo como adaptá-la em uma atividade em sala de aula. Pode parecer uma mera curiosidade, mas ela é agora usada como uma ferramenta para e detectar fraudes. Naturalmente, mais e mais sonegadores de impostos aprendem sobre ela. Mas, preste atenção: o primeiro dígito significativo não é a única coisa com a qual se é preciso preocupar. A lei de Benford generalizada permite obter uma lei para o segundo dígito significativo, para o terceiro dígito significativo, etc. Você pode tentar descobri-la sozinho: pense em quais uniões de intervalos a mantissa de um número deveria estar para que o seu segundo dígito significativo seja i.

Formulando a lei para o segundo dígito:

$$P(d_2 = k) = \sum_{d=1}^{9} \log\left(1 + \frac{1}{d_1.d_2}\right), k = 0, 1, 2, ..., 9.$$

Denotando d_1 como o primeiro dígito e d_2 como o segundo dígito.

Por exemplo, $k = 3$:

$$P(d_2 = 3) = \log\left(1 + \frac{1}{13}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{23}\right) + ... + \log\left(1 + \frac{1}{93}\right)$$

Para maiores aprofundamentos, sugerimos o artigo de Rousseau (2005), traduzido por Humberto José Bortolossi.

Capítulo 5

Conclusão

Esperamos com este trabalho que o conteúdo de logaritmos possa tornar-se um assunto mais acessível aos alunos, sempre de maneira clara e objetiva. Acreditamos ainda que, realizando uma abordagem voltada para aplicações em fenômenos naturais, tende-se a tornar a aprendizagem mais prazerosa e a facilitar a compreensão dos discentes.

Propomos uma lista de atividades, mostrando suas importantes aplicações no cotidiano, que podem ser utilizadas por docentes para a condução do assunto como forma de aprimorar o processo ensino-aprendizagem. Tais atividades contribuem para o ensino multidisciplinar, uma vez que, o assunto está relacionado a diferentes áreas de estudo.

Devido a sua grande aplicabilidade, os logaritmos nunca morrerão. A principal dessas razões é de natureza teórica. Embora os logaritmos tenham sido inventados como ferramenta para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis Matemáticas e vários fenômenos naturais, e mesmo sociais, são estreitamente relacionados com esse tema.

Referências Bibliográficas

Bezerra, M. J. (1965). *Curso*. São Paulo: Nacional.

Bianchini, E. and Paccola, H. (2004). *Matemática*. São Paulo: MODERNA.

Boyer, C. B. (1974). *Historia da Matemática*. Edgard Blucher LTDA.

Dante, L. R. (2011). *Contexto e Aplicações*. Ática.

David Lide, T. and Francis (2008). *CRC Handbook of Chemistry and Physics. 88.ed*. Boca Raton, FL.

Elon Lages Lima, P.C.P. Carvalho, E. e. A. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. SBM.

Eves, H. t. H. H. D. (1995). *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Unicamp.

Giovanni, J. R. (2003). *Matemática: Uma Nova Abordagem*. São Paulo:FTD.

Giovanni, J. R. and Bonjorno, J. R. (2000). *Matemática Completa*. São Paulo:FTD.

Harris, D. C. (2005). *Medida do pH com um eletrodo de vidro*. Rio de Janeiro: LTC.

Henrique, C. A. P. (2006). Logaritmos e terremotos: Aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos. Technical report, UNESP-Centro Universitário Metropolitano de São Paulo.

Hill, T. (1996). *The First-Digit Phenomenon*. American Scientist 86, pp. 358-363.

Iezzi, G. (1990). *Matemática*. Atual.

James Stewart, L. R. and Watson, S. (2001). *Precáculo: Matemáticas para el cálculo*. I.T.P. Latin America.

Lima, E. L. (2006). *Logaritmos*. SBM.

Paiva, M. (2005). *Matemática. Volume Único.* São Paulo: Moderna.

PCN, 2000 (2000). *Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio. Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Ribeiro, J. C., Monteiro, G. B., dos Santos, J., and da Silveira Galvão, K. (2006). Aplicação da lei de newcomb-benford na auditoria. Technical report, Universidade Federal de Pernambuco.

Rousseau, C. (2005). A lei de benford: aprendendo a fazer ou a detectar fraudes? Technical report, Universite de Montreal. Departement de mathematiques et de statistique.