FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

MÁRCIO DE CASTRO ALHADAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY
RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
AGOSTO - 2013

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

MÁRCIO DE CASTRO ALHADAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
AGOSTO - 2013

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

MÁRCIO DE CASTRO ALHADAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 21 de Agosto de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Geraldo de Oliveira Filho, D.Sc. - UENF

Profª. Joviana Sartori de Souza, D.Sc. - UFF

Profª. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esta dissertação a minha mãe (in memoriam), a minha esposa e minha filha.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado oportunidade e força para a conclusão do curso e deste trabalho. Aos amigos de mestrado e aos professores do PROFMAT-UENF; pelo companheirismo, pelas inúmeras horas de estudo, ideias, ajudas, sugestões e bons conselhos. A minha esposa Elaine, minha filha Marianna, todos meus familiares e amigos, que durante toda esta caminhada foram privados de minha presença e, mesmo assim, não mediram esforços para esta realização. Ao meu orientador, Prof. Rigoberto, pelo apoio que me deu e pelas numerosas sugestões que fez, que muito melhoraram este trabalho.

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

RESUMO

A presente dissertação é uma proposta didática que visa a introdução de noções de Funções Hiperbólicas, na matriz curricular de matemática do Ensino Médio. Teve-se como objetivos apresentar as definições de funções hiperbólicas, discutir um pouco a história do seu surgimento e desenvolvimento e suas propriedades, verificando suas semelhanças e suas relações com as funções trigonométricas circulares, também trazendo aplicações, como determinar, por exemplo, a forma exata da curva assumida por um cabo homogêneo flexível, de densidade uniforme, suspenso pelas duas extremidades, sob a ação da gravidade; Essa curva, conhecida como catenária, que é bem descrito pelo cosseno hiperbólico. A introdução na matriz curricular seria possível, uma vez que os alunos, especificamente do 3º ano do Ensino Médio, já têm o conhecimento das funções exponenciais, as funções trigonométricas circulares, bem como suas relações, e também o conhecimento do estudo das secções cônicas, especificamente a hipérbole. Essa inserção seria bastante facilitada com o uso de softwares livres, como Geogebra e Winplot.

Palavras-chave: Funções Hiperbólicas, Educação Matemática, Catenária, Informática na Educação.

ABSTRACT

This dissertation is a didactic proposal aimed at introducing notions of Hyperbolic Functions, in the scope of high school mathematic curriculum. Objectives were to present definitions of hyperbolic functions, discuss part of the history of its creation and development, its properties, noting its similarity and their relationships with the circular trigonometric functions, also bringing applications, how to determine for example, the exact shape of the curve assumed by a homogeneous flexible cable, of uniform density, suspended by both ends, under the action of gravity; This curve known as catenary, which is well described by hyperbolic cosine. The introduction into the curriculum matrix would be possible, once the students, specifically the third year of high school already has the knowledge of exponential functions, the circular trigonometric functions as well as their relationships and the knowledge of the study of conic sections, specifically the hyperbole. This insertion would be fairly easy with the use of free software, Geogebra and Winplot.

Keywords: Hyperbolic Functions, Mathematics Education, Catenary, Computers in Education.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Segundo (PCN (2001)) "aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação".

Ao longo do ensino médio são apresentados aos alunos aspectos gerais das funções, como notação, domínio, imagem e gráficos. E também são desenvolvidas a leitura e a interpretação de gráficos.

Então a partir da formalização destes conceitos, há um tratamento específico das funções afim, quadrática, polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométricas. Quando abordamos as funções trigonométricas circulares, poucas vezes são citadas a existência de outro tipo de funções similares, por exemplo, as hiperbólicas.

Com a introdução desse tópico na matriz curricular do Ensino Médio, funções hiperbólicas, levaria o aluno a conhecer e fazer uma comparação entre as funções trigonométricas circulares e hiperbólicas, e também observar algumas de suas aplicações. Como por exemplo, o caso de um fio suspenso por dois postes, que sofre os efeitos da gravidade. Observando a curva formada por esse fio e erroneamente classificando-a como parábola, quando na verdade se trata de uma catenária, que é bem descrito pelo cosseno hiperbólico.

Por outro lado, na maioria dos livros do ensino médio, quando falamos de funções trigonométricas circulares não mostramos por quê levam o nome de circulares. E com a inclusão das funções hiperbólicas, mostrando que o porquê da nomenclatura de hiperbólica, levaríamos a exposição das diferenças e semelhanças, reforçando a propriedade das funções trigonométricas circulares.

O outro aspecto que leva a sugestão da inserção desse assunto é que se trata de um tópico trabalhado na graduação, em disciplinas como Cálculo I, onde esses alunos teriam menos dificuldade em lidar com essas funções se já tiverem um prévio conhecimento das mesmas, e segundo o artigo 22 da (LDB (2011)), "A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores". Descobrirão também que alguns problemas do cotidiano podem ser resolvidos com a ajuda das funções hiperbólicas.

E segundo a (LDB (2011)), no artigo 35 : "O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.".

O objetivo deste trabalho é a inserção do estudo das funções hiperbólicas na matriz curricular do Ensino médio com a intenção de possibilitar ao aluno o reconhecimento das inter-relações entre vários campos da Matemática, e com outras áreas do conhecimento, proporcionando a este aluno conhecimentos básicos que lhe permitiriam continuar seus estudos. Para mostrarmos a viabilização desta inserção este trabalho que foi organizado e desenvolvido da seguinte forma:

No capítulo 2, é apresentado um resumo histórico, desde o surgimento do problema da corrente conjecturado por Galileu, até o tratamento sistemático feito por Lambert para as funções hiperbólicas.

O capítulo 3 traz a parte conceitual, como definições de seno e cosseno no círculo, as funções circulares e seus respectivos gráficos e também a definição para circunferência, segundo a Geometria Analítica.

No capítulo 4, vamos buscar definir, formalmente, as principais funções hiperbólicas, esboçar seus gráficos e investigar algumas de suas propriedades, inclusive a geração da hipérbole através dessas funções.

Já no capítulo 5, discutiremos e demonstraremos as principais identidades trigonométricas, tanto circulares quanto hiperbólicas, e mostraremos as suas semelhanças.

No capítulo 6, apresentaremos algumas aplicações para as funções trigonométricas e hiperbólicas , definições para parabóla e catenária, e atividades propostas aos alunos sobre o tema deste trabalho.

No capítulo 7, apresentaremos a conclusão sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Resenha Histórica

No presente capítulo, faremos um breve relato sobre a vida dos matemáticos envolvidos no estudo e na evolução das funções hiperbólicas.

2.1 Galileu Galilei

Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa, em 1564. Aos 17 anos de idade, foi encaminhado pelos pais a Universidade de Pisa, para estudar medicina, onde estudou até 1585. Com sua grande aptidão para a matemática, solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se a ciência e a matemática. Morreu cego em janeiro de 1642, de acordo com (Eves (2004)).

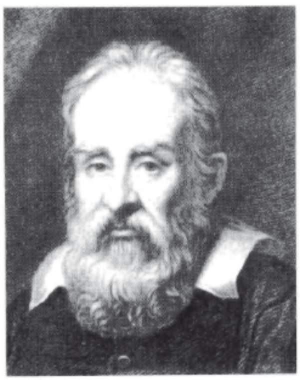

Figura 2.1: Galileu Galilei

Galileu propôs descrever matematicamente a forma da curva formada por uma corda ou corrente flexível, mas não elástica, suspensa entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade. Erroneamente conjecturou que a curva fosse uma parábola.

Figura 2.2: Corrente - Situação observada por Galileu

2.2 Christiaan Huygens

Huygens nasceu em Haia, em 14 de abril de 1629, em uma rica e influente família holandesa, Figura(2.3), tendo sido o segundo filho de Constantijn Huygens, um diplomata, que tinha estudado filosofia. Era também poeta, compositor e músico, e foi por meio dele que Christiaan teve contato com alguns dos mais proeminentes matemáticos e cientistas da época. Huygens recebeu educação em casa até completar 16 anos de idade, Seu pai lhe garantiu uma educação liberal típica de uma família aristocrática europeia: recebeu educação em música, latim, grego, francês, inglês, italiano, história, geografia, matemática e lógica.

Mostrou, em 1646, aos 17 anos, que a conjectura de Galileu sobre a corrente era falsa, pois aquela curva não se tratava de uma parábola.

A intenção era que quando Christiaan terminasse seus estudos de direito, seguisse uma carreira diplomática, mas a matemática o atraiu mais. Em 1654, Huygens voltou à casa de seu pai em Haia, e até 1666, uma mesada fornecida por seu pai lhe permitiu dedicar-se inteiramente ao estudo das ciências naturais e matemática. Faleceu em Haia, em 8 de julho de 1695.

Figura 2.3: Christiaan Huygens

2.3 Vincenzo Riccati

Riccati nasceu em Castelfranco Veneto, em 11 de Janeiro 1707; foi um jesuíta italiano, matemático e físico, Figura(2.4). A principal pesquisa de Riccati foi continuar o trabalho de seu pai, Jacopo Riccati, em análise matemática, especialmente nos campos das equações diferenciais e Física.

Desenvolveu as funções hiperbólicas, em meados do século XVIII. Ricatti estudou funções hiperbólicas e as empregou para obter soluções de equações cúbicas. Ele também descobriu as fórmulas de adição padrão, semelhantes às identidades trigonométricas, para as funções hiperbólicas. Abordagem Ricatti foi a de não começar com a definição. Em vez disso, ele descobriu a relação entre as funções hiperbólicas e a função exponencial. Seu trabalho foi publicado entre 1757 e 1767. Segundo (Eves (2004)), Ricatti usava $Sh.$ e $Ch.$ como a notação para o seno e cosseno hiperbólico, e utilizava as siglas semelhantes de Sc e Cc para as funções circulares, seno e cosseno.

Atualmente, há um acordo geral de que Ricatti introduziu o estudo das funções hiperbólicas. Faleceu em Treviso no dia 17 de janeiro de 1775.

2.4 Jakob Bernoulli

Jacob Bernoulli nasceu na Basileia, em 27 de dezembro de 1654; foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

Figura 2.4: Vincenzo Riccati

Em 1690, Jakob relançou o problema da corrente de Galileu à comunidade científica no *Acta Eruditorum*, que foi uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782.

Segundo (Katz (1998)),a resolução do problema foi publicada independentemente porém muito parecidas, em 1691 por Jean Bernoulli, Leibniz e Huygens.

A solução de Hygens era usando a geometria e a solução de Jean Bernoulli e Leibniz usaram o cálculo diferencial, e chegando bem próximo a equação da catenária que em notação moderna, que seria $y = \dfrac{e^a + e^{-a}}{2a}$, onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente, conforme (Maor (2008)).

Jakob faleceu na Basileia em 16 de Agosto de 1705.

Figura 2.5: Jakob Bernoulli

2.5 Gottfried Wilhelm von Leibniz

Leibniz nasceu em Leipzig, no dia 1 de julho de 1646. Foi filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão, considerado junto com Isaac Newton (1643-1727) como os inventores do Cálculo. A curva da corrente suspensa, do problema de Galileu, foi batizada de catenária por Leibniz, originada da palavra latina "catena"que significa cadeia. Faleceu em Hanover, no dia 14 de novembro de 1716.

Figura 2.6: Gottfried Wilhelm von Leibniz

2.6 Johann Bernoulli

Johann Bernoulli nasceu na Basileia, em 27 de julho de 1667; foi um matemático suíço, Figura(2.7). Estudou inicialmente medicina. Seu irmão Jakob Bernoulli ensinou-lhe matemática. Juntos, dominaram as obras de Leibniz e rapidamente estavam em condições de fazerem as suas próprias contribuições. Faleceu na Basileia, em 1 de janeiro de 1748.

2.7 Johann Heinrich Lambert

Lambert nasceu em Mulhouse, 26 de Agosto de 1728. Foi autodidata radicado na Alemanha, Figura(2.8). Tornou-se perito em matemática, enquanto ajudava o seu pai como alfaiate na Alsácia.

É conhecido por várias atribuições, tendo sido responsável pelo primeiro tratado sobre as funções trigonométricas em um documento apresentado à Academia de Ciências

Figura 2.7: Johann Bernoulli

de Berlim, em 1761, que rapidamente se tornou famoso. Em sua *Mémoire Sur Quelques Propriétés Remarquables Des Quantités Transcendantes Circulaires et Logarithmiques*, ele apresenta as funções hiperbólicas, mas este artigo tornou-se famoso não por causa das funções hiperbólicas, mas devido a uma prova explícita que π é irracional. Em 1768, Lambert publicou seu trabalho relativo às funções hiperbólicas, em que ele fez o primeiro desenvolvimento sistemático de sua teoria. Assim Lambert ficou associado com funções hiperbólicas, da mesma forma que seu colega na academia de Berlim, Leonard Euler (1707-1783) está associado a funções circulares.

Segundo Boyer (2012), o tratamento que Euler deu para as funções circulares, Lambert fez o mesmo para as funções hiperbólicas, fornecendo conceitos e notações modernas. Comparações entre as coordenadas do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ tinham fascinado os matemáticos por um século. Lambert comparou as funções transcendentes circulares $\operatorname{sen} u$ e $\cos u$, com suas expressões análogas "*Quantitiés Transcendantes Logarithmiques*",

$$\frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2}$$

Funções as quais ele tratou explicitamente na sua forma funcional e como série de potência, mas não as nomeou por cosseno hiperbólico e seno hiperbólico respectivamente. Isso ocorreu mais tarde em sua *"Observations Trigonométriques"* de 1768, em que ele faz uma comparação dos quocientes das funções trigonométricas e hiperbólicas:

$$\frac{\mathrm{sen}(\phi)}{\cos(\phi)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{senhyp}(\phi)}{\mathrm{coshyp}(\phi)}$$

Assim, Lambert introduziu as notações $\mathrm{senh}(\phi)$, $\cosh(\phi)$ e $\tanh(\phi)$ para os equivalentes hiperbólicos das funções circulares da trigonometria e ajudou a popularizar a trigonometria hiperbólica. Faleceu em 25 de Setembro de 1777.

Figura 2.8: Johann Heinrich Lambert

2.8 Gerard Mercator

Mercator nasceu em Rupelmonde, município belga de Kruibeke, em Flandres, em 05 março de 1512 e faleceu em 2 de dezembro de 1594. Embora as funções hiperbólicas não tenham sido introduzidas até por volta do final da década de 1750. Quase 200 anos antes, Gerhard Kremer fez a primeira e uma das mais importantes aplicações de funções que hoje conhecemos como hiperbólica. Kremer foi um geógrafo flamenco que era mais conhecido por seu nome latino, Gerard Mercator.

Em 1569, publicou seu mapa de projeção de Mercator. A projeção resultou na elaboração de um mapa em que uma linha reta sempre fez um ângulo igual com cada meridiano. Este foi um grande avanço na navegação e é usado hoje em todos os gráficos de profundidade de navegação do mundo. No entanto, quando publicou seu trabalho, foi deixado para os outros a descobrir que as fórmulas que ele usou foram ligados às funções hiperbólicas, de acordo (Katz (1998)).

O interesse em funções hiperbólicas aumentou com a invenção e comercialização de eletricidade. O uso disseminado de electricidade começou em meados de 1850 com o

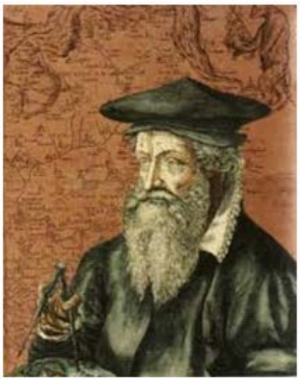

Figura 2.9: Gerhardus Mercator

desenvolvimento de telégrafos. Isto foi seguido pelo telefone, pela luz elétrica, bem como a necessidade da indústria para alimentação. Usinas geradoras e linhas de transmissão começaram a atravessar a América e esta transmissão de energia elétrica, através de cabos suspensos, envolve a catenária, aplicação de funções hiperbólicas. Finalmente, durante as primeiras décadas de 1900, as aplicações das funções hiperbólicas podem ser encontradas em algumas disciplinas científicas.

Capítulo 3

Funções Trigonométricas Circulares

Neste capítulo, vamos buscar definir, formalmente, a circunferência, as funções trigonométricas circulares e esboçar seus gráficos. Mostraremos também as propriedades dessas funções que as fazem levar o nome de circulares.

3.1 Circunferência

Nesta seção, vamos definir, segundo (SBM (2012)) a circunfência.

Definição 3.1 *Uma circunferência é o conjunto de todos os pontos em um plano, equidistante de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de* ***centro*** *e a distância fixa é chamada de* ***raio*** *da circunferência.*

Para obtermos a equação da circunferência tendo centro em $C(a, b)$ e raio r, usaremos o teorema a seguir.

Teorema 3.1 *A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada por:*

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Portanto utilizando a definição de circunferência e o teorema (3.1), temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *A circunferência com centro no ponto $C(a, b)$ e raio r tem como equação:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

As demonstrações dos teoremas (3.1) e (3.2) será omitida e pode ser encontrada de forma detalhada em Leithold (1994). Segue abaixo um esboço da circunferência de equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

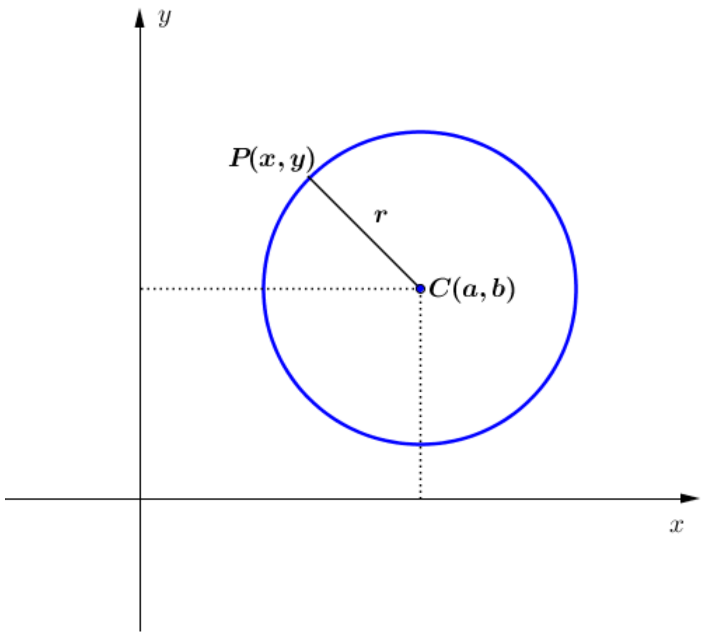

Figura 3.1: Circunferência

3.2 Funções Trigonométricas Circulares

Antes de definirmos as relações e funções trigonométricas, discutiremos as medidas de arcos e ângulos. Medir um arco ou um ângulo, isto é compará-lo com outro de medida unitária. Primeiro vamos definir ângulo, segundo (do Carmo et al. (2005)).

Definição 3.2 *O ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os **lados** do ângulo e a origem comum é seu **vértice**.*

Para medir um ângulo, como no exemplo (3.2), usamos duas principais medidas, que são:

- O *grau* (usamos o símbolo ^{0}) padrão mais utilizado na Geometria Plana, que é o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.

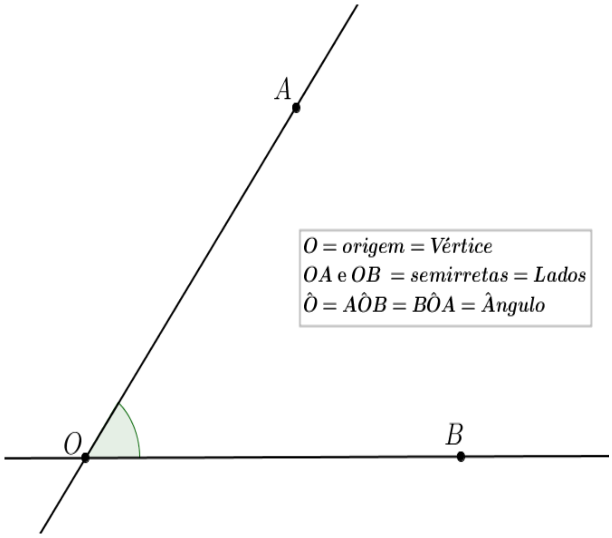

Figura 3.2: Ângulo

- O *radiano* (escrevemos *rad*) é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido. Um radiano equivale a aproximadamente $57,3^0$.

Então, definido o ângulo e suas unidades de medidas, iremos para as definições das funções trigonométricas circulares, e para isso usaremos uma circunferência de centro na origem do plano cartesiano, isto é $C(0,0)$, e raio igual a 1, que será chamada de **circunferência unitária**, com equação $x^2 + y^2 = 1$, como mostra a Figura (3.3).

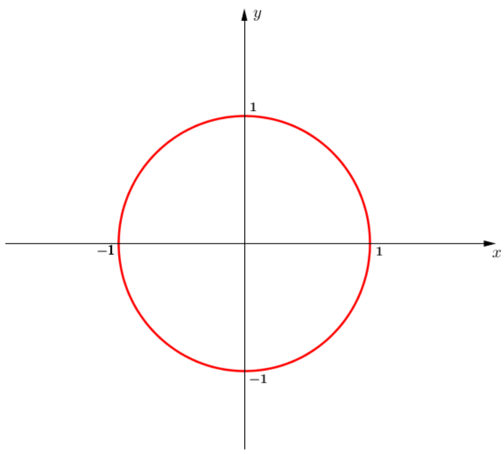

Figura 3.3: Circunferência Unitária

Segundo (SBM (2012)), como se sabe desde o ensino fundamental, num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos

b e c, conforme Figura (3.4), têm-se as definições:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

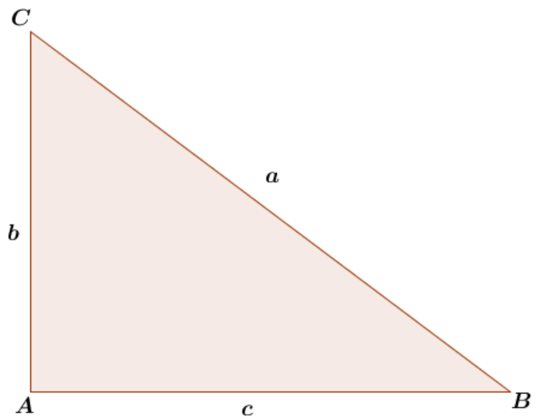

Figura 3.4: Triângulo Retângulo

e analogamente, $\cos \hat{C} = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{sen} \hat{C} = \dfrac{c}{a}$.

Com essas relações, definimos o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. Devemos observar que $\cos \hat{B}$ e $\operatorname{sen} \hat{B}$ dependem apenas do ângulo $\hat{B}$, mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{B}$ é um dos ângulos agudos.

De acordo com (Iezzi et al. (2004)) definiremos a seguir as funções seno e cosseno.

Segundo (SBM (2011)), uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc. Então definiremos agora função periódica.

Definição 3.3 *Uma função f será **periódica** se existir um números real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ estará também no domínio de f e*

$$f(x + p) = f(x)$$

*O menor número real positivio p é chamado de **período** de f.*

3.2.1 Função Seno

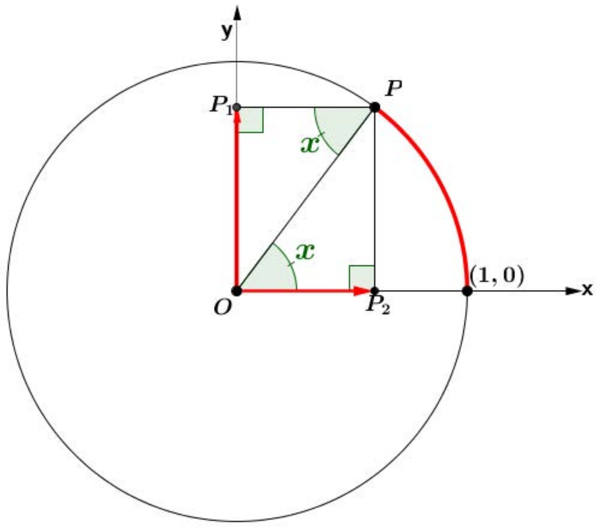

Figura 3.5: Seno no círculo trigonométrico

Usando as informações da figura (3.5), podemos escrever $\operatorname{sen} x = \dfrac{PP_2}{OP}$ e, por consequência $\operatorname{sen} x = OP_1$, pois $PP_2 = OP_1$, como dito anteriormente, a circunferência é unitária, ou seja, $\overline{OP} = raio = 1$.

Então para encontrarmos o valor do seno de um ângulo basta projetar ortogonalmente o ponto P sobre o **eixo vertical**, doravante denominado **eixo dos senos**, e medir a distância entre a projeção e o centro O da circunferência, sempre levando em conta a orientação do eixo.

A partir da noção de seno de um ângulo x, podemos estabelecer o conceito de função seno, ou seja, dado um número real x, podemos associar o valor do seno de um ângulo $x\ rad$ ou de um arco de $x\ rad$, como mostra o diagrama (3.6).

O domínio e o contradomínio dessa função são iguais a $\mathbb{R}$, mas como a circunferência é unitária, o conjunto imagem da função seno: intervalo $[-1, 1]$ reflete o segmento que é o conjunto de todas as projeções ortogonais de pontos do ciclo trigonométrico, segundo (Iezzi et al. (2004)), temos:

$$\text{D} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = [-1, 1] \quad \text{ou} \quad -1 \leq senx \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Período} = 2\pi$$

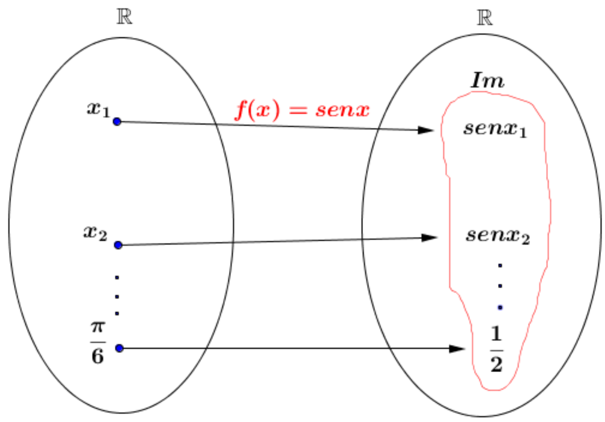

Figura 3.6: Função Seno via Conjuntos

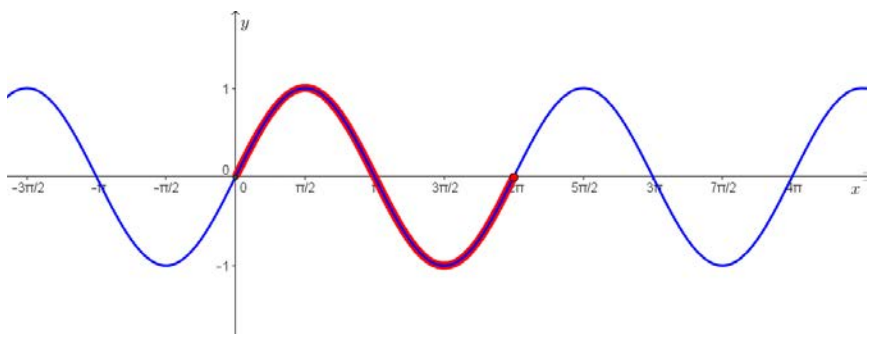

Figura 3.7: Função Seno

3.2.2 Função Cosseno

Observando a figura (3.5) e usando raciocínio análogo, podemos escrever $\cos x = \dfrac{OP_2}{OP}$ e, por consequência $\cos x = OP_2$, pois o raio é unitário.

Dessa forma, para encontrarmos o valor de cosseno de um ângulo basta projetar ortogonalmente o ponto P sobre o **eixo horizontal**, doravante denominado **eixo dos cossenos**, e medir a distância entre a projeção e o centro O da circunferência, sempre levando em conta a orientação do eixo.

A partir da noção de cosseno de um ângulo x, podemos estabelecer o conceito de função cosseno, ou seja, dado um número real x, podemos associar o valor do cosseno de um ângulo $x\ rad$ ou de um arco de $x\ rad$, como mostra o diagrama a seguir: O domínio (D) dessa função é igual a $\mathbb{R}$, mas como a circunferência é unitária, o conjunto imagem (Im) da função cosseno: intervalo $[-1, 1]$ reflete o segmento que é o conjunto de todas as

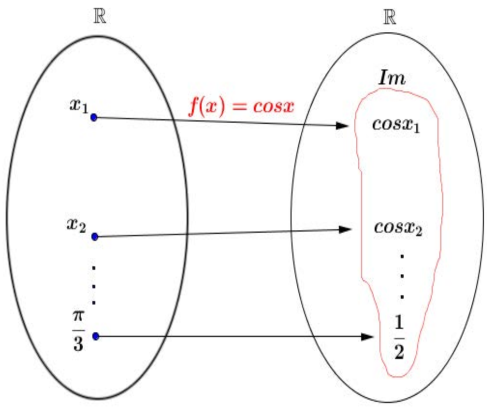

Figura 3.8: Função Cosseno via Conjuntos

projeções ortogonais de pontos do ciclo trigonométrico, temos:

$$\text{D} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = [-1, 1] \quad \text{ou} \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Período} = 2\pi$$

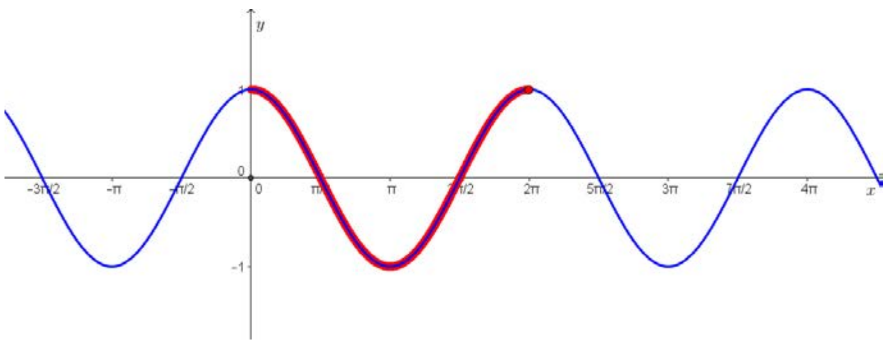

Figura 3.9: Função Cosseno

Uma vez tendo as definições das funções seno e cosseno, podemos definir mais quatro funções trigonométricas a seguir.

3.2.3 Função Tangente

A função tangente é definida por:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

para todo número real x para o qual $\cos x \neq 0$.

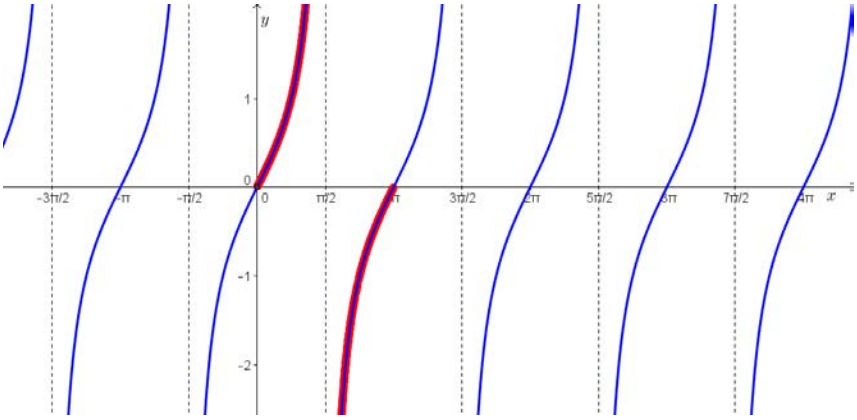

Figura 3.10: Função Tangente

$$\text{D} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n.\pi \text{ ,onde } \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Im} = \mathbb{R}$$

$$\text{Período} = \pi$$

3.2.4 Função Secante

A função secante é definida por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

para todo número real x para o qual $\cos x \neq 0$.

$$\text{D} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n.\pi \text{ ,onde } \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Im} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$\text{Período} = 2\pi$$

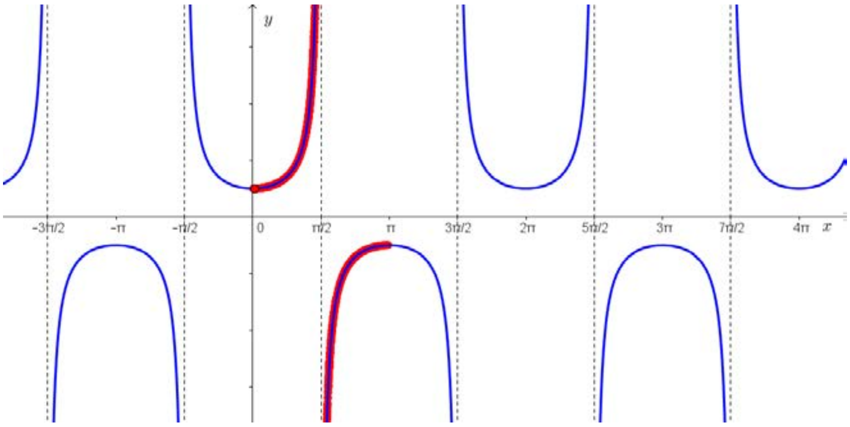

Figura 3.11: Função Secante

3.2.5 Função Cossecante

A função cossecante é definida por:

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

para todo número real x para o qual $\operatorname{sen} x \neq 0$.

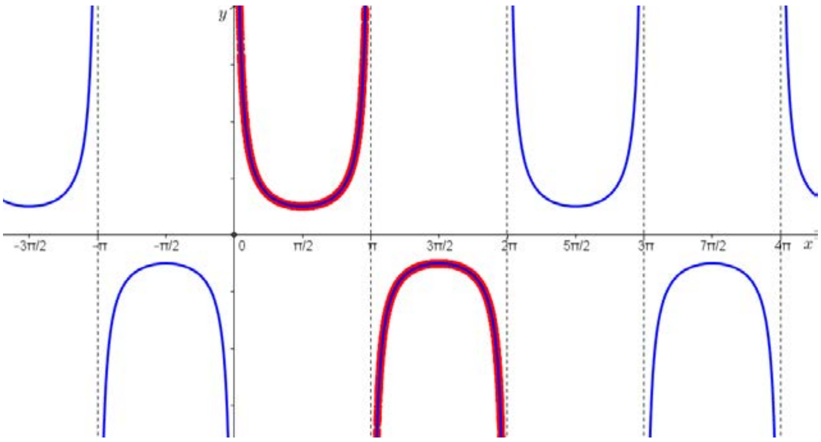

Figura 3.12: Função Cossecante

D $= \mathbb{R} - \{n.\pi$,onde $\quad n \in \mathbb{Z}\}$

Im $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Período $= 2\pi$

3.2.6 Função Cotangente

A função cotangente é definida por:

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para todo número real x para o qual $\operatorname{sen} x \neq 0$.

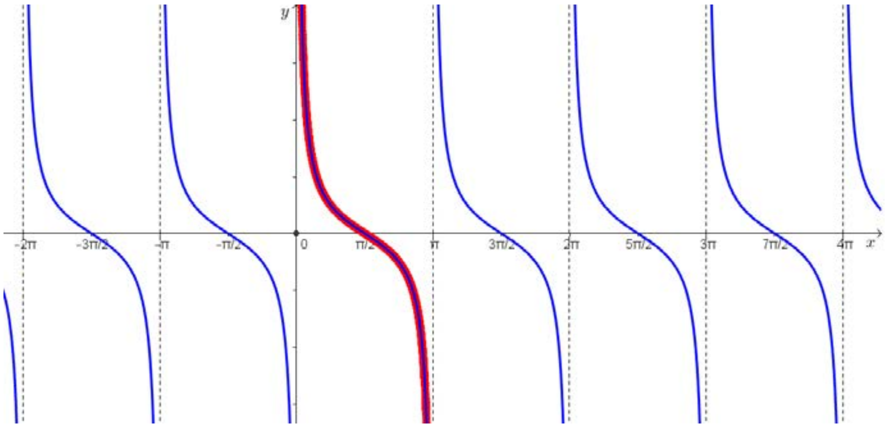

Figura 3.13: Função Cotangente

D $= \mathbb{R} - \{n.\pi$,onde $\quad n \in \mathbb{Z}\}$

Im $= \mathbb{R}$

Período $= \pi$

3.3 Relação Fundamental das Funções Trigonométricas Circulares

Suponha que t seja um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com t radianos de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência unitária com centro na origem. Se P for o ponto (x, y) então:

$$\cos(t) = x \text{ e } \operatorname{sen}(t) = y$$

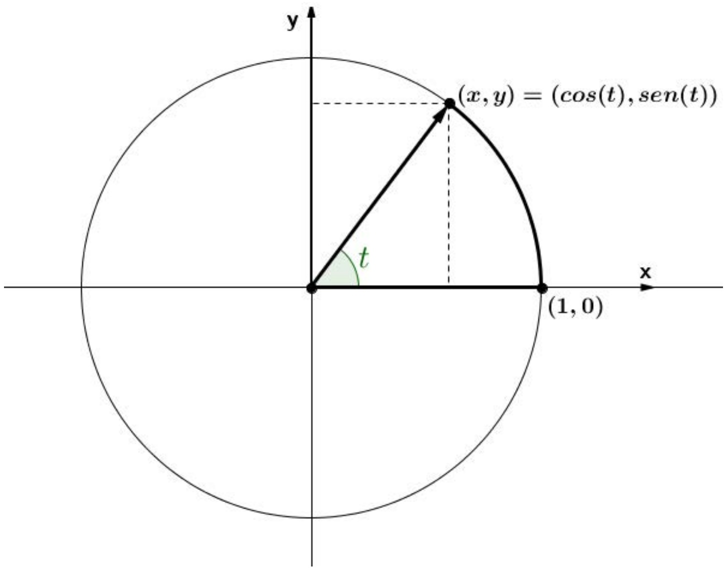

Figura 3.14: Relação Fundamental das Funções Trigonométricas Circulares

Então, com essa parametrização $(x, y) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, com; $0 \leq t \leq 2\pi$ podemos "gerar"a circunferência. Por essa razão chamamos essas **funções de circulares**, e como a circunferência é unitária de centro em $C(0, 0)$ com equação $x^2 + y^2 = 1$, substituindo teremos:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1 \quad (3.1)$$

Segundo(Leithold (1994)), a igualdade (3.1) é chamada de **Identidade Fundamental de Pitágoras**.

Capítulo 4

Funções Hiperbólicas

Neste capítulo, vamos buscar definir, formalmente, a hipérbole, as principais funções hiperbólicas, seno, cosseno e a tangente hiperbólica, e esboçar seus gráficos, segundo (Miller and Walsh (1962)), e fazer uma comparação com as funções trigonométricas circulares. Vamos analisar os gráficos dessas funções, e investigar algumas de suas propriedades.

4.1 Hipérbole

Definição 4.1 *Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.*

$$H = \{|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c$$

Elementos da hipérbole:

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole e a reta que os contêm é a **reta focal**;
- A interseção da hipérbole H com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da hipérbole;

- O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$;
- O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da hipérbole;
- A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não focal** da hipérbole;
- O segmento B_1B_2, perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio C e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado eixo não focal da hipérbole, e B_1 e B_2 são os **vértices imaginários** da hipérbole;
- A excentricidade da hipérbole H é $e = \dfrac{c}{a}$. Note que $e > 1$, pois $c > a$;
- O retângulo de base da hipérbole H é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** de H. Portanto, as assíntotas de H são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal. Assim, ℓ e ℓ' são as bissetrizes das assíntotas.

Com base no conhecimento desses elementos, faremos a seguir um esboço de uma hiperbóle.

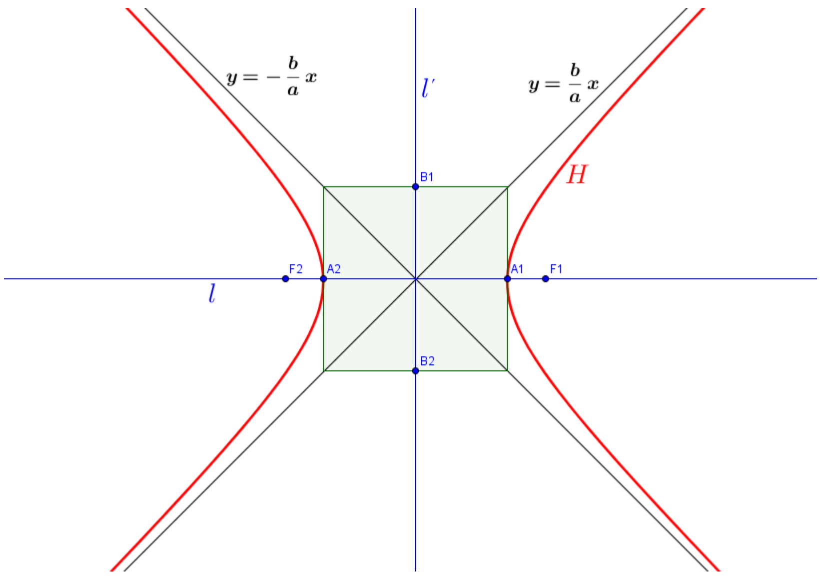

Figura 4.1: Esboço da Hipérbole

Definição 4.2 *Uma hipérbole é denominada de equilátera, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, ou seja,* $a = b$*. O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é um quadrado e as assíntotas se intersectam perpendicularmente.*

4.2 Definindo $f(x) = \cosh(x)$

A função hiperbólica $\cosh(x)$ é definida utilizando a função exponencial e^x. Começaremos a definir $\cosh(x)$ pela fórmula:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4.1}$$

Analisaremos os gráficos das funções e^x e e^{-x}, para esboçar o gráfico da função $\cosh(x)$. Quando $x = 0$, temos $e^x = 1$ e $e^{-x} = 1$, portanto:

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Agora vamos ver o comportamento da função $f(x) = \cosh(x)$, quando x cresce e descrece, isto é, limite de x para ∞ e $-\infty$. Vamos reescrever a equação (4.1), como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

Para ver como essa função se comporta quando x cresce, usaremos os gráficos das duas funções exponenciais e^x e e^{-x}.

Como x cresce, e^x aumenta rapidamente, mas e^{-x} diminui rapidamente. Assim a segunda parcela da soma do $\cosh(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$ tende a zero, quando x se tornar grande. Portanto, quando x fica maior, $\cosh(x)$ se aproxima de $\dfrac{e^x}{2}$. Nós escrevemos isso como:

$$\cosh(x) \approx \frac{e^x}{2}, \quad \text{quando } x \text{ tende para } +\infty.$$

Mas o gráfico de $\cosh(x)$ vai ficar sempre acima do gráfico de $\dfrac{e^x}{2}$. Isto porque, embora

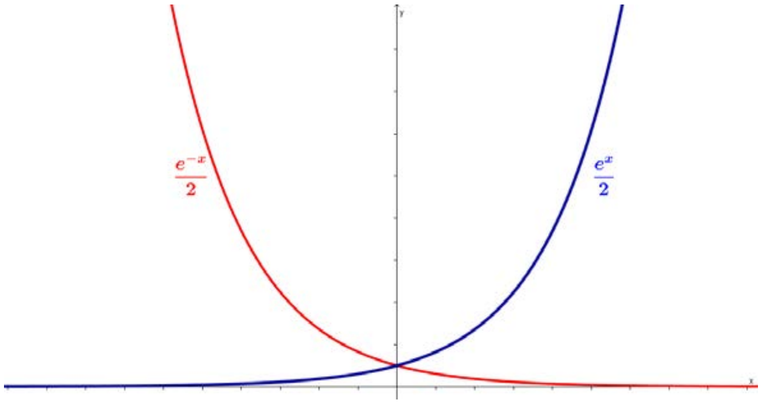

Figura 4.2: Gráfico das Funções Exponenciais $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$

$\dfrac{e^{-x}}{2}$ (segunda parcela da soma) fica muito pequena, é sempre maior do que zero. Como x fica cada vez maior a diferença entre os dois gráficos torna cada vez menor.

Agora, suponhamos que $x < 0$. Como x torna-se cada vez mais negativo, $\dfrac{e^{-x}}{2}$ aumenta rapidamente, embora $\dfrac{e^{x}}{2}$ diminua rapidamente, assim a primeira parcela da soma $\cosh(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$ fica muito pequena. Como x fica mais e mais negativo, $\cosh(x)$ fica cada vez mais perto $\dfrac{e^{-x}}{2}$. Escrevemos assim:

$$\cosh(x) \approx \frac{e^{-x}}{2}, \quad \text{quando } x \text{ tende para } -\infty.$$

Novamente, o gráfico de $\cosh(x)$ vai ficar sempre acima do gráfico de $\dfrac{e^{-x}}{2}$ quando x for negativo. Isto é porque, apesar de $\dfrac{e^{x}}{2}$ (a primeira parcela da soma) ficar muito pequena, é sempre maior do que zero. Porém à medida que x tende para $-\infty$, a diferença entre os dois gráficos fica menor. Nós agora podemos esboçar o gráfico de $\cosh(x)$. Observe o gráfico é simétrico em relação ao eixo oy, porque $\cosh(x) = \cosh(-x)$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}, \text{ onde D} = \mathbb{R}, \text{Im} = [+1, \infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$$

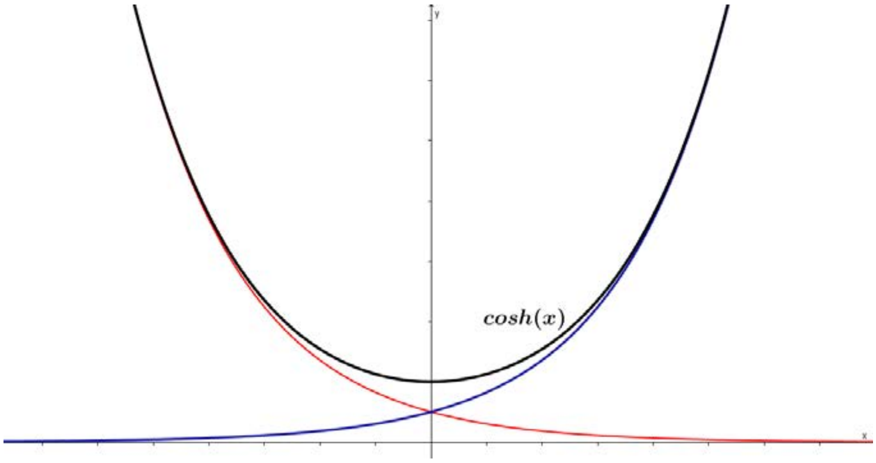

Figura 4.3: Gráfico da Função Cosseno Hiperbólico

4.3 Definindo $f(x) = \operatorname{senh}(x)$

Vamos agora definir a função hiperbólica $\operatorname{senh}(x)$. Esta função é definida por:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{4.2}$$

Mais uma vez, podemos usar o nosso conhecimento dos gráficos das funções e^x e e^{-x}, para esboçar o gráfico da função $\operatorname{senh}(x)$. Quando $x = 0$,temos $e^x = 1$ e $e^{-x} = 1$, portanto:

$$\operatorname{senh}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

Em seguida, vamos ver o que acontece quando x cresce. Vamos reescrever $\operatorname{senh}(x)$ e analisaremos o comportamento da função $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, quando x cresce e decresce, isto é,limite de x para ∞ e $-\infty$. Vamos reescrever a equação (4.2), como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

Para ver como isso se comporta quando x cresce, novamente, usaremos os gráficos das duas funções exponenciais.

Quando x cresce, e^x aumenta rapidamente, embora e^{-x} diminua rapidamente. Assim, o segundo termo da diferença $\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$ fica muito pequeno quando x se torna muito grande.

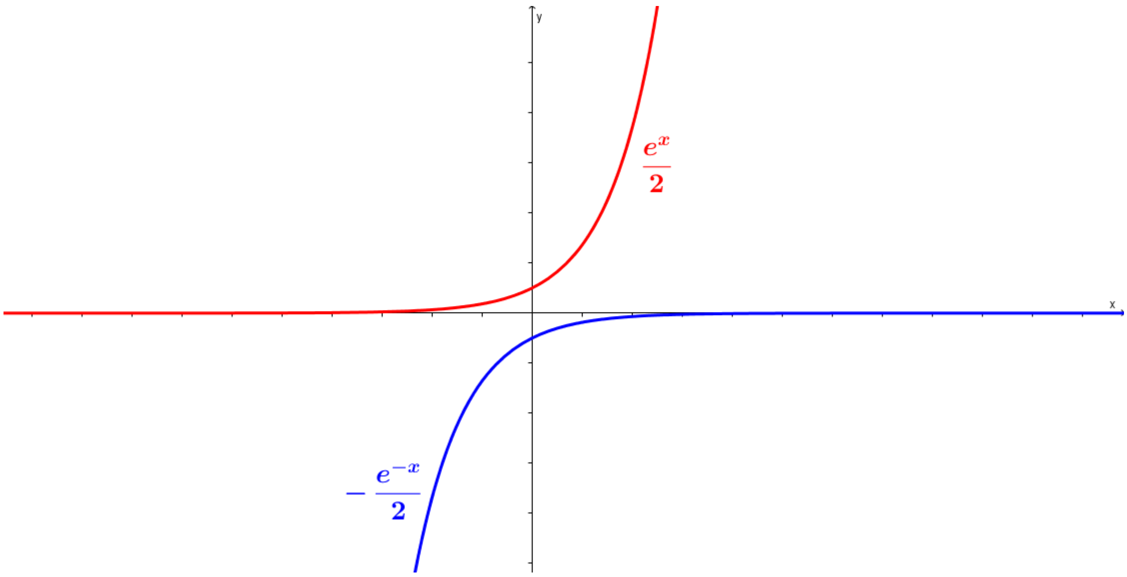

Figura 4.4: Gráfico das Funções Exponenciais $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e $g(x) = \dfrac{-e^{-x}}{2}$

Portanto, quando x fica maior, $\operatorname{senh}(x)$ fica cada vez mais perto de $\dfrac{e^x}{2}$. Então escrevemos isso como:

$$\operatorname{senh}(x) \approx \frac{e^x}{2}, \quad \text{quando } x \text{ tende para } +\infty$$

Mas o gráfico de $\operatorname{senh}(x)$ vai ficar sempre abaixo do gráfico de $\dfrac{e^x}{2}$. Isto porque, embora $\dfrac{-e^{-x}}{2}$ (segundo termo da diferença) se torna muito pequeno, é sempre menor do que zero. Como x fica cada vez maior a diferença entre os dois gráficos torna cada vez menor.

Em seguida, suponha que $x < 0$. Quando x tende para $-\infty$, $\dfrac{-e^{-x}}{2}$ fica negativo rapidamente, embora $\dfrac{e^x}{2}$ diminua rapidamente, assim a primeiro termo da diferença $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{e^{-x}}{2}$ fica muito pequena. Com isso $\operatorname{senh}(x)$ fica cada vez mais perto $\dfrac{-e^{-x}}{2}$. Escrevemos assim:

$$\operatorname{senh}(x) \approx \frac{-e^{-x}}{2}, \quad \text{quando } x \text{ tende para } -\infty$$

Agora, o gráfico de $\operatorname{senh}(x)$ vai ficar sempre acima do gráfico de $\dfrac{e^{-x}}{2}$ quando x for negativo. Isto porque, apesar de $\dfrac{e^x}{2}$ (o primeiro termo da diferença) ficar muito pequeno, é sempre maior do que zero. Porém à medida que x tende para $-\infty$, a diferença entre os dois gráficos fica menor. Nós agora podemos esboçar o gráfico de $\operatorname{senh}(x)$.

Observe que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$.

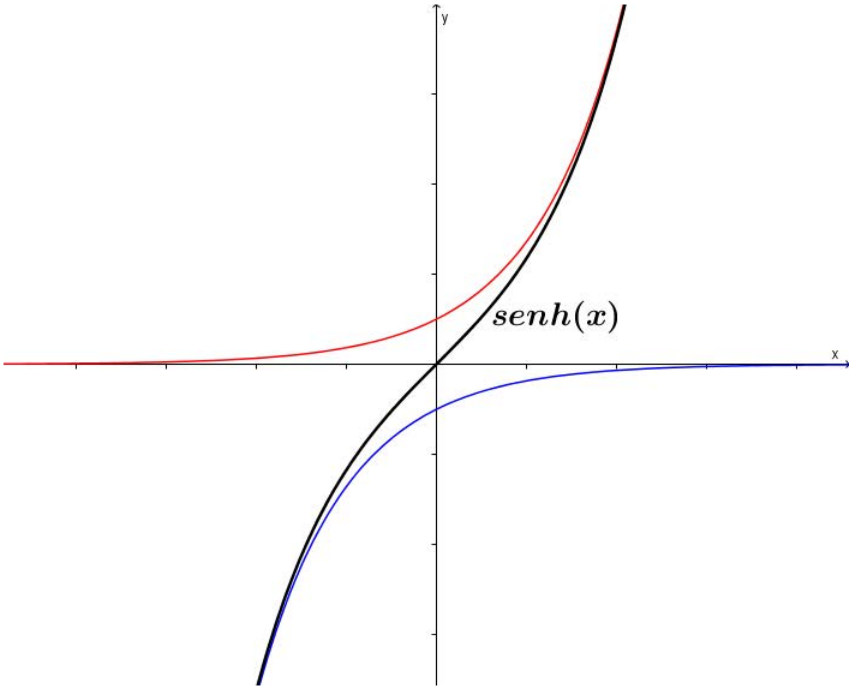

Figura 4.5: Gráfico da Função Seno Hiperbólico

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}, \text{ onde D} = \mathbb{R}, \text{Im} = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh}(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \operatorname{senh}(x) = +\infty$$

Vimos que $\operatorname{senh}(x)$ aproxima-se de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce, e vimos também que $\cosh(x)$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce. Portanto, $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$ devem se aproximar quando x for grande. Assim:

$$\operatorname{senh}(x) \approx \cosh(x), \quad \text{quando } x \text{ tende para } +\infty$$

Da mesma forma, temos que $\operatorname{senh}(x)$ se aproxima de $\frac{-e^{-x}}{2}$ quando x tende para $-\infty$, e também que $\cosh(x)$ se aproxima de $\frac{e^{-x}}{2}$ quando x tende para $-\infty$. Por isso, que $\operatorname{senh}(x)$ e $-\cosh(x)$ deve chegar juntos quando x tende para $-\infty$. Assim:

$$\operatorname{senh}(x) \approx -\cosh(x), \quad \text{quando } x \text{ tende para } -\infty$$

Podemos ver isso quando esboçamos os gráficos de $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$, como mostra a figura (4.6).

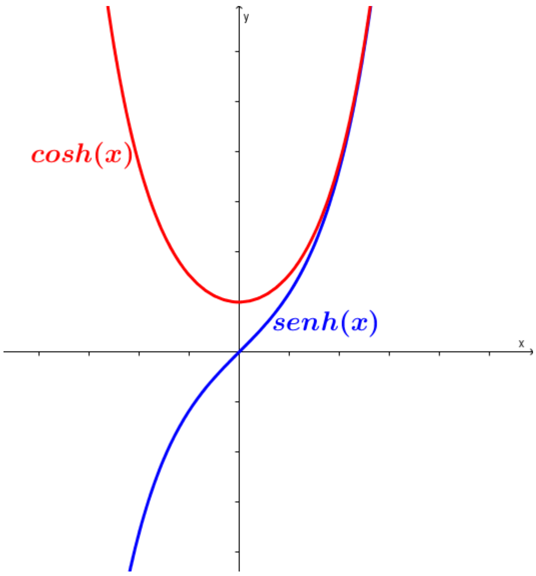

Figura 4.6: Gráfico da Função Cosseno e Seno Hiperbólicos

4.4 Definindo $f(x) = \tanh(x)$

Utilizando as definições de $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$, definiremos agora a função hiperbólica $\tanh(x)$ como:

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \tag{4.3}$$

Vamos trabalhar a função $\tanh(x)$ em termos de funções exponenciais. Como sabemos que as funções $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$ são definidas usando funções exponenciais, então escreveremos $\tanh(x)$ como:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \div \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{4.4}$$

Nós podemos usar o que sabemos sobre $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$ para esboçar o gráfico de $\tanh(x)$. Primeiro vamos tomar $x = 0$. Sabemos que $\operatorname{senh}(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$, então

$$\tanh(0) = \frac{\operatorname{senh}(0)}{\cosh(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

Dividindo o numerador e o denominador por e^x, temos:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Com x grande, e^{-2x} se aproxima de zero, logo:

$$\tanh(x) \approx 1, \quad \text{quando } x \text{ tende para } +\infty$$

Multiplicando o numerador e o denominador de $\tanh(x)$ por e^x, temos:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Quando x tende para $-\infty$, e^{2x} se aproxima de zero, logo:

$$\tanh(x) \approx -1, \quad \text{quando } x \text{ tende para } -\infty$$

Vamos agora esboçar o gráfico da $\tanh(x)$. Observe que $\tanh(-x) = -\tanh(x)$

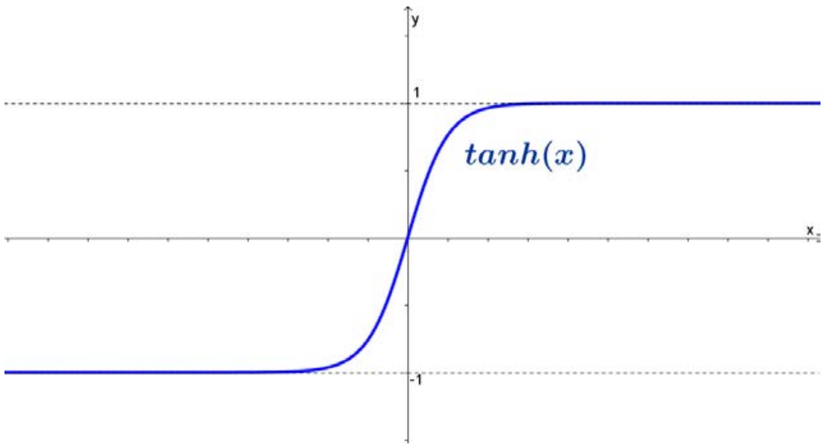

Figura 4.7: Gráfico da Função Tangente Hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ onde D} = \mathbb{R}, \text{Im} = (-1, 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$$

4.5 Definindo $f(x) = \operatorname{sech}(x)$

A função hiperbólica $sech(x)$ é definida utilizando a função $cosh(x)$. Vamos definir a função Secante hiperbólica como:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

Trabalhando a função $\operatorname{sech}(x)$ em termos das funções exponencias, e pela equação (4.1) , temos que:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{4.5}$$

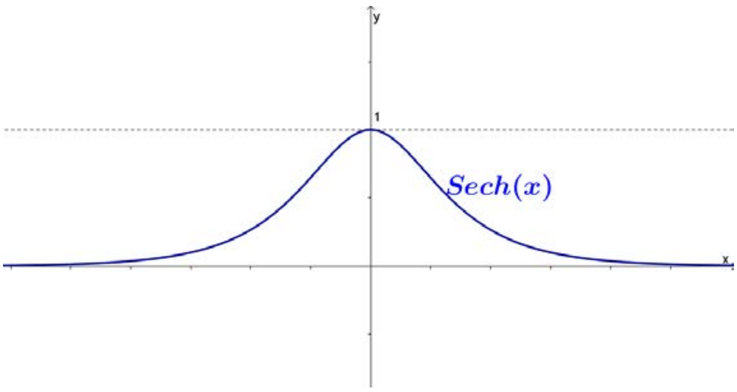

Figura 4.8: Gráfico da Função Secante Hiperbólica

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \text{ onde D} = \mathbb{R}, \text{Im} = (-1, 1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sech}(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sech}(x) = 0$$

4.6 Definindo $f(x) = \operatorname{cossech}(x)$

A função hiperbólica $\operatorname{cossech}(x)$ é definida utilizando a função $\operatorname{senh}(x)$. Vamos definir a função Secante hiperbólica como:

$$\operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

Trabalhando a função $\operatorname{cossech}(x)$ em termos das funções exponencias, e pela equação (4.2) , temos que:

$$\text{cossech}(x) = \frac{1}{senh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{4.6}$$

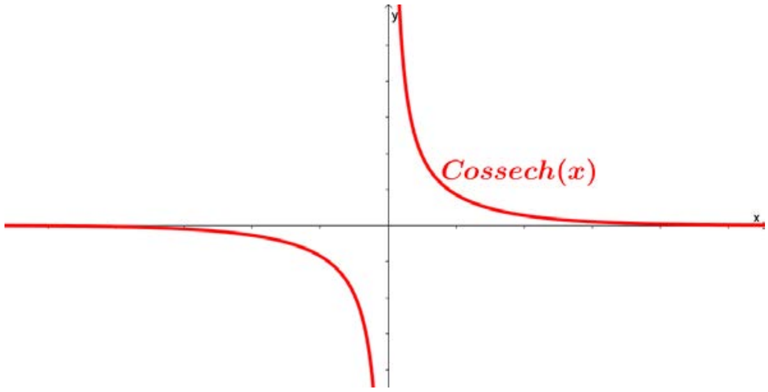

Figura 4.9: Gráfico da Função Cossecante Hiperbólica

$$\text{cossech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \text{ onde D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{Im} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \text{cossech}(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \text{cossech}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \text{cossech}(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \text{cossech}(x) = +\infty$$

4.7 Definindo $f(x) = \text{cotanh}(x)$

A função hiperbólica $\text{cotanh}(x)$ é definida utilizando a função $\tanh(x)$. Vamos definir a função cotangente hiperbólica como:

$$\text{cotanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

Trabalhando a função $\text{cotanh}(x)$ em termos das funções exponencias, e pela equação (4.4) , temos que:

$$\text{cotanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{4.7}$$

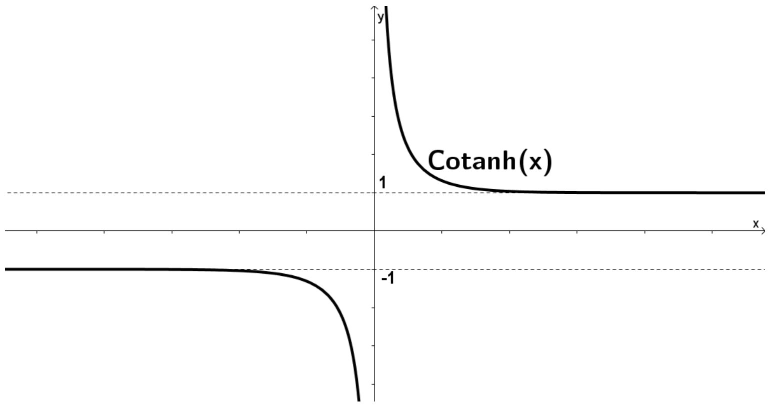

Figura 4.10: Gráfico da Função Cotangente Hiperbólica

$$\operatorname{cotanh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \text{ onde D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{Im} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cotanh}(x) = -1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \operatorname{cotanh}(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{cotanh}(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotanh}(x) = +\infty$$

4.8 Relação Fundamental das Funções Hiperbólicas

Utilizaremos $x^2 - y^2 = 1$, hipérbole equilátera, também chamada de hipérbole unitária e as definições de seno hiperbólico (4.2) e cosseno hiperbólico (4.1). Seja t um número real qualquer, então o ponto $P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ estará sobre a hipérbole, pois:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = \left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2e^t e^{-t}}{4} - \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2e^t e^{-t}}{4} = \frac{e^{2t} - e^{-2t} + e^{-2t} - e^{-2t} + 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1 \tag{4.8}$$

Chamamos a essa relação de Identidade Fundamental da Trigonometria Hiperbólica.

Observando a figura (4.11), temos que $\cosh t \geq 1$, então o ponto $P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está no ramo direito da hipérbole.

Variando os sinais das coordenadas de $P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$, temos o ramo esquerdo

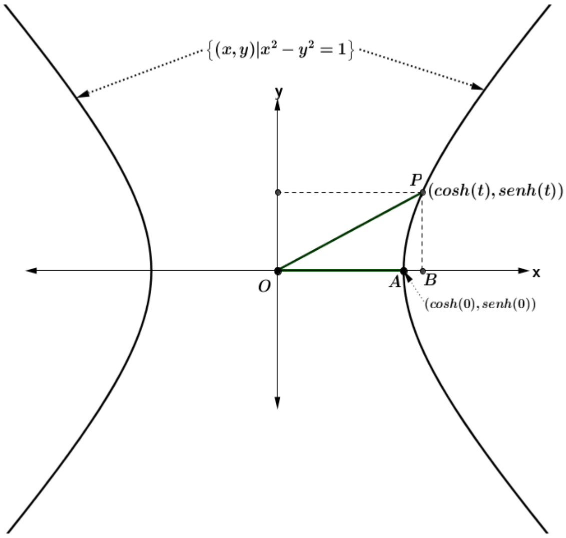

Figura 4.11: Relação Fundamental das Funções Hiperbólicas

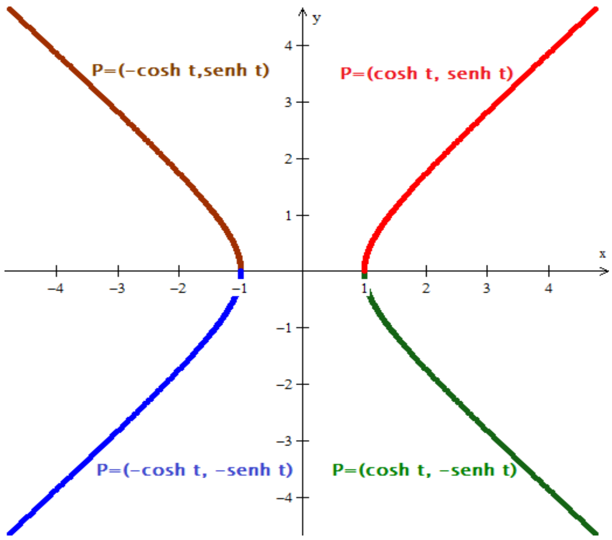

Figura 4.12: Ramos da Hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$

da hipérbole, como mostra a figura (4.12).

Portanto geramos a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ através dessa parametrização do ponto P, por essa razão chamamos $\operatorname{senh}(t)$ e $\cosh(t)$ de **funções hiperbólicas**.

4.9 Propriedades entre as áreas

Existem muitas analogias entre estas funções hiperbólicas e as correspondentes funções trigonométricas circulares. Uma analogia entre essas funções, fica ilustrada na figura (4.13) e na figura (4.14), onde $t \in \mathbb{R}$, uma demonstração de que a área indicada é igual a

$\frac{t}{2}$ em ambas, segundo (Spivak (1996)).

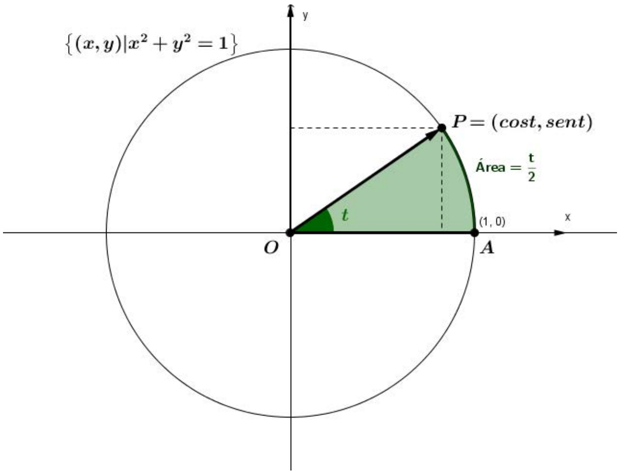

Figura 4.13: Propriedade da área no círculo

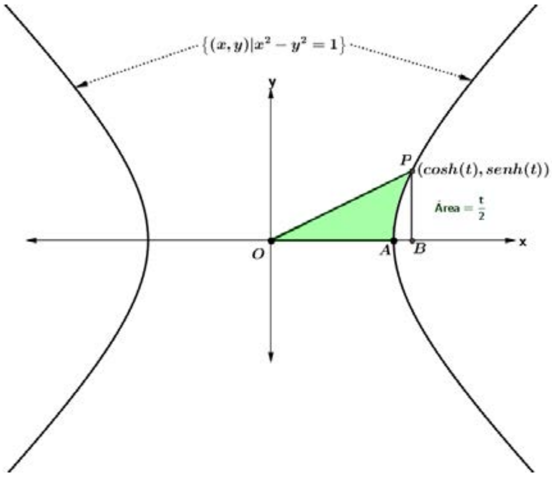

Figura 4.14: Propriedade da área na hipérbole

Como a área de um setor circular de raio r e ângulo central t radianos é dado por $\frac{1}{2}r^2t$ unidades de área, a área do setor circular da figura (4.13) será $\frac{1}{2}t$ unidades de área, pois $r = 1$. O setor da figura (4.14) é a região limitada pelo eixo x, pela reta OP e pelo arco AP da hipérbole unitária. Se A_1 unidades de área for a área do setor AOP, A_2 unidades de área for a área do $\triangle BOP$ e A_3 unidades de área for a área da região ABP, teremos:

$$A_1 = A_2 - A_3 \tag{4.9}$$

A área do $\triangle BOP$ temos:

$$A_2 = \frac{1}{2}\cosh(t)\,\mathrm{senh}(t) \tag{4.10}$$

Encontraremos agora a área de A_3 usando integração:

$$A_3 = \int_0^t \mathrm{senh}\, u \; d(\cosh u)$$
$$= \int_0^t \mathrm{senh}^2 u \; du$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cosh 2u - 1)\; du$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{senh}\, 2u - \frac{1}{2}u\Big]_0^t$$

Logo,

$A_3 = \frac{1}{2}\cosh(t)\,\mathrm{senh}(t) - \frac{1}{2}t$

Substituindo essa igualdade e (4.10) em (4.9), teremos:

$A_1 = \frac{1}{2}\cosh(t)\,\mathrm{senh}(t) - \left(\frac{1}{2}\cosh(t)\,\mathrm{senh}(t) - \frac{1}{2}t\right)$

$= \frac{1}{2}t$

Assim sendo, o número de unidades de área da área do setor circular AOP da figura (4.13), e o número de unidades de área da área do setor AOP da figura (4.14), em cada caso, a metade do valor do parâmetro t associado ao ponto P .

Capítulo 5

Identidades Trigonométricas

Neste capítulo descreveremos as principais identidades trigonométricas, tanto circulares quanto as hiperbólicas, mostrando assim suas semelhanças. Abaixo segue uma tabela com as principais identidades trigonométricas e podemos observar que praticamente todas as propriedades da trigonometria circular podem ser transladadas para a trigonometria hiperbólica, e observar que muitas vezes a troca do sinal de $+$ pelo sinal de $-$.

Identidades Trigonométricas Circulares	Identidades Trigonométricas Hiperbólicas
$\cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a) = 1$	$\cosh^2(a) - \operatorname{senh}^2(a) = 1$
$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$	$\operatorname{senh}(-a) = -\operatorname{senh}(a)$)
$\cos(-a) = \cos(a)$	$\cosh(-a) = \cosh(a)$
$1 + \tan^2(a) = \sec^2(a)$	$1 - \tanh^2(a) = \operatorname{sech}^2(a)$
$1 + \operatorname{cotan}^2(a) = \operatorname{cossec}^2(a)$	$\operatorname{cotanh}^2(a) - 1 = \operatorname{cossech}^2(a)$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$	$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$	$\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)$
$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$	$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh}(a)\cosh(b) + \operatorname{senh}(b)\cosh(a)$
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$	$\operatorname{senh}(a-b) = \operatorname{senh}(a)\cosh(b) - \operatorname{senh}(b)\cosh(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$	$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \operatorname{senh}^2(a)$
$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$	$\operatorname{senh}(2a) = 2\operatorname{senh}(a)\cosh(a)$

Tabela 5.1: Principais Identidades Trigonométricas

Antes de iniciarmos as demonstrações das identidades trigonométricas, definiremos funções pares e ímpares, pois fazem parte de tais identidades.

Definição 5.1 *Uma função é **par** se, para todo valor de x no domínio de f:*

$$f(-x) = f(x)$$

Definição 5.2 *Uma função é **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f:*

$$f(-x) = -f(x)$$

Em ambos casos acima, devemos entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que x estiver também no domínio de f.

5.1 Identidades Trigonométricas Circulares

Identidade 5.1 $\cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a) = 1$*, Relação Fundamental (3.1);*

Identidade 5.2 $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a), \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *seno é uma função ímpar.*

Demonstração:

Para essa demonstração, basta uma observação simples da figura (5.1).

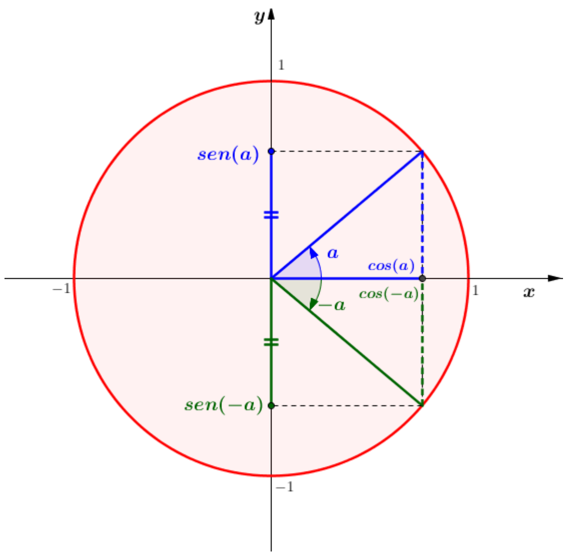

Figura 5.1: Simetria

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$$

Identidade 5.3 $\cos(-a) = \cos(a), \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *cosseno é uma função par.*

Demonstração: Análogo a identidade (5.2), observe a figura (5.1).

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

Identidade 5.4 $1 + \tan^2(a) = \sec^2(a)$

Demonstração:

Sendo a Relação Fundamental $\cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a) = 1$ com $\cos(a) \neq 0$, então:

$$\cos^2(a) + \operatorname{sen}^2(a) = 1 \quad \div \cos^2(a)$$
$$\frac{\cos^2(a)}{\cos^2(a)} + \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$
$$1 + \tan^2(a) = \sec^2(a)$$

Identidade 5.5 $1 + \operatorname{cotan}^2(a) = \operatorname{cossec}^2(a)$

Demonstração:

Sendo a Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$ com $\operatorname{sen}(a) \neq 0$, então:

$$\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1 \quad \div \operatorname{sen}^2(a)$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2(a)}{\operatorname{sen}^2(a)} + \frac{\cos^2(a)}{\operatorname{sen}^2(a)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(a)}$$
$$1 + \operatorname{cotan}^2(a) = \operatorname{cossec}^2(a)$$

Identidade 5.6 $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Demonstração:

Consideremos um círculo trigonométrico, raio unitário conforme figura (5.2), um arco $\widehat{AP}$ com determinação a e outro arco $\widehat{PQ}$ determinando b, logo o arco $\widehat{AQ}$ irá determinar $(a+b)$.

- $\overline{OM} = \cos(a)$; $\overline{PM} = \operatorname{sen}(a)$; $\overline{OS} = \cos(b)$; $\overline{QS} = \operatorname{sen}(b)$; $\overline{ON} = \cos(a+b)$
- $\triangle OVS \sim \triangle OMP$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, então teremos: $\dfrac{OV}{OM} = \dfrac{OS}{OP} \Rightarrow \dfrac{OV}{\cos(a)} = \dfrac{\cos(b)}{1} \Rightarrow OV = \cos(a)\cos(b)$

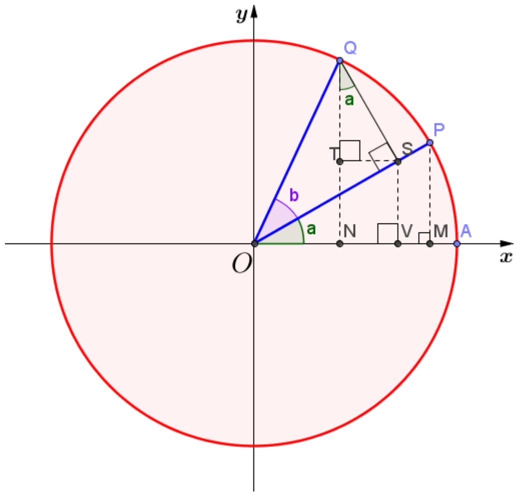

Figura 5.2: Demonstração de cos(a+b)

- $\triangle QTS \sim \triangle OMP$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, então teremos:
  $\dfrac{TS}{PM} = \dfrac{QS}{OP} \Rightarrow \dfrac{TS}{\operatorname{sen}(a)} = \dfrac{\operatorname{sen}(b)}{1} \Rightarrow TS = \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Logo:

$ON = OV - NV = OV - TS$, resulta em: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Identidade 5.7 $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Demonstração:

Pelas identidades (5.2) e (5.3), $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ e $\cos(-a) = \cos(a)$ e pela identidade (5.6) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ então:

$\cos(a-b) = \cos(a+[-b]) = \cos(a)[\cos(-b)] - \operatorname{sen}(a)[\operatorname{sen}(-b)] = \cos(a)[\cos(b)] - \operatorname{sen}(a)[-\operatorname{sen}(b)] = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Identidade 5.8 $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Demonstração:

Como $\cos\left[\dfrac{\pi}{2} - a\right] = \operatorname{sen}(a)$ e $\operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi}{2} - a\right] = \cos(a)$, essa verificação é imediata através do círculo trigonométrico, como mostra a figura (5.3), basta observarmos que os dois triângulos retângulos da figura são semelhantes, pois possuem, hipotenusa (raio unitário) e os ângulos congruentes. Portanto:

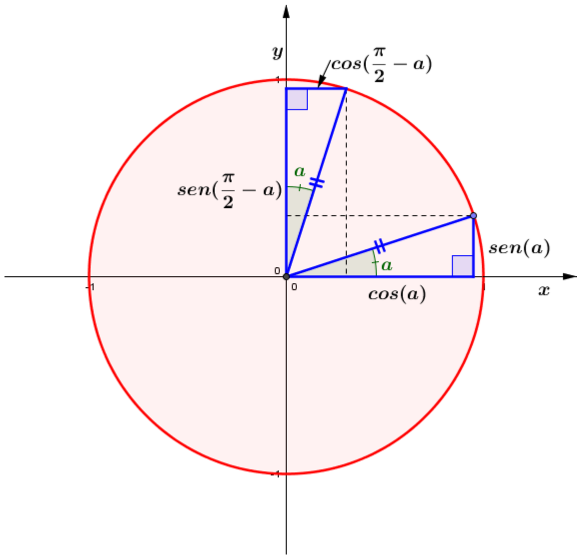

Figura 5.3: Arcos Complementares

$$\operatorname{sen}(a+b)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]=\cos\left[(\frac{\pi}{2}-a)-b\right]=$$

$$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-a\right].\cos(b)+\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-a\right].\operatorname{sen}(b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Identidade 5.9 $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Demonstração:

Sabemos pelas identidades (5.2) e (5.3) que, $\operatorname{sen}(-a)=-\operatorname{sen}(a)$ e $\cos(-a)=\cos(a)$ e pela identidade (5.8) que $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$ então:

$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a+[-b])=\operatorname{sen}(a)[\cos(-b)]+[\operatorname{sen}(-b)]\cos(a)=\operatorname{sen}(a)[\cos(b)]+[-\operatorname{sen}(b)]\cos(a)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Identidade 5.10 $\cos(2a)=\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)$

Demonstração:

Observando a identidade (5.6), temos que:

$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(a)=\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)$

Identidade 5.11 $\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$

Demonstração:

Observando a identidade (5.8), temos que:

$$\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen}(a)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$$

5.2 Identidades Trigonométricas Hiperbólicas

Identidade 5.12 $\cosh^2(a) - \operatorname{senh}^2(a) = 1$*;*

Demonstração: Demonstrado em (4.8).

Identidade 5.13 $\operatorname{senh}(-a) = -\operatorname{senh}(a), \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *seno hiperbólico é uma função ímpar.*

Demonstração:

$$\operatorname{senh}(-a) = \frac{e^{-a} - e^{-(-a)}}{2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} = -\frac{e^{a} - e^{-a}}{2} = -\operatorname{senh}(a)$$

Identidade 5.14 $\cosh(-a) = \cosh(a), \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *cosseno hiperbólico é uma função par.*

Demonstração:

$$\cosh(-a) = \frac{e^{-a} + e^{-(-a)}}{2} = \frac{e^{-a} + e^{a}}{2} = -\frac{e^{a} + e^{-a}}{2} = \cosh(-a)$$

Identidade 5.15 $1 - \tanh^2(a) = \operatorname{sech}^2(a)$

Demonstração:

$$1 - \tanh^2(a) = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2(a)}{\cosh^2(a)} = \frac{\cosh^2(a) - \operatorname{senh}^2(a)}{\cosh^2(a)} = \frac{1}{\cosh^2(a)} = \operatorname{sech}^2(a)$$

Identidade 5.16 $\operatorname{cotanh}^2(a) - 1 = \operatorname{cossech}^2(a)$

Demonstração:

$$\operatorname{cotanh}^2(a) - 1 = \frac{\cosh^2(a)}{\operatorname{senh}^2(a)} - 1 = \frac{\cosh^2(a) - \operatorname{senh}^2(a)}{\operatorname{senh}^2(a)} = \frac{1}{\operatorname{senh}^2(a)} = \operatorname{cossech}^2(a)$$

Identidade 5.17 $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)$

Demonstração:

$$\cosh(a)\cosh(b)+\operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)=\frac{e^a+e^{-a}}{2}.\frac{e^b+e^{-b}}{2}+\frac{e^a-e^{-a}}{2}.\frac{e^b-e^{-b}}{2}=$$
$$=\frac{e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}}{4}+\frac{e^{a+b}-e^{a-b}-e^{-a+b}+e^{-a-b}}{4}=$$
$$=\frac{2e^{a+b}+2e^{-a-b}}{4}=\frac{e^{(a+b)}+e^{-(a+b)}}{2}=\cosh(a+b)$$

Identidade 5.18 $\cosh(a-b)=\cosh(a)\cosh(b)-\operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)$

Demonstração:

$$\cosh(a)\cosh(b)-\operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)=\frac{e^a+e^{-a}}{2}.\frac{e^b+e^{-b}}{2}-\frac{e^a-e^{-a}}{2}.\frac{e^b-e^{-b}}{2}=$$
$$=\frac{e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}}{4}-\frac{e^{a+b}-e^{a-b}-e^{-a+b}+e^{-a-b}}{4}=$$
$$=\frac{2e^{a-b}+2e^{-a+b}}{4}=\frac{e^{(a-b)}+e^{-(a-b)}}{2}=\cosh(a-b)$$

Identidade 5.19 $\operatorname{senh}(a+b)=\operatorname{senh}(a)\cosh(b)+\operatorname{senh}(b)\cosh(a)$

Demonstração:

$$\operatorname{senh}(a)\cosh(b)+\operatorname{senh}(b)\cosh(a)=\frac{e^a-e^{-a}}{2}.\frac{e^b+e^{-b}}{2}+\frac{e^b-e^{-b}}{2}.\frac{e^a+e^{-a}}{2}=$$
$$=\frac{e^{a+b}+e^{a-b}-e^{-a+b}-e^{-a-b}}{4}+\frac{e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b}}{4}=$$
$$=\frac{2e^{a+b}-2e^{-a-b}}{4}=\frac{e^{(a+b)}-e^{-(a+b)}}{2}=\operatorname{senh}(a+b)$$

Identidade 5.20 $\operatorname{senh}(a-b)=\operatorname{senh}(a)\cosh(b)-\operatorname{senh}(b)\cosh(a)$

Demonstração:

$$\operatorname{senh}(a)\cosh(b)-\operatorname{senh}(b)\cosh(a)=\frac{e^a-e^{-a}}{2}.\frac{e^b+e^{-b}}{2}-\frac{e^b-e^{-b}}{2}.\frac{e^a+e^{-a}}{2}=$$
$$=\frac{e^{a+b}+e^{a-b}-e^{-a+b}-e^{-a-b}}{4}-\frac{e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b}}{4}=$$
$$=\frac{2e^{a-b}-2e^{-a+b}}{4}=\frac{e^{(a-b)}-e^{-(a-b)}}{2}=\operatorname{senh}(a-b)$$

Identidade 5.21 $\cosh(2a)=\cosh^2(a)+\operatorname{senh}^2(a)$

Demonstração:

$$\cosh^2(a) + \text{senh}^2(a) = \left[\frac{(e^a + e^{-a})}{2}\right]^2 + \left[\frac{(e^a - e^{-a})}{2}\right]^2 = \frac{2e^{2a} + 2e^{-2a}}{4}$$

$$= \frac{e^{2a} + e^{-2a}}{2} = \cosh(2a)$$

Identidade 5.22 $\text{senh}(2a) = 2\,\text{senh}(a)\cosh(a)$

Demonstração:

$$\text{senh}(2a) = \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} = \frac{(e^a - e^{-a}).(e^a + e^{-a})}{2} = 2.\frac{(e^a - e^{-a})}{2}.\frac{(e^a + e^{-a})}{2} =$$

$$= 2.\,\text{senh}(a)\cosh(a)$$

Capítulo 6

Atividades e Aplicações

6.1 Aplicações

Nesta seção, entre as aplicações para as funções hiperbólicas, mostraremos duas, a curva descrita por um cabo fléxivel com a ação do seu peso, curva esta que é denominada catenária, que se utiliza a função cosseno hiperbólico para descrevê-la e a medição da velocidade de uma onda, que usamos a função tangente hiperbólica. Com esses dois exemplos, utilizaremos as três principais funções hiperbólicas, o seno, cosseno e a tangente.

6.1.1 Catenária

Mostraremos agora uma aplicação para o cosseno hiperbólico, a catenária, essa curva erroneamente confundida com a parábola. Então para isso definiremos estas duas curvas.

Definição 6.1 *Catenária é a curva formada por um cabo fléxivel com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso, onde o seu ponto mínimo é* $(0, a)$*, onde* $a > 0$ *e tem sua equação igual a:*

$$y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Definição 6.2 *Sejam* L *uma reta e* F *um ponto do plano não pertencente a* L*. A parábola*

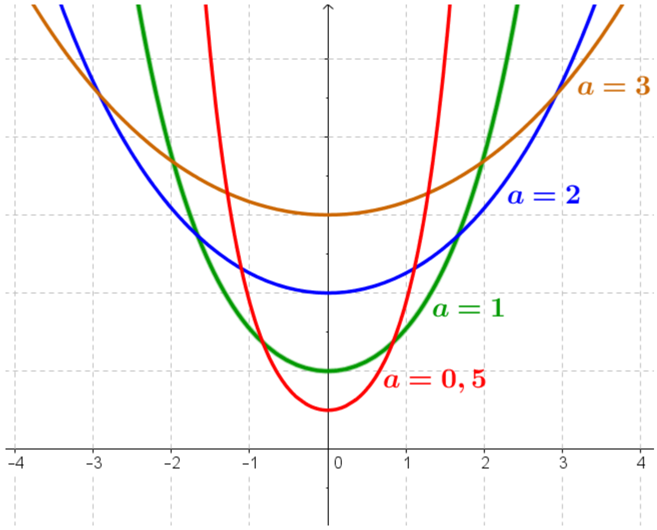

Figura 6.1: Exemplos de Catenárias

$\mathcal{P}$ de foco F e diretriz L é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a L.

$$\mathcal{P} = \{P | d(P, F) = d(P, L)\}$$

Elementos da Parábola:

- O ponto F é o foco da parábola.
- A reta L é a diretriz da parábola.
- A reta focal ℓ da parábola $\mathcal{P}$ é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- O ponto V da parábola $\mathcal{P}$ que pertence à reta focal é o vértice de $\mathcal{P}$.

Ilustraremos abaixo um exemplo de parábola, (Figura 6.2) com a concavidade para cima, que está ligado ao objetivo deste trabalho.

Exemplificaremos agora os casos em que fios fléxiveis formam as curvas catenária e parábola.

O cabo assume a forma de uma curva denominada de **catenária** quando ele está submetido apenas ao seu próprio peso (Figura 6.3).

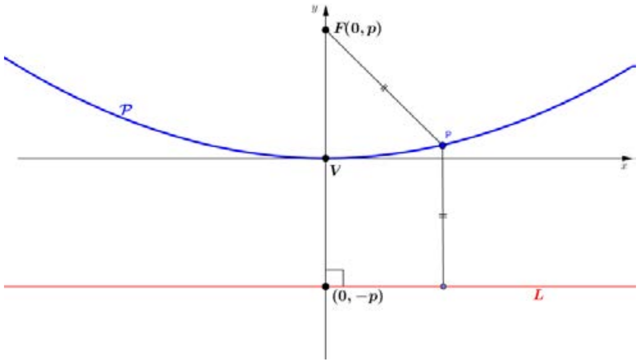

Figura 6.2: Esboço da Parábola

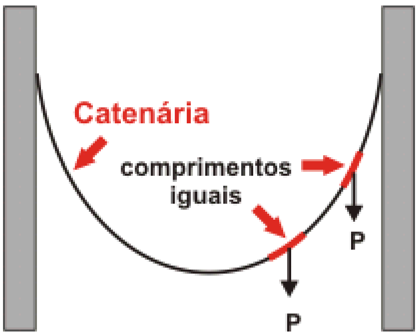

Figura 6.3: Catenária $\rightarrow$ carga uniformemente distribuída ao **longo** do cabo

O cabo assume a forma de uma **parábola** quando está submetido a uma força uniformemente distribuída na horizontal. Esta condição ocorre em duas situações, (Figura 6.4):

- cabo sustenta uma ponte pênsil, sendo o seu peso próprio desprezível em face ao peso da ponte.
- cabo está muito esticado estando o seu peso próprio distribuído uniformemente na horizontal de forma aproximada.

Mostraremos a seguir uma ilustração para compararmos a catenária e a parábola. Os gráficos abaixo representam uma parábola de equação $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ e uma catenária de equação de $g(x) = a.\cosh(\dfrac{x}{a}) - 1$, onde $a \in [0,5]$, escolhemos estes exemplos e procuramos parâmetros próximos, para mostrar que as duas curvas não são totalmente coincidentes (Figura 6.5).

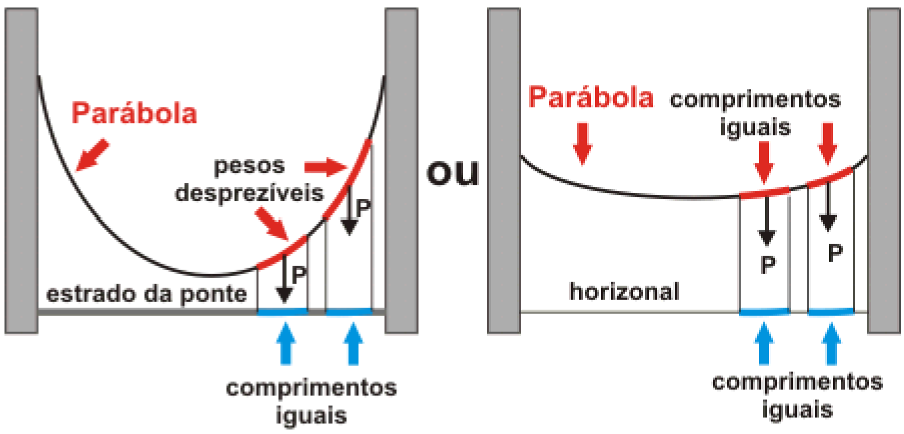

Figura 6.4: Parábola $\to$ carga uniformemente distribuída na **horizontal**

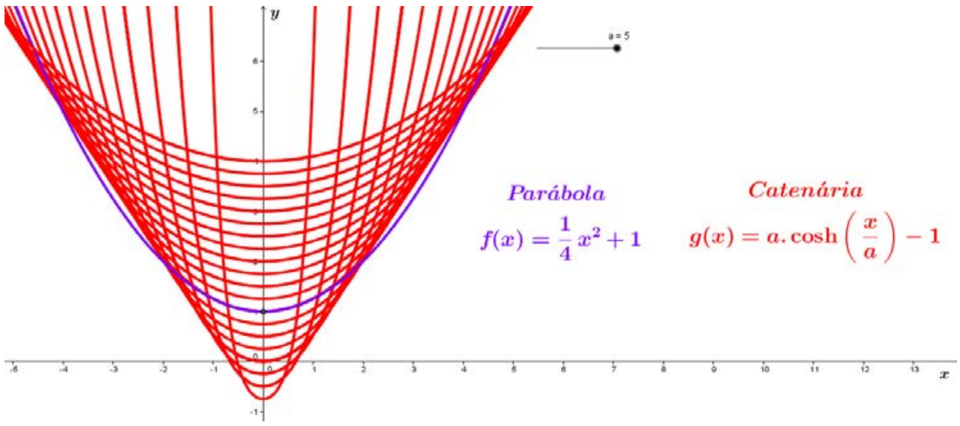

Figura 6.5: A Catenária e a Parábola

Uma utilização para a catenária é em transmissão de energia elétrica, que é o processo de transportar energia entre dois pontos. Essa utilização consiste em transportar energia através de linhas áreas, que é ligar um condutor (fios) de peso uniforme entre os apoios A e B, a uma distância f entre o ponto mais baixo situado no centro da curva e a reta AB, que une os apoios, recebe o nome de **flecha**. Chama-se **vão** a distância a entre os pontos A e B, como mostra a figura (6.6), que representa a catenária.

6.1.2 Velocidade de Uma Onda

Um outro exemplo para aplicação das funções hiperbólicas, é que a função tangente hiperbólica pode ser usada para calcular a velocidade das ondas do mar. A velocidade da onda é calculada utilizando a seguinte fórmula:

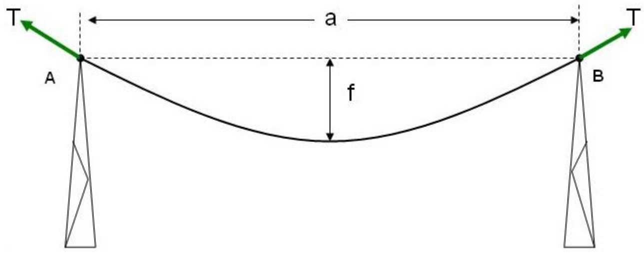

Figura 6.6: Transmissão de energia entre dois pontos

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh(2\pi\frac{d}{\lambda})}$$

onde λ é o comprimento da onda, d é a profundidade, e g é a aceleração da gravidade.

Em águas profundas é adequado assumirmos que essa velocidade se aproxima de $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

Isso ocorre porque como as águas são de grande profundidade assumimos que $d \to \infty$, então temos que:

$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\lim_{d\to+\infty}\tanh(2\pi\frac{d}{\lambda})}$ e sabendo que $\lim_{x\to+\infty}\tanh(x) = 1$, logo:

$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

6.2 Atividades Propostas

Nesta seção, vamos propor algumas atividades para serem aplicadas e ensinadas aos alunos do Ensino Médio, sabendo que conforme (SEEDUC (2012)), os mesmos já têm o conhecimento de funções exponenciais, funções trigonométricas, Identidades Trigonométricas e equações da circunferência e hipérbole.

Em (Jacomino (2013)), o uso de softwares no ensino de matemática foi justificado. Usaremos para as atividades propostas os softwares livres e de download gratuito, o Geogebra e o Winplot. Escolhemos esses softwares, por se tratarem de softwares de fácil manuseio, ambos com versões em língua portuguesa e encontrados nos laborátorios de informática das escolas na qual sua utilização para a construção de gráficos de funções é simples. Entretanto, todas as atividades aqui propostas para o Geogebra e o Winplot fazem parte de uma aula de Matemática, então terá supervisão e orientação de um professor explicando passo a passo os elementos das construções.

Atividade 6.1 *Utilize o software Geogebra para construir um círculo trigonométrico e trace os gráficos de* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$*,*$f(x) = \cos(x)$*,* $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ *e* $f(x) = \cosh(x)$*. Determine o Domínio e imagem de cada uma dessas funções e explique quais são periódicas.*

O objetivo em propormos esta atividade, é de mostrar a principal diferença entre as funções circulares e as funções hiperbólicas, que é a periodicidade. Sabendo que para a melhor aprendizagem das funções hperbólicas, os alunos precisam conhecer e estudar o comportamento das funções trigonométricas circulares, suas propriedades e saber que estas funções são periódicas, inclusive serem capazes de calcular seus períodos e o que isso significa.

Então, perceberam com a ajuda de um software, nessa atividade o Geogebra, através da observação dos gráficos construídos para as funções hiperbólicas, que estas não possuem tal propriedade, ou seja, não são periódicas. Esta atividade irá ajudar ao aluno a ler e interpretar os gráficos das funções trigonométricas circulares e das funções hiperbólicas.

Primeiro construiremos o círculo trigonométrico, de equação $x^2 + y^2 = 1$. Em seguida, fixamos um ponto $P = (x, y)$ pertencendo ao círculo, fazendo então um segmento $\overline{OP} = raio = 1$, onde O é a origem da circunferência. Então o segmento $\overline{OP}$ formará um ângulo α com o eixo ox, medido em radianos.

Em seguida construiremos um ponto T, com coordenadas $(\alpha, \operatorname{sen}(\alpha))$. Então a medida que deslocarmos o ponto P, sobre o círculo no sentido anti-horário, isto é, sentido trigonométrico, e habilitarmos o rastro do ponto T, ele se deslocará, mostrando ao aluno o período da função seno e seu gráfico com o periódo pertencendo ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Agora construiremos o gráfico da função $g(\alpha) = \operatorname{senh}(\alpha)$, e compararemos com a $f(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$, construída anteriormente, e mostrando que a função $g(\alpha)$ não é periódica, como mostra a figura (6.7).

Construção análoga para as funções cosseno e cosseno hiperbólico, apenas alterando para $T = (\alpha, \cos(\alpha))$,$f(\alpha) = \cos(\alpha)$ e $g(\alpha) = \cosh(\alpha)$ (Figura 6.8).

Atividade 6.2 *Com o uso do programa Winplot:*

- *Construa a circunferência* $x^2 + y^2 = 1$*, em seguida faça uma parametrização com* $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$*, compare as formas construidas.*

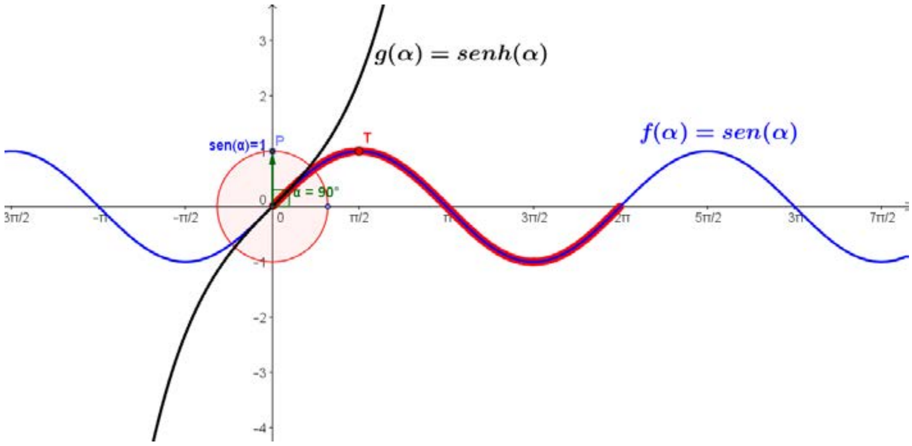

Figura 6.7: Função Seno e seu período

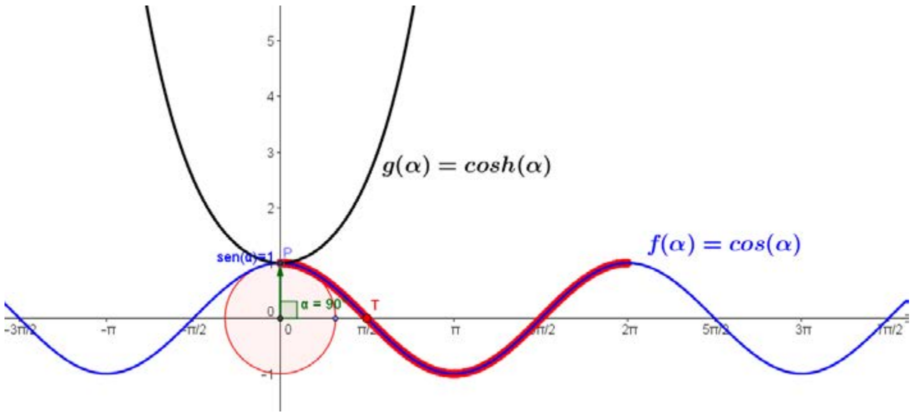

Figura 6.8: Função Cosseno e o seu período

- *Construa a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, depois faça uma parametrização usando $P = (\pm\cosh t, \pm\operatorname{senh} t)$ onde $t \geq 0$, separadamente, observar a curva gerada, comparando as duas curvas.*

Essa atividade tem a finalidade de mostrar porque as funções hiperbólicas levam esse nome, sabendo que os alunos já estudaram circunferência e as secções cônicas (elipse, parábola e hipérbole) usaremos agora outro software bem conhecido, o Winplot para fazer a parametrização do ponto P do plano cartesiano, fazendo $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e mostrar que as funções circulares seno e cosseno, "geram"a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ ilustrado na figura (6.9).

E no segundo item, mostrar que as funções seno e cosseno hiperbólico "geram"a hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$, fazendo $P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$, $P = (\cosh t, -\operatorname{senh} t)$, $P = (-\cosh t, \operatorname{senh} t)$ e $P = (-\cosh t, -\operatorname{senh} t)$ como mostra a figura (6.10).

Com essas construção justificar os nomes de funções circulares e funções hiperbólicas.

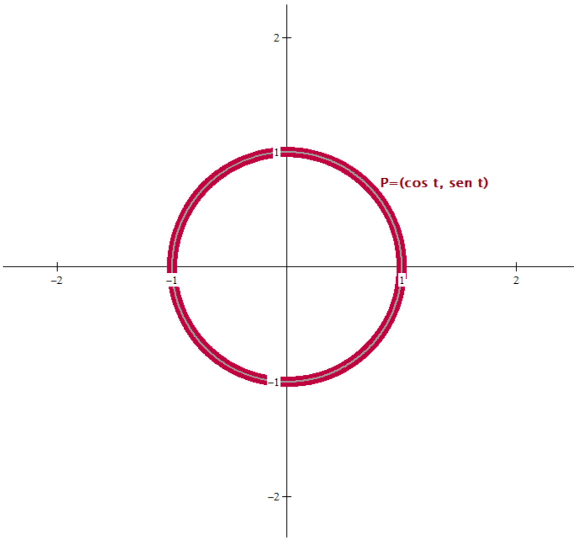

Figura 6.9: Parametrização da circunferência

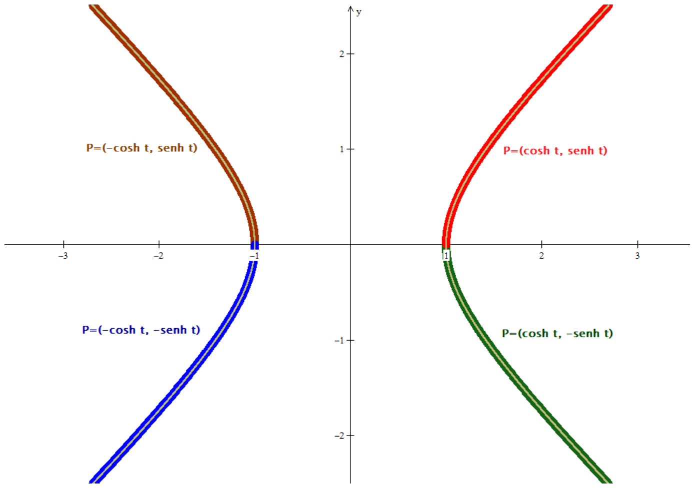

Figura 6.10: Ramos da Hipérbole

Atividade 6.3 *Sabendo que* $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *e* $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$*, Prove que* $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$*.*

Mostrar a semelhança entre as identidades fundamentais trigonométricas circulares e hiperbólicas é o objetivo desta atividade. Como os alunos já estudaram a identidade fundamental $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ e sua relação com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, com essa atividade , que é resolvida com um pouco de manipulação algébrica, ao alcance do conhecimento dos alunos; esses conseguirão mostrar também a identidade fundamental da trigonometria hiperbólica $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$, e sua relação com a hipérbole de $x^2 - y^2 = 1$.

Solução da atividade (6.3):

Usando as definições $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, teremos:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x} + e^{-2x} - e^{-2x} + 4}{4} =$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

Atividade 6.4 *Sabendo que* $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$

Prove que:

1. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$.

2. *Utilize o item anterior e desenvolva a fórmula para* $\tanh(x-y)$ *e* $\tanh(2x)$.

***Solução da atividade (6.4)** item 1*:

como $\tanh(x) = \dfrac{senh(x)}{cosh(x)}$ e usando as identidades (5.17) e (5.19), logo:

$$\tanh(x+y) = \frac{senh(x+y)}{cosh(x+y)} = \frac{\operatorname{senh}(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)}$$

Então dividindo o numerador e o denominador desta fração por $\cosh(x)\cosh(y)$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{senh}(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}}{\dfrac{\cosh(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}} = \frac{\dfrac{\operatorname{senh}(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}+\dfrac{\operatorname{senh}(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}}{\dfrac{\cosh(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}+\dfrac{\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}} =$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}+\dfrac{\operatorname{senh}(y)}{\cosh(y)}}{\dfrac{\cosh(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}+\dfrac{\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)}{\cosh(x)\cosh(y)}} = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$$

Nesta atividade, o objetivo é relacionar os valores dos senos, cossenos e tangentes através das principais identidades trigonométricas hiperbólicas; essa atividade é muito semelhante com as que os alunos já fazem com as identidades trigonométricas circulares. Visa além de mostrar essas relações, melhorar a manipulação algébrica dessas funções.

***Solução da atividade (6.4)** item 2*:

Solução análoga para $\tanh(x-y)$ e encontraremos a identidade:

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh(x)-\tanh(y)}{1-\tanh(x)\tanh(y)}$$

Para a resolver $\tanh(2x)$ usaremos a solução do item 1, $\tanh(2x) = \tanh(x+x)$, ou seja:

$$\tanh(2x) = \tanh(x+x) = \frac{\tanh(x)+\tanh(x)}{1+\tanh(x)\tanh(x)} = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$$

Atividade 6.5 *Sabendo que:*

1. *Se* $\operatorname{senh}(x) = \sqrt{3}$, *determine* $\cosh(x)$ *e* $\tanh(x)$.

2. *Se* $\tanh(x) = 0,8$, *determine* $\cosh(x)$ *e* $\operatorname{senh}(x)$.

A finalidade desta atividade é aplicar corretamente os conhecimentos e mostrar que uma vez conhecido o valor de uma das seis funções trigonométricas, $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\operatorname{sech}(x)$, $cossech(x)$ e $\operatorname{cotanh}(x)$, conseguimos determinar o valor de todas as outras funções. E também estudar seus domínio e suas restrições, como já é feito com as funções circulares.

Solução da atividade (6.5) *item 1*:

Usaremos a identidade (5.12):

Substituindo o valor de $\operatorname{senh}(x) = \sqrt{3}$ em $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$, temos:

$\cosh^2(x) - (\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow \cosh^2(x) - 3 = 1 \Rightarrow \cosh^2(x) = 1 + 3$

$\cosh^2(x) = 4 \Rightarrow \cosh(x) = \sqrt{4}$

Portando $\cosh(x) = 2$.

Solução da atividade (6.5) *item 2*:

Usaremos a definição $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$ e identidade (5.12):

$\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = 0,8 \Rightarrow \operatorname{senh}(x) = 0,8\cosh(x)$, substituindo em (5.12), temos:

$\cosh^2(x) - (0,8\cosh(x))^2 = 1$

$\cosh^2(x) - 0,64\cosh(x)^2 = 1$

$0,36\cosh^2(x) = 1$

$\cosh^2(x) = \dfrac{1}{0,36}$

$\cosh^2(x) = \dfrac{100}{36} \Rightarrow \cosh(x) = \sqrt{\dfrac{100}{36}} \Rightarrow \cosh(x) = \dfrac{10}{6}$

Portanto $\cosh(x) = \dfrac{5}{3}$.

Para determinar o valor de $\operatorname{senh}(x)$, substituiremos o valor de $\cosh(x)$ encontrado em $\operatorname{senh}(x) = 0,8\cosh(x)$:

$\operatorname{senh}(x) = 0,8.\dfrac{5}{3} \Rightarrow \operatorname{senh}(x) = \dfrac{4}{3}$

Capítulo 7

Conclusão

Tendo em vista os aspectos observados, entende-se que é perfeitamente possível a inclusão do estudo de funções hiperbólicas no Ensino Médio, uma vez que todos os conhecimentos necessários para essa inserção já são dominados pelos alunos, pois compõem o currículo mínimo de Matemática. Verificou-se que as funções hiperbólicas são análogos as funções trigonométricas circulares . Mostramos também como podem ser derivadas de combinações simples de funções exponenciais. Esta profunda relação com funções familiares, permitiu-nos descobrir muitas propriedades que ilustraram, centrando-se em duas das principais funções hiperbólicas que são o seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Nós discutimos o desenvolvimento, as propriedades e identidades trigonométricas das funções hiperbólicas, incluindo as contribuições de Vincenzo Riccati, Jacob e Johann Bernoilli, Johann Heinrich Lambert, entre outros. Graças ao trabalho feito por esses matemáticos, somos capazes de usar funções hiperbólicas em cada disciplina científica. Mostramos também algumas aplicações para seu uso, como as catenárias, utilizadas em linhas de alimentação elétrica; e a tangente hiperbólica, que é usada para calcular a velocidade das ondas do mar. No entanto, existem muito mais, incluindo várias aplicações no campo da Física e em outras ciências.

Uma outra contribuição dessa proposta aqui sugerida , como diz a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Seria a preparação para o prosseguimento dos estudos dos alunos, uma vez que funções hiperbólicas são vistas pela primeira vez nas aulas de Cálculo, gerando muitas dúvidas e dificuldades. A continuação do desenvolvimento da capacidade de aprender e a compreensão do mundo físico, social e cultural e o 3º ano do ensino médio é a consolidação deste aprofundamento.

Portanto, com este trabalho propromos inserir noções sobre Funções Hiperbólicas na matriz curricular do Ensino Médio, apresentando atividades e objetivos para essa inserção com o auxilio de softwares matemáticos livres, encontrados facilmente nas escola

Referências Bibliográficas

Anton, H. (2007). *Cálculo*, volume 1. Bookman, Porto Alegre, 8ed edition.

Boyer, C. B. (2012). *História da Matemática*. Blusher, São Paulo.

do Carmo, M. P., Morgado, A. C., and Wagner, E. (2005). *Trigonometria e Números Complexos*. SBM, Rio de Janeiro, 3a edition.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. UNICAMP, São Paulo.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., and de Almeida, N. (2004). *Matemática - Ciência e Aplicações*, volume 2. Atual, São Paulo.

Jacomino, T. M. Z. (2013). Funções racionais no ensino médio. Master's thesis, UENF, Campos dos Goytacazes - RJ.

Katz, V. J. (1998). *História da Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

LDB (2011). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Edições Câmara, Brasília.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*, volume volume 1. Habra, São Paulo, 3 ed edition.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. (2006a). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM, 9a.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. (2006b). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, 6a edition.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. (2006c). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 3. SBM, 6a edition.

Maor, E. (2008). *e: A História de um Número*. Editora Record, Rio de Janeiro, 5a edition.

Miller, K. S. and Walsh, J. B. (1962). *Elementary and Advanced Trigonometry*. Harper & Brothers, New York.

PCN (2001). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação e Cultura, Brasília.

SBM (2011). *Números, Conjuntos e Funções Elementares*. SBM, Rio de Janeiro.

SBM (2012). *Geometria Analítica*. SBM, Rio de Janeiro.

SEEDUC (2012). *Currículo Mínimo 2012 - Matemática*. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2a edition.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, México, 2a edition.

Stewart, J. (2009). *Cálculo*, volume volume 1. Cengage Learning, São Paulo, 6 ed edition.

Talavera, L. M. B. (2008). Parábola e catenária: História e aplicações. Master's thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo.