PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

JOSÉ PAULO DE ARAUJO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

AGOSTO - 2013

PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

JOSÉ PAULO DE ARAUJO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestre em Matemática."

Orientadora: Professora Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

AGOSTO - 2013

PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

JOSÉ PAULO DE ARAUJO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 23 de Agosto de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Oscar Paz La Torre, D.Sc.- UENF

Prof. Paulo Sergio Dias da Silva, D.Sc.- UENF

Prof. Luiz Alberto Viana da Silva, D.Sc.- UFF

Prof[a]. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc.- UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esse trabalho aos meus alunos e a todos aqueles que vêem na educação o caminho para a liberdade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus

À minha Leires,

Aos meus filhos, Paulo e Helena, que compreenderam o meu afastamento durante o curso e me enchem de alegria.

À minha mãe, Gracinda, que me deu a vida e que mesmo com suas limitações sempre me incentivou na busca contínua do conhecimento.

Ao meu pai que foi o meu norte nesta vida.

À minha orientadora, Profª. Liliana Angelina León Mescua, paciente, dedicada, compreensiva, que tanto me ajudou com sua sabedoria.

Aos meus Mestres e eternos Amigos.

“As coisas mais simples são as mais importantes, pois servem de base para todas as outras”.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar atividades com modelos de exercícios simples e experimentais que visem dar ao aluno, desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, condições de construir o conceito de função de modo informal, possibilitando o desenvolvimento de atitudes positivas perante a Matemática e diminuindo o impacto gerado por este tópico, que normalmente só é apresentado a partir do 9^o ano.

Na construção das atividades foram considerados, os graus de complexidades de acordo com os quatro níveis de compreensão do aluno proposto por Tinoco (1998), as várias formas de representação do conceito de função, obtidas através de sua evolução histórica e a atual organização da Educação Básica Fundamental do Sistema Estadual de Ensino SEERJ (2011).

Palavras-chave: Função; Construção Histórica; Segmentos; Ciclos; Niveis.

ABSTRACT

This work aims to present activities with simple models and experimental exercises that aim to give the student, from the early grades of elementary school, condition to build the concept of function in an informal way enabling the development of positive attitudes towards Mathematics and reducing impact generated by this topic that usually only appears from the 9^o grade.

In construction activity, the degree of complexity were considered according to the four levels of student knowledge proposed by Tinoco (1998) obtained through its historical evolution and current organization of the the many ways of representation of the function concept Basic Education Core System State Education SEERJ (2011).

Keywords:Function; Historic Building; Segments; Cycles; levels.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A primeira vez que tive contato com o conteúdo função foi na então 8^a série do 1^o grau (atual 9^o ano do Ensino Fundamental), no ano de 1976. Nessa época eu não sabia dizer se estava entendendo o que fazia, mas consegui obter as notas necessárias para minha aprovação. Ao estudar nas séries do 2^o grau (atual Ensino Médio), passei por diversas dificuldades para assimilar varios conceitos que dependiam de um bom entendimento do conceito de função, de variáveis, domínio e imagem. Foi quando percebi que, talvez pelo fato de eu não possuir amadurecimento matemático suficiente, os resultados que obtinha, eram apenas fruto de uma intensa mecanização na resolução dos exercícios, que em sua maioria eram compostos por imensas listas repetitivas.

Só na faculdade passei a sentir segurança nos assuntos que tratavam do conceito de função, mesmo com a formalidade que naturalmente é imposta nesse nível de aprendizagem.

Nos últimos anos, houve várias mudanças na educação. Atualmente, há muitas propostas na forma de abordar o assunto “Função” nos livros textos tomados como referência nas escolas, embora observa-se que o impacto gerado pelo tema continua persistindo para a maioria dos alunos.

Nos primeiros anos que lecionei no Ensino Médio, e pela minha própria experiência, logo consegui compreender o por que de apenas poucos alunos obterem algum sucesso ao resolver os exercícios que envolviam o conceito de função e o por que estes tinham tantas dificuldades ao se depararem com os assuntos que dependiam deste conceito, inclusive em outras matérias como Física e Química.

Foi desde então que, ao trabalhar com turmas de 6^o ao 9^o ano do Ensino Fundamental, passei a propor exercícios relacionados com o conceito de função, à medida que isto fosse possível. Intruduzindo primeiramente o conceito intuitivo e depois o conceito formal de Função, de modo que os alunos pudessem perceber onde, como e por que usa-se essa ferramenta tão importante da Matemática.

Senti, ao acompanhar alguns desses alunos no Ensino Médio, que a desenvoltura dos mesmos no assunto era visivelmente superior aos demais que não haviam passado por esse processo.

É interessante ressaltar que os problemas por mim relatados já vem sendo observados pelas autoridades de ensino há algum tempo, principalmente no que se refere ao ensino da Matemática no Brasil, conforme o que é citado no PCN:

> *Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20 não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores de Matemática para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. (PCN (1997))*

Por estar presente nas noções mais básicas da Matemática, o conceito de função é considerado um dos mais importantes, sendo indispensável para o estudo dos fenômenos naturais no aspecto quantitativo. Sua construção foi historicamente longa e delicada. No ensino básico brasileiro, esse conceito foi introduzido de modo muito formal, como observa Leonor Leal.

> *O ensino de funções passou a ser empregado no Brasil, em consequência do movimento da Matemática Moderna, entre os anos 1955 e 1970, porém as razões que determinaram o surgimento do conceito de função tais como a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependência de valores e generalizar situações, foram negligenciadas devido ao formalismo dedicado a esse tópico o que fez exigir uma maturidade matemática ainda não adquirida por alunos nos primeiros sete anos de escolaridade, dificultando a construção desse conceito, Leal (1990)*

O conceito de função é bastante abrangente, envolve concepções diversas e muitas formas de representação, faz-se necessário a compreensão do sentido que possa assumir em diferentes contextos, quais os significados para o aluno e como isso se desenvolve no ambiente escolar. No que se refere às aplicações, função pode ser entendida como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos, o estudo de relações entre grandezas que variam. Por sua vez, a ideia de variável também é um conceito amplo e admite várias interpretações.

As funções podem ser representadas de diferentes formas como tabelas, gráficos, regras verbais, regras matemáticas, diagrama e modelos matemáticos. Quando desenvolvidas de forma articulada, estas diferentes formas levam a uma compreensão mais abrangente do conceito de função, bem como do problema em questão ou da situação que esteja sendo apresentada.

O uso de tabelas é adequado quando se pretende encontrar relações generalizadas tais como situações que envolvam relações de recorrência. Traçar gráficos é particularmente importante no estudo de funções, pois além do apelo visual, facilita a observação de certos comportamentos, que em outras representações podem ser difíceis de perceber. Domínio, contradomínio e rede de correspondência, são percebidos simultaneamente o que nos permite visualizar o comportamento geral da função. Regra verbal (ou fala na língua nativa) pode ser considerada um veículo de transposição do informal ao abstrato.

As regras matemáticas referem-se às propriedades, à simbologia, às expressões algébricas e às demais representações matemáticas, próprias da linguagem dessa ciência.

Os modelos descrevem em termos matemáticos, aquilo que se pretende representar. Quando se modela algebricamente um fenômeno dá-se um passo importante em direção à abstração.

Muitos alunos do 9^o do ensino fundamental têm dificuldades de compreensão, quando é apresentado o conceito de variável e tem que lidar com expressões algébricas ou expressar relações generalizadas, pois não sentem a necessidade de generalização.

O objetivo deste trabalho, é propor exercícios direcionados à familiarização do aluno ao conceito de função desde os primeiros anos do ensino fundamental, fazendo com que o mesmo venha a construir esse conceito de forma natural adquirindo maior habilidade na resolução de problemas de um modo geral.

Este trabalho está organizado em três capítulos e um apêndice.

No Capítulo 1, apresentamos uma breve cronologia com os fatos mais relevantes sobre a construção do conceito de função, desde as primeiras manifestações de correspondências observadas nas tábuas do “Almageste” até a definição formal dada por Bourbaki no século XX. Em seguida fazemos um breve relato sobre o momento em que se intruduz o ensino de funções nas escolas do Brasil.

No Capítulo 2, apresentamos os níveis de compreensão do aluno, na aquisição do conceito de função, proposto no trabalho “Construindo o Conceito de Função no 1^o Grau”, sob a coordenação da Prof.ª Lucia A.A. Tinoco, do Instituto de Matemática/UFRJ. Em seguida, considerando as etapas referidas em Tinoco (1998) na organização escolar por ciclos proposta pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro SEERJ (2011), será feita uma descrição detalhada dos temas a serem trabalhados em cada ciclo.

No Capítulo 3, propomos uma sequência de atividades para alunos do 2^o ao 9^o ano do Ensino Fundamental. Os objetivos destas atividades são introduzir e facilitar a compreensão da construção do conceito de função.

Finalmente, incluimos um Apêndice com as soluções esperadas às atividades propostas no Capítulo 3.

Capítulo 1

Evolução do Conceito de Função

Segundo Youschkevitch (1976), o desenvolvimento da noção de função devide-se em três etapa principais:

1. Antiguidade (Compreende desde os Babilônios a Nicolas Oresme): Neste período verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e funções.

2. Idade Média (Da Vinci, Descartes a Newton): Aparece a noção de função sob a forma geométrica e mecânica, ainda em descrições gráficas e verbais.

3. Período Moderno (Leibniz em diante): Surgem as expressões analíticas de função, revolucionando a Matemática devido a sua eficácia, assegurando a esta noção um lugar de destaque nas ciências exatas.

A seguir, apresentamos um breve relato sobre as principais contribuições para a construção do conceito de função.

1.1 Cronologia

O conceito de função foi construído e aperfeiçoado ao longo de vários séculos. A noção de dependência possivelmente teve início há cerca de 6000 anos, porém foi somente nos três últimos séculos que houve o desenvolvimento do conceito formal de função, com estreita ligação com problemas relacionados ao Cálculo e à Análise.

Na antiguidade, é provável que os Babilônios já tinham uma ideia vaga desse conceito, pois construíram tabelas em argila onde para cada valor na primeira coluna existia um número correspondente na segunda. Através destas tabelas, eles relacionaram o raio e o comprimento de um círculo, também relacionaram os números naturais com os seus quadrados, cubos e com suas raízes quadradas. Para os Babilônios cada problema exigia uma nova análise, pois não existiam procedimentos ou regras aplicáveis a outras situações semelhantes.

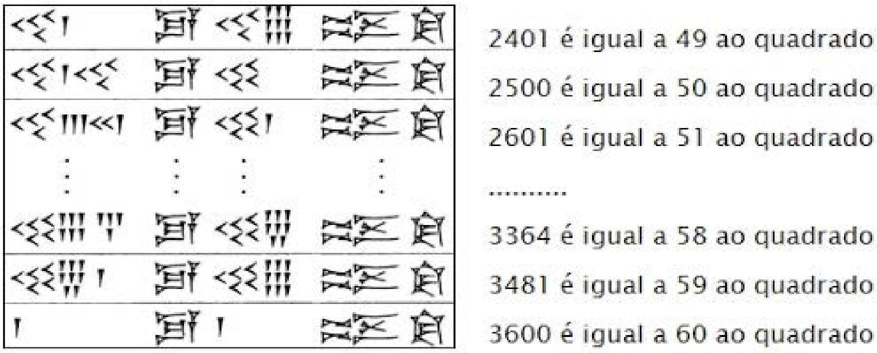


Figura 1.1: Tábua Babilônica

Na Grécia Antiga, podemos citar a contribuição de Ptolomeu que viveu em Alexandria por volta de 140 d.C., o qual em sua obra "Almageste" (O Maior), desenvolveu tabelas trigonométricas, onde exibe os valores do seno, do cosseno e da tangente para alguns ângulos notáveis. Os Pitagóricos, por sua vez, observaram que havia uma relação entre a altura dos sons e o comprimentos das cordas da lira. Daí, eles concluíram que esta relação seria a responsável pela existência da harmonia musical, o que levaria à descoberta de algumas leis da acústica.

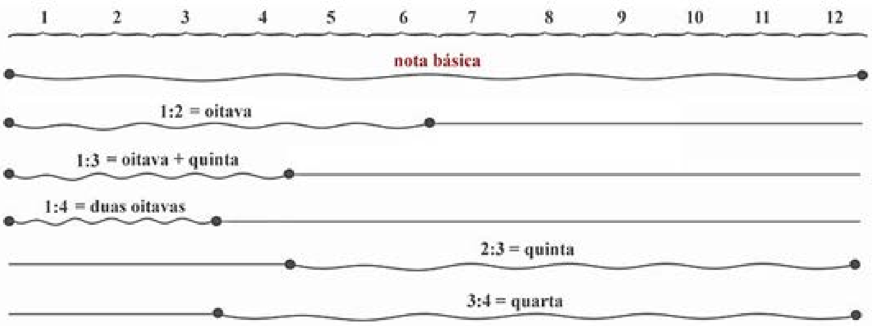


Figura 1.2: Notas Básicas

Em 1361, o matemático e filósofo francês Nicolas Oresme em sua publicação "Latitudinibus” (Latitude das Formas), fez a primeira representação gráfica de funções, onde seu primeiro exemplo foi traçar o gráfico da velocidade de um objeto em constante aceleração com respeito ao tempo.

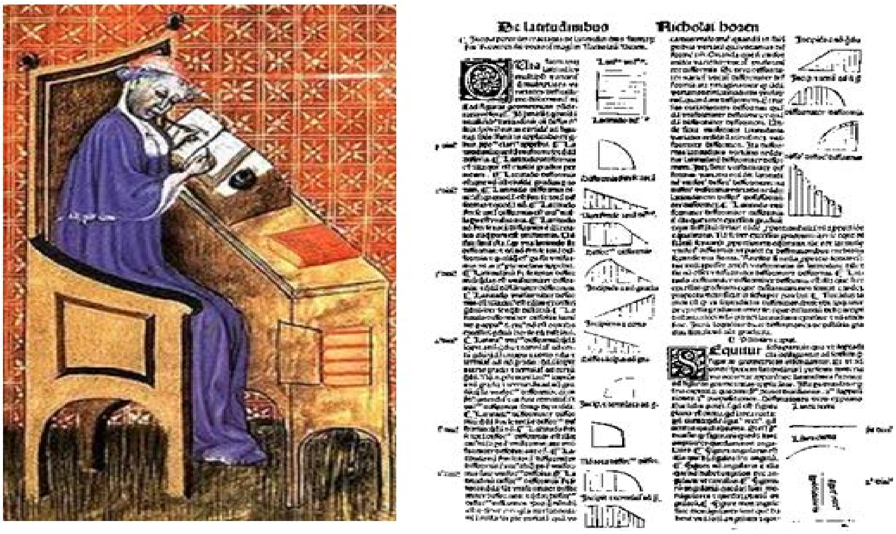


Figura 1.3: Nicolas Oresme - Tudo o que varia

Assim pode-se dizer que Oresme inventou a geometria coordenada antes de Descartes, encontrando a equivalência lógica entre tabular valores e construir gráfico. Para tanto, ele usou um gráfico de barras para representar uma magnitude variável que dependesse de outra, considerando para o tempo um segmento horizontal e para a velocidade em cada instante, o comprimento de um segmento vertical. É possível que Descartes tenha sido influenciado pelo seu trabalho, dado que este foi reimpresso diversas vezes ao longo dos 100 anos após sua primeira publicação.

A idéia de variação trouxe a de movimento, quebrando o ideal platônico de um mundo estático. No Renascimento, especialmente através de Leonardo Da Vinci (1452-1519) apareceram indícios do surgimento de leis quantitativas para o entendimento dos fenômenos da natureza, expressas através da matemática e de suas ferramentas.

Entre os séculos XVI e XVII surgiram várias contribuições para o desenvolvimento da noção de função. Johannes Kepler (1571-1630) com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias e Galileu Galilei (1564-1642) com o estudo da queda dos corpos e da relação entre espaço e tempo, introduziram o quantitativo nas representações gráficas e a relação entre duas grandezas envolvidas, expressadas matematicamente por intermédio da experimentação. Todos estes trabalhos trazem em seu enunciado o conceito implicito de função.

Aplicando a “nova” álgebra à geometria, René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665), apresentaram de forma independente o método analítico para definir funções (ainda sem ser denominada dessa forma). Descartes usou as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas, como fazemos até hoje.

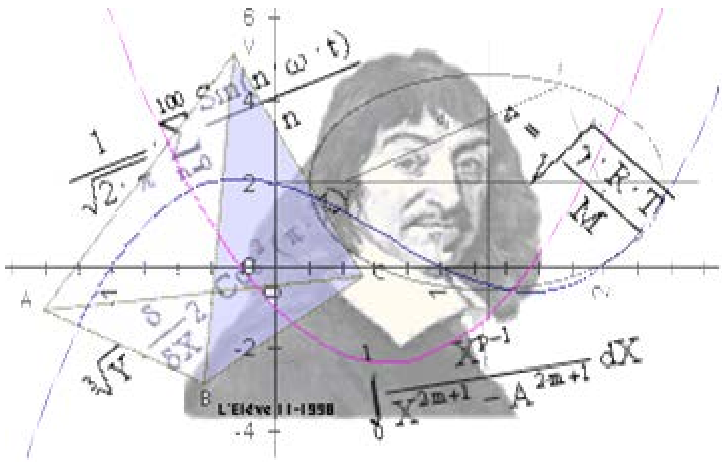


Figura 1.4: Rene Descartes

O primeiro a citar o conceito de função foi o inglês Isaac Newton (1642-1727). Embora tenha dado nomes um pouco confusos para as suas ideias, a saber: “fluentes” e “fluxões”. Newton também descrevia “relatia quantias”, como a variável dependente e a “genita”, como a quantidade obtida a partir de outras, utilizando as quatro operações fundamentais. O conceito apresentado por Newton era bem similar com o que usamos atualmente.

Gottfried Leibniz (1646-1716) apropriando-se das teorias de Newton usou pela primeira vez em 1673, a palavra “Função” para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente. No manuscrito “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus”, Leibniz introduziu também a terminologia de constante, variável e parâmetro, e chamando de função, os segmentos de retas obtidos por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada.

A definição mais explícita de função do século XVII foi dada por James Gregory em 1667, que a definiu como

> *“Uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável”.* Kline (1990)

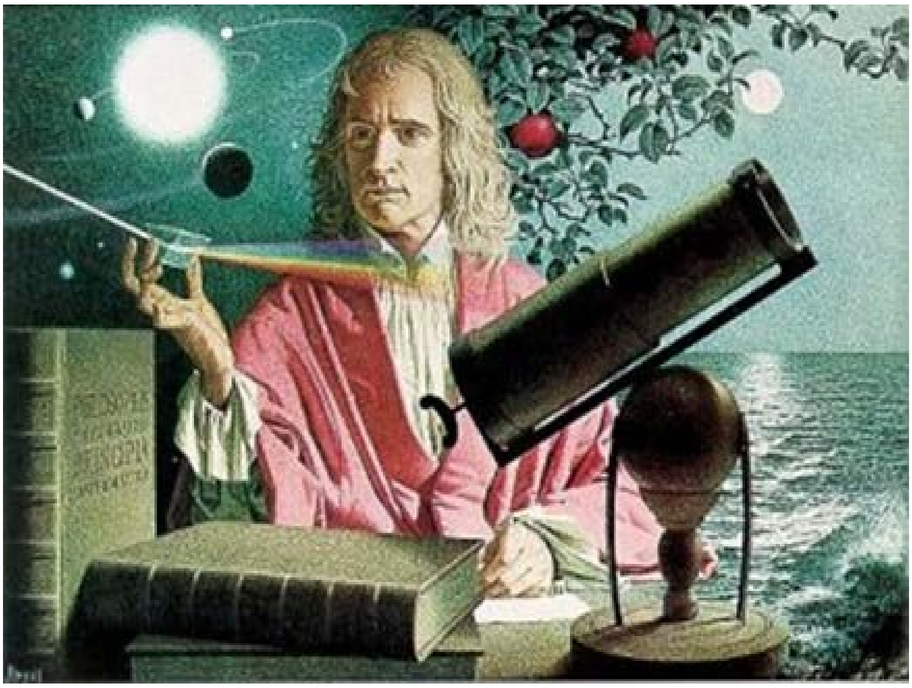


Figura 1.5: Newton

Para Gregory, esta outra operação imaginável era a passagem ao limite, que só seria completamente esclarecida posteriormente.

O suíço Johann Bernoulli (1667-1748) também teve grande importância para a divulgação do conceito de função. Entre 1694 e 1698, Bernoulli manteve contato com Leibniz e as correspondências trocadas evidenciam a palavra "Função" que ainda não havia aparecido em outro glossário matemático. Seria Bernoulli que a estrearia na comunidade matemática. Notações como X, ξ e finalmente ϕx foram usadas para denotar uma função de x. Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira:

> *Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes.* Rüthing (1984)

Anos mais tarde, em 1748, Leonhard Paul Euler (1707-1783) grande matemático e físico suíço de língua alemã e aluno de Bernoulli fundamentou e acrescentou a notação $f(x)$, tal qual conhecemos hoje e diz que:

> *"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes".*

Euler não definiu “expressão analítica”, mas, segundo Boyer (2005), tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas).

D´Alambert $(1717\text{-}1783)$ estimando as cordas vibrantes, dá uma solução onde aparece $\phi(at+x)$, onde ϕ é uma função arbitrária sujeita a certas condições dependendo do comprimento da corda e das condições iniciais. Este problema gerou um longo debate envolvendo Leonhard Euler, Jean le Rond d’Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange acerca do significado de “função” o que provocou importantes conseqüências na evolução do conceito. O conceito de Função foi estendido, de modo a abranger:

- Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos.
- Funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos.

Daniel Bernoulli $(1700\text{-}1782)$ dá outra solução para o mesmo problema das cordas vibrantes em forma de série de funções trigonométricas.

O matemático francês Joseph Fourier $(1768$ - $1830)$ descobre que uma função pode ter diferentes expressões analíticas e também que pode ser descontínua.

Foi Peter Dirichlet $(1805\text{-}1859)$, em 1829, quem criou a definição “formal” de função moderna:

> *Uma variável y se diz função de uma variável x, se, para todo o valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente. (...)*

Note que nesta definição, uma função é um caso especial de uma relação. Relação é um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados. Nas relações não existem restrições quanto à lei de correspondência entre os elementos dos conjuntos, já para as funções é costume introduzir restrições.

A interpretação do conceito de função como transformação, onde cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$, foi dada por George Boole:

"Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$."

Richard Dedekind (1831-1916) dá o conceito de função que usamos até hoje:

"Uma aplicação ψ de um sistema S é uma lei, que associa a cada elemento s de S certa coisa, que é chamada imagem de s e que escrevemos $\psi(s)$, onde o domínio e contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente de número, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções."

Durante o Século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da matemática. Weierstrass defendia que se construísse o cálculo infinitesimal sobre a Aritmética ao invés de sobre a Geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz.

Mais para o final do século, os matemáticos começaram a tentar formalizar toda a Matemática usando a Teoria dos conjuntos, conseguindo obter definições de todos os objetos matemáticos em termos do conceito de conjunto. Uma tradução da definição de Hardy para a linguagem dos conjuntos foi dada por Bourbaki em 1939:

"Sejam A e B conjuntos, uma parte f de $A \times B$ chama-se Função de A em B se, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Nessas condições escreve-se $f : A \to B$ e $f(x) = y$".

É possível notar que o conceito de função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Várias representações podem ser observadas na evolução do conceito de função: função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

1.2 Cronologia no Brasil

No Brasil Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950), diretor do Colégio Pedro II, baseando-se na reforma realizada por Felix Klein, propôs em 1927, uma mudança onde as matérias aritmética, álgebra e geometria passariam a ser ensinadas conjuntamente sob o nome de matemática.

No programa de ensino de 1929, o Colégio Pedro II trazia uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos, sugerindo a eliminação de assuntos de interesse puramente formalístico e de processo de cálculo desprovido de interesse didático, introduzindo assim o conceito de função e noções de cálculo infinitesimal. No que se refere a funções aparece entre os itens:

> *"Uso dos gráficos. Representação por meio de barras ou diagramas de dados estatísticos, geográficos e metereológicos, etc. Gráficos representativos de uma lei precisa"* , Beltrame (2000).

As mudanças propostas por Roxo foram apoiadas pelo Departamento Nacional de Ensino e da Associação Brasileira de Educação. Assim em 1929, o decreto 18564 oficializou a proposta de Roxo para o Colégio. Em 1930 Roxo foi chamado pelo então Ministro da Educação e Saúde Francisco Luís da Silva Campos (1891-1968) para elaborar um projeto de reforma no ensino brasileiro. O ministro acatou todas as suas ideias modernizadoras e então a proposta de Roxo foi transformada em Lei Nacional. Roxo destacava como característica para renovação, a introdução do conceito de função no ensino ginasial (Ensino Fundamental) sob a forma de representações gráficas.

Em 1934, Gustavo Capanema Filho (1900-1985) assumiu o Ministério da Educação e Saúde. Roxo, através de carta, propôs ao ministro a manutenção do ensino de funções no ginasial. Entretanto, tal proposta enfrentou resistência da igreja, representada pelo Padre Arlindo Vieira (1897-1963). O exército apoiou as ideias de Roxo, mas sem mencionar o ensino de funções. Capanema então acatou as ideias de Vieira e retirou o conceito de função no ensino ginasial.

Nos antigos guias curriculares do estado de São Paulo, a partir de 1975, havia no ensino fundamental uma preocupação com a determinação de Domínio, Contradomínio, Imagem e exploração de gráficos desvinculados da análise de fenômenos. Contudo, a partir da proposta curricular (1986) o estudo de função não se constituia um tema a parte, mas eram indicadas situações em que podiam ser exploradas desde o início do estudos dos números, em situações problema e em interpretações de gráficos. O estudo formal foi deixado para o antigo 2^o grau, (Hoje, chamado de Ensino Médio).

Capítulo 2

Niveis de Compreensão do Conceito de Função

No presente Capítulo, o objetivo é descrever os passos para a construção do conceito de Função pelo educando, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Segundo Bergeron (1982) à compreensão deste conceito se dá em quatro níveis

Tabela 2.1: Níveis de Compreensão

	Compreensão Intuitiva	Matematização Inicial	Abstração	Formalização
Características	Utilização do conhecimento informal da vida. Pensamento com base na percepção visual. Ações espontâneas.	Organização e quantificação das primeiras noções. O conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção.	O conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria. Generalização.	Uso da linguagem simbólica Descontextualização. Justificativa lógica das operações.
Para Funções	Reconhecimento de dependência (não quantificada) Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. Construção e interpretação de tabelas e gráficos de coluna e setor.	Quantificação das leis. Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. Interpretação de gráficos cartesianos. Construção de gráficos cartesianos simples. Reconhecimento de domínio (analisado no contexto).	Escrita de expressões analíticas. Distinção entre equações e funções. Construção e interpretação de gráficos convencionais e não convencionais. Caracterização de relações funcionais.	Notação $y = f(x)$ Domínio e imagem. Classificação.

No livro Construindo o Conceito de Função, apresentado pela equipe do projeto Fundão, coordenado pela Prof.^{a} Lucia Arruda de Albuquerque Tinoco, foi elaborada uma relação entre os níveis de compreensão e os níveis escolares, assim como sugestões de atividades que possam facilitar a construção do conceito de função pelos alunos do 6^o ao

9^o ano. A tabela citada por Tinoco (1998) é

Tabela 2.2: Níveis Escolares

	Compreensão Intuitiva	Matematização Inicial	Abstração	Formalização
2^o ao 5^o ano	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx			
6^o ao 7^o ano	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	
8^o ao 9^o ano	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	
Ensino Médio	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Segundo o atual Sistema Estadual de Ensino SEERJ (2011) a organização curricular do ensino fundamental está dividida em dois segmentos e cada um deles em dois ciclos, da seguinte forma:

- 1^o Segmento do Ensino Fundamental
  - 1^o Ciclo $\begin{cases} 2^o\text{ano} \\ 3^o\text{ano.} \end{cases}$
  - 2^o Ciclo $\begin{cases} 4^o\text{ano} \\ 5^o\text{ano.} \end{cases}$
- 2^o Segmento do Ensino Fundamental
  - 3^o Ciclo $\begin{cases} 6^o\text{ano} \\ 7^o\text{ano.} \end{cases}$
  - 4^o Ciclo $\begin{cases} 8^o\text{ano} \\ 9^o\text{ano.} \end{cases}$

A seguir, relacionaremos as Tabelas 2.1 e 2.2 à organização do Sistema Estadual de Ensino SEERJ (2011) e ao desenvolvimento histórico do conceito de função proposto por Youschkevitch (1976) e comentado no início do Capítulo 1. Com este objetivo, organizamos o seguinte organograma, que será considerado na elaboração das atividades propostas no próximo capítulo.

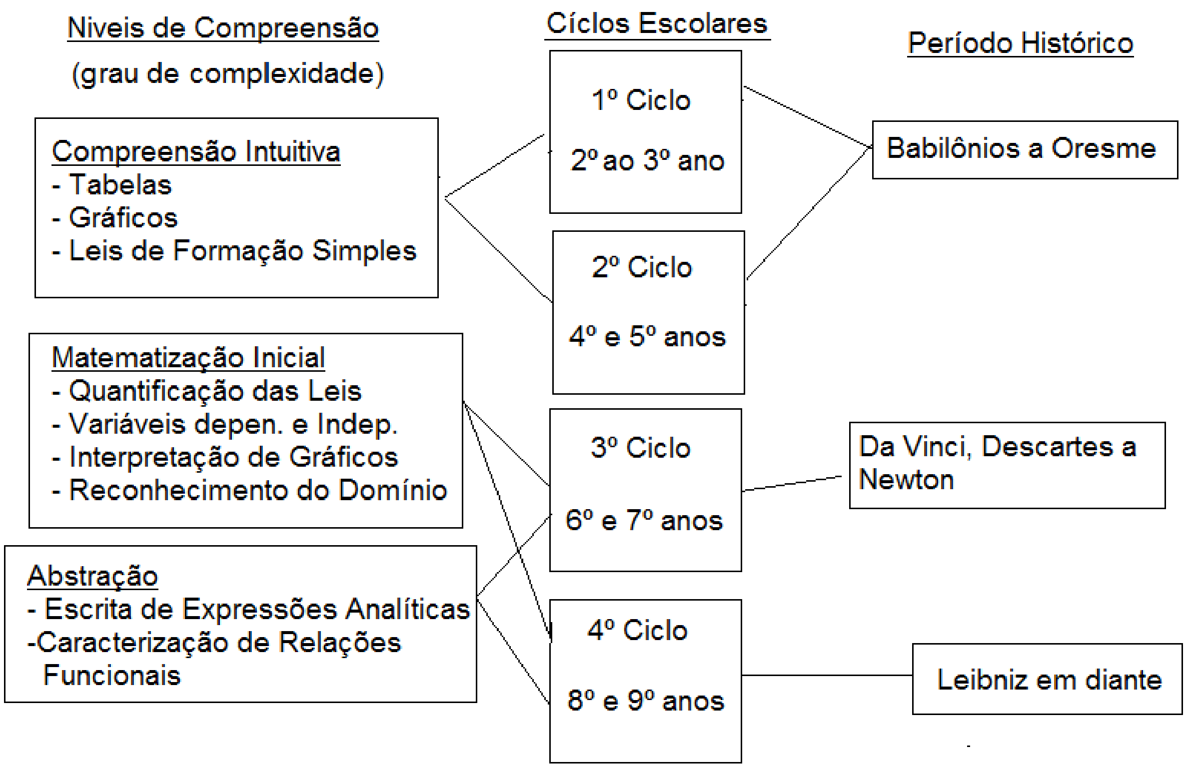


Figura 2.1: Organograma

A próxima secção é dedicada a detalhar os temas a serem abordados em cada segmento escolar.

2.1 1^o Segmento do Ensino Fundamental

Neste segmento, que compreende do 2^o ao 5^o ano do ensino fundamental, trabalharemos com tabelas, as primeiras noções de gráficos de coluna e de setor. Precisamente abordaremos, em cada ciclo os seguintes temas.

2.1.1 1^o Ciclo

As atividades propostas deverão considerar o conhecimento informal da criança, seu pensamento com base na percepção visual e suas ações espontâneas, o que em termos aplicados ao conceito de função se traduz em reconhecimento de dependência, leis de formação simples e visuais, construção de tabelas, e gráficos de setores e colunas.

A familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos pode se dar ao mesmo tempo em que o aluno adquire as noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito de função. Sendo assim, o presente trabalho propõe, sempre que possível, que sejam inseridos escalas, gráficos e/ou tabelas em todos os conteúdo planejados para esses dois anos do primeiro ciclo.

2.1.2 2^o Ciclo

Este ciclo se caracteriza pela compreensão de enunciados, terminologias e técnicas convencionais, sem deixar de lado a valorização e o estímulo de hipóteses e estratégias pessoais do aluno. São apresentadas situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, a aproximação da noção de número racional, através da compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações fracionária e decimal.

2.2 2^o Segmento do Ensino fundamental

Neste segmento que compreende do 6^o ao 9^o ano do ensino fundamental, continuamos trabalhando os temas citados no 1^o Segmento, incrementando ao nosso estudo o uso de plano cartesiano, reconhecimento de variáveis e porteiormente formalizando o conceito de função.

2.2.1 3^o Ciclo

Nos dois primeiros anos do 2^o segmento dá-se início à matematização e à abstração, onde acrescentamos atividades de organização e quantificação, a fim de trabalharmos o reconhecimento de variáveis dependentes e independentes, gráficos cartesianos simples e o reconhecimento de domínio.

As tabelas continuam nesta série, ainda na forma de associação de símbolos na comparação dos vários sistemas de numeração e resultados de operações aritméticas. Nas questões com operações aritméticas podemos propor situações com incógnitas, dando os primeiros passos na algebrização sem, ainda que não mencionemos o termo “equação”.

No 7^o ano, dá-se início ao estudo do plano cartesiano, algebrização com equações (modelagem) e o estudo de razões e proporções. Explora-se com maior frequência as noções de variáveis e dependência.

A construção de gráficos, deve ser tratada através de situações problema em que haja a variação de uma grandeza ligada à outra, onde podemos começar a explorar a ideia de lei de formação sem que seja mesma definida formalmente.

2.2.2 4º Ciclo

Nos dois últimos anos do 2^o segmento, são introduzidas atividades de generalização tais como a escrita de expressões analíticas, distinção entre equação e função, construção e interpretação de gráficos convencionais e não convencionais, e caracterização de relações funcionais.

No 8^o ano, dá-se início à algebrização e à caracterização de relações funcionais, bem como as noções de variáveis independentes e dependentes. Regularidades observadas em fenômenos levam a generalização de leis ou padrões. As atividades que visam ao desenvolvimento dessas habilidades são adequadas na apresentação de uma simbologia algébrica.

No 9^o ano, as primeiras definições possibilitam a formalização dos conceitos.

Por fim, observamos que ensino do conceito de função tem como característica a sua identificação com a expressão analítica e o conceito de pares ordenados, ignorando a sua origem de análise de fenômenos de variação. É necessário possibilitar que o aluno tenha condições para o desenvolvimento das noções de variáveis antes que seja possível a definição final do conceito, ou seja, o aluno deve ter plena ciência de que uma variável é perfeitamente determinada a partir do outra (independente de ser numérica ou não). Acreditamos que esta seja a melhor forma de sistematizar o conceito e apresentar uma definição formal de função.

A maioria das situações em que as funções são utilizadas trata de variações de uma grandeza dependendo da outra, sendo medida dessas grandezas expressas em números. No entanto, pode-se estender o conceito para domínios e contradomínios que não sejam numéricos.

Capítulo 3

Atividades no Ensino Fundamental

Neste capítulo, apresentamosas as atividades em secções de acordo com as formas de representação do conceito de função. Em cada atividade proposta é indicado o ano de escolaridade na qual a mesma deve ser aplicada, bem como algumas recomendações.

3.1 Trabalhando com Tabelas e Gráficos

Na seguinte seção apresentamos 6 atividades que fazem uso de tabelas e/ou gráficos. Sugerimos que a Atividade 5 seja aplicada como experiência interdisciplinar junto às matérias de Ciências e Geografia.

ATIVIDADE 1: Para ser aplicada no 2^o ano do Ensino Fundamental.

Esta atividade envolve com contagem, medidas, os significados das operações, utilização de estratégias pessoais de resolução e procedimentos de cálculo. Propõe a construção de tabelas e o estabelecimento de leis de formação visuais. Sendo assim, deverá ser aplicada e desenvolvida simultaneamente com todos os alunos da turma.

É apresentada uma cópia de uma folha qualquer de um mês do calendário, quando são feitas algumas perguntas e propostas de reconhecimento:

1. Qual é o mês desse calendário? _______________
2. Quais são os dias da semana? _______________
3. Cite três outros meses do ano. _______________

Dom	2ª F	3ª F	4ª F	5ª F	6ª F	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Figura 3.1: Mês de Maio

4. Pinte de vermelho todos os domingos do mês.

5. Construa o calendário do mês a seguir ao dado.

6. Marque nesse mês as datas importantes para a sua família.

<u>ATIVIDADE 2:</u> Explorando as figuras do Tangram. Proposta ao 2^o ano do ensino fundamental.

Aqui são exploradas as características das formas de algumas figuras planas. É feita a relação da figura com as suas características. É sugerido que seja aplicado o Tangram devido às suas propriedades lúdicas, porém essa atividade pode ser feita usando-se um conjunto com diversas formas geométricas simples, pois o intuito é a familiarização do aluno com as formas. Pode ser aplicada dividindo-se a turma em grupos de no máximo 4 alunos, para que os mesmos troquem informações sobre as observações feitas, com a intervenção regular do professor.

Após observar cada peça do Tangram na Figura 3.2(a) preencha a tabela 3.2(b).

(a) Tangram

Nome da figura	Quantidade	Numeros de lados	Números de vértices

(b) Tabela

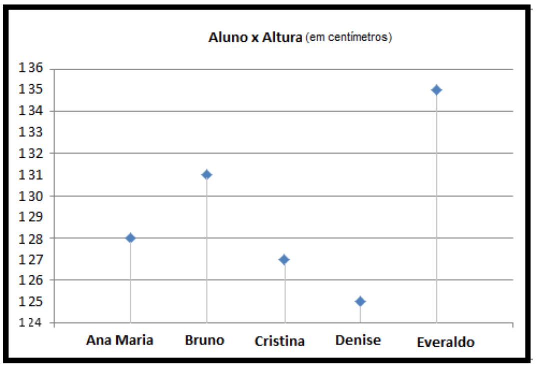
Figura 3.2: Atividade 2

<u>ATIVIDADE 3:</u> Pode ser aplicada no 2^o ou 3^o ano, usando a unidade de medida em centímetros para ser trabalhado o conjunto dos números naturais. No 4^o ou 5^o ano, troca-se a unidade de medida por metros, uma vez que nesse estágio os alunos já conhecem os números racionais. O objetivo é comparar e ordenar quantidades que expressem grandezas familiares aos alunos, bem como interpretar e expressar os resultados da comparação e da ordenação. Primeiros contatos com a denominação domínio referindo-se ao conjunto dos nomes dos alunos e o estabelecimento de Lei de formação simples, a variação das alturas mensalmente e a construção de gráficos.

<u>Exemplo:</u> O professor distribui tarefas, individuais ou em grupos, o que dá uma melhor dinâmica exercitando responsabilidades. Construir um quadro fixando-o à parede da sala de aula. Nesse quadro serão registrados o nome e a altura de cada aluno e, a cada mês, será feita uma nova medição e registro. Serão feitas comparações e análise dos ritmos de crescimento individuais. Em cada mês é confeccionado um gráfico pontual, associando o nome do aluno com sua respectiva altura.

Nome \ Mês	1º	2º	3º	...
Ana Maria	128			
Bruno	131			
Cristina	127			
Denise	125			
Everaldo	135			

(a) Tabela de alturas



(b) Representação Gráfica do 1^o Mês

Figura 3.3: Exemplo

Com os dados recolhidos do 2^o mês, (Tabela 3.3(a)), construa o gráfico correspondente na Figura .

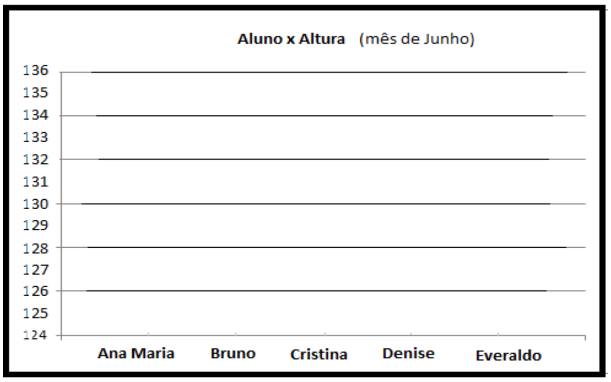


Figura 3.4: Atividade 3

ATIVIDADE 4: Atividade individual, proposta aos alunos do 4^o e 5^o anos do ensino fundamental. Inicia-se com uma situação fictícia, como modelo, para que o aluno realize sua pesquisa em casa coletando dados particulares e posteriormente comparando com os dados dos seus colegas de classe. Aqui, explora-se uma idéia intuitiva de sequência decrescente, uma vez que os integrantes da família são listados na ordem da idade do mais velho ao mais novo, sugerida pelo modelo dado.

Problema: João cursa o 4^o ano do ensino fundamental. A professora propôs uma pesquisa de consumo de água durante o banho que consiste em verificar o tempo gasto no banho de cada integrante da família. É sabido que na casa de João moram mais seis pessoas: O avô, a avó , o pai, a mãe, e seus irmãos mais velhos, Maria e Paulo. João numerou os integrantes de sua família na ordem decrescente das idades e apurou os seguintes valores:

1- Avô: 15 minutos.

2- Avó: 17 minutos.

3- Pai: 12 minutos.

4- Mãe: 20 minutos.

5- Maria: 13 minutos.

6- Paulo: 11 minutos.

7- João: 23 minutos.

A professora pediu que construisse um gráfico associando o tempo gasto no banho a cada um dos integrantes, observe o que João fez utilizando os números atribuidos a cada um.

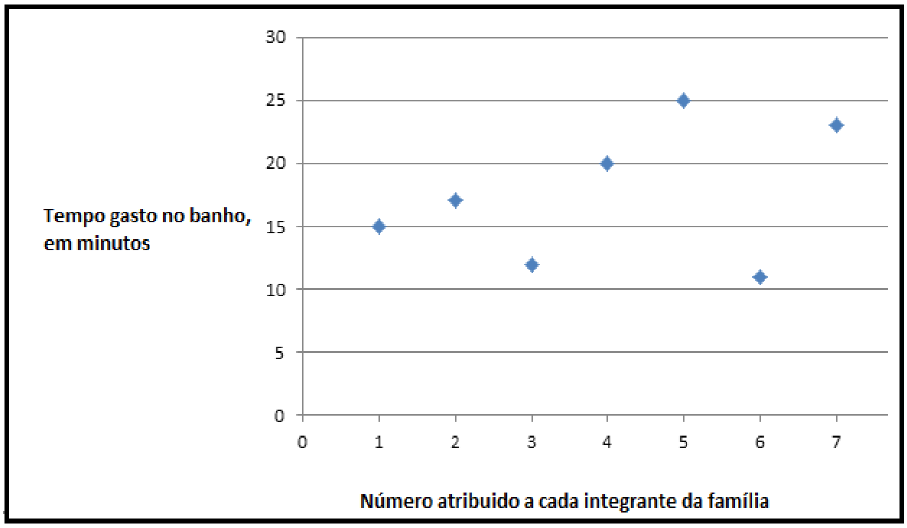


Figura 3.5: Gráfico com o tempo gasto no banho, por cada integrante da Família de João

a) Faça a lista com os integrantes da sua família e construa o gráfico do tempo gasto por cada um. Esboce o gráfico que relaciona cada membro da família ao seu respectivo tempo gasto com o banho.

b) Se a cada minuto o consumo de água em um chuveiro é de $2,5$ litros, calcule o consumo de cada integrante.

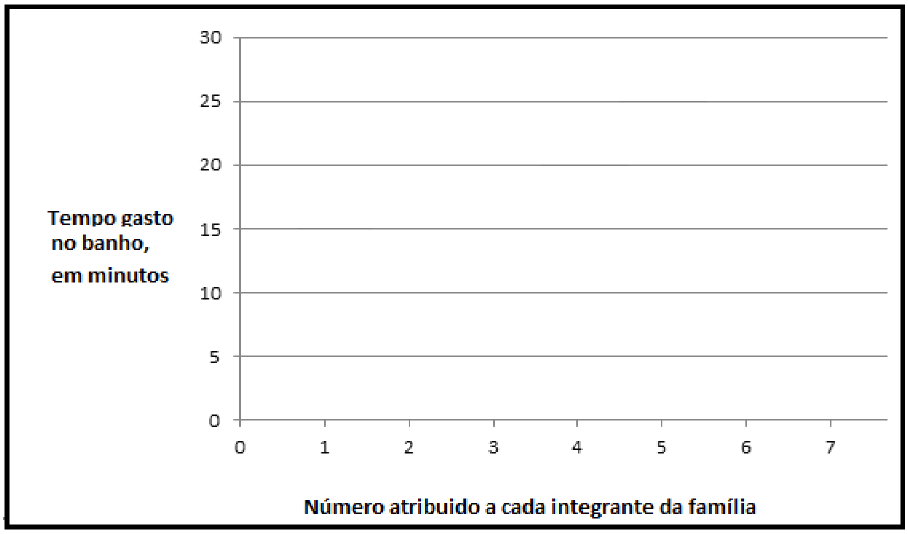


Figura 3.6: Gráfico com o tempo gasto no banho

<u>ATIVIDADE 5:</u> Atividade de campo proposta ao 6^o e 7^o ano do ensino fundamental, como introdução ao estudo de razões e proporções.

<u>Material:</u>

. Algumas varas de tamanhos diversos (exemplo: 50 cm, 75 cm e 1 m)

. Relógio (ou cronometro)

. Trena (ou fita métrica)

. Caderno e lápis

As varas são fincadas verticalmente no pátio da escola e em intervalos de tempo iguais é feita a medição das sombras das mesmas e anotadas em uma tabela. Após esse experimento é feito um debate com os alunos, onde são registradas as suas observações.

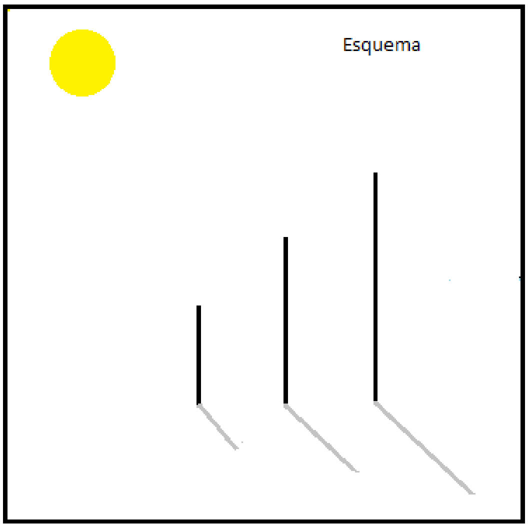


Figura 3.7: Medindo as sombras

	Sombra tempo 1	Sombra tempo 2	Sombra tempo3	Sombra tempo 4	...
Vara - 50 cm					
Vara – 75 cm					
Vara – 1 m					

Figura 3.8: Comprimentos das sombras

1. Pela manhã, o tamanho das sombras cresce ou decresce? _______________

2. Qual é a hora do dia que a sombra é a menor possível? _______________

3. Em qual horário(s) as sombras têm o mesmo comprimento que suas respectivas varas? _______________

4. Tente esboçar um gráfico relacionando o comprimento da sombra de uma vara com hora do dia.

A Atividade 5 permite ao aluno observar o movimento de rotação da Terra, realizar medições de tempo e comprimento, adquirir a noção de proporção e verificar que um valor pode depender de mais de um valor independente.

ATIVIDADE 6: Questão para interpretação do gráfico, proposta a qualquer dos anos do ensino fundamental.

Observe o gráfico a seguir e responda:

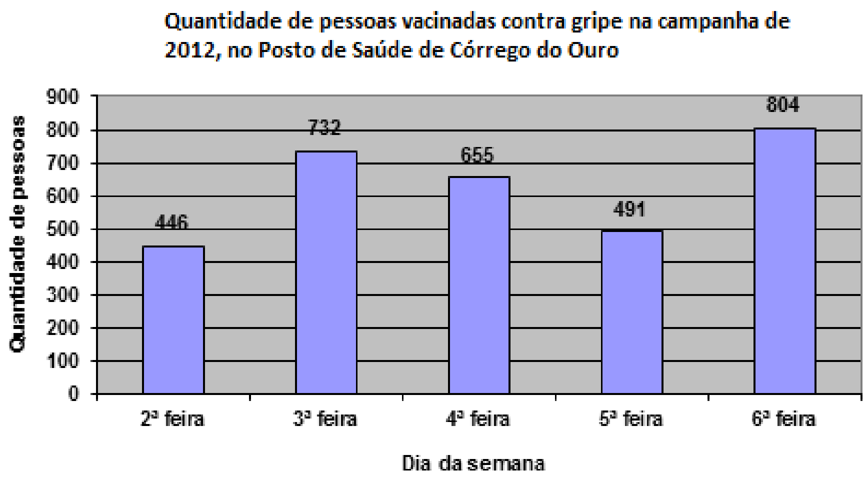


Figura 3.9: Gráfico: Dias da semana e pessoas vacinadas.

1. Em qual dia da semana mais pessoas foram vacinadas?_______________

2. Em qual dia da semana houve menos pessoas vacinadas?_______________

3. Quai o total de pessoas foram vacinadas nos cinco dias de campanha, no Posto de Saúde de Córrego do Ouro? _______________

3.2 Usando o Plano Cartesiano

<u>ATIVIDADE 1:</u> JOGANDO BATALHA NAVAL. Atividade lúdica aplicada a qualquer ano do Ensino Fundamental a partir do 4^o ano. Esta atividade proporciona ao aluno o senso de localização de pontos no plano cartesiano. Inicialmente, divide-se a turma em duplas ou em duas equipes adversárias. Para aumentar o tempo ou o nível de dificuldade, o quadro tradicional em malha quadriculada da batalha naval poderá ser ampliado, o número de armas aumentado, podendo ser aplicadas também coordenadas tais como latitudes e longitudes, sendo usado em conjunto com a matéria Geografia.

<u>REGRAS DO JOGO</u>

Armas disponíveis: 3 Hidroaviões, 4 Submarinos, 3 Cruzadores, 2 Encouraçados e 1 Porta-aviões.

<u>PREPARANDO O JOGO:</u>

Cada jogador distribui suas armas pela malha quadriculada intitulada "Seu jogo", pintando os quadradinhos referentes às suas armas de modo que duas armas não se toquem.

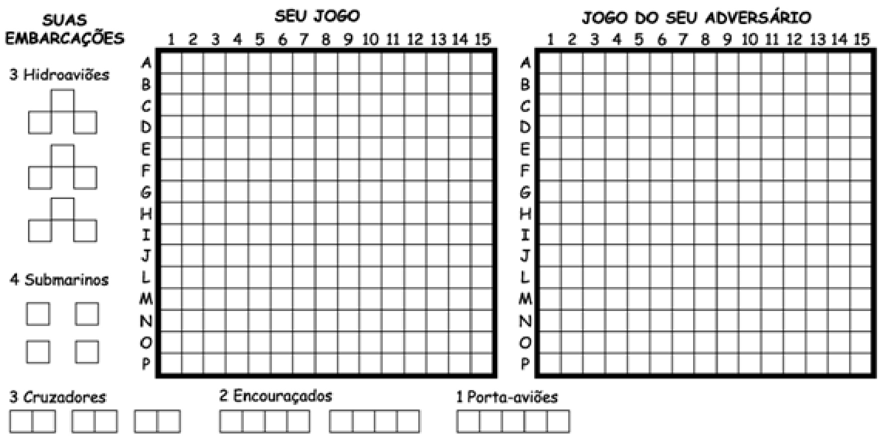


Figura 3.10: Quadros para o jogo Batalha Naval

JOGANDO

Cada jogador, seguirá o seguinte procedimento:

1. Disparará 3 tiros, que equivale a marcar as coordenadas do alvo através da letra da linha e do número da coluna que definem a posição. Para que o jogador tenha o controle dos tiros disparados, deverá marcar cada um deles no reticulado intitulado "Seu jogo".

2. Após cada um dos tiros, o oponente avisará se acertou, qual a arma foi atingida e se ela foi afundada, neste caso se todos os quadrinhos da arma foram atingidos.

3. A cada tiro acertado em um alvo, o oponente deverá marcar em seu tabuleiro para que possa informar quando a arma for afundada.

4. Após os 3 tiros e as respostas do oponente, a vez passa para o outro jogador

O jogo termina quando um dos jogadores afundar todas as armas do seu oponente.

ATIVIDADE 2: Explorando o plano cartesiano. Proposta a ser aplicada do 6^o ao 9^o ano do Ensino Fundamental, com graus de dificuldades variando conforme a quantidade de pontos do plano e complexidade da figura. Pode ser usado o programa GeoGebra. Cada grupo de pares ordenados, após ligados, formará uma figura e as figuras juntas formarão uma imagem conhecida.

Marque no plano cartesiano os pontos abaixo, ligando os pontos de cada grupo. Identifique cada figura geométrica formada por cada grupo e observe a figura final formada.

1. A(1,2), B(2,1), C(7,1) e D(7,2)

2. E(3,2), F(3,8) e G(6,3)

3. H(3,3), I(3,7) e A(1,2)

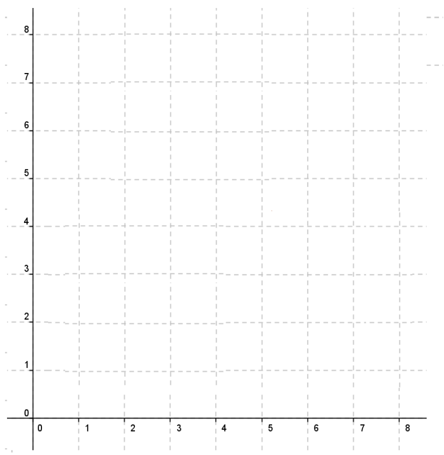


Figura 3.11: Plano com Malha Quadriculada

ATIVIDADE 3: Trata-se da mesma Atividade 2, feita em papel quadriculado ou no programa Geogebra. As Atividades 1 e 2 podem ser aplicadas juntamente com as aulas da matéria Artes.

Em um papel quadriculado, traçar os eixos OX e OY, fazer uma escala de 0 a 20 em OX e de 0 a 30 em OY e marcar os pontos dados por suas coordenadas ligando apenas aqueles que pertençam a um mesmo bloco (determinado por uma letra).

1. (16,3),(18,7),(17,11),(16,13),(14,15),(13,17),(12,19),(13,20),(12,23),(13,25),(14,27),(16,28),(14,29),(12,29),(11,28),(10,27),(9,25),(8,24),(4,24),(2,23),(2,21),(3,20)e(9,20)
2. (8,10),(7,7),(7,5),(5,5),(4,3),(10,3),(11,4)e(12,9)
3. (10,9),(9,5)e(7,3)
4. (6,4)e(5,3)
5. (9,4)e(8,3)
6. (17,9),(16,10),(14,10),(12,7),(14,5)e(16,5)
7. (14,5),(12,4),(11,3),(16,3),(17,2),(15,1),(17,1),(19,2),(19,4)e(17,5)
8. (16,28),(17,25),(17,23),(16,21),(15,19),(14,19)e(13,20)
9. (2,23),(1,24),(1,22)e(2,22)
10. (9,25)e(10,24)

3.3 Problemas Envolvendo a Lei de Formação

<u>ATIVIDADE 1</u>: Propostas aos 6^o e 7^o anos do ensino fundamental (substituição de letras por valores que possibilitem o resultado desejado por uma regra),possibilitando uma familiarização com as leis que possam ser aplicadas no estudo de funções.

Calcule o valor das expressões substituindo pelo valor indicado.

Regra para o cálculo	x = 1	x = 2	x = 5	x = 1,5	x = 2,3
x + 3					
2.x					
2.x + 3					
3.x					
3.x + 2					

Figura 3.12: Quadro para cálculos

1. Verifique se com cada valor dado a x, é possível encontrar um resultado diferente, usando-se a mesma expressão.
2. Observe que expressões diferentes podem levar ao mesmo resultado para algum valor atribuído a x.

<u>ATIVIDADE 2</u>: (Identificação da Lei de Formação). Proposta aos 7^o, 8^o e 9^o anos do ensino fundamental.

Em cada tabela abaixo, encontre qual é a regra que associa o primeiro número com o segundo.

1º número (independente)	2º Número (dependente do 1º)
$-\sqrt{5}$	5
-3/2	9/4
-1	1
0	0
1,7	2,89
5	25

Regra (ou lei de formação):_____________________________

Figura 3.13: Tabela 1

1º número (independente)	2º Número (dependente do 1º)
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
10	21

Regra (ou lei de formação):________________________

Figura 3.14: Tabela 2

<u>ATIVIDADE</u> 3: A partir do 8^o ano do ensino fundamental (Construção de expressões que envolvam padrões de regularidades)

Na sequência abaixo, cada número corresponde à posição de um conjunto de pontos, conforme mostra a figura.

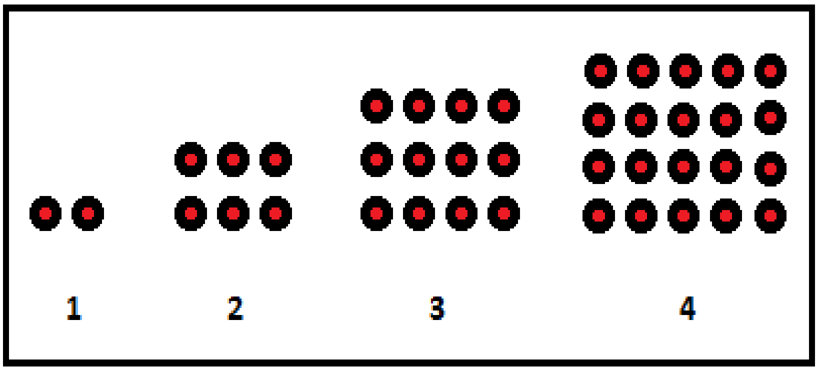


Figura 3.15: Sequência nos conjuntos de objetos

Responda:

1. Quantos pontos haverá na 10^o posição?_______________

2. Como podemos descobrir quantos pontos haverá em uma posição qualquer, sabendo apenas o número desta posição?_______________

<u>ATIVIDADE</u> 4: A ser aplicada nos 8^o e 9^o anos .Situação Problema. Identificação de uma regra de formação.

Uma caixa d'água tem capacidade para 500 litros. Quando está com 150 litros é aberta uma torneira que despeja na caixa 25 litros por minuto, até que a caixa esteja completamente cheia.

1. Após 9 minutos, quantos litros haverá na caixa? _______________

2. Como podemos calcular a quantidade de água na caixa sabendo que foram transcorridos alguns minutos? _______________

3.4 Trabalhando o Conceito de Variável Independente e Dependente

ATIVIDADE 1: Proposta de atividade sugerida a partir do 7^o ano do ensino fundamental que induz os primeiros passos na direção da modelagem matemática usando equações do 1^o grau. Devem ser considerados os seguintes passos:

- Ler com atenção o problema e levantar os dados.
- Fazer a tradução do enunciado usando letras e símbolos.
- Resolver a equação estabelecida.
- Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Sabendo que:

1. A idade de um pai é o triplo da idade do seu filho. Calcule essas idades sabendo que juntas elas somam 60 anos._______________
2. Num estacionamento há carros e motos, totalizando 78. O número de carros é igual a 5 vezes o de motos. Quantas motos há no estacionamento?_______________

ATIVIDADE 2: Para ser aplicada a partir do 8^o ano do ensino fundamental. O objetivo é a construção de uma tabela formada com os valores obtidos de equações abertas, geradas por situações problema.

João mora numa vila que fica próxima à escola que frequenta. Nos dias de aula ele sempre caminha com a velocidade 15 metros por minuto. A escola fica a uma distância de 450 m da vila onde João mora.

Responda:

1. Quanto tempo João leva entre a saída de casa e a chegada à escola?

   ____

2. Qual é a distância percorrida por João nos primeiros 10 minutos de caminhada?

   ____

3. A distância do trajeto feito por João de casa à escola depende do tempo gasto?

   ____

4. Crie uma fórmula que forneça a distância percorrida por João, dependendo do tempo gasto.______________

5. Complete a tabela, onde a distância é encontrada em função do tempo gasto:

Tempo em minutos	5	10	15	20	30
Distância em metros					

Figura 3.16: Tabela da distância em função do tempo

ATIVIDADE 3: Atividade sugerida ao 9^o ano do ensino fundamental. O conceito de função é inteiramente ligado às questões de dependência entre duas grandezas variáveis. Podemos estabelecer uma relação de dependência entre o preço do litro do combustível e a quantidade de litros usados no abastecimento de um carro.

1. Suponhamos que o preço do litro de gasolina seja 3 reais. Podemos determinar o preço y a pagar em decorrência da quantidade de x litros abastecidos ?______________

2. Encontre uma expressão algébrica que permita achar o preço de qualquer quantidade de litros de gasolina______________

3. Nesse caso, qual grandeza depende da outra para ser estabelecida?______________

ATIVIDADE 4: Utilizando a atividade anterior, construa uma tabela onde as quantidades de litros de gasolina estejam relacionadas com os respectivos preços a serem pagos (faça isso obedecendo a uma ordem crescente nas quantidades de litros). Verifique se existe um padrão na variação dos valores de preços obtidos e o que determina isso.

<u>**ATIVIDADE** 5</u> Proposta para o 9^o ano. Jogo: Mestre e Adivinho

Jogando. Organizam-se em grupos de quatro pessoas e escreve-se em tiras de papel frases tais como: Indique o sucessor do número, indique o triplo do número mais um, indique o número mais cinco etc.

1. Escolhe-se quem começa e quem será o mestre.
2. As tiras são embaralhadas e cada um dos elementos do grupo recebe três tiras, que não devem ser vistas pelos outros jogadores.
3. Em cada jogada, um dos participantes será o mestre e os demais serão os adivinhos.
4. Cada participante do grupo fala um número para o mestre da rodada, que executa com o número falado, aquilo que a frase indica e diz para os demais o resultado.
5. Os adivinhos anotam na tabela de registro os números falados e os resultados dados pelo mestre, tentando adivinhar a frase escrita na tira.
6. Depois que todos os jogadores tiverem dito um número para o mestre, o jogador que primeiro adivinhar a frase ganha um ponto.
7. Se nenhum dos jogadores adivinhar a frase, cada um dos jogadores diz mais um número para o mestre. Se, ainda assim, nenhum jogador adivinhar, o mestre diz a frase e ele ganha um ponto.
8. Ao final de cada rodada, a frase deve ser anotada na tabela de registros.
9. Cada tira será usada apenas uma vez em cada jogada.
10. Ganha o jogo quem tiver mais pontos.

Após algumas rodadas, formulam-se algumas questões, que podem variar conforme o conteúdo do ano de escolaridade.

- Observe a tira onde está escrito "Indique o triplo do número mais um"(poderia ser qualquer outra)

1. Quais números serão respondidos pelo mestre, se os adivinhos disserem -4; $-1,5$; 0; $5/3$ e 7?_______________

2. Quais números devem ser ditos pelos adivinhos, para que o mestre responda -14; $-6,5$; 19 e 31?_______________

3. Mudando o valor do número dito pelo adivinho, o valor do número respondido pelo mestre também muda?_______________

4. A afirmação: "No jogo do adivinho, o número respondido pelo mestre depende do número dito pelo adivinho", é verdadeira ou falsa? Por que?_______________

Obs.: Não há a necessidade de o jogo ter sido aplicado nos anos anteriores.

Tabela de registro

Nº Falado	Resultado	Frase	Vencedor
1.			
2.			
3.			
1.			
2.			
3.			
1.			
2.			
3.			
1.			
2.			
3.			

Figura 3.17: Tabela de registro do jogo advinho

<u>ATIVIDADE 6:</u> Proposta para o 9^o ano do ensino fundamental. Ideia intuitiva de função. Nesta atividade, supõe-se que o aluno já atingiu maturidade matemática suficiente para perceber a aplicação de função em situações problemas da Física.

João mora numa vila que fica próxima à escola que frequenta. O gráfico abaixo mostra a relação da distância com o tempo gasto no percurso que João faz, sempre com a mesma velocidade.

Responda:

1. Qual é o intervalo de tempo entre a saída de casa e a chegada à escola?
____

2. Qual é a distância percorrida de sua casa à escola?_______________

3. O tempo e a distância percorrida variam e mantêm entre si uma relação de dependência?

____

4. Qual é essa relação de dependência?________________

5. É possível construir uma lei que define essa dependência? (se possível, construa)

____

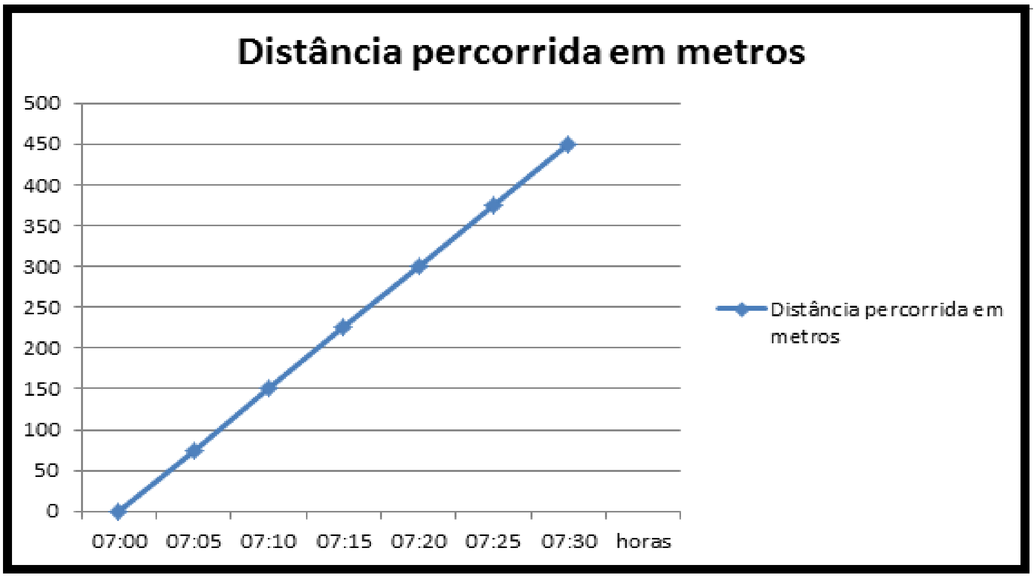


Figura 3.18: Distância percorrida

ATIVIDADE 7: Sugerida ao 9^o ano do ensino fundamental. Nesse momento pode-se diagnosticar se aluno adquiriu os conceitos de domínio, contradomínio, variável dependente, variável independente e regras de formação de uma função.

Observe o gráfico abaixo que apresenta a distância percorrida por dois carros, em quilômetros, em função do tempo da viagem.

A linha vermelha representa o movimento do carro 1 e a linha verde representa o movimento do carro 2, que partiram de um mesmo ponto e tiveram o mesmo destino. Com base no gráfico responda as seguintes perguntas:

1. Quanto é o tempo de viagem de cada carro?________________

2. Qual a distância percorrida por cada carro?________________

3. Os movimentos descritos por cada carro são iguais?________________

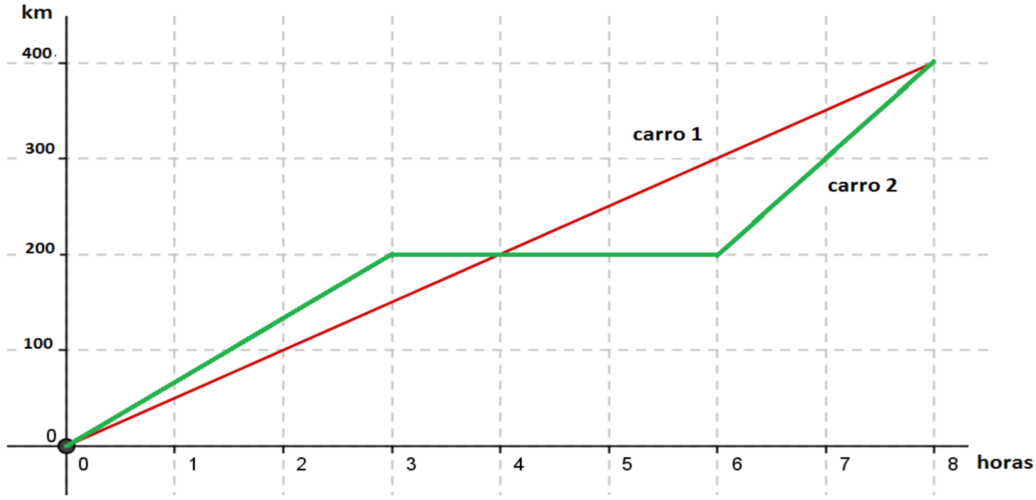


Figura 3.19: Gráficos de movimento

4. Podemos afirmar que o tempo da viagem depende da localização de cada carro na estrada, ou a localização que depende do tempo de viagem?_______________

5. Percebe-se que um carro ficou parado. Qual foi esse carro, por quanto tempo e em qual quilômetro?______________________________

6. O que se pode afirmar com relação às regras de movimento dos dois carros?

____

7. Para podermos descrever o que acontece com os movimentos dos dois carros, quais os elementos do gráfico que devemos conhecer?_______________

Capítulo 4

Considerações Finais

São notórias as dificuldades dos alunos em lidar com funções, e da maioria dos professores em orientar o aprendizado desse assunto sem fugir da sua formalidade. Isso faz com que o aluno se distancie mais da compreensão do objetivo principal dessa ferramenta, que é o estudo das variações de grandezas relacionadas.

As atividades apresentadas no Capítulo 3 foram exercícios selecionados de diversos livros didáticos utilizados nas escolas do ensino público e particular. Algumas foram criação do autor e outras são modificações a partir de jogos populares entre os alunos.

O conceito de Função não é uma “noção” que deva ser introduzida em um determinado ano do ensino. A proposta ora apresentada, visa chamar a atenção à possibilidade da construção de um referencial que oriente o aprendizado desse tópico matemático ao longo dos anos da educação básica.

Acreditamos que, se trabalharmos desde os primeiros anos com mediação intencional e competência os estímulos dos alunos, com atividades que envolvam o conceito de função, seguindo os avanços da sua construção histórica e acompanhando o amadurecimento matemático do jovem, ao chegar ao Ensino Médio o aprendizado do uso dessa ferramenta se dará de forma espontânea, uma vez que o aluno já se encontrará familiarizado com suas aplicações e termos próprios, podendo então se aprofundar nos detalhes do tema sem os traumas tantas vezes observados.

Referências Bibliográficas

Beltrame, J. (2000). Os Programas de Ensino da Matemática do Colégio Pedro II: 1837-1932. Tesis de Mestrado, Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Bergeron, J. e Herscovics, N. (1982). *Levels in the Understanding of Functions Conept, Procedings of the Workshop of Functions*.

Boyer, C. B. (2005). *História da Matemática*.

Cândido, M. M. L. P. T. (2009). *Matemática - Ensino Fundamental 2º ao 5º Ano*. Editora Cisbrasil.

de Jesus da Costa, C. B. (2008). O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função.

Diniz, K. S. S. M. I. (2001). *Ler, Escrever e Resolver Problemas - Habilidades básicas para aprender Matemática*. Artmed.

Gardner, H. (1995). *InteliGências Múltiplas - A Teoria na Prática*. Artmed.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, volume 1. Oxford University Press.

Leal, L. C. (1990). Função no Terceiro Ciclo do Ensino Básico - Uma Possível Abordagem. *Revista de Educação e Matemática*, vol. 15.

Álvaro Andrini and Zampirolo, M. J. C. V. (2002). *Novo Praticando Matemática 6º ao 9º ano*. Editora Brasil, São Paulo.

PCN (1997). Parâmetros curriculares nacionais : Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. Primeiro ao Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. Ministério da Educação - Secretaria de Ensino Fundamental, DF, Brasil.

Rüthing, D. (1984). Some Definitions of the Concept of Function From Johann Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*, 6:72–77.

SEERJ (2011). *Resolução SE nº 81/2011*. Secretaria de Estado de Educação, diário oficial do poder executivo do estado do Rio de Janeiro.

Tinoco, L. A. A. (1998). *Construindo o Conceito de Função no 1º Grau*. UFRJ.

Toledo, M. T. M. (2010). *Teoria e Prática da Matemática - Como Dois e Dois*. FTD.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function. *Archive for History of Exact Sciences*, Página 6:9.

Apêndice A

Soluções

3.1 Atividades do 1º Segmento - 1º Ciclo

ATIVIDADE 1:

1- Maio

2- 7 (sete)

3- Janeiro, Fevereiro e Março (por exemplo)

4-

Dom	2ª F	3ª F	4ª F	5ª F	6ª F	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Figura A.1: Mês de Maio

5-

Dom	2ª F	3ª F	4ª F	5ª F	6ª F	Sab
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Figura A.2: Mês de junho

6- (resposta pessoal)

ATIVIDADE 2:

Nome da figura	Quantidade	Numeros de lados	Números de vértices
triângulo	5	3	3
quadrado	1	4	4
paralelogramo	1	4	4

Figura A.3: Tabela de peças do Tangram

ATIVIDADE 3: (gráfico de acordo com os dados colhidos pelos alunos)

ATIVIDADE 4:

a) (gráfico de acordo com as características da família de cada aluno)

b) (de acordo com o obtido no item a)

ATIVIDADE 5:

1. Decresce

2. Ao meio dia

3. $9:00$h e $15:00$h (pequena variação conforme local e época do ano)

4. De acordo com as observações pessoais.

ATIVIDADE 6:

1. 6^a feira

2. 2^a feira

3. 3128 pessoas

3.2 Atividades usando o Plano Cartesiano

ATIVIDADE 1: Jogo Batalha Naval - Atividade lúdica não havendo solução.

ATIVIDADE 2:

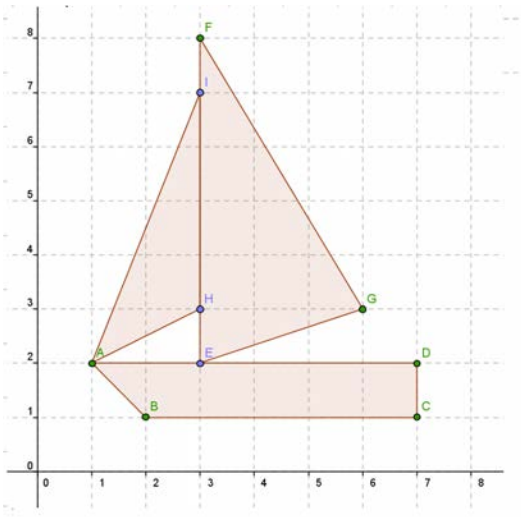


Figura A.4: Barco a vela

ATIVIDADE 3: (Desenho da personagem RADICAL CHIC)Tinoco (1998)

3.3 Problemas envolvendo Lei de Formação

ATIVIDADE 1:

1.

Regra para o cálculo	x = 1	x = 2	x = 5	x = 1,5	x = 2,3
x + 3	4	5	8	4,5	5,9
2.x	2	4	10	3	4,6
2.x + 3	5	7	13	6	7,6
3.x	3	6	15	4,5	6,9
3.x + 2	5	8	17	6,5	8,9

Figura A.5: Quadro para cálculos

2. Não é possível.

3. Sim, $2x + 3$ e $3x + 2$ para $x = 1$, $x + 3$ e $3x$ para $x = 1,5$

ATIVIDADE 2: Tabela 1: n^2 onde n é o 1^o número Tabela 2: $2n+1$ onde n é o 1^o número

ATIVIDADE 3:

1. 110 pontos

2. Usando a fórmula $n^2 + n$, onde n é a posição.

ATIVIDADE 4:

1. 375 litros

2. Usando a fórmula $9m + 150$, onde m é o tempo em minutos.

3.4 Trabalhando o Conceito de Variável Independente e Dependente

ATIVIDADE 1:

1. O pai tem 45 anos e o filho 15 anos.

2. 13 motos.

ATIVIDADE 2:

1. 30 minutos
2. 150 metros
3. Não
4. $d = 15m$, onde d é a distância em metros e m é o tempo em minutos
5.

Tempo em minutos	5	10	15	20	30
Distância em metros	45	150	225	300	450

Figura A.6: Tabela da distância em função do tempo

ATIVIDADE 3:

1. Sim.
2. $y = 3x$.
3. O preço y depende da quantidade de litros x.

ATIVIDADE 4:

Litros de gasolina (indep. x)	10	20	25	43	50	68
Preço pago (depend. y)	30	60	75	129	150	204

Figura A.7: Fazendo y/x, obtemos 3, que é o preço por litro de gasolina.

ATIVIDADE 5: No jogo Mestre e Advinho, as respostas são dadas conforme a pergunta da tira observada pelo Mestre.

ATIVIDADE 6:

1. 30 minutos
2. 450 metros
3. Sim
4. A cada minuto, João se desloca em 15 metros.
5. Sim,$d = 15m$, onde d é a distância em metros e m é o tempo em minutos

ATIVIDADE 7:

1. 8 horas
2. 400 quilômetros
3. Não
4. A localização de cada carro no percurso, depende do tempo e da sua velocidade.
5. O carro 2 ficou parado durante 3 horas no quilômetro 200.
6. O carro 1 manteve a mesma velocidade por todo o percurso. O movimento do carro 2 teve 3 velocidades diferentes.
7. Os valores do tempo em horas, os valores da distância em quilômetros e a inclinação de cada segmento de reta do gráfico.