O ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO

JULIA MARON RAMOS DA COSTA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

AGOSTO - 2013

O ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO

JULIA MARON RAMOS DA COSTA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof^a Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
AGOSTO - 2013

O ENSINO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NO ENSINO MÉDIO

JULIA MARON RAMOS DA COSTA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), como parte das exigências para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 23 de Agosto de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Geraldo de Oliveira Filho, D.Sc.- UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc.- UENF

Prof. Luiz Alberto Viana da Silva, D.Sc.- UFF

Prof[a]. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc.- UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a meu marido Wellington e meus filhos André e Ana Julia, pela compreensão em meus momentos de ausênsia e incentivo nos momentos mais difíceis.

Agradecimentos

A Deus, pela vida mararavilhosa que me propicia.

Ao meu amado esposo Wellington, ao meu filho André e à minha filha Ana Julia, pela felicidade constante que trazem à minha vida.

À minha estimada professora e orientadora Liliana Angelina León Mescua, pela imensa sabedoria, pela paciência e disponibilidade em conduzir-me durante a pesquisa.

Aos meus pais Rubem e Valéria, por todo amor e carinho e pela educação que me conduziram até aqui.

Aos meus familiares, Relmo, Vanda, Juliana , Julia Beatriz, Rogerio e Angélica, pelo apoio e assistência durante minhas idas e vindas a Campos.

Aos meus amigos e colegas de curso, em especial, à amiga Cynthia, pela cumplicidade, inspiração e amizade; à amiga Vandete, pelo incentivo e ajuda no levantamento histórico; à amiga Haidée, pelo suporte no inglês.

À amiga e companheira de trabalho Letícia, pelas preciosas observações .

Aos professores amigos de trabalho, em especial, à amiga Deise Lucy pelo estímulo nessa caminhada.

Aos estimados diretores das escolas em que leciono, Ambrosio, Vanessa, Mary, Simone e Liomar, pelo auxílio e compreensão durante toda jornada do mestrado.

Ao professor Rigoberto e demais professores, pela contribuição em minha formação.

“Se o ensino da Matemática nos cursos básicos fosse feito realmente como deveria ser, com vivo interesse, clareza e simplicidade, essa fabulosa ciência exerceria sobre todos os homens estranha e desmedida fascinação.”

Rey Pastor

RESUMO

O presente trabalho foi elaborado com o intuito de fazer uma análise sobre a forma como vem sendo dirigido o ensino de Sequências e Séries aos alunos do Ensino Médio, principalmente, nas escolas da rede pública. Nesta pesquisa, foram considerados como instrumento de pesquisa todos os livros didáticos de Ensino Médio adotados em duas escolas específicas: Colégio Estadual Dr. Feliciano Sodré e Colégio Municipal Pedro Adami, assim como outros que, também, fazem parte do acervo das bibliotecas dessas escolas. Posteriormente, apresentaremos uma proposta para introduzir o conceito de Sequências e Séries como um desdobramento de conteúdos já adquiridos pelo aluno, em séries anteriores, tais como Função, embora seja um conteúdo novo para o aluno, este irá ser capaz de estabelecer relação com outros assuntos aparentemente desconexos, mas que podem ser ou serão desmascarados. Uma referência histórica foi feita para mostrar que muita das fórmulas e os conceito matemáticos utilizados atualmente, são o resultado de uma longa evolução histórica, fruto de muitas pesquisas e estudos com validade prática.

Palavras-chave: Ensino, livro didático , sequências, séries.

ABSTRACT

This work was done in order to make an analysis on how the teaching of Sequences and Series to high school students, especially in public schoolshas been directed. In this research, were considered as a research tool for all high school textbooks adopted in two specific schools: State College Dr. Feliciano Sodré and College Hall Pedro Adami, as well as others who also are part of the collections of the libraries of these schools. Subsequently, we will present a proposal to introduce the concept of Sequences and Series as an offshoot of content already acquired by the student in the previous series, such as function, although a new content to the student, this will be able to establish links with other subjects seemingly unrelated but that can or will be unmasked. A historical reference was made to show that many of the formulas and mathematical concepts used today are the result of a long historical evolution,the result of many researches and studies with practical validity.

Keywords: Teaching, textbook, sequences, series.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Nas escolas públicas e privadas do Brasil, para a maioria dos professores de Matemática, o referencial ao ensinar está voltado única e exclusivamente ao livro didático (Livro-Texto). A razão desse fenômeno pode estar ligada à ausênsia de recursos e materiais didáticos da escola, à má formação do profissional, à falta de capacitação, ou, simplesmente, à desmotivação e ao cansaço, devido a uma excessiva rotina de trabalho. São por alguns destes motivos, que o professor acaba se apoiando unicamente nesse recurso, pois o livro didático, geralmente, oferta uma quantidade de conteúdos já prontos que facilitam seu trabalho. Na maioria dos casos, o docente faz seu planejamento de aula seguindo os capítulos do livro-texto, e dessa forma, acaba omitindo conceitos importantes e/ou repetindo os erros que alguns livros trazem.

Quando se trata do ensino de sequências e séries, em particular, as progressões aritméticas (P.A.) e as progressões geométricas (P.G.), algumas indagações são inevitáveis, por exemplo:

- Nos livros didáticos, é introduzido o conceito de sequência e série?
- Os conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos são levados em consideração?
- Há uma preocupação, por parte do autor, em apresentar a origem das ideias fundamentais presentes na história?
- A linguagem utilizada é compreensível ao aluno?
- O autor inicia o estudo do conteúdo com problemas e questões motivadoras?
- O autor utiliza imagens visuais para ilustrar os conceitos?

Para responder a essas perguntas foi feito um levantamento para análise dos livros-textos do Ensino Médio, com edições que variam do ano de 1998 a 2012, e que fazem parte do acervo das bibliotecas das escolas: Colégio Estadual Dr. Feliciano Sodré e Colégio Municipal Pedro Adami, situadas respectivamente no município São Pedro da Aldeia e Macaé, ambas no estado do Rio de Janeiro. Na análise feita nestes livros, foi observado um processo de adequação dos conteúdos aos respectivos anos escolares seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs (1998)). Embora isso seja um grande avanço, ainda há a relutância dos educadores em abandonar os métodos de ensino, que incluem a memorização desnecessária de fórmulas, o que acarreta mais dúvidas para os alunos.

A respeito disso uma citação retirada de (Lima et al. (2006)), diz:

> “Não encha a cabeça de seus alunos com casos particulares desnecessários. Isso só serve para obscurecer as ideias gerais e acaba dificultando as coisas.”

Este trabalho tem como objetivo mostrar como o ensino de Sequências e Séries vem sendo abordado, desde 1998, além da influência dos PCN's e do Currículo Mínimo do Estado de Rio de Janeiro (CMERJ (2013)) e as mudanças do material didático oferecido para os alunos do Ensino Médio. Em seguida apresentamos uma proposta para introduzir o conceito de Sequências, na 2^a série do Ensino Médio, partindo do conhecimento de funções, já adquirido pelo alunado na 1^a série do Ensino Médio. Para complementar, propomos diversas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula para motivar a descoberta, a construção dos conceitos e a dedução de fórmulas.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, fazemos um histórico cronológico sobre o estudo de sequências e séries, e as contribuições para o seu desenvolvimento, de modo a estimular a aprendizagem.

No capítulo 2, apresentamos uma breve análise sobre como vem sendo abordados os conceitos de sequências e séries em vários livros que são usados no Ensino Médio, no município de São Pedro da Aldeia e Macaé (RJ), e as mudanças na abordagem que se observam desde 1998.

No Capítulo 3, apresentamos uma proposta para introduzir os conceitos de sequências numéricas e séries para alunos da 2^a série do Ensino Médio, partindo da definição de função.

No Capítulo 4, apresentamos atividades aplicadas aos alunos da 2^a série do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Feliciano Sodré, os objetivos a serem alcançados em seu desenvolvimento e um breve comentário sobre as atividades realizadas.

No Capítulo 5, fazemos as considerações finais.

Este trabalho também contém um Apêndice, onde o leitor encontra as soluções relativas às atividades propostas no Capítulo 4.

Capítulo 1

Fundamentação Histórica

As sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Por essa razão, encontramos problemas envolvendo vários tipos de padrões e sequências em documentos de civilizações antigas.

O povo babilônico (em torno de 2000 a.C) utilizava tábuas de cálculo nas quais era comum encontrar sequências de quadrados e cubos de números inteiros. Nessa mesma época, os egípcios empregavam sequências numéricas para decompor frações em somas de outras frações, como mostram os registros encontrados no papiro de Rhind ou Ahmes (cerca de 1650 a.C.).

Para exemplificar as sequências que apareciam nas tábuas babilônicas, Boyer (1994) escreve que:

> [...] Numa tableta a progressão geométrica $1+2+2^2+...+2^9$ é somada e em outra a soma da série de quadrados $1^2+2^2+3^2+...+10^2$ é achada. Perguntamo-nos se os babilônios conheciam as fórmulas gerais para a soma de uma progressão geométrica e a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. É possível que sim, e conjeturou-se que teriam percebido que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros. No entanto, deve-se ter em mente que as tabletas mesopotâmicas se assemelham aos próprios papiros egípcios em que só são dados casos específicos, sem formulações gerais.

Muitos outros povos contribuiram ao estudo das sequências numéricas, entre eles os chineses, os hindus e os árabes. Porém, foram os gregos os responsáveis por diversos exemplos de sequências numéricas notáveis, por exemplo, aquelas que envolviam os números figurados, estudadas pela escola Pitagórica durante o século VI a.C. Conforme Gundlach (1992), os casos especiais dos números figurados eram os números poligonais, números cuja representação geométrica assumia a forma de vários polígonos. Os números poligonais mais simples são os triangulares e os quadrados. Os números $\{1;\ 3;\ 6;\ 10; \ldots\}$ chamados de números triangulares, correspondem à distribuição de pontos em um plano na forma de triângulos, conforme a Figura 1.1. Estes representam as somas sucessivas dos números de contagem consecutivos, isto é $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

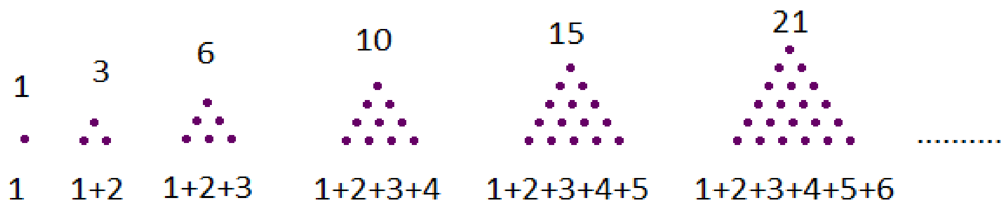


Figura 1.1: Números Triangulares.

Os números quadrados $1,\ 4,\ 9, \ldots,\ n^2$ correspondem à distribuição de pontos num plano, de modo a formar quadrados, conforme a Figura 1.2.

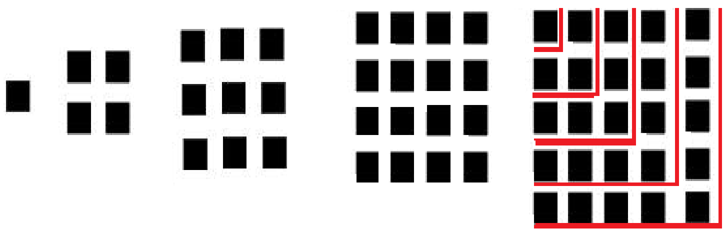


Figura 1.2: Números Quadrados.

Deve-se ressaltar que muitos resultados interessantes sobre números figurados podem ser obtidos de maneira puramente geométrica e informal. Por exemplo, na Figura 1.2 é possível observar que a soma dos números ímpares é um número quadrado perfeito, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Outro problema sério para os matemáticos da época, era o de lidar com números primos. Foi assim que o matemático grego Eratóstenes (285-194 a.C.) criou um método conhecido como “Crivo de Eratóstenes” (ou Peneira de Eratóstenes), que permite obter uma tabela de números primos até um limite escolhido. Para isto, escreve-se todos os inteiros maiores que um e menores ou igual ao número desejado. A seguir, suprime-se o número 1 e todos os múltiplos de $2,\ 3,\ 5$ e 7, menos eles mesmos. Os números que ficam formam uma sequência de números primos.

Devido à falta de conceitos adequados e de uma teoria razoável, o conceito de série, ou ainda, série infinita, surgiria mais tarde na tentativa de generalizar o conceito de soma para uma sequência de infinitos termos. Neste período, surgem numerosas especulações e paradoxos a respeito da natureza das séries infinitas, a exemplo do paradoxo de Zenão. Os primeiros gregos, contemporâneos a Eratóstenes, a trabalhar com séries foram Arquimedes e Euclides. Arquimedes foi o primeiro a calcular a soma de uma sequência geométrica infinita e a tentar explicar por meio de exemplos, como somas infinitas poderiam ter resultados finitos, embora tenha sido obstruído pela falta de precisão e notação eficiente. Arquimedes foi capaz de descobrir muitos dos elementos da análise moderna de sequências e séries. Euclides, na Proposição 35 do seu Livro IX dos Elementos, fez a soma parcial de uma série geométrica, em termos dos membros da série, este resultado é equivalente à fórmula moderna.

No século XIII, na Europa, o italiano Leonardo de Pisa (1175-1240), conhecido como Fibonacci, publicou a obra intitulada “Liber Abacci”, em que mostra sequências numéricas que se tornaram notáveis, como aquela que aparece no “problema da reprodução dos coelhos”, no qual Fibonacci considerou o crescimento de uma população idealizada (não realista biologicamente) de coelhos,

> “Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?”

Este problema deu origem à chamada sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., u_n, ...$, formada pela lei recorrente $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ para $n \geq 3$, isto é, cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente anteriores. Uma propriedade interessante que relaciona a sequência de Fibonacci e a razão áurea, é que: Dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que, a razão $\dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ se aproxima da razão áurea $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, quando n aumenta. Esta última relação foi descoberta por Johannes Kepler, em 1611, embora, conforme Gundlach (1992), só ficaria provada em 1753, pelo matemático escocês Robert Simson. Posteriormente, em 1843, Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) descobriu uma fórmula que tornou explícita a conexão entre os números de Fibonacci e a razão áurea.

No século XIV, Nicole Oresme (1325-1382), professor da Universidade de Paris, juntamente com um grupo de matemáticos da Universidade de Oxford, cujos estudos estavam relacionados à cinemática, fizeram ressurgir a importância das séries infinitas. De acordo com Ávila (2010), o resultado destas pesquisas conjuntas contribuiu para o desenvolvimento de várias séries, entre elas:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots=2$$

Ainda no século XIV, o matemático indiano Madhava, foi o primeiro a descobrir a série infinita para as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente e arcotangente, fornecendo o desenvolvimento de tais funções em séries de Taylor e em séries trigonométricas. Ele utilizou esses conceitos para o cálculo de aproximações (da constante π) e para estabelecer estimativas para o erro assumido. Também introduziu os primeiros critérios de convergência.

Na Europa, o matemático Michael Stifel (1486-1567), foi considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é “Arithmética”, publicada em 1544 e dividida em três partes, números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte, isto é, na parte dos números racionais, Stifel difunde as vantagens de se associar uma “progressão aritmética” a uma “progressão geométrica”.

Figura 1.3: Napier

Por volta de 1590, Napier revelou possuir cabal conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, o que o levou aos logaritmos. Por esse motivo, ele é considerado o inventor dos logaritmos, embora outros matemáticos contemporâneos a ele tenham desenvolvido propostas semelhantes à sua. Como é sabido atualmente, o poder dos logaritmos, como instrumentos de cálculo, está no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. No entanto, no princípio da Matemática Moderna, a abordagem de John Napier (1550-1617) para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente das longas prostaférese (palavra grega que significa "adição e subtração"), e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_m, \ldots, b_n, \ldots \tag{1.1}$$

aos da progressão aritmética:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, m, \ldots, n, \ldots, \tag{1.2}$$

então,

$$b_m.b_n = b_{(m+n)} \tag{1.3}$$

No século XVII, James Gregory associa os termos convergência e divergência ao estudo de sequências e séries, mostrando como a área do círculo pode ser obtida sob a forma de uma série infinita convergente.

No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler resolve o problema de Basel, proposto por Pietro Mengoli, em 1644. Este problema pede para achar a soma da série formada pelos quadrados dos inversos dos números naturais, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \tag{1.4}$$

Em 1735, Euler mostrou por argumentos e manipulações que não se justificavam na época que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.5}$$

Figura 1.4: Leonhard Euler

Uma prova rigorosa só foi apresentada por Euler em 1741.

Ocorreu no século XIX, com Johann Friederich Carl Gauss solucionou, ainda na infância, o problema de calcular a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Segundo uma história famosa, um professor alemão propôs aos seus alunos que efetuassem a referida soma, tendo sido Gauss o aluno que rapidamente desvendou esta questão. Até então, ninguém tinha sido capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que, a soma dos números opostos é sempre constante como mostra a figura:

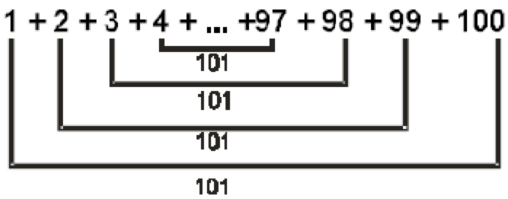


Figura 1.5: Soma dos 100 primeiros naturais

Então, ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos e dividiu pela metade. Este raciocínio equivale a fórmula da soma da progressão aritmética que usamos atualmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \tag{1.6}$$

Gauss compôs o primeiro tratamento rigoroso de convergência para sequências e séries, embora não utilizasse a terminologia dos limites.

Figura 1.6: Carl Gauss

Em sua famosa teoria analítica do calor, Jean Baptiste Joseph Fourier tentou definir a convergência de uma série infinita sem usar limites, mas mostrando que, sob certas hipóteses, toda função pode ser escrita como uma soma de suas séries.

Na Europa, mais precisamente em Grenoble, Joseph Fourier(1768-1830) desenvolveu seu trabalho teórico e experimental sobre a propagação do calor, permitindo modelar a evolução da temperatura através de séries trigonométricas.

As séries trigonométricas se fizeram presentes em vários trabalhos de Fourier. Na análise de Fourier devemos destacar a fundamental contribuição às telecomunicações modernas e ao processamento de imagens digitais. Um exemplo claro e atual é a compressão de imagens para o formato JPEG e, também, a retirada da voz das canções para fazer o Karaokê.

Augustin-Louis Cauchy $(1789 - 1857)$ foi um matemático de importantes descobertas, especialmente, no campo da Matemática Pura. Ele é um dos fundadores do Cálculo com Variáveis Complexas. Além disso, possui papel de destaque no Cálculo Elementar, Teoria dos Determinantes e nas Séries Infinitas, sendo estas responsáveis pelo desenvolvimento da Teoria das Funções.

Em meados de sua vida, Cauchy, estabeleceu um teste de convergência para séries de números reais, conhecido por "Teste da Raiz"ou "Teste de Cauchy". Este critério permiti estabelecer o raio de convergência da série de Taylor, de funções analíticas na reta e no plano complexo.

Boyer (1994) destaca que o nome de Cauchy aparece ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas, embora Gauss e Abel tenham feito esforços nesse sentido. Graças a Cauchy, foi despertada a consciência dos matemáticos para a necessidade de observação relacionada à convergência.

> Tendo definido uma série como convergente se, para valores crescentes de n, a soma Sn dos n primeiros termos se aproxima de um limite S, chamado a soma da série. Cauchy provou que uma condição necessária e suficiente para que uma série infinita seja convergente é que, para n suficientemente grande e dado p qualquer, o valor da diferença entre Sn e $Sn + p$ se torne menor que qualquer número dado. Essa condição para "convergência em si" se tornou conhecida como critério de Cauchy, mas Bolzano a conhecia antes (e, talvez, Euler ainda antes).

Observar e explorar regularidades em padrões númericos, o levantamento , a investigação e validação de conjecturas e generalização devem fazer parte do estudo do alunado, para que desta forma, com esta visão , possam desenvolver ideias que são essenciais para o desenvolvimento da ciência na atualidade.

Os PCN´s sugerem o estudo das Sequências e Séries como uma oportunidade que o aluno tem de visualizar o conceito de uma soma de infinitas parcelas, estabelecendo assim a ideia de convergência no Ensino Médio. Dessa forma, facilitamos a compreensão e a previsão de diversas situações-problemas. Por exemplo, o estudo da velocidade com que um elemento radioativo se desintegra. Podemos, também, interrelacionar conceitos de sequência e funções, ou ainda, sequências e matemática financeira. Observar como os matemáticos citados, enriqueceram o estudo, assim, tornando o assunto mais atraente e significativo para o aluno.

Capítulo 2

Os Conceitos de Sequências e Séries nos Livros Didáticos

2.1 A Escolha do Livro Didático

Na formação acadêmica de um professor de Matemática, pouco se fala sobre a escolha do livro didático a ser trabalhado, que venha a oferecer maior qualidade dos conteúdos a serem explorados pelo profissional da área. Afinal, o livro é o principal instrumento de trabalho do professor, pois é a partir deste material que se têm os conceitos, as definições, exemplos, de onde se extrai as listas de exercícios.

Segundo Carvalho (2008), nos últimos vinte anos, o governo do Estado brasileiro tem se mostrado mais atuante na educação, principalmente no que tange à escolha dos livros didáticos. Fazendo uma retrospectiva dos principais marcos políticos concernentes ao assunto, desde 1938, sob a coordenação da CNLD (Comissão Nacional do Livro Didático) deu-se início a um longo processo de investigação e estudo dos livros didáticos a serem escolhidos e trabalhados em sala de aula.

A certeza de que tem havido seriedade no processo de seleção dos livros didáticos a serem expostos aos alunos é que, o Governo percebeu o agravante da situação educacional e, em 1993, instituiu uma comissão de especialistas. Esse especialistas iniciaram uma avaliação para verificar a qualidade dos livros que, na época, eram os mais utilizados em sala de aula. Esses livros eram escolhidos exclusiva e unicamente pelos professores, sem intervenção de nenhuma inspeção específica de quaisquer órgãos governamentais.

Isto transcorreu de forma tão séria, que em 1996, deu-se início ao processo de avaliação dos livros didáticos, gerando transtornos e muitos embates com diversas editoras, reprovadas nas seleções por não cumprirem os requisitos mínimos dos programas expostos pela CNLD, que já se encontrava, neste momento, estruturada. Foram elaborados critérios na composição dos componentes curriculares do Ensino Fundamental, exigindo resultados em suas avaliações, que tinham caráter investigativo. Isoladamente em Matemática, de quinze (15) coleções examinadas, sendo destas dez (10) completas e cinco (5) incompletas, examinadas, apenas uma (1) coleção completa e um (1) livro isolado foram considerados aprovados. Daí a urgência na reformulação dos livros didáticos.

Esta reformulação foi realizada e os critérios propostos pela equipe de especialistas de diversas áreas cobraram e, ainda cobram, resultados, acompanhando de perto todo o processo até hoje, pautados em avaliações realizadas pela Secretaria da Educação Fundamental, no âmbito do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático).

Certamente que as editoras, autores e livreiros tiveram grandes resistências às mudanças, gerando muitos transtornos e até processos judiciais, visto que a ação do Ministério da Educação foi intensa, não se omitindo em particular na área da Matemática. No início da década anterior, esta comissão que supervisionava as avaliações elaborou um documento intitulado “Recomendações para uma Política Pública de Livros Didáticos" sugerindo que:

> São necessários (...) esforços para que o PNLD contribua para o desenvolvimento de novas concepções de livro didático; dê acolhida a propostas de novos modos de relação do manual com o trabalho docente; possibilite uma renovação dos padrões editoriais associados ao conceito de livro didático que se cristalizou na tradição brasileira. Em outros termos: para que o MEC atue de modo mais significativo na promoção de um ensino de melhor qualidade, é necessário ampliar a concepção de livro didático, possibilitando que a oferta de materiais inscritos se diversifique e se enriqueça Batista (2002).

Percebemos, então, que tem havido o apoio do governo para aperfeiçoar a educação. No entanto, não bastam apenas bons materiais didáticos. Há de se ter equipe de autores, editoras, professores, enfim, todos envolvidos no processo educacional, capacitados e compromissados para que não haja mais repetições de resultados catastróficos como ocorreu nas avaliações ministradas pela Secretaria de Educação/MEC. Até mesmo porque as inspeções agora são constantes e verdadeiras.

Evidentemente, ainda há muito que melhorar. Há muitas interpretações e ensinamentos equivocados em alguns tópicos da grande maioria dos livros publicados atualmente, mas já houve um grande avanço.

O objetivo deste capítulo é apontar alguns dos problemas que ainda existem nos materiais didáticos e as mudanças que estão acontecendo por conta das novas diretrizes de Educação. Especialmente, analisaremos como os conceitos de Sequências e Séries vem sendo abordados no Ensino Médio das escolas públicas.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais vs. Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro

Atualmente, há no Estado do Rio de Janeiro dois documentos que norteiam o trabalho do professor da rede pública estadual: Os PCN´s (Parâmetros Curriculares Nacionais), editado pelo MEC e o Currículo Mínimo elaborado pela SEEDUC com a colaboração dos professores da rede estadual de educação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais fornecem orientações aos profissionais da educação para trabalharem com todos os conteúdos. Na disciplina de Matemática, por exemplo, encontramos de forma clara o que se refere ao estudo das séries e sequências:

> Com relação às seqüências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece, talvez, a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito.

> Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de seqüência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo em que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma seqüência sem precisar decorar informações. PCNs (1998) (página 118)

O Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro CMERJ (2013) foi criado com o objetivo de orientar os professores, enfatizando o que deve ser abordado na sala de aula em cada período letivo, funcionando como um planejamento. A abordagem sugerida pelos currículos pode parecer superficial, mas devemos lembrar que o currículo é mínimo. Cabe ao professor analisar sua turma e verificar até que ponto o conteúdo deve ser aprofundado.

No Campo Numérico Aritmético do 2^o bimestre da 2^a série do Ensino Médio, sugere-se entre as competências e habilidades das regularidades numéricas:

> - Identificar sequências numéricas e obter, quando possível, a expressão algébrica do seu termo geral.
> - Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.
> - Diferenciar Progressão Aritmética de Progressão Geométrica.
> - Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas significativos.

É interessante observar que entre as competências e habilidades citadas anteriormente não se faz uma referência explícita ao ensino de séries, embora no último item que se refere à "soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problema significativos" cabe a inserção das ideias de infinito e convergência, até mesmo pelo fato de que muitos problemas que envolvem somas de parcelas infinitas são intuitivos, interessantes e fáceis de expor aos alunos.

Outro fato relevante, levantado durante a elaboração desta monografia, é que existem várias diferenças entre os atuais Currículos de Matemática da maioria dos estados do Brasil. Por exemplo, os currículos do Estado de Espírito Santo (CBEES (2009)) e São

Paulo CESP (2010), se diferem do Currículo do Estado de Rio de Janeiro, pelo fato de propor os temas envolvendo sequências e soma dos termos da P.A. e da P.G. na 1^a Série do Ensino Médio, sendo que o conteúdo de Funções só é apresentado na 2^a Série do Ensino Médio.

Podemos concluir que, os Currículos devem ser permanentemente atualizados para que exista uma base nacional comum que caminhe de acordo com os PCN´s, já que são referência para o trabalho do professor e visam à qualidade do ensino nas Escolas.

2.3 Uma Análise do Conceito de Sequências

Nesta seção faremos um confronto entre as definições de Sequências e Séries encontradas em diferentes livros com as propostas dos PCN´s e o Curriculo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, observando as mudanças que vêm sendo feitas no conteúdo a cada nova edição. Os livros escolhidos fazem parte das Bibliotecas das escolas: Escola Estadual Dr. Feliciano Sodré, em São Pedro da Aldeia - RJ e Escola Municipal Pedro Adami, em Macaé - RJ.

Foi observado que os livros mais antigos trazem o conceito de sequência de forma desconexa, não contemplando o conhecimento já adiquirido pelo aluno. Alguns desses livros são usados pelos professores e alunos das escolas em questão.

No livro Santos et al. (1998) encontramos: "*Todo conjunto de elementos, numéricos ou não, colocados numa determinada ordem é chamado sequência ou sucessão*".

O livro Giovanni et al. (1998), por exemplo, define sucessão ou sequência como sendo todo conjunto que tenha os elementos em mesma ordem, ainda acrescenta que "*sequência numérica é todo conjunto de números dispostos numa certa ordem*". No livro Giovanni and Bonjorno (2002), os mesmos autores, apesar de mudar o nome do livro (Matemática Fundamental - 1998 para Matemática Completa - 2002), mativeram exatamente a mesma definição de sequência.

Em Matemática Aula por Aula, Barreto and Silva (2003), tanto na edição de 2000 quanto na edição de 2003, define em uma frase sequência ou sucessão, como o conjunto de elementos que estão numa certa ordem. Em seguida, comenta o termo geral de uma sequência e parte para as definições de PA e PG.

No volume único de Matemática, Youssef et al. (2005), lemos: "*Sempre que estabelecemos uma ordem para os elementos de um conjunto, de tal forma que cada elemento seja associado a uma posição, temos uma sequência ou sucessão*". E ainda diz que uma sequência pode ser finita ou infinita, dependendo do número de termos que ela apresentar. Da mesma forma Iezzi et al. (2002) definem sequência.

É importante notar que, nos livros anteriormente mencionados, em momento algum foi definido o que vem a ser ordem.

Há de se fazer uma crítica, visto que, estas definições são incompletas e não relacionam o conteúdo ao conhecimento já adquirido pelo aluno, entrando em contradição com as sugestões dadas pelos PCNs e o Currículo Mínimo do RJ, esquecendo-se de proporcionar ao educando um verdadeiro saber matemático. Tais obras apresentam o tema de forma desconexa, reforçando a ideia de que a Matemática baseia-se apenas no uso de técnicas operatórias e algoritmos, não levando em conta os conhecimentos prévios, o desenvolvimento cognitivo, os interesses e a motivação dos alunos.

Porém, as obras como Dante (2004), Barroso (2010), Ribeiro (2010), Iezzi et al. (2010), definiram o conceito de sequência de modo semelhente. Por exemplo, em Iezzi et al. (2010) encontramos:

> De modo geral, uma função cujo domínio é $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ é chamada sequência numérica infinita. Quando o domínio de f é $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ temos uma sequência numérica finita

Tais definições estão de acordo com os PCN´s, talvez pelo fato de serem livros mais recentes. Observarmos que, a forma como o Governo Federal e o Ministério da Educação vêm trabalhando está surtindo efeito. Note que o mesmo autor (Iezzi), reformulou o conceito de sequência contido no livro Iezzi et al. (2002) para o livro Iezzi et al. (2010).

Cabe ao professor a análise crítica e a forma como o tema pode e deve ser explorado a fim de propor ao aluno uma investigação significativa, trazendo o uso do conhecimento de funções e trabalhando a noção do infinito, podendo assim, despertar nele o interesse científico, valorizando a abordagem matemática.

Podemos deduzir que, a forma como os conteúdos didáticos são abordados podem comprometer o ensino e a aprendizagem dos alunos. A qualidade do livro didático influencia e condiciona a prática do professor, principalmente do professor recém-formado.

De acordo com Lima (2001), a qualidade do ensino e, consequentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis. Quando se refere ao conteúdo de sequências e progressões geométricas afirma o fato de que não é feita a conexão entre PG e a função exponencial, bem como não são oferecidos problemas não artificiais que exibam situações onde poderíamos usar PG´s ou funções exponenciais.

Para muitos, a Matemática se fundamenta em normas, procedimentos e símbolos que não contém significados. Mas, de fato, as práticas de ensino da Matemática têm sido marcadas por isolá-la do mundo.

O foco principal deste trabalho está em apresentar atividades que relacionem tais conteúdos (Capítulos 3 e 4), trazendo de forma significativa o estudo das sequências. As atividades que são abordadas para serem apresentadas aos alunos têm a finalidade de estimulá-los a produzirem este conhecimento, trabalhando de forma contextualizada na produção do conhecimento. Tais atividades foram apresentadas e trabalhadas com os alunos da 2ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Dr Feliciano Sodré.

2.4 Uma Análise do Conceito de Séries

Os Livros de Ensino Médio pesquisados para este trabalho, e citados na seção anterior, não evidenciam o conceito de séries de forma explícita, encontrando-se em desacordo com o que sugere os PCN´s. Talvez isto esteja relacionado ao fato de que o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro não se refere ao ensino de séries.

Na maioria dos capítulos dedicados ao ensino de sequências encontramos a definição de sequência, PA - Progressão Aritimérica (razão, termo geral, classificação em crescente, decrescente ou constante, soma de n termos) e PG - Progressão Geométrica (classificação, termo geral, soma dos n termos, soma dos termos infinitos de uma PG). Porém, existem outras séries que não se enquadram na definição de PA e PG e poderiam ser evidenciadas, tais como, as séries harmônicas, o problema de Basileia, citado no Capítulo 1, bem como os resultados encontrados em diversos campos da Física, Química e na área tecnológica.

Acreditamos que seja importante definir o conceito de Série, pois segundo os documentos supracitados, é o que mais se aproxima dos conceitos de limite e infinito, fundamentais para que o aluno, ao dar continuidade aos estudos, consiga compreender as ideias fundamentais do cálculo, de modo a não desistir das faculdades nas áreas de engenharia, finanças e, até mesmo, Matemática.

Capítulo 3

Proposta Didática para o Ensino de Sequências e Séries

O objetivo deste Capítulo é introduzir os conceitos de Sequências e Séries, segundo as orientações dos PNC's, para os alunos da 2^a série do Ensino Médio, considerando o conhecimento já adquirido pelos alunos.

3.1 O Ensino de Sequências

Para iniciar nosso estudo é interessante fixar os seguintes conceitos:

Definição 3.1 *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Uma função $f : X \to Y$ (lê-se: função de X em Y) é uma lei que associa cada elemento $x \in X$ a um, e somente um, elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X é chamado de* ***Domínio*** *de f e denotaremos por $Dom(f)$. O conjunto Y é dito o* ***Contradomínio*** *de f.*

Definição 3.2 *Definimos a* ***Imagem*** *de f, $Im(f)$, ao conjunto de valores $y \in Y$ tais que $y = f(x)$, para algum $x \in X$. Escrevemos $x \mapsto f(x)$ para indicar que a função f transforma x em $f(x)$, onde $f(x)$ é a imagem de x.*

Cabe lembrar que não é necessário que todo elemento de Y esteja associado a algum elemento do domínio pela ação da função que esteja sendo considerada. Em outras palavras,

$$Im(f) \subseteq Y$$

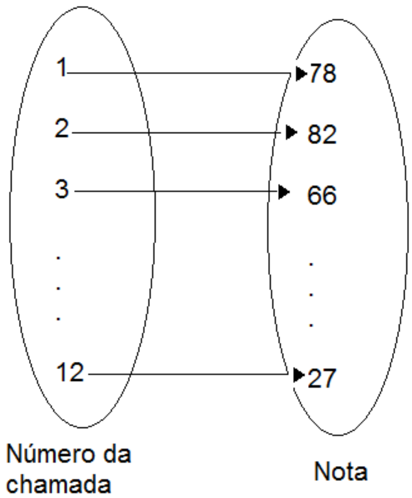
A seguir, por meio de uma situação do dia-a-dia do alunado e com o intuito de dar significado as definições anteriores, apresentaremos uma tabela que contém parte do diário de classe da turma em questão.

Exemplo 3.1 *A planilha abaixo relaciona as notas de alguns alunos da turma do 2^o ano, no 1^o bimestre na disciplina de matemática, de acordo com o número da chamada:*

Número de chamada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nota	78	82	66	50	60	56	20	30	40	71	95	27

Tabela 3.1: Parte do Diário de Classe

É interessante levar o aluno a observar que essa relação define uma função, pois cada aluno representado pelo número de chamada tem uma única nota.



Notamos, também, que o domínio dessa função é o conjunto

$$Dom(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

e a imagem é o conjunto

$$Im(f) = \{78, 82, 66, 50, 60, 56, 20, 30, 40, 71, 95, 27\}$$

Exemplo 3.2 *Consideremos, agora, uma outra função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida pela relação $f(n) = \sqrt{n}$, onde o domínio é o conjunto $\mathbb{N}^*$ e a imagem é um subconjunto dos números reais.*

$$Im(f) = \{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, \sqrt{4},\ \ldots\}.$$

Definição 3.3 *Uma sequência numérica é a imagem de uma função cujo domínio é um subconjunto ou o próprio conjunto* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$*. Se o domínio for* $\mathbb{N}^*$ *a sequência será infinita, se o domínio for um subconjunto de* $\mathbb{N}^*$ *com* n *termos, a sequência será finita. Representaremos as sequências numéricas por meio do seu conjunto imagem entre parênteses.*

Assim, no Exemplo 3.1, as notas de matemática dos alunos, podem ser representadas por uma sequência finita da forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}) = (78, 82, 66, 50, 60, 56, 20, 30, 40, 71, 95, 27).$$

Da mesma forma, no Exemplo 3.2, a imagem da função representa uma sequência infinita

$$(a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_n, \dots) = (1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, \sqrt{4},\ \dots, \sqrt{n},\ \dots).$$

onde $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$ e n indica a posição do elemento na sequência.

Definição 3.4 *Se* n *é um número natural qualquer não nulo, temos que* a_n *representa o n-ésimo termo da sequência, que é chamado de* ***termo geral*** *da sequência, visto que, a partir dele, podemos calcular qualquer termo da sequência, de acordo com a posição atribuída para* n*, onde* $n \in \mathbb{N}^*$*. Usaremos* $f(n) = a_n$ *para designar uma sequência qualquer.*

Exemplo 3.3 *Consideremos a função* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$*, onde* $f(n) = 3n$*. vemos que:*

$$f(1) = 3.1, \quad f(2) = 3.2, \quad f(3) = 3.3, \quad f(4) = 3.4, \cdots\cdots,\ f(n) = 3n, \cdots$$

Consequentemente, o conjunto $Im(f) = \{3, 6, 9, 12, \cdots, 3n, \cdots\}$ *representa a sequência infinita*

$$(3, 6, 9, 12, \cdots, 3n, \cdots).$$

Note-se que cada número $n \in N^*$ *está associado ao seu triplo. Portanto, o termo geral da sequência é*

$$a_n = 3n$$

A seguir, usando o termo geral $a_n = 3n$ do Exemplo 3.3, é possível completar a seguinte tabela

Existem dois casos notáveis de sequências, as Progressões Aritméticas (PA) e as Progressões Geométricas (PG). A seguir, definiremos e exemplificaremos estes dois casos particulares das sequências.

$I\!N^*$	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\cdots$	10
a_n	3	6	9	12	15	$\cdots$	$\cdots$	30

Tabela 3.2: Termos da Sequência

3.1.1 Progressão Aritmética - PA

Definição 3.5 *Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao termo anterior, uma constante r que será chamada de razão da progressão.*

Observemos que a sequência do Exemplo 3.3 é uma PA de razão 3, pois cada termo da sequência é obtido adicionando 3 ao termo anterior.

As progressões aritméticas podem ser classificadas de acordo com o valor da razão r.

- Se $r > 0$ a PA é crescente.
- Se $r = 0$ a PA é constante.
- Se $r < 0$ a PA é decrescente.

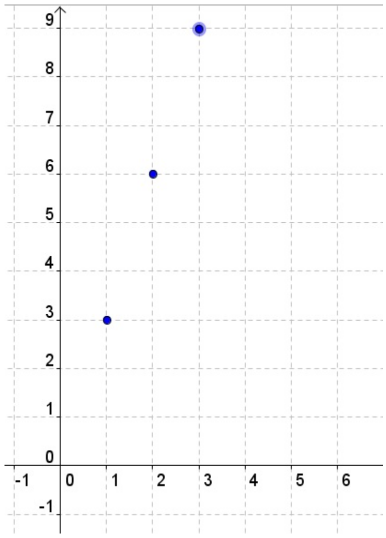
Podemos escrever os termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ em função do termo anterior acrescido da razão ou em função do primeiro termo e da razão r. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\
\vdots &\quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + r \\
a_n &= a_1 + (n-1)r \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Logo o termo geral de uma progressão aritmética cujo o primeiro termo é a_1 e possui razão r é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Podemos representar uma PA como uma sequência de pontos sobre uma reta, tais pontos pertencentes ao 1^o ou 4^o quadrante do plano cartesiano. Ainda considerando o Exemplo 3.3:



3.1.2 Progressão Geométrica - PG

Definição 3.6 *Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior, por uma constante* q *chamada razão da progressão geométrica.*

Para exemplificar vejamos a seguinte situação:

Exemplo 3.4 *Atualmente temos como meio de comunicação utilizado em todo mundo o e-mail, também conhecido como correio eletrônico. Certamente já ouviu falar nos e-mails que funcionam como corrente, ou seja , ao receber certa mensagem deve encaminhar para uma quantidade de pessoas, que por sua vez, deverão encaminhar também e assim sucessivamente.*

Suponhamos que você receba um e-mail desse tipo e tenha que encaminhar para três pessoas. Podemos representar a sequência:

$$(1, 3, 9, 27, \ldots)$$

No Exemplo 3.4 temos uma PG crescente de razão igual a 3.

Para classificarmos as Progressões Geométricas devemos considerar não somente a razão (q) mas também o primeiro termo (a_1), assim temos que:

- Se $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$ a PG é crescente.
- Se $a_1 \in I\!R$ e $q = 1$ a PG é constante.
- Se $a_1 < 0$ e $q > 1$ ou $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ a PG é decrescente.
- Se $a_1 \in I\!R$ e $q < 0$ a PG é alternante ou oscilante.

Assim como na PA podemos escrever os termos da progressão geométrica

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$$

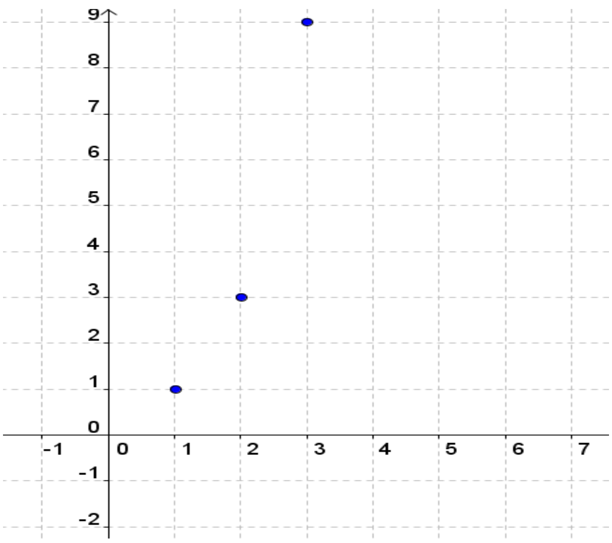
em função do termo anterior multiplicado pela razão ou em função do primeiro termo e da razão q. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1.q \\
a_3 &= a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2 \\
a_4 &= a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1.q^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Observamos que a lei de formação da função, ou melhor, de qualquer sequência que siga as definições de uma PG pode ser escrita por

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

A representação gráfica da PG do Exemplo 3.4 no plano cartesiano também será obtida por pontos (x, y) onde $x = n \in I\!N^*$ e $y = a_n \in R$,



Notamos novamente que os pontos da PG, assim como os da PA e qualquer outra sequência, pertenceram sempre ao 1^o ou 4^o quadrante do plano cartesiano, visto que o domínio $x = n \in \mathbb{N}^*$.

3.2 O Ensino de Séries

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência de números reais. Consideremos as somas parciais,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots$$

Denotamos a soma parcial de ordem n associada a sequência a_n por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

Observamos que estas somas parciais formam uma nova sequência (S_n) que pode ou não ter **limite**, isto é, o termo

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

pode existir ou não.

Definição 3.7 *Uma série de números reais ou série numérica ou simplesmente Série é a soma dos infinitos termos de uma sequência* (a_n)*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

Os números a_1, a_2, $\dots$, chamam-se termos da série numérica e o n-ésimo termo a_n é designado por termo geral da série.

Uma Série infinita pode ser convergente ou divergente.

- **Série Convergente**, se o limite de (S_n) existir e for igual a S, então diremos que a soma da série é:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- **Série Divergente** (ou não convergente), se não é possível determinar o limite de (S_n).

Diversos exemplos de séries infinitas convergentes podem ser mostradas, no estudo de dízimas periódicas, frações e números decimais.

Exemplo 3.5 *Uma dízima como $0,888...$ nada mais é do que uma série geométrica infinita, pois ela pode ser escrita da forma:*

$$\begin{aligned} 0,888... &= 0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008 + ... \\ &= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + ... \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10^n} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Note que cada parcela da Série é um termo da PG $\left(\frac{8}{10^n}\right)_{n \in N^*}$ de razão $\frac{1}{10}$.

Devemos considerar dois casos particulares de somas parciais:

3.2.1 Soma Finita da Progressão Aritmética - PA

Seja a PA finita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

podemos indicar a soma dos n primeiros termos por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

ou equivalente

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1$$

Somando as duas parcelas anteriores temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Por (3.1), temos:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_n &= a_1 + (a_1 + nr) = 2a_1 + nr \\
a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + r) + (a_1 + (n-1)r) = 2a_1 + nr \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n-1} + a_2 &= (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + r) = 2a_1 + nr \\
a_n + a_1 &= (a_1 + nr) + a_1 = 2a_1 + nr,
\end{aligned}$$

dessa forma temos que todas as parcelas da soma anterior são iguais. Logo,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Consequentemente,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{3.4}$$

3.2.2 Soma Finita da Progressão Geométrica - PG

Consideremos uma PG finita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

de razão $q \neq 1$. Podemos indicar a soma dos n primeiros termos por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

.

Multiplicando a igualdade acima pela razão q, encontramos

$$S_n.q = a_1.q + a_2.q + a_3.q + a_4.q + \ldots + a_{n-1}.q + a_n.q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n.q$$

Agora substraindo as duas parcelas acima temos:

$$S_n - S_n.q = a_1 - a_n.q$$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$, podemos escrever

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^n$$

, donde concluímos que

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{3.5}$$

3.2.3 Série Geométrica Convergente

Consideremos (a_n) uma PG Infinita, com razão $q \in (-1, 1)$. Então

$$|q| > |q|^2 > |q|^3 > \cdots > |q|^n > \cdots > 0$$

Isto é, para valores de n muito grandes, q^n é muito próximo de zero.

Consequentemente, por (3.5) temos que a soma infinita dos termos da PG é

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}. \tag{3.6}$$

Exemplo 3.6 *Na seguinte tabela, observe os termos da progressão geométrica infinita com primeiro termo* $a_1 = 2$ *e razão* $q = \frac{1}{2}$.

n	1	2	3	4	5	...	10	...	n	...
a_n	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^{10}}$	...	$\frac{1}{2^{n-2}}$	...

Tabela 3.3: Tabela da PG

Note que conforme n *cresce o valor de* a_n *decresce e aproxima-se de zero. Por outro lado, de (3.6)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Portanto, a série geométrica é convergente.

Capítulo 4

Atividades Propostas

A seguir, apresentaremos algumas atividades que foram trabalhadas em sala de aula, em duas turmas da 2^a Série do Ensino Médio do Colégio Estadual Dr. Feliciano Sodré.

O objetivo das atividades propostas é relacionar os conceitos de função e de sequências númericas, assim como, trabalhar os conceitos de séries, através de diversas situações e contextualizações. Assim, esperamos contribuir com os professores e alunos do Ensino Médio que desejem adotar este trabalho para dar suporte ao seu estudo sobre estes temas,

As atividades foram agrupadas segundo o conceito a ser explorado. Por exemplo, foram relacionandos:

- Sequência numérica e a imagem de uma função.
- Posição do termo da sequência e o domínio da função.
- Termo geral da sequência e a lei de formação de função.
- Representação gráfica das sequências e os gráficos de funções no plano cartesiano.
- Função de 1^o grau e progressões aritméticas.
- Função exponencial e progressões geométricas.
- Séries convergentes e as dízimas periódicas.
- Séries e alguns paradoxos da matemática.

4.1 Relacionando o Conceito de Função

O objetivo das seguintes atividades será relacionar o conjunto imagem de uma função com uma sequência numérica.

Atividade 1

Seja a função $f : I\!N^* \to I\!N$ definida por $f(n) = 2n$:

1. Complete a seguinte tabela:

n	f(n)
1	f(1)=
2	f(2)=
3	f(3)=
4	f(4)=
5	f(5)=
$\vdots$	$\vdots$
10	f(10)=
$\vdots$	$\vdots$
100	f(100)=

Tabela 4.1: Atividade 1

2. Represente as imagens encontradas no item anterior, de acordo com a definição de uma sequência numérica.

$$(\underline{\hspace{8cm}})$$

3. Escreva a sequência usando a lei de formação da função f.

$$a_n = \underline{\hspace{3cm}}$$

Atividade 2

Encontre os cinco primeiros termos da sequência definida pela função $f(n) = 4n + 6$, sabendo que $n \in I\!N^*$.

4.2 O Comportamento de Sequências

O objetivo desta atividade é encontrar o próximo termo e perceber que a sequência podem ser crescentes, decrescentes, constantes ou alternantes.

Atividade 3

Observe as sequências e indique quais serão os cinco próximos termos.

1. $(1, 2, 1, 2, 1, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots)$
2. $(-2, 0, 2, 4, 6, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots)$
3. $(1, 3, 9, 27, 81, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots)$
4. $(19, 15, 11, 7, 3, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots)$
5. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \ldots\right)$

4.3 Construindo o Termo Geral de uma Sequência

O objetivo das seguintes atividades é levar o aluno a identificar o termo geral que expressa a sequência numérica, a partir da observação do seu comportamento.

Atividade 4

As sequências abaixo cumprem padrões diferentes, escreva a senteça matemática a_n que possibilite encontrar qualquer termo, de acordo com a posição n.

1. $(1, 2, 3, 4, 5, \quad \ldots)$
2. $(4, 2, 0, -2, -4, \quad \ldots)$
3. $(1, 4, 9, 16, 25, \quad \ldots)$
4. $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \quad \ldots)$
5. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \quad \ldots\right)$

Atividade 5

O esquema abaixo representa um número de pontos P em função de sua ordem n, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Qual expressão algébrica que representa o padrão das figuras, de acordo com a posição n?

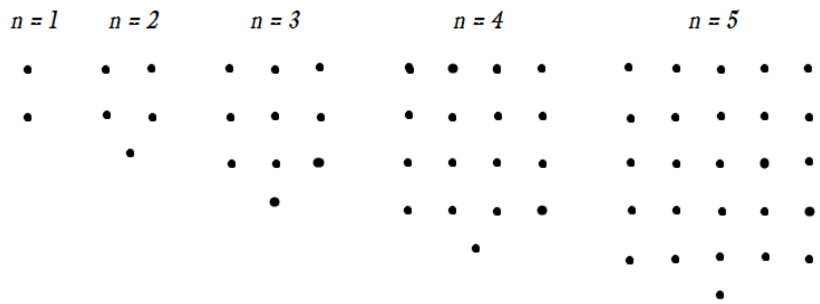


Figura 4.1: Atividade 5

Atividade 6

A palavra Fractal, original do latim *fractus*, significa fração, pedaço, ou ainda , objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. O estudo da geometria fractal, criada no século XX, trata das propriedades e do comportamento dos fractais, isto é, analisa os objetos geométricos formados por padrões de repetições similares.

Uma das formas notáveis da geometria fractal é o Triângulo de Sierpinski. Podemos obter um triângulo de Sierpinski através dos seguintes passos:

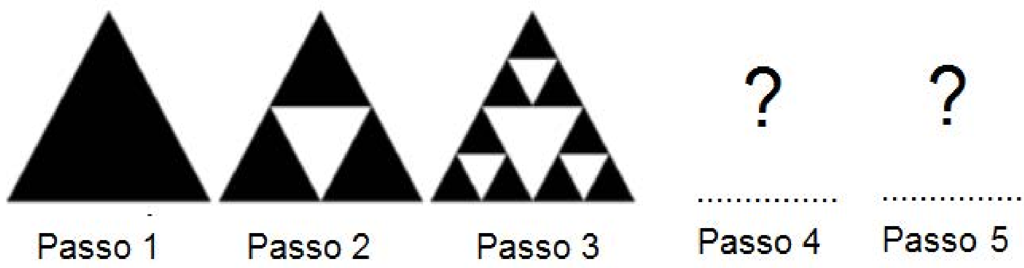


Figura 4.2: Atividade 6

1. Comece com um triângulo equilátero em um plano.

2. Marque o ponto médio de cada lado e ligue esse pontos. Retire o triângulo do meio.

3. Repita o passo anterior em cada um dos três triângulos pretos.

Agora responda:

1. Quantos triângulos pretos teremos na figura 4.2 no quarto e quinto passo?

2. Qual a sequência que define a quantidade de triângulos pretos em cada passo?

3. Qual a lei de formação que expressa esta sequência?

4.4 Atividades Usando o Termo Geral

As seguintes atividades têm como objetivos trabalhar a notação de sequências partindo do termo geral, mostrando que existem números que não pertencem ao conjunto imagem, ou seja, não são termos da sequência definida. Com isto, queremos que o aluno perceba que conhecendo o termo geral, qualquer termo pode ser obtido sem a necessidade de calcular todos os elementos anteriores da sequência.

Atividade 7

A lei de formação dos elementos de uma sequência é $a_n = 2n - 10, n \in N^*$. Verifique se os números abaixo pertencem a essa sequência?

1. 215

2. -8

3. 1263

Atividade 8

O termo geral de uma sequência é $a_n = n^2 - n$, com $n \in N^*$. Encontre

$$a_1 = \ldots, \qquad a_2 = \ldots, \qquad a_{10} = \ldots, \qquad a_{50} = \ldots, \qquad a_{100} = \ldots$$

.

4.5 Representação Gráfica no Plano Cartesiano

O objetivo dessa atividade é fazer a representação gráfica de sequências no plano cartesiano e verificar que expressões distintas podem ter termos comuns.

Atividade 9

Dadas as sequências a_n e b_n tais que:

$$a_n = 3n - 10,\ n \in I\!N^* \qquad \text{e} \qquad b_n = 20 - 2n,\ n \in I\!N^*$$

1. Faça o gráfico das sequências $(a_n)_{n \in N^*}$ e $(b_n)_{n \in N^*}$ no mesmo plano cartesiano.
2. Existe termo comum às duas sequências?
3. Existe alguma função que contenha todos os pontos da sequência a_n? E da sequência b_n?

4.6 Trabalhando o conceito de PA e PG

O objetivo dessa atividade é identificar e diferenciar as progressões aritméticas e geométricas (PA e PG) das sequências em geral.

Atividade 10

Observe as sequências, identifique as que são progressões aritméticas e as que são progressões geométricas bem como as razões em ambos casos.

1. $(36, 24, 12, 0, -12, \ldots)$
2. $(-12, -6, 1, 9, 18, \ldots)$
3. $\left(\frac{5}{2}, 5, 10, 20, 40, \ldots\right)$
4. $\left(27, 9, 3, 1, \frac{1}{3} \ldots\right)$
5. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right)$
6. $(0, 5, 10, 15, 20, \ldots)$

7. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \frac{21}{2}, \ldots\right)$

4.7 Atividades Explorando o Gráfico de Uma Função

O objetivo desta atividade é fazer uma relação entre o gráfico de uma função linear e os pontos de uma sêquência definida por uma progressão aritmética e observar que os pontos da sequência não podem ser ligados, uma vez que o domínio das sequências pertence a $\mathbb{N}^*$.

Atividade 11

Utilizando o mesmo plano cartesiano, faça o que se pede:

1. Represente a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 2n + 1$
2. Represente a progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 3.
3. Existe algum ponto da sequência que não pertence a função? Justifique.
4. Existe algum ponto da função que não pertence a sequência? Justifique.

O objetivo da seguinte atividade é fazer uma relação entre o gráfico de uma função exponencial e os pontos de uma sêquência definida por uma progressão Geométrica. Observar que os pontos da sequência não podem ser ligados, uma vez que o domínio das sequências pertence a $\mathbb{N}^*$.

Atividade 12

Considere a progressão geométrica $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, responda:

1. Qual a lei de formação da progressão?
2. Faça a representação gráfica dessa progressão.
3. O comportamento desse gráfico se assemelha com o gráfico de qual função estudada anteriormente?
4. Qual é o décimo termo desta progressão?
5. Esta progressão em algum momento terá um termo menor ou igual a zero?

4.8 Contextualizando Sequências

O objetivo destas atividades é apresentar algumas aplicações das sequências.

Atividade 13

Digamos que você recebe duas ofertas de trabalho, ambas por um mês (30 dias).

1. Proposta 1 - Ao final dos 30 dias de trabalho você receberá 1 milhão de reais.
2. Proposta 2 - Ao final do primeiro dia receberá apenas 1 centavo, ao final do segundo dia receberá 2 centavos, ao final do terceiro dia receberá 4 centavos e a cada dia subsequente o dobro do anterior, até completar os 30 dias.

Responda

- Qual proposta você escolheria? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Porque? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Atividade 14

Atualmente os tratamentos e exames para a tireoide são feitos com o uso do Iodo-131, um isótopo radioativo, usado na Medicina Nuclear. Sabe-se que sua meia-vida é de oito dias.

Considere que um paciente em tratamento recebeu uma dose de X átomos radioativos do Iodo-131.

1. Determine a quantidade de átomos radioativos existêntes no organismo desse paciênte após:
   (a) 32 dias;
   (b) 48 dias;
   (c) 200 dias;
   (d) 1000 dias.
2. Qual é a expressão que fornece a quantidade de átomos radioativos a_n em função do número de meias-vidas (n) ? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

3. Podemos concluir que sempre haverá ou não Iodo-131 no organismo desse paciente? _

4.9 Atividades Trabalhando o Conceito de Séries

Aqui dividimos as atividades envolvendo somas parciais das somas infinitas para que os alunos tivessem oportunidade de trabalhar os casos particulares das somas parciais da progressão aritmética(PA) e da progressão geométrica(PG).

4.9.1 Soma Finita da Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

O objetivo dessas atividades é levar o aluno à visualizar o pradão de repetição no resultado a ser encontrado, podendo utilizar as relações obtidas no Capítulo 3.

Atividade 15

Qual é a soma dos termos das sequências subsequentes?

1. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
2. $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20)$
3. $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 50)$
4. $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100)$

Atividade 16

Cosidere uma PG de primeiro termo igual a 1 e razão igual a 4. O somatório desse termos é a série

$$1 + 4 + 16 + 64 + \ldots$$

Sabendo que S_n é a soma parcial dos n termos referidos, usando 3.5 responda:

1. Calcule a soma dos dez primeiros termos de tal PG. Em seguida, calcule a soma dos 20 primeiros termos.
2. É possível calcular a soma dos infinitos termos da PG considerada? . . . .

4.9.2 Somas Infinitas

O objetivo dessas atividades é trabalhar o conceito de séries enfocando a série geométrica.

Atividade 17

1. Calcule a razão e a soma dos termos das progressões geométricas abaixo:

   (a) $(9, 3, 1, \ldots)$

   (b) $(-1000, -100, -10, \ldots)$

   (c) $(20, 10, 5, \ldots)$

2. Escreva a fração geratriz das dízimas períodicas seguintes:

   (a) $0,3333\ldots$ ________________

   (b) $0,121212\ldots$ ________________

   (c) $1,2777\ldots$ ________________

4.10 Contextualizando o Conceito de Série

O objetivo dessas atividades é trabalhar o conceito de séries partindo do conhecimento de fatos históricos da matemática, ainda hoje muito intrigantes.

Atividade 18

Paradoxo de Aquiles: Um desafio foi proposto à Aquiles, correr contra uma tartaruga, dez vezes mais lenta que ele, porém ela irá largar 100 metros à sua frente. Apesar de ser mais lenta que Aquiles, quando ele alcançar os primeiros 100 metros, de vantagem da tartaruga, ela estará 10 metros à sua frente. Quando Aquiles correr este 10 metros, a tartaruga terá andado um décimo dessa distância, logo estará 1 metro a frente de Aquiles e assim sucessivamente.

Ao seu ver, Aquiles alcançará a tartaruga ou não? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Por que? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Atividade 19

Paradoxo da Flexa: Um atirador lança uma flecha para um alvo, porém para alcançar o alvo a flecha terá que alcançar primeiro a metade da distância. Em seguida terá que alcançar a metade do que falta, e posteriormente a metade da metade, assim sucessivamente. Considere que a flecha deve atingir a distância de 2 Km. Responda:

1. Quais serão as primeiras cinco distâncias que a flecha irá atingir?
2. É possível que a flecha atinja o alvo?
3. Qual a relação entre esta Série e a soma de uma PG?

4.11 Trabalhando PA e PG

O objetivo dessa atividade é trabalhar simultanêamete os conceitos de PA e PG de forma contextualizada, à luz de alguns conhecimentos históricos.

Atividade 20

Thomas Robert Malthus, economista inglês, puplicou em 1798 um livro chamado "Ensaio sobre o Principio da População", no qual afirmava que a população mundial crescia segundo uma progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos crescia conforme uma progressão aritmética.

Para entender melhor esta afrimação, calcule os seis primeiros termos de:

1. Uma PA de razão 10 e primeiro termo igual a 5. _
2. Uma PG de razão 10 e primeiro termo igual a 5. _

O que aconteceria se o economista Malthus estivesse certo? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

4.12 Comentários Sobre as Atividades Realizadas

As seguintes atividades, aqui comentadas, foram aplicadas neste ano letivo em duas turmas da 2^a série do Ensino Médio, do turno da tarde, da Escola Estadual Dr. Feliciano Sodré, situada no centro de São Pedro da Aldeia - RJ, com aproximadamente 30 alunos em cada turma.

Já que o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro coloca o estudo de Sequências no 2^o bimestre da 2^a série do Ensino Médio, tais turmas foram as escolhidas para a aplicação das atividades.

As atividades foram feitas individualmente, sem consulta e sem o auxílio de calculadora. Em seguida, foram discutidas as resoluções em grupo na sala de aula. Todas as resoluções foram apresentadas com o auxílio do *data-show*, conforme encontram-se no Apêndice, com o intuito de esclarecer as dúvidas.

As atividades foram organizadas de modo a não causar um impacto ao iniciar um novo conteúdo e, sim, dar continuidade ao estudo de Funções, evidenciando algumas definições, trazendo o raciocínio lógico, despertando curiosidade e mostrando várias aplicações.

No decorrer do 2^o bimestre, conforme define o Currículo Mínimo, as atividades foram trabalhadas seguindo a sequência do Capítulo 3, com as respectivas atividades contidas no Capítulo 4, após a apresentação histórica que se encontra no Capítulo 1 deste trabalho. No total de 18 aulas, entre os meses de maio, junho e julho. Essas aulas foram distribuídas em 2 aulas (tempos de 50 minutos) em dois dias por semana, totalizando 4 aulas por semana, conforme o horário da Escola Estadual Dr. Feliciano Sodré.

Atividades 1 e 2 - Relacionadas ao conceito de Função.

Os alunos realizaram as atividades sem encontrar dificuldades ou resistência para com os novos conceitos. Cerca de $90\ \%$ da turma realizou as atividades corretamente.

Atividade 3 - Análise do comportamento da Sequência.

Esta atividade foi realizada com êxito por todos os alunos. Estes ficaram motivados em fazer as observações necessárias para encontrar os próximos termos.

Atividades 4, 5 e 6 - Construção do Termo Geral da Sequência.

Nesta atividade 70% compreendeu muito bem o conceito de termo geral, encontrando a partir das observações, a Lei de Formação correta. No entanto, $50\ \%$ dos alunos erraram o item 2 da atividade 4; e, $12\ \%$ dos alunos não conseguiu encontrar a Lei de Formação nas atividades 5 e 6.

Atividades 7 e 8 - Usando o Termo Geral.

Estas atividades tiveram ótima aceitação, os alunos acharam fácil, apesar de terem de resolver expressões numéricas e equações, $20\ \%$ da turma errou contas. Na atividade 7, alguns alunos acharam que -8 não podia ser imagem da Sequência por ser negativo, confundindo a definição de imagem com domínio, , todavia foram reforçadas tais definições.

Atividade 9 - Representação gráfica da Sequência no plano cartesiano.

Alguns alunos tiveram muitas dificuldades, alguns trocaram até mesmo o eixo X com eixo Y, daí a representação errada, enquanto outros deixaram a atividade em branco. Para que se tenha um melhor aproveitamento, talvez seja necessário revisar a construção de função e o plano cartesiano, antes de desenvolver essas atividades.

Atividades 10 - Trabalhando o conceito de PA e PG.

Foram muito proveitosas as atividades envolvendo o conceito de PA e PG, já que não houve muitas dificuldades. Os alunos alegaram ser mais fácil, pois se limitavam a observar dois tipos de sequências.

Atividades 11 e 12 - Gráfico de Função e Progressões.

Foi interessante notar nestas atividades envolvendo a relação entre Função Linear e PA, e as atividades envolvendo Função Exponencial e PG, que os alunos encontraram maiores dificuldades em construir os gráficos das Funções do que marcar os pontos relativos às progressões. Ao discutirmos a resolução das questões eles relataram que:

> As progressões são só os pontos que começam com o número 1, então é mais simples de fazer. Já a reta é infinita e eu só fiz um pedaço porque esqueci disso. Deveria ter passado dos pontos da sequência, que estavam só no primeiro quadrante.

Atividades 13 e 14 - Contextualizando Sequências

Os alunos demonstraram motivação com as questões contextualizadas, apesar de levarem um tempo bem maior para executarem a resolução. Na atividade 13, $75\ \%$ da turma respondeu a proposta um. Na atividade 14, houve um pouco de dificuldade para os alunos encontrarem a lei de formação da meia-vida do IODO-131.

As questões seguintes foram divididas em atividades que envolvem somas parciais das somas infinitas, para que os alunos tivessem oportunidade de trabalhar os casos particulares das somas da PA e PG.

Atividades 15 e 16 - Somas Parciais.

Na atividade 15 os alunos rapidamente fizeram relação com a descoberta de Gauss, apresentada na aula histórica. Já na atividade 16, demoraram um pouco mais para identificar a PG.

Atividade 17 - Somas infinitas.

Muitos alunos erraram contas, principalmente a subtração de $(1 - q)$, pois q, neste caso, era fracionário. Vemos que, mesmo no Ensino Médio, os números fracionários, potencializam os problemas matemáticos. As operações com números fracionácios devem ser tratadas bimestralmente, em todas as séries de ensino, para não cair no esquecimento.

Atividades 18, 19 e 20 - Contextualizadas

As atividades contextualizadas apesar de envolverem os alunos, não ajudaram muito na resolução, alguns alunos erraram contas desnecessárias. Vinte por cento não conseguiu fazer a relação entre o problema e o assunto trabalhado. Essas questões merecem uma atenção especial, já que, no Ensino Médio, queremos preparar os alunos para possíveis descobertas futuras. Atualmente, provas de seleção como, por exemplo, o Enem e os Vestibulares, exigem tanto o conteúdo específico por área, quanto boa assimilação na leitura, afim de que os candidatos consigam realizar a interpretação e usar de raciocínio lógico.

Capítulo 5

Considerações Finais

O foco deste trabalho foi apresentar uma visão mais ampla sobre o estudo de Sequências e Séries, visto que, mesmo havendo um rico instrumento norteador, que são os PCN's, ainda vemos alguns professores de Matemática, utilizando metodologias arcaicas. Vimos que alguns livros tratam o conceito de Sequência como um conjunto ordenado, e não definem o conceito de Séries. Entre eles há livros trabalhados em sala de aula pelos professores e aplicados aos alunos, que abordam este conceito como verdade absoluta, mas observamos no decorrer do trabalho que esta ideia nunca fora verdade, pois conforme apresentado no Capítulo 1 e no Capítulo 2.

Foi importante comprovar que as Sequências são Funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais, (N*), ou um subconjunto finito deste. Através das atividades propostas aos alunos da Escola Estadual Dr. Feliciano Sodré, obtivemos resultados positivos de que este pensamento é válido e aplicável em sala de aula. Uma indicação deste fato é que os alunos que participaram efetivamente das aulas, tiveram êxito na resolução dos exercícios propostos. Vale salientar que, não somente realizaram as atividades como mais um exercício em aula, mas devido à uma apresentação prévia dos criadores do estudo de Sequências e Séries , e também, abdicando do tradicionalismo e formalismo no ensino da Matemática, trouxemos as atividades de forma mais lúdica e contextualizada, mais próxima da realidade dos alunos, do que realmente se vive e o porquê de sua utilidade na nossa vida prática. Percebemos que os alunos ficaram instigados em saber - com pressa - quais seriam os resultados, pois as aulas não foram fatigantes, mas sim, motivantes. Obviamente, não foram todos os alunos que se mostraram interessados. De qualquer forma, 80%. conseguiu acompanhar as aulas e compreendeu a sua utilidade.

Acreditamos que a aplicação deste material de estudo nos fará mais otimistas, no sentido de professores reavaliarem suas metodologias, investindo mais em pesquisas para reformular a aplicabilidade da Matemática, de modo que os alunos tenham uma nova visão. Afinal, a Matemática não se limita apenas para os matemáticos, mas faz-se necessária a todos, a partir do momento em que o transmissor das ideias seja capacitado e capaz de motivar.

Referências Bibliográficas

Barreto, B. F. e Silva, C. X. d. (2003). *Matemática Aula por Aula*, volume 1, *1ª*. São Paulo, 1 edição.

Barroso, J. M. (2010). *Conexões com a Matemática*, volume 1. São Paulo, 1ª edição.

BATISTA, A. A. G. (2002). *Recomendações para uma política pública de livros didáticos*. Brasilia, DF. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental.

Boyer, C. B. (1994). *História da Matemática*. São Paulo. Trad. Elza F. Gomide.

Carvalho, J. B. P. d. (2008). Políticas públicas e o livro didático de matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 21:1–11.

CBEES (2009). *Curriculo Básico Estadual do Espirito Santo*. Secretária de Educação de Espirito Santo.

CESP (2010). *Curriculo do Estado de São Paulo - Matemática e suas Tecnologias*. Secretária de Educação do Estado de São Paulo. Ensino Fundamental - Ciclo II e Ensino Médio.

CMERJ (2013). *Curriculo Mínimo do Estado de Rio de Janeiro*. Matemática. Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC.

Dante, L. R. (2004). *Matemática*, volume 1. São Paulo.

Giovanni, J. R. e Bonjorno, J. R. (2002). *Matemática Completa*, volume Único. São Paulo.

Giovanni, J. R., Bonjorno, J. R., e Giovanni Jr, J. R. (1998). *Matemática Fundamental*, volume Único.

Gundlach, B. (1992). *Topicos História da Matemática - Números e Numerais*. São Paulo. Trad. Hygino H. Domingues.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., e Périgo, R. (2002). *Matemática*, volume Único.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., e de Almeida, N. (2010). *Matemática: ciência e aplicações*, volume 1. 6 edição.

Lima, E. L. (2001). *Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., and Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. Rio de Janeiro, 6 edição.

PCNs (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática / Ministério de Educação. Secretaria de Educação., 1 edição.

Ribeiro, J. (2010). *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*, volume 1. São Paulo, 1 edição.

Santos, C. A. M. d., Gentil, N., e Greco, S. E. (1998). *Matemática para o Ensino Médio*.

Ávila, G. (2010). *Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral.* São Paulo, 2ª edição.

Youssef, A. N., Soares, E., e Fernandez, V. P. (2005). *Matemática*, volume Único.

Apêndice A

Soluções Esperadas

A.1 Atividade 1

1. Substituindo temos:

n	f(n)
1	f(1)= *2.1 = 2*
2	f(2)= *2.2 = 4*
3	f(3)= *2.3 = 6*
4	f(4)= *2.4 = 8*
5	f(5)= *2.5 = 10*
$\vdots$	$\vdots$
10	f(10)= *2.10 = 20*
$\vdots$	$\vdots$
100	f(100)= *2.100 = 200*

Tabela A.1: Atividade 1

2. *(2, 4, 6, 8, 10, ..., 20, ..., 200)*

3. $a_n = 2n$

A.2 Atividade 2

Se $n = 1$, então $a_1 = 4.1 + 6 = 10;$

Se $n = 2$, então $a_2 = 4.2 + 6 = 14;$

Se $n = 3$, então $a_3 = 4.3 + 6 = 18;$

Se $n = 4$, então $a_4 = 4.4 + 6 = 22;$

Se $n = 5$, então $a_5 = 4.5 + 6 = 26;$

Logo os cinco primeiros termos da sequência são: $(10, 14, 18, 22, 26)$

A.3 Atividade 3

1. $(1, 2, 1, 2, 1,$ *2, 1, 2, 1, 2,* $\ldots)$
2. $(-2, 0, 2, 4, 6,$ *8, 10, 12, 14, 16,* $\ldots)$
3. $(1, 3, 9, 27, 81,$ *243, 729, 2187, 6561, 19683,* $\ldots)$
4. $(19, 15, 11, 7, 3,$ *- 1, - 5, - 9, - 13, - 17,* $\ldots)$
5. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$

A.4 Atividade 4

1. $a_n = n$
2. $a_n = 6 - 2n$
3. $a_n = n^2$
4. $a_n = \sqrt[3]{n}$
5. $a_n = \frac{1}{n}$

A.5 Atividade 5

$$P_n = a_n = n^2 + 1$$

A.6 Atividade 6

1. *No passo 4 teremos 27 triângulos e no passo 5 teremos 81 triângulos.*

2. *(1, 3, 9, 27, 81)*

3. $a_n = 3^{(n-1)}$

A.7 Atividade 7

Para saber se os números abaixo são imagens da funcão que define a sequência devemos substitui-los por a_n.

1. $215 = 2n - 10$

   $2n = 205$

   $n = 102,5$

   Vemos que $102,5$ não pertence aos $\mathbb{N}^*$, logo 210 não é termo da sequência.

2. $-8 = 2n - 10$

   $2n = 2$

   $n = 1$

   Vemos que 1 pertence aos $\mathbb{N}^*$, logo -8 é termo da sequência.

3. $1263 = 2n - 10$

   $2n = 1253$

   $n = 626,5$

   Vemos que $626,5$ não pertence aos $\mathbb{N}^*$, logo 1263 não é termo da sequência.

A.8 Atividade 8

Basta substituir n *pelos elementos* de $\{1, 2, 3, 10, 20\}$

Sendo $a_n = n^2 - n$ *temos:* $n = 1$ então $a_1 = 1^2 - 1 = 0$

$n = 2$ então $a_2 = 2^2 - 2 = 2$

$n = 3$ então $a_3 = 3^2 - 3 = 6$

$n = 10$ então $a_{10} = 10^2 - 10 = 90$

$n = 20$ então $a_{20} = 20^2 - 20 = 380$

A.9 Atividade 9

1. *O gráfico das sequências* $(a_n)_{n \in N^*}$ *e* $(b_n)_{n \in N^*}$ *no mesmo plano cartesiano.*

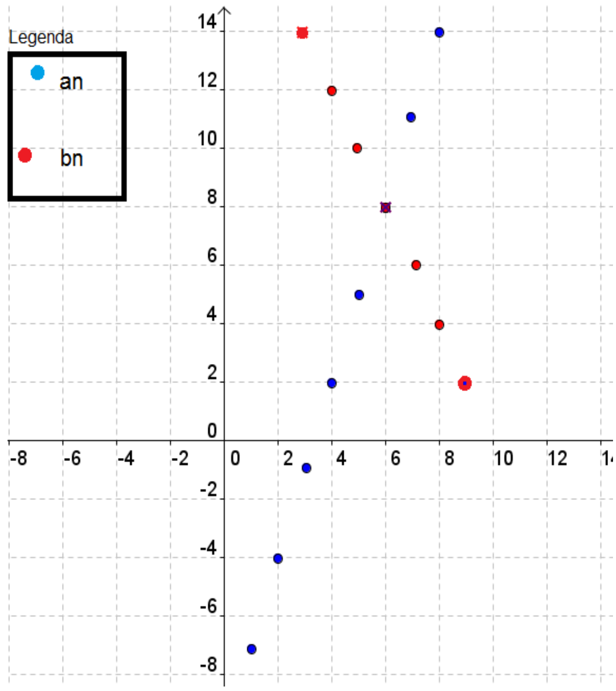


Figura A.1: Representação Gráfica

2. *Caso exista termo comum, teremos* a_n = b_n *, então*

$3n - 10 = 20 - 2n$

$5n = 30$

$n = 6$

Onde $6 \in \mathbb{N}^*$, *ou seja , o sexto termo de ambas sequências são iguais.*

Vejamos

$a_6 = 3.(6) - 10$

$a_6 = 8$

e

$b_6 = 20 - 2.(6)$

$b_6 = 8$

3. *Sim existe, a função definida pela lei de formação* $f(n) = 3n - 10$ c*ontem todos os pontos* de a_n. *Também existe, a lei* $g(n) = 20 - 2n$ *define a sequência* b_n.

A.10 Atividade 10

1. *PA de razão* $r = -12$.
2. *Não define PA ou PG.*
3. *PG de razão* $q = 2$.
4. *PG de razão* $q = \dfrac{1}{3}$.
5. *Não define PA ou PG.*
6. *PA de razão* $r = 5$.
7. *PA de razão* $r = 2$.

A.11 Atividade 11

1. *A representação da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(n) = 2n + 1$ *é:*

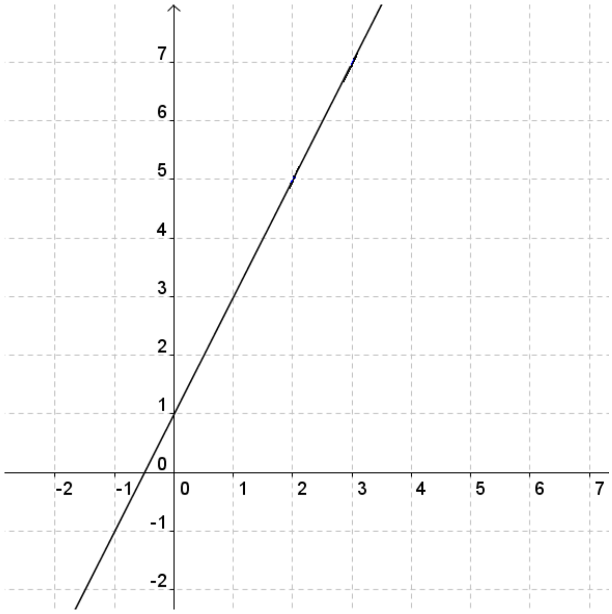
3. 

Figura A.2: Representação Gráfica

2. *A representação da progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 3 é:*

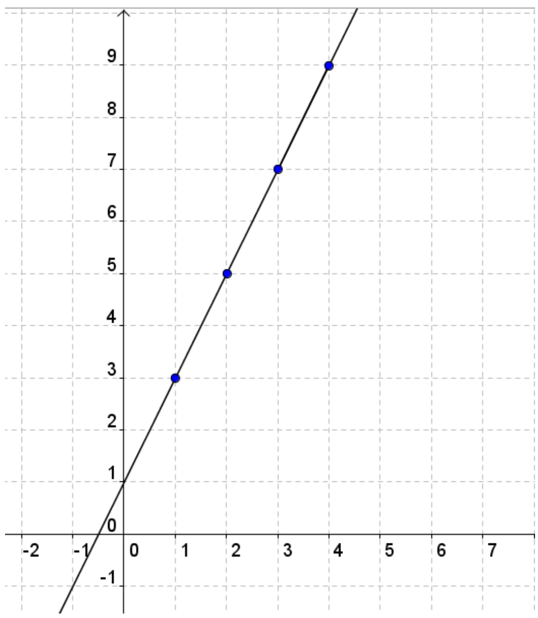


Figura A.3: Representação Gráfica

3. *Não, pois $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$*

4. *Sim, há vários, pois o domínio da função é $\mathbb{R}$ e da sequência é $\mathbb{N}$.*

A.12 Atividade 12

1. $a_n = \dfrac{1}{2^{(n-1)}}$

2. *A representação gráfica dessa progressão é:*

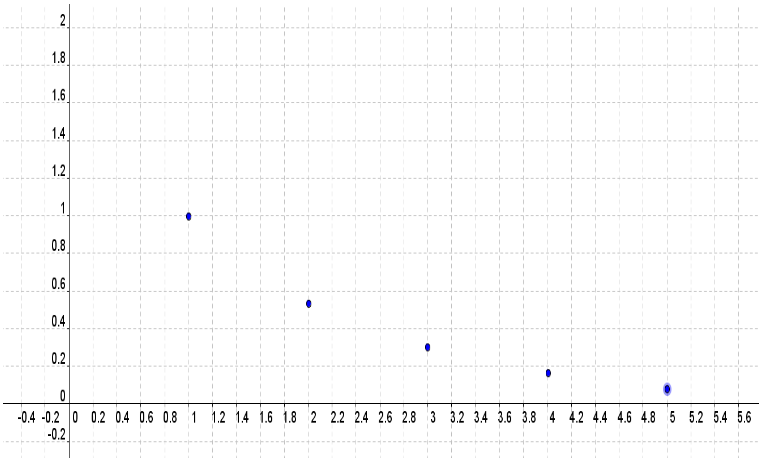


Figura A.4: Representação Gráfica

3. *Sim, se assemelha com o gráfico da função exponencial.*

4. $a_{10} = \dfrac{1}{2^9}$

5. *Não, quanto maior o valor de n mais próximo de 0(zero) ficará a_n. Porém este nunca será menor ou igual a zero.*

A.13 Atividade 13

- *Resposta pessoal*

- O ideal é contruir a tabela, com o auxílio da calculadora, e notar o crescimento da progressão, que só se torna, de fato vantajosa, após o 27^o dia. Devemos lembrar, ainda, que o valor a ser recebido pelo pagamento mensal é o somatório dos 30 dias de trabalho, conforme a tabela abaixo.

a_1 = 0,01	a_{11} = 10,24	a_{21} = 10 485,76
a_2 = 0,02	a_{12} = 20,48	a_{22} = 20 971,52
a_3 = 0,04	a_{13} = 40,96	a_{23} = 41 943,04
a_4 = 0,08	a_{14} = 81,92	a_{24} = 83 886,08
a_5 = 0,16	a_{15} = 163,84	a_{25} = 167 772,16
a_6 = 0,32	a_{16} = 327,68	a_{26} = 335 544,32
a_7 = 0,64	a_{17} = 655,36	a_{27} = 671 088,64
a_8 = 1,28	a_{18} = 1 310,72	a_{28} = 1 342 177,28
a_9 = 2,56	a_{19} = 2 621,44	a_{29} = 2 684 354,56
a_{10} = 5,12	a_{20} = 5 242,88	a_{30} = 5 368 709,12

Figura A.5: Valor Diário Recebido

A.14 Atividade 14

1. *Em cada item basta dividir os dias por 8, descobrimos quantas meias-vidas tem neste período.*

   (a) $32 : 8 = 4$, logo $\dfrac{X}{2^4} = \dfrac{X}{16}$

   (b) $48 : 8 = 6$, logo $\dfrac{X}{2^6} = \dfrac{X}{64}$

   (c) $200 : 8 = 25$, logo $\dfrac{X}{2^{25}}$

   (d) $1000 : 8 = 125$, logo $\dfrac{X}{2^{125}}$

2. *Pelo item anterior percebemos que* $a_n = \dfrac{X}{2^n}$.

3. *Concluimos que sempre haverá IODO-131 no organismo desse paciente, mesmo que seja uma quantidade pequena.*

A.15 Atividade 15

Usando 3.4 , obtido anteriormente, temos:

1. $a_{10} = \dfrac{(1+10).10}{2}$

$a_{10} = 55$

2. $a_{20} = \dfrac{(1+20).20}{2}$

   $a_{10} = 210$

3. $a_{50} = \dfrac{(1+50).50}{2}$

   $a_{10} = 1275$

4. $a_{100} = \dfrac{(1+100).100}{2}$

   $a_{10} = 5050$

A.16 Atividade 16

1. *Usando 3.5, encontramos:*

   $S_{10} = \dfrac{1.(1-4^{10})}{1-4}$

   $S_{10} = \dfrac{1048576-1}{3}$

   $S_{10} = 349525$

   e

   $S_{20} = \dfrac{1.(1-4^{20})}{1-4}$

   $S_{20} = \dfrac{4^{20}-1}{3}$

   Com o auxílio da calculadora, encontramos

   $S_{20} = 366503875925$

2. Não, pois é uma série divergente.

A.17 Atividade 17

1. Usando 3.6 temos:

   (a) $S = \dfrac{9}{1-\frac{1}{3}}$

   $S = 13,5$

(b) $S = \dfrac{-1000}{1 - \frac{1}{10}}$

$S = \dfrac{-1000}{9}$

(c) $S = \dfrac{20}{1 - \frac{1}{2}}$

$S = 40$

2. *É importante observar que a fração geratriz de uma dízima períodica nada mais é do que o resultado do somatório de uma série convergente, assim:*

   (a) $0,3333\ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1000} + \ldots$

   Sendo $a_1 = \dfrac{3}{10}$ e $q = \dfrac{1}{10}$, temos

   $S = \dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$

   $S = \dfrac{1}{3}$

   Logo, a fração geratriz é $\dfrac{1}{3}$

   (b) $0,121212\ldots = \dfrac{12}{100} + \dfrac{12}{10000} + \dfrac{12}{1000000} + \ldots$

   Sendo $a_1 = \dfrac{12}{100}$ e $q = \dfrac{1}{100}$, temos:

   $S = \dfrac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{12}{99}$

   $S = \dfrac{4}{33}$

   Logo, a fração geratriz é $\dfrac{4}{33}$

   (c) $1,2777\ldots = 1,2 + 0,07777\ldots$

   $= \dfrac{12}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \dfrac{7}{10000} + \ldots$, temos:

   $\dfrac{12}{10} + S$. Sendo $a_1 = \dfrac{7}{100}$ e $q = \dfrac{1}{10}$, temos:

   $S = \dfrac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}}$

   $S = \dfrac{7}{90}$ porém devemos somar $\dfrac{12}{10}$

   Logo a fração geratriz é $\dfrac{23}{18}$

A.18 Atividade 18

Sim, pois haverá um momento em que a distância entre Aquiles e a tartaruga é tão pequeno que o tamanho do próprio "pé"de Aquiles será maior. Neste momento Aquiles ultrapassará a tartaruga.

A.19 Atividade 19

1. (a) $a_1 = 1$

   $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$

   $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75$

   $a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875$

   $a_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,9375$

   (b) Não, pois podemos dividir a distância que falta pela metade tantas vezes quanto se queira.

   (c) Sim. Há um determinado momento que a distância será tão pequena que o tamanho da flecha ultrapassará o alvo.

   (d) Esta Série é composta por somas de uma PG, cuja razão é $\frac{1}{2}$.

A.20 Atividade 20

1. Temos a PA$(5, 15, 25, 35, 45, 55)$.

2. Encontramos a PG$(5, 50, 500, 5000, 50000, 500000)$.

Se economista inglês Malthus estivesse certo, a população mundial teria que lutar pela sobrevivência.