UMA ABORDAGEM AOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL: SUAS OPERAÇÕES, REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES

VANDETE FREIRE DE SOUZA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ

MARÇO - 2013

UMA ABORDAGEM AOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL: SUAS OPERAÇÕES, REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES

VANDETE FREIRE DE SOUZA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES-RJ
MARÇO - 2013

UMA ABORDAGEM AOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL: SUAS OPERAÇÕES, REPRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES

VANDETE FREIRE DE SOUZA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 26 de Março de 2013.

Comissão Examinadora:

____
Prof^{a}. Luciana Prado Mouta Pena, D.Sc. - UFF

____
Prof^{a}. Liliana Angelina León Mescua, D.Sc. - UENF

____
Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro, D.Sc. - UENF

____
Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre, D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR) .

Dedico este trabalho a Deus, ao meu esposo, aos meus filhos, aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus amigos, aos meus colegas e aos meus professores do PROFMAT-UENF que muito me apoiaram em minha caminhada.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade que me foi concedida dando-me sabedoria, ânimo e coragem para realizar mais uma etapa na vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre, pela paciência, aquisição de material para pesquisa e contribuição nas orientações fornecidas para realização do presente trabalho.

Ao meu esposo Josias, meus filhos Josias Júnior e Alexandre, pelo incentivo, compreensão e pela reestruturação de suas vidas para que eu pudesse levar meus estudos adiante.

À Haidée, pela amizade, pelos nossos estudos e pela colaboração na superação das dificuldades.

Ao Marcussi, pela amizade e pela companhia em nossas viagens para a universidade.

À Cynthia, pelo acolhimento em sua casa nas aulas de verão, o que muito contribuiu para a consolidação de novas amizades.

À Prof.ª Maria Goretti (UFF/Santo Antônio de Pádua), pelas orientações quanto ao embasamento teórico.

Aos meus colegas de Mestrado, pelos momentos agradáveis e pela força nas situações difíceis.

À Profª. Leiliane Coutinho (UFF/Santo Antônio de Pádua), pela disponibilização de material para a realização do trabalho.

Às minhas cunhadas Ana Lucia e Roselene, pelo incentivo para realização de minha pesquisa.

Ao meu colega José Carlos, pela correção do texto em inglês e à minha colega Amanda, pelo desenho do dominó.

Ao professor Rigoberto Sanabria, pela valiosa ajuda com o latex.

“Não há, portanto, exagero em se afirmar que vivemos em um mundo altamente dependente da Matemática e que ela está presente em tudo à nossa volta, embora a maior parte das pessoas não se aperceba disso e, não raro, afirme detestá-la”.

Gilberto Geraldo Garbi

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar os números racionais na forma decimal, bem como as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental em relação ao aprendizado desses números, suas operações e aplicações. Merecem destaques algumas orientações metodológicas para o ensino de números decimais assim como atividades que poderão ser utilizadas para introduzir ou consolidar os conceitos referentes a esse conteúdo. Foram estudados vários autores, dentre eles: Alves (1997), Ifrah (1994), Lima (2009), Lima et al (2006), Pérez (1997), Ribeiro (2009; 2011), Roque (2012), Santos (1997), Silva (2006), Van de Walle (2009). Diante da pesquisa bibliográfica e da análise das respostas obtidas durante a realização da sequência de atividades, pode-se constatar que o ensino-aprendizagem dos números decimais necessita de muita atenção por parte dos professores no sentido de providenciar maneiras diferenciadas e materiais diversificados para que os alunos do Ensino Fundamental consigam construir os conceitos de forma significativa.

Palavras-chave: números racionais, números decimais, operações com números decimais, Ensino Fundamental

ABSTRACT

This academic work aims to study the rational numbers in a decimal form, as well as the difficulties presented by elementary school students in relation to learning these numbers, their operations and applications. It is important to stand out some methodological guidelines for the teaching of decimal numbers as well as activities that can be used to introduce or reinforce the concepts related to that content. We studied several authors, among them: Alves (1997), Ifrah (1994), Lima (2009), Lima et al (2006), Perez (1997), Ribeiro (2009 , 2011), Roque (2012), Santos (1997), Silva (2006), Van de Walle (2009). Considering the bibliographical research and the analysis of the responses obtained during the course of the following activities, it can be noted that the teaching and learning of decimal numbers require close and special attention from teachers in the sense of providing different ways and materials so that the Elementary School students could be able to build such concepts significantly.

Keywords: rational numbers, decimal numbers, operations with decimals, Elementary School

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O presente trabalho aborda o estudo e o ensino dos números racionais com ênfase na sua representação decimal, ressaltando as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental em relação ao aprendizado desses números, suas operações e aplicações.

Os estudo dos números racionais no Ensino Fundamental tem sido objeto de várias pesquisas: Pérez (1997), Damico (2007), Ribeiro (2009; 2011). Muitos estudiosos e professores sustentam a ideia de que o uso social da representação fracionária está ficando restrita ao longo dos anos por causa da predominância das calculadoras populares, além de se considerar que os conceitos referentes às frações são complexos para serem devidamente entendidos pelos alunos desse nível de escolaridade.

A aprendizagem de números racionais constitui o embasamento para conteúdos de cunho social como o trabalho com medidas e proporcionalidade que conduzirão ao estudo de porcentagem e juros. No entanto, observa-se que a abordagem das frações e dos decimais de forma conjunta permite a melhor exploração das relações existentes entre as duas representações.

A representação de números racionais na forma decimal está constantemente presente no cotidiano dos alunos. Na maioria das vezes, manipulam-se os números decimais de forma mecânica, sem a preocupação com o significado dos dígitos após a vírgula, fato que interfere no ensino - aprendizagem. É comum a leitura, a escrita e as operações desse tipo de número sem conhecimento do seu real significado.

Para que o ensino-aprendizagem de números decimais tenha significado para o aluno deve-se trabalhar de forma contextualizada, associando-os a situações do dia a dia, como: cálculos de porcentagem, uso de medições e de valores em dinheiro. Quando bem exploradas, determinadas situações da vida possibilitam a compreensão de diferentes significados, valorizando o estabelecimento de uma linguagem oral precisa, que gradativamente permitirá o desenvolvimento das representações escritas com a garantia da compreensão dos conceitos básicos.

A pesquisa tem por finalidade principal mostrar as representações, as aplicações, as dificuldades e as estratégias de ensino dos números racionais na forma decimal tendo como embasamento teórico o trabalho de diversos autores como Alves (1997), Ifrah (1994), Lima (2009), Lima et al (2006), Pérez (1997), Ribeiro (2009; 2011), Roque (2012), Santos (1997), Silva (2006), Van de Walle (2009) e outros. O trabalho está fundamentado em estudos bibliográficos e, nas respostas obtidas com a aplicação de atividades para constatar as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental (6º ano) do C.E.Rui Guimarães de Almeida - Santo Antônio de Pádua/RJ.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos. O primeiro capítulo trata do enfoque histórico do desenvolvimento do conceito de número, passando pela história dos números nas civilizações, manifestando considerações sobre o surgimento dos números racionais nas formas fracionária e decimal, além de destacar algumas ideias contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental a respeito do tema em estudo.

O segundo capítulo aborda o estudo dos números racionais na representação decimal, fazendo algumas observações sobre como reconhecer se um número racional admitirá uma representação decimal finita ou infinita. São feitas considerações sobre o corpo dos racionais e sobre os contextos em que devem ser explorados os números racionais na sua representação fracionária. Ainda, nesse capítulo, são discutidas as dificuldades e os erros no ensino das operações com números decimais, além de serem apresentadas orientações metodológicas para o ensino desse tipo de número e algumas aplicações.

No terceiro capítulo é feita uma sondagem dos conhecimentos através das respostas obtidas para a sequência de atividades apresentadas aos alunos, visando melhor organização das atividades e estratégias que seriam desenvolvidadas no decorrer das aulas.

O quarto capítulo apresenta atividades e estratégias que poderão ser desenvolvidas em turmas de Ensino Fundamental para facilitar e consolidar os conhecimentos sobre números racionais, especialmente, na representação decimal.

Finalmente, são expostas as considerações finais, seguidas das referências bibliográficas e de um apêndice com as atividades aplicadas junto aos alunos.

Capítulo 1

Enfoque Histórico - Matemático Sobre a Origem dos Números Racionais

1.1 Conceito de Número

O conceito de número foi construído a partir da necessidade do homem de criar um método para contar e, mais tarde, para medir. Inicialmente, a contagem de objetos de uma coleção era expressa por símbolos como gestos ou sinais gráficos. Os antigos objetos usados para a contagem, como pedras, paus e conchas, tornaram-se verdadeiros símbolos numéricos.

De maneira geral, a história dos números está associada à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência. Pereira (1989) destaca que a ideia de número surgiu da comparação de conjuntos. Essa mesma autora argumenta, ainda, que a simbolização do número surgiu só muito depois da noção de quantidade e da respectiva contagem.

Segundo Roque (2012), efetuar uma correspondência entre duas coleções de seres é "contar"; o procedimento de contagem dá origem a um "número" que designa a quantidade de seres em uma determinada coleção. De acordo com essa autora, a noção de número exprime o fato de que, observadas duas coleções com o mesmo número de objetos, pode-se denominar a quantidade de elementos em cada uma dessas coleções pelo mesmo nome: 2, 10, etc.

Não existem dados suficientes para fixar o período histórico em que foram descobertos os números. Gundlach (1992, p.5), relata que:

> *Um desenvolvimento mais formal da numeração se encontra na formação dos sistemas de numeração. Em culturas onde os dedos de uma mão foram usados em fases mais antigas da numeração, o número de elementos de um grupo básico tornou-se cinco. Quando foram usados os dedos das duas mãos, esse número tornou-se dez. Quando os dedos das mãos e dos pés foram usados, tornou-se vinte.*

À medida que o homem se deparava com quantidades cada vez maiores, havia a necessidade de representá-las e com isso os sistemas de contagem foram se aperfeiçoando até dar origem ao número. Segundo Berlinghoff (2010), o avanço das civilizações permitiu que várias culturas se aprimorassem e inventassem mais símbolos para os números e a combinação desses símbolos de diferentes modos permitia a escrita de números para expressar quantidades mais elevadas.

Segundo Ifrah (1994, p.10):

> *Essa não é, assim, uma história abstrata e linear, como se imagina às vezes, e erradamente, a história da matemática: uma sucessão impecável de conceitos encadeados uns aos outros. Ao contrário, é a história das necessidades e preocupações de grupos sociais ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, ao procurar datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias utilizando os meios disponíveis, às vezes empíricos, como o entalhe, às vezes estranhamente mitológicos, como no caso dos egípcios.*

De acordo com Pitombeira (2013), o exemplo que encontramos com mais frequência sobre a origem da contagem é o de pastores de ovelhas que associavam a cada animal uma pedra. Posteriormente, ao invés de pedras, passou-se a utilizar marcas escritas na argila.

Dessa forma, a correspondência unidade a unidade, não era feita somente com pedras. Eram utilizados também nós em cordas, marcas nas paredes, talhes em ossos, desenhos nas cavernas e outros tipos de marcação. Os talhes nas barras de madeira, usados para marcar quantidades, continuaram a ser empregados até o século XVIII.

Conforme Roque (2012, p. 87), "a definição de número, baseada na correspondência um a um entre objetos diferentes, foi proposta durante o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, no século XIX". Mas, isso não significa dizer que a noção de número adotada pelos mesopotâmios fosse concreta, e que uma formulação abstrata dessa noção foi proposta seis mil anos depois.

Guelli (1992, p.11), argumenta que "foi contando objetos com outros objetos que a humanidade começou a construir o conceito de número", afirmando que esse tipo de número surgido dessa forma é um número denominado concreto.

Pitombeira (2013, p.3) comenta:

> *Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos indicando medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Este foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de natureza distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado.*

Roque (2012) ressalta que a definição de número implica uma abstração em relação à qualidade dos seres que estão em cada coleção, para que somente a sua quantidade seja considerada. Ela afirma, ainda, que o conceito de número é abstrato, mas não pelo fato de poder ser representado por um símbolo, e sim porque pressupõe abstrair a natureza particular dos seres de uma coleção. Assim, a abstração possibilita um conceito de número que poderá receber um nome e ser designado por um símbolo.

Na educação básica, primeiramente, são apresentados os números naturais, após esses os inteiros e os racionais, posteriormente, os números reais e na última série, os números complexos. Historicamente, a necessidade da utilização e da criação dos números não ocorreu, necessariamente, seguindo essa ordem. Inicialmente, o homem precisou contar, tendo como consequência desse ato o surgimento dos números naturais. Como apresentou a necessidade de repartir, medir, surgiram as frações. Mais tarde apareceram os números negativos, só depois os números reais. Caraça (1958, p.4) afirma que:

> *A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram formando-se lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem criando duma maneira completa a ideia de número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cômoda, mas falsa.*

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental 3º e 4º ciclos, o conceito de número é construído e assimilado pelo aluno em situações que envolvam problemas, sendo objeto de estudo em si mesmo, considerando suas inter-relações e a forma como foi historicamente constituído.

> *(...), o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações - problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 50).*

À proporção que o homem lidava com quantidades cada vez maiores, foi percebendo que aumentavam as dificuldades para fazer essas representações. Ifrah (1994) esclarece que para solucionar esse problema que aparentemente parecia ser impossível empregaram-se as bases numéricas (base 20, base 60, base 5, etc. sendo a base 10 a mais comum). Esse autor ainda complementa que a partir do momento em que o homem aprendeu a contar abstratamente segundo o princípio da base, ele se revelou maleável para permitir o progresso.

Os homens primitivos não tinham necessidade de contar, pois o que precisavam para a sua sobrevivência era retirado da natureza. Há mais ou menos 10000 anos, o homem começou a modificar o seu sistema de vida; em vez de apenas caçar e coletar frutos e raízes passou a cultivar algumas plantas e a criar animais. A agricultura passou então a exigir o conhecimento do tempo, das estações do ano e das fases da Lua e assim começaram a aparecer os primeiros calendários. Conforme Guelli (1992, p.10):

> *E para dedicar-se às atividades de plantar e criar animais, o homem não podia continuar se deslocando de um lugar para outro como antes. Passou então a fixar-se num determinado lugar, geralmente à margem de rios e lagos. Abandonou o hábito de abrigar-se em cavernas e desenvolveu uma nova habilidade: a de construir sua própria moradia.*

Garbi (2010) destaca que ao aprender a cultivar as plantas para delas obter alimentos e insumos, o homem deu início à primeira grande revolução em sua forma de viver. Com isso, o homem teve necessidade de compreender os ciclos das estações do ano e a aprimorar sua percepção sobre os números.

Com o passar do tempo, as quantidades foram representadas por expressões, gestos, palavras e símbolos, sendo que cada povo tinha a sua própria maneira de representação.

No começo da história da escrita de algumas civilizações como a egípcia, a suméria, a fenícia, a babilônica, a grega, a maia e asteca, os nove primeiros números inteiros eram anotados pela repetição de traços verticais (I II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII IIIIIIIII), círculos, pontos ou outros sinais análogos para figurar a unidade. Esse método foi abandonado, devido à dificuldade de se contar mais do que quatro termos. De acordo com Ifrah (1994), as faculdades humanas de percepção direta dos números não vão além do número 4.

Garbi (2010) considera importante dizer que a noção de quantidade não é privativa da espécie humana: experiências feitas com animais mostram que alguns deles distinguem quantidades maiores de outras menores, ou seja, possuem vestígios da noção de contagem. Deve-se lembrar que, ao contrário da percepção direta dos números, a contagem não é uma aptidão natural.

1.2 Os Números na História das Civilizações

O conhecimento a respeito dos números foi de suma importância na evolução da história do homem. Atualmente, os números estão presentes na maioria das atividades humanas. De acordo com Boyer (1994, p. 1):

> *Noções primitivas relacionadas com os conceitos de numero, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade.*

Um desenvolvimento mais formal da história dos números é encontrado na formação dos sistemas de numeração.

1.2.1 Sistema de Numeração da Mesopotâmia

Os sumérios, habitantes da Mesopotâmia, foram os inventores da escrita. Isso por volta de 5.000 anos atrás. Eles tinham habilidades comerciais bastante desenvolvidas e faziam trocas com muitos outros povos, de várias regiões e que falavam diferentes línguas.

O desenvolvimento dessa civilização fez surgir a necessidade de registros escritos. A escrita suméria era feita em placas de argila. Esse povo utilizava bastonetes de pontas arredondadas fazendo com que as letras ficassem em formato de cunha (escrita cuneiforme).

Para representar a unidade era usada uma cunha na posição vertical e, para escrever dez, uma cunha na posição horizontal. Depois do texto pronto, as placas iam para o forno e endureciam. Muitas delas foram conservadas e encontradas por arqueólogos, o que nos permite hoje conhecer como esse povo se comunicava pela escrita.

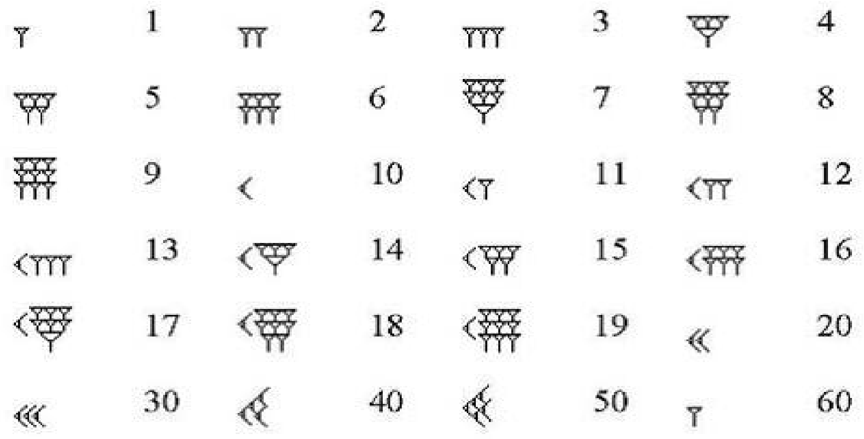


Figura 1.1: Sistema de numeração dos antigos babilônios.
Fonte: Pitombeira (2013, p.8).

Para representar quantidades, o que era importante para o comércio, os sumérios também utilizavam símbolos. Existem diferentes explicações para o uso da base 60 pelos mesopotâmicos, uma delas é baseada no primeiro calendário adotado por esse povo, no qual um ano tinha 360 dias, múltiplo de 60. Outra versão diz que os sumérios escolheram agrupar em 60 por se tratar de um número fácil de dividir.

Por volta do século III antes de Cristo, os sumérios chegaram a utilizar um símbolo para o zero (duas cunhas invertidas). Outra novidade desse sistema era a representação de números fracionários. As frações sumérias eram sempre de um número inteiro.

Conforme Imenes (1989, p.31):

> *As antigas civilizações mesopotâmicas desapareceram e, com elas, o seu sistema numérico. Entretanto, alguns vestígios nos acompanham até os dias de hoje. Na contagem do tempo, sessenta segundos compõem um minuto e sessenta minutos compõem uma hora. Esta contagem por grupo de sessenta é devida à base sessenta da numeração mesopotâmica .*

1.2.2 Sistema de Numeração Chinês

O sistema de numeração tradicional chinês utiliza nove numerais e símbolos adicionais para os componentes de valor relativo das potências de dez, sistema esse adotado pelos japoneses.

Atualmente, o sistema numérico dos chineses é compreendido por treze caracteres fundamentais, respectivamente associados às nove unidades e às quatro primeiras potências de dez (10, 100, 1000, 10000). Os símbolos a seguir, ainda, são usados na China como no Japão, porém, para efetuar cálculos esses povos utilizam o sistema indo-arábico.

Figura 1.2: Sistema de numeração tradicional chinês.

Fonte: Imenes (1989, p.38).

1.2.3 Sistema de Numeração Egípcio

A sociedade egípcia estava centrada às margens do rio Nilo, ao norte, fazendo fronteira com o Mediterrâneo e, nas demais fronteiras observava-se um ambiente hostil. Os egípcios viviam independentes, com sua religião, idioma e escrita hieroglífica.

Os conhecimentos desse povo acerca da matemática provêm dos papiros que tratam de questões matemáticas, dentre eles, os mais importantes são: o papiro de Ahmes (ou Rhind) de 1650 a.C. e o de Moscou escrito por volta de 1850 a. C.

Com as transformações sociais, surgiu a figura do escriba, que pertencia à classe dominante e desempenhava trabalhos judiciais além de utilizar a matemática quando ia medir uma terra ou calcular impostos.

No Egito, a aritmética já havia alcançado um nível mais elevado. Na contagem era seguida uma numeração decimal que não era posicional, cada potência de 10 possuía um símbolo próprio.

Os egípcios reproduziram os seus algarismos e os seus hieróglifos gravando-os ou esculpindo-os mediante o cinzel e o martelo em monumentos de pedra, ou ainda mediante um caniço com planta achatada, molhado numa matéria colorida, traçando-os em pedaços de rocha, cacos de cerâmica ou na fibra frágil de folhas de papiro.

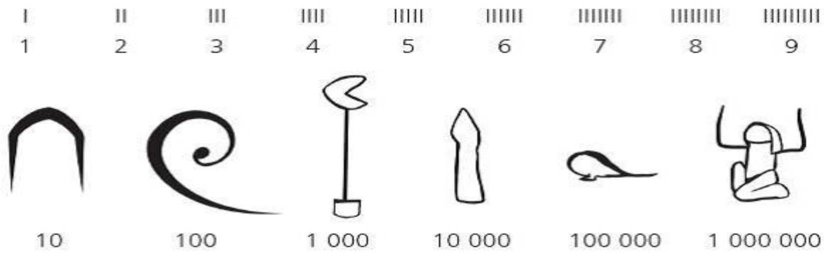


Figura 1.3: Sistema de numeração no antigo Egito.
Fonte: Pitombeira (2013, p.25).

1.2.4 Sistema de Numeração Romano

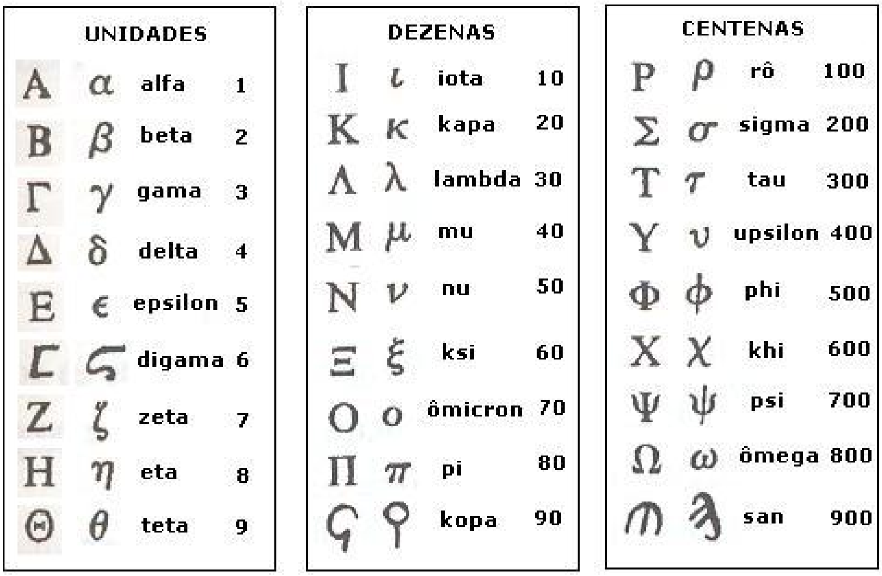
Os romanos usaram o alfabeto para representar números. Esse sistema é utilizado até hoje em representações de séculos, capítulos de livros, mostradores de relógios antigos, nomes de reis e papas e outros tipos de representações oficiais em documentos. Com o passar do tempo, os símbolos utilizados pelos romanos eram sete letras, cada uma com um valor numérico: I, V, X, L, C, D e M, valendo, respectivamente 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1000. Todo símbolo numérico com um traço horizontal sobre ele representa milhar e o símbolo numérico que apresenta dois traços sobre ele representa milhão.

Apesar de esses numerais serem suficientes para escrever qualquer número sem confusões, acontecia haver números com um numeral muito extenso. As multiplicações e divisões eram praticamente impossíveis. Os romanos foram um povo que, em poucos séculos, atingiu um nível técnico muito alto, e conservou assim, curiosamente, durante toda a sua existência, um sistema inutilmente complicado e não operatório.

1.2.5 Sistema de Numeração Grego

Segundo Boyer (1974), existiram dois sistemas principais de numeração na Grécia: um mais antigo conhecido como notação ática (ou herodiânica) e o outro chamado sistema jônio (ou alfabético). Ambos os sistemas são de base dez, sendo o primeiro mais primitivo e baseado num esquema de iteração como o encontrado na numeração hieroglífica (Egito) e mais tarde na numeração romana.

Para estabelecer a associação entre letra e números, os gregos usaram as vinte e quatro letras de seu alfabeto acrescidas de três letras arcaicas. Para efetuar as operações aritméticas, os gregos usavam ábacos. Os gregos utilizavam as frações em declarações de propriedades, câmbio de moedas e na arquitetura. Na sociedade grega, as frações expressavam razões de números inteiros positivos devido, principalmente, a situações de medidas.



UNIDADES			
Α	α	alfa	1
Β	β	beta	2
Γ	γ	gama	3
Δ	δ	delta	4
Ε	ϵ	epsilon	5
Ϛ	ϛ	digama	6
Ζ	ζ	zeta	7
Η	η	eta	8
Θ	θ	teta	9

DEZENAS			
Ι	ι	iota	10
Κ	κ	kapa	20
Λ	λ	lambda	30
Μ	μ	mu	40
Ν	ν	nu	50
Ξ	ξ	ksi	60
Ο	ο	ômicron	70
Π	π	pi	80
Ϟ	ϙ	kopa	90

CENTENAS			
Ρ	ρ	rô	100
Σ	σ	sigma	200
Τ	τ	tau	300
Υ	υ	upsilon	400
Φ	ϕ	phi	500
Χ	χ	khi	600
Ψ	ψ	psi	700
Ω	ω	ômega	800
Ϡ	ϡ	san	900

Figura 1.4: Sistema de numeração na Grécia antiga.

Fonte: www.invivo.fiocruz.br - Acesso em 20.02.13, 16 h.

1.2.6 Sistema de Numeração dos Maias

Os maias tinham como base não a dezena, mas a vintena e as potências de vinte. A razão, como se sabe, é devida ao hábito que os seus ancestrais tinham de contar não apenas com os dez dedos da mão, mas também com os dedos dos pés.

A numeração do povo maia fundou-se no princípio da adição. Devia associar um círculo ou um ponto à unidade (sinal comum a todos os povos da América Central, originado do grão de cacau, então empregado como "moeda de troca").

A numeração dos maias dificilmente deveria prestar-se à prática das operações aritméticas e o sistema devia servir apenas para consignar os resultados de cálculos já efetuados. Esse povo deveria fazer os seus cálculos através de um instrumento operatório análogo aos ábacos do Velho Mundo. A numeração maia escrita não foi concebida para responder às necessidades do cálculo corrente, que dizia a respeito apenas aos comerciantes e ao uso comum dos mortais. Foi elaborada, ao contrário, apenas para satisfazer as necessidades do cômputo do tempo e das observações, em razão da ligação estreita que existia, nessa civilização, entre o fluir do tempo e o mundo divino.

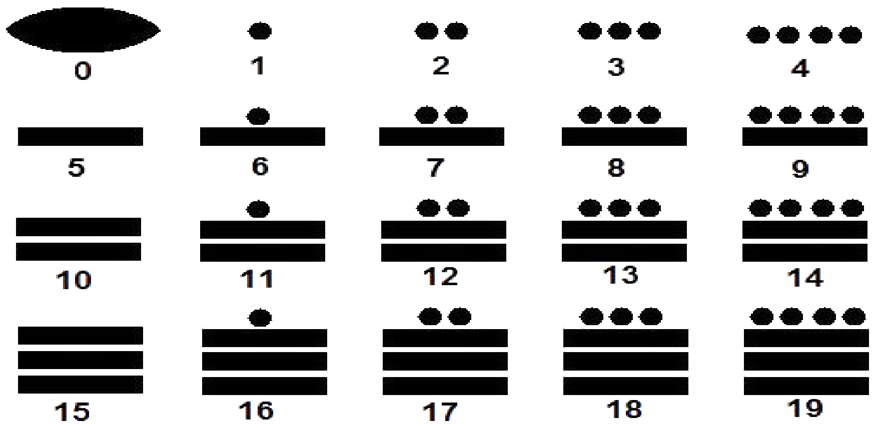


Figura 1.5: Sistema de numeração dos maias.

Fonte: www.mdmat.mat.ufrgs.br - Acesso em 20.02.13, 16 h 10 min.

1.2.7 Sistema de Numeração Hindu

Foi no Norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o mais antigo sistema de notação próximo do atual, o que é comprovado por vários documentos, além de ser citado por árabes (a quem esta descoberta foi atribuída por muitos anos). Antes de produzir tal sistema, os habitantes da Índia setentrional usaram por muito tempo uma numeração rudimentar que aparece em muitas inscrições do século III a.C. Essa numeração tinha uma característica do sistema moderno, seus nove primeiros algarismos eram sinais independentes. Por muito tempo, esses algarismos foram denominados, erradamente, algarismos arábicos.

Ainda existia nesta época a dificuldade posicional e os hindus passaram a usar a notação por extenso para os números, pois não podiam exprimir grandes números por algarismos. Estavam criando a notação posicional e também o zero. Ao invés de fazer como hoje, de acordo com as potências decrescentes de 10, os hindus, por volta do século IV d.C., escreviam os números em ordem crescente das potências de 10, começando pelas unidades. O princípio de numeração posicional já aparecia nos sistemas dos egípcios e chineses. Os indianos reuniram as diferentes características do princípio posicional e da base dez em um único sistema numérico. Esse sistema decimal posicional foi assimilado e difundido pelos árabes e por isso, passou a ser conhecido como sistema indo-arábico.

> *Quando se viram diante da numeração e dos métodos de cálculos vindos da Índia, os árabes tiveram suficiente presença de espírito para apreciar suas vantagens, reconhecer sua superioridade e adotá-los. Ao contrário, os cristãos da Europa ficaram tão agarrados a seus sistemas arcaicos e foram tão reticentes diante da novidade que foi preciso esperar durante séculos até que o triunfo do "algoritmo", como era então denominado o cálculo escrito, fosse finalmente total e definitivo (IFRAH,1994, p.303).*

Foi ao final de uma longa história feita de saltos, invenções, regressões, esquecimentos, encontros e até justaposições de sistemas diferentes, que surgiu o sistema de numeração decimal de posição. Ifrah (1994, p.322) menciona que "a história dos algarismos indica neste campo particular, que a inteligência é universal e que o progresso assumiu um lugar no equipamento mental, cultural e coletivo da humanidade".

O princípio da posição permitiu que os matemáticos dos tempos modernos precisassem e unificassem determinados conceitos e formalizassem teorias gerais até então inimagináveis.

Figura 1.6: Evolução dos algarismos indo-arábicos.

Fonte:Fonte: www.iejusa.com.br - Acesso em 20.02.13, 16 h 20 min.

1.3 Os Números Racionais nas Formas Fracionária e Decimal

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, Brasil (1998, p.71), observam que é importante a "compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal". Tais documentos destacam, ainda, que com relação aos cálculos numéricos com aproximação convém observar que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, que pode ser: finita ou infinita periódica.

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam estudadas desde as séries iniciais, o que se verifica é que os alunos chegam ao segundo segmento do Ensino Fundamental sem compreender os diferentes significados associados a esses números e os procedimentos de cálculo, especialmente, os que envolvem os racionais na forma decimal. Uma explicação para os problemas encontrados deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais pressupõe rupturas com ideias construídas para os números naturais, pelo surgimento da "quebra da unidade". Ifrah (1994) afirma que as frações foram conhecidas na antiguidade, mas por falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo, mal fixadas, não homogêneas e inadaptadas às aplicações práticas.

Boyer (1974, p.4) expõe sobre o surgimento do número racional, enfatizando que:

> *A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para inteiros. [...] Para necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo.*

A notação moderna de frações ordinárias se deve aos hindus em razão de sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar uma fração de forma parecida com a nossa representação, apenas usavam uma barra inclinada para separar o numerador do denominador. Essa notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes que inventaram a barra horizontal e, mais tarde, surgiram as frações decimais.

Segundo Ifrah (1994, p.327):

> *[...], graças à descoberta das frações denominadas "decimais"(aquelas cujo denominador é uma potência de 10), foi pouco a pouco transparecendo o interesse em prolongar a numeração decimal de posição no outro sentido, isto é, em termos modernos, na representação dos números "depois da vírgula".*

Tal fato permitiu a notação sem nenhuma dificuldade de todas as frações, além de mostrar de maneira bem nítida os inteiros como frações particulares: as que são representadas sem nenhum algarismo após a vírgula.

Acredita-se que o estudo de frações surgiu no Egito, pela necessidade de se realizar a marcação das terras que se encontravam às margens do Rio Nilo. O rio inundava essas terras, levando parte da marcação, logo os proprietários tinham que remarcá-las. Essa marcação era realizada pelos geômetras dos faraós, que utilizavam cordas como unidade de medida, sendo denominados estiradores de cordas. Essa tarefa era realizada da seguinte maneira: esticavam-se as cordas e assim se observava quantas vezes aquela unidade de medida estava contida no terreno. Como a medida dos terrenos, na sua maioria, não era dada exatamente por números inteiros, surgia então a necessidade de um novo conceito de número, o número fracionário.

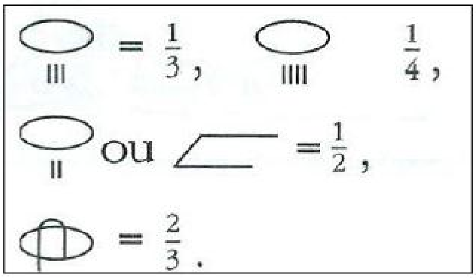


Figura 1.7: Frações egípcias.

Fonte: www.educar.sc.usp.br - Acesso em 20.02.13, 16 h 30 min.

Os egípcios usavam frações unitárias, ou seja, com o numerador um dividido por um número inteiro, como por exemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,.... Todas as frações tinham um sinal oval na parte superior, e o outro número com sua respectiva representação. Encontramos em alguns registros, a substituição do sinal oval por um ponto, colocado sobre uma cifra, como no Papiro de Ahmes. Os egípcios utilizavam muitas frações, mas a fração $\frac{2}{3}$ era considerada a fração geral representada pelo sinal hierático: utilizada como base para as operações fracionárias, não como uma regra elementar, mas sim como parte de um processo, que sem o uso da mesma seria incompleto. Então, para se obter um terço de um número, os egípcios primeiramente encontravam os dois terços, para em seguida, calcular a metade do valor obtido.

Existem algumas teorias para explicar os métodos egípcios nas decomposições de uma fração em uma soma de frações unitárias. Num papiro encontrado em Akhmim, próximo ao Nilo, encontra-se o seguinte método:

Dada uma fração

$$\frac{z}{w}$$

Pode-se transformar o denominador w em um produto de p por q:

$$\frac{z}{p.q} \tag{1.1}$$

Decompondo-a da seguinte maneira

$$\frac{z}{p.q} = \frac{1}{p.r} + \frac{1}{q.r}, \tag{1.2}$$

onde

$$r = \frac{p+q}{z}. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.2) e (1.3) em (1.1), temos:

$$\frac{z}{p.q} = \frac{1}{\frac{p.(p+q)}{z}} + \frac{1}{\frac{q.(p+q)}{z}} = \frac{z}{p.(p+q)} + \frac{z}{q.(p+q)} = \frac{z.q+z.p}{p.q(p+q)} = \frac{z.(p+q)}{p.q(p+q)} = \frac{z}{p.q}$$

Exemplificando numericamente: decompor $\frac{2}{21}$ em uma soma de frações unitárias

Inicialmente deve-se transformar o denominador em um produto de p . q

$$\frac{2}{21} = \frac{2}{3.7}$$

Observando que z = 2, p = 3 e q = 5, tem-se:

$$r = \frac{3+7}{2} = 5$$

Fazendo as substituições necessárias, encontra-se:

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{p.q} + \frac{1}{q.r}$$
$$\frac{2}{21} = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.5}$$
$$\frac{2}{21} = \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$$

Os gregos tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, porém sua numeração alfabética não facilitava essa simbolização. Os babilônios, através de sua numeração de posição com base sessenta, foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais (denominador é uma potência de 60), no entanto, não chegaram ao uso da vírgula para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. Segundo Smith (1958), o aritmético franco-italiano conhecido como Pellos, em 1492, usou um espaço (lacuna) para separar a parte inteira da parte decimal.

Ifrah (1994) destaca que na Europa, foi o belga Simon Stévin (1582) o responsável pelo passo decisivo para a notação atual ao anotar do seguinte modo 679,567: 679(0) 5(1) 6(2) 7(3), simbolizando 679 unidades inteiras, 5 "unidades decimais de primeira ordem"ou décimos, 6 “unidades decimais de segunda ordem” ou centésimos e 7 “unidades de terceira ordem” ou milésimos.

Passados dez anos, o suíço Jost Bürgi eliminou a menção da ordem das frações decimais, colocando no alto das unidades simples o signo (°). Nesse mesmo ano, o italiano Magini substituiu essa bolinha colocada no alto das unidades simples por um ponto localizado entre o algarismo das unidades e os décimos, notação utilizada até hoje nos países anglo-saxões.

Como se pode perceber a evolução do conjunto dos números racionais foi um passo difícil na história da humanidade. Ifrah (1994, p.326), ressalta que “com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1)”.

Ifrah (1994, p.328), diz que “quanto a nossa vírgula, foi o neerlandês Wilbord Snellius que a inventou, no início do século XVII”. Isso teve consequências incalculáveis, a começar pela invenção do sistema métrico. Machado (1993, p.136), afirma “é importante que os objetos matemáticos, [...], sejam apreendidos prenhes de significações e não como meras formas vazias, destinadas a interpretações posteriores”.

Capítulo 2

Números Racionais na Forma Decimal: Estudo, Ensino e Aplicações

2.1 Breves considerações sobre o corpo dos racionais

Ao se estudar os conjuntos numéricos deve-se observar como seus elementos estão relacionados a uma ou mais operações. Dessa forma, quando em um conjunto são definidas uma ou mais operações, essa coleção (conjunto mais operações) é denominada estrutura algébrica.

As estruturas algébricas recebem nomes especiais conforme as propriedades operacionais que possuem. Dentre as estruturas mais conhecidas tem-se os grupos, os anéis e os corpos. Nesse segmento da pesquisa será dada atenção aos corpos, especialmente, ao corpo dos racionais, utilizando como embasamento os estudos de Lima(2009), Niven(1984) e Neri(2006).

No conjunto Q dos números racionais estão definidas as operações de adição e de multiplicação, que satisfazem as condições a seguir:

- Adição

  A_1 - A soma é associativa - para quaisquer $x, y, z \in Q$; $(x + y) + z = x + (y + z)$.

  A_2 - A soma é comutativa - para quaisquer $x, y \in Q; x + y = y + x$.

  A_3 - A soma tem elemento neutro, denominado zero e designado por 0, isto é, para qualquer que seja $x \in Q;\ x + 0 = 0 + x = x$.

A_4 - Todo elemento $x \in Q$ possui um simétrico $-x \in Q$ tal que $x + (-x) = 0$.

- Multiplicação

M_1 - O produto é associativo - para quaisquer $x, y, z \in Q$; $(x.y).z = x.(y.z)$.

M_2 - O produto é comutativo - para quaisquer $x, y \in Q$; $x.y = y.x$.

M_3 - O produto tem elemento neutro, denominado um e designado por 1, isto é, para qualquer que seja $x \in Q$; $x.1 = 1.x = x$.

M_4 - Todo $x \neq 0$ em Q tem inverso multiplicativo, isto é, qualquer que seja $x \in Q - \{0\}$, $\exists y \in Q$; $x.y = y.x = 1$. O inverso do número $x \neq 0$ designa-se x^{-1}.

Além disso, existe uma propriedade que relaciona essas duas operações, conhecida como propriedade distributiva: $x.(y + z) = x.y + x.z$, para $x, y, z \in Q$.

O conjunto Q satisfazendo essas propriedades recebe o nome de *corpo dos números racionais*.

Dessas condições decorrem as observações relacionadas abaixo:

- Da comutatividade, segue-se que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$, seja qual for $x \in Q$. A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a diferença entre x e y. A operação $(x, y) \to x - y$ chama-se subtração

- Da comutatividade, segue-se que $x.1 = 1.x = x$ para todo $x \in Q$, e que $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$ para todo $x \neq 0$ em Q.

2.2 Estudo dos números racionais na representação decimal

Como já foi exposto no capítulo anterior, os primeiros números surgiram para possibilitar as operações de contagem que foram necessárias para o desenvolvimento da humanidade. Segundo Lima (2006), o processo de medição das grandezas contínuas levou à noção de número real de forma significativa, assim o conjunto dos números reais ficou conhecido como reta real, sendo formado pelos números racionais e pelos números irracionais.

Para representar quantidades inteiras de objetos ou de quaisquer coisas que quisesse contar, o homem criou símbolos que deram origem aos números naturais; no entanto, esses números foram insuficientes na questão que envolve divisões em partes iguais favorecendo assim o surgimento das frações, chamadas de números racionais porque representam razões de dois números inteiros a e b, com b diferente de zero. Ainda, segundo esse mesmo autor, os matemáticos gregos da época de Euclides não olhavam para a fração $\frac{a}{b}$ como um número, mas como uma razão entre dois números.

Pensava-se que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis, por exemplo, tomando dois segmentos AB e CD, haveria sempre um terceiro segmento EF que caberia um número exato n de vezes em AB e um número exato m de vezes em CD. Assim, a descoberta das frações não foi suficiente para as necessidades da Geometria.

> *Uma enorme crise, que abalou os alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, toda a estrutura Matemática grega, surgiu quando, entre os próprios discípulos de Pitágoras, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. [...] A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. [...] introduzindo os chamados números irracionais (LIMA, 2006, p.53).*

Quando um segmento considerado é comensurável com a unidade indicada, sua medida é um número racional, que pode ser inteiro ou fracionário. Os números fracionários podem assumir representações decimais finitas ou decimais infinitas (dízimas periódicas). Por exemplo: $\frac{1}{2} = 0,5$ e $\frac{1}{3} = 0,3333....$

Lima (2006) enfatiza que nenhuma medição experimental pode apresentar como resultado um número irracional, porém, deve-se lembrar de que, quando o raciocínio matemático assegura a incomensurabilidade, o número racional obtido experimentalmente é um valor aproximado; o valor exato é um número irracional.

O número racional que admite representação decimal finita $a_0, a_1a_2...a_n$ pode ser representado na forma fracionária: $\frac{a_0a_1a_2...a_n}{10^n}$.

Para admitir representação decimal finita, o denominador da fração deve ser formado apenas pelos fatores 2 e/ou 5. Assim, sendo dado:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n}$$

- Se $m \geq n$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n}, obtendo - se
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m} = \frac{c}{10^m}$$
- Se $n \geq m$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 2^{n-m}, obtendo - se
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{2^m.5^n.2^{n-m}} = \frac{a.2^{n-m}}{2^n.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{10^n} = \frac{d}{10^n}$$

Dessa forma, pode-se dizer que os números que têm representação finita são aqueles que, ao serem representados na forma fracionária $\frac{a}{b}$, com a e b primos entre si, o denominador b possui somente fatores 2 e/ou 5. Caso b seja divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, o número racional não terá representação decimal finita.

Exemplificando.

a) Número racional com representação decimal finita se o seu denominador apresenta apenas o fator 2
$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 0,0625$$

b) Número racional com representação decimal finita se o seu denominador apresenta apenas o fator 5
$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0,04$$

c) Número racional com representação decimal finita se o seu denominador apresenta os fatores 2 e 5
$$\frac{57}{80} = \frac{3.19}{2^4.5} = 0,7125$$

Um número racional com representação decimal infinita pode ser interpretado como sendo a soma de uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{10^n}$, sendo n o número de algarismos que forma o período. Como essa série possui razão menor que 1, sua soma é dada por $S = \frac{a_1}{1-q}$, em que a_1 é o primeiro termo e q, a razão.

Exemplificando com as dízimas periódicas abaixo.

a) $0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $0,133... = 0,1 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} =$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{4}{30}$

Observa-se que no registro fracionário, dos exemplos acima, o denominador das frações apresentam fatores diferentes de 2 e de 5, o que favorece o aparecimento da representação decimal infinita. No item a, aparece uma dízima periódica simples (o algarismo 3 se repete a partir da primeira casa decimal) e, no item b, observa-se um exemplo de dízima periódica composta (o período 3 não aparece desde a primeira casa decimal). É importante ressaltar que as representações decimais infinitas e não periódicas não representam números racionais, como o exemplo $0,101001000...$

2.3 Ensino - aprendizagem dos números racionais

Santos (1997) ressalta que o ensino - aprendizagem dos números decimais tem como pré-requisitos a conceituação de frações e a compreensão do princípio posicional do sistema de numeração decimal.

Em linhas gerais, as noções sobre números fracionários devem ser exploradas em quatro contextos: fração como parte-todo, fração como razão, fração como divisão e fração como operador.

i) Fração como parte - todo

É a partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. Para se afirmar que houve uma repartição do todo inicial em frações, alguma propriedade do conjunto inicial deve permanecer inalterada. Por exemplo, ao se dizer que uma folha de papel foi repartida ao meio, cada pedaço dessa repartição deve representar exatamente a metade da área total e, as duas partes juntas devem recobrir a folha inicial.

- Modelo contínuo (modelo linear, modelo de área, modelo de volume e capacidade) : ideia de repartição de um todo em partes de mesmo comprimento, mesma área, etc.
- Modelo discreto: ideia de repartição em partes de mesma quantidade numérica.

ii) Fração como razão

- Comparação de uma parte de um todo com o todo.

- Comparação de uma parte de um todo com outra parte do todo.
- Ideia de probabilidade

iii) Fração como divisão

Esse significado está presente em situações associadas à ideia de partição. O quociente representa o tamanho de cada grupo quando se conhece o número de grupos a serem formados. Exemplo: duas pizzas serão divididas igualmente entre 3 pessoas. Quanto cada uma receberá?

iv) Fração como operador

O conceito de fração, nesse caso, deve ser trabalhado como um modificador de situações, por exemplo, situações concretas de medições e de representação de objetos reais em escala

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), ao optar por começar o estudo dos racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que tais números aparecem no cotidiano das pessoas muito mais em sua representação decimal (números com vírgula) do que na forma fracionária.

O uso de calculadoras fez com que as representações decimais se tornassem mais frequentes. Percebe-se, também, que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para se obter a escrita dos números racionais na forma decimal, acrescentando-se novas ordens à direita da unidade (primeira ordem) e de forma decrescente. Além disso, podem ser feitas relações com o sistema monetário e o sistema de medidas.

Pérez (1997, p.28), considera que existem certas competências com relação aos números decimais que devem fazer parte da cultura de todas as pessoas, como as descritas abaixo.

- Capacidade para dar significado aos números decimais que representam porcentagens, descontos, para estimar cálculos de superfícies.
- Capacidade para pesar e medir com diferentes instrumentos de medidas para obter resultados com uma aproximação com limites aceitáveis de erros.
- Capacidade de verificar dimensões utilizando um micrômetro ou outro aparelho.

- Capacidade para realizar algumas operações com números decimais ou para interpretar os resultados obtidos com uma calculadora.

Pode-se observar que os números decimais estão associados a um contexto amplo de significados, sendo usados nas medições, nos cálculos aproximados, etc.

A expressão "número decimal" apresenta certa ambiguidade, pois a palavra número exige um adjetivo que se refere a sua natureza intrínseca. Assim, os adjetivos, natural, racional, real, por exemplo, nos permitem identificar a natureza dos números a que nos referimos. Essa natureza independe da forma de representar os números e do sistema de numeração escolhido. A palavra decimal refere-se à base de numeração também chamada de numeração decimal ou de base dez.

Dessa forma, um número escrito no sistema de numeração de base dez pode ser denominado de decimal; um número representado no sistema de numeração de base dois é binário, e assim, acontece dependendo da base escolhida para representá-lo.

Ainda, conforme Pérez (1997), todo número decimal em base dez pode ter uma representação escrita com vírgula. Comumente, costuma-se confundir a expressão "número racional decimal" e "números escritos com vírgulas".

2.3.1 Dificuldades quanto ao ensino dos números racionais

O conhecimento sobre números naturais pelo aluno é estruturado de forma progressiva a partir da construção do número até as operações. No entanto, para aprender a lidar com os números racionais precisa-se generalizar e ampliar conceitos numéricos em uma realidade com menos vivências e experiências concretas fazendo surgir muitas dificuldades para o aluno.

Segundo Alves (1997, p.301), as dificuldades podem ser classificadas em três tipos fazendo referências ao conceito, à representação simbólica e às operações.

- **Dificuldades referentes ao conceito e às relações nele implícitas:** por exemplo, os agrupamentos não são realizados apenas de 10 em 10 como no sistema usual.
- **Dificuldades referentes à representação simbólica:** por exemplo, a equivalência de frações faz com que não aconteça uma correspondência unívoca entre uma

quantidade e sua representação simbólica.

- **Dificuldades referentes às operações:** por exemplo, operações de frações com denominadores diferentes exigem algoritmos específicos e bem complexos.

Assim, para que o ensino-aprendizagem dos números racionais tenha mais significado para o aluno, o trabalho com números racionais sob a forma de fração e sob a forma decimal deve ocorrer de forma simultânea. Os racionais devem ser tratados ora como frações, ora como decimais, com predominância do enfoque mais conveniente à situação envolvida, ressaltando que as experiências vivenciadas pelo aluno, geralmente, levam ao uso intuitivo do racional na forma decimal.

Os exemplos a seguir mostram situações em que os números decimais estão presentes na vida do aluno.

- Eu obtive a nota 7,5 na prova de Matemática.
- Minha altura é 1,68 m.
- Minha mãe comprou 3,250 kg de carne.
- Minha irmã comprou 2,10m de tecido.
- Eu paguei R$ 1,50 pela passagem de ônibus.

Ribeiro (2011), enfatiza que ao abordar as frações e os decimais pode-se fazê-lo, conjuntamente, ou de forma isolada, entretanto, expressa sua preferência pela primeira opção.

2.3.2 Orientações metodológicas para o ensino de números decimais

Ribeiro (2011, p.414), manifesta-se sobre o ensino de números decimais com o intuito de facilitar a aprendizagem, a construção de conhecimentos e a aquisição do hábito de argumentar, destacando que:

> *Devemos como facilitadores das aprendizagens dos alunos, facultar-lhes a possibilidade de utilizarem materiais manipuláveis, modelos e situações do mundo real (por exemplo, o dinheiro, nomeadamente por meio de folhetos de supermercado, compra de bilhetes de transporte e de espetáculo, etc.*

O professor pode partir de situações em que números decimais são vivenciados pelos alunos para introduzir os conhecimentos referentes ao assunto. Aproveitando a nota obtida pelo aluno pode trabalhar a leitura, a escrita, as operações, etc., levantando questões relacionadas com uma situação real. Por exemplo, o aluno X obteve a nota 7,5 na prova.

- Como pode ser feita a leitura desse número?
- Existe outra maneira de representá-lo?
- De que outra maneira "meio" pode ser expresso?
- Quanto falta para completar 10 (a nota máxima)?
- 0,5 é maior ou menor que 1?
- Quantos décimos equivalem a 1?

Sugestões para o ensino de números decimais:

i) Para facilitar o entendimento da escrita decimal pode ser utilizado o recurso do quadro posicional.

M	C	D	U	d	c	m

Tabela 2.1: Quadro posicional para escrita decimal.

Observando esse quadro o aluno pode perceber que:

- existe uma simetria em torno da unidade.
- os valores 10, 100 ou 1000 vezes maiores que a unidade são registrados à esquerda da mesma.
- os valores 10, 100 ou 1000 vezes menores que a unidade são registrados à direita da mesma.
- deve-se usar uma vírgula para indicar a ordem das unidades no registro de números decimais fora do quadro posicional.

O uso desse tipo de recurso possibilita ao aluno compreender que:

- 1 é 10 vezes maior que 0,1.
- 0,1 é 10 vezes menor que 1,0.
- 10 centésimos equivalem a 1 décimo.
- 10 milésimos correspondem a 1 centésimo.
- cada símbolo vai assumir um valor (valor relativo) dependendo da posição em que se encontra. Exemplificando : 2,22 (2 unidades, 2 décimos, 2 centésimos).

ii) Além do quadro posicional pode ser utilizado papel milimetrado para concretizar as ideias de décimos, centésimos e milésimos, observando que um quadrado de 10cm por 10cm corresponderia à unidade; as linhas ou colunas representariam os décimos; os quadradinhos indicariam os centésimos; e as quadrículas seriam usadas para designar os milésimos.

iii) Para compreender mais facilmente a relação entre a forma fracionária e a forma decimal utilizam-se frações com denominadores 10, 100 ou 1000.
Exemplos: $\frac{7}{10} = 0,7$; $\frac{23}{100} = 0,23$ e $\frac{103}{1000} = 0,103$
Pode-se usar essa equivalência para fazer as transformações de fração para forma decimal, quando possível. Exemplo: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$.

iv) Outra possibilidade é usar o recurso de dividir o numerador pelo denominador para obter o número decimal correspondendo à fração indicada, evidenciando um dos significados do conceito de fração (fração como divisão). Exemplo:$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0,25$.

v) Para garantir o entendimento dessa forma de representação devem ser utilizados os cálculos abrangendo quantias em dinheiro e medidas.

Conforme Alves (1997, p.327), vários fatores facilitam a compreensão dos processos operatórios envolvendo a adição e a subtração dos números racionais na forma decimal, destacando que:

- os fundamentos dos Sistema de Numeração Decimal (base 10, princípio posicional, valor absoluto e relativo dos algarismos, conceito de ordem, etc.) constituem suporte para o registro decimal e para os algoritmos da adição e da subtração.

- as regras operatórias e o uso do algoritmo guardam semelhança entre si: efetuar adição e subtração com decimais reforça conceitos construídos no trabalho com naturais.
- o uso do dinheiro (real e centavos) e das medidas (unidade e submúltiplos) faz parte da vivência do aluno e mostra-lhe a necessidade de lidar com competência com os racionais na forma decimal.
- o advento das calculadoras e o "prestígio" que acarretam para quem as utiliza também constituem estímulo e desafio, motivando o aluno a se interessar realmente por esse tipo de algoritmo.

Pérez (1997, p.136), destaca quatro tipos de erros mais frequentes relacionados com o conceito, a escrita e operações de números decimais, enumerados a seguir.

- **Erros relacionados com a leitura e a escrita dos números - valor posicional**: tais erros ocorrem porque os alunos não possuem o domínio do sistema de numeração decimal para a escrita de números inteiros, assim não compreendem a escrita dos números menores que a unidade.
- **Erros relacionados com o zero**: alguns alunos ignoram o zero e interpretam 0,036 como 36 (perdendo a estrutura global do número e encarando-o como um número inteiro) ou consideram 1,27 como diferente de 1,270.
- **Erros relacionados com a ordenação entre os decimais**: muitos alunos não conseguem escrever os números decimais em ordem crescente ou decrescente, descobrir qual é o maior ou o menor deles ou intercalar um decimal entre outros.
- **Erros relacionados com as operações**: muitos alunos não construíram os conceitos de décimo, centésimo, milésimo, dessa forma não realizam as somas e subtrações operando com ordens semelhantes; quanto às multiplicações e divisões os erros, também, podem ocorrer, pois acredita-se que ao multiplicar deve-se obter um número muito grande e ao dividir, um número muito pequeno.

Para evitar os erros mais comuns nas adições e subtrações de números decimais pode-se optar por fazer o registro no papel quadriculado com o nome das ordens escrito, pois dessa forma o aluno será instigado a somar as ordens semelhantes, somando (ou subtraindo) centésimos com centésimos, décimos com décimos, unidades com unidades e assim por diante.

Depois de feito o registro dos números que serão somados (ou subtraídos) pode-se preencher com zeros as ordens vazias utilizando-se do princípio de equivalência. Por exemplo: 2,5 corresponde a 2,500.

Observa-se que a ocorrência de erros nos cálculos envolvendo adições e subtrações com números decimais acontece, geralmente, quando o aluno faz o registro e alinha os valores de forma inadequada. Exemplos:

a) $2,5+0,321+1,43$

U	d	c	m
2	5	0	0
0	3	2	1
1	4	3	0
4	2	5	1

Tabela 2.2: Quadro posicional para adição de números decimais.

b) $5,7-2,473$

U	d	c	m
5	7	0	0
2	4	7	3
3	2	2	7

Tabela 2.3: Quadro posicional para subtração de números decimais.

Além da utilização do papel quadriculado pode-se utilizar a reta numerada para representar adições e subtrações com décimos.

Exemplos:

a) $0,5+0,7$

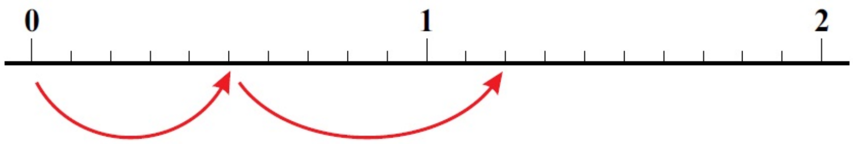


Figura 2.1: Adição de Números Decimais.

b) $1,6 - 0,9$

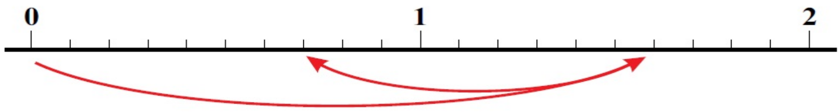


Figura 2.2: Adição de Números Decimais.

Esse tipo de registro para fins de cálculos torna-se inviável para o trabalho com centésimos e milésimos. Havendo a necessidade de concretização pode-se empregar o papel quadriculado recortado em quadrados de 10 por 10 para representar os centésimos e usar lápis colorido para assinalar os números pedidos. Por exemplo, a soma de 0,13 com 0,26 pode ser representada colorindo as duas parcelas com cores diferentes.

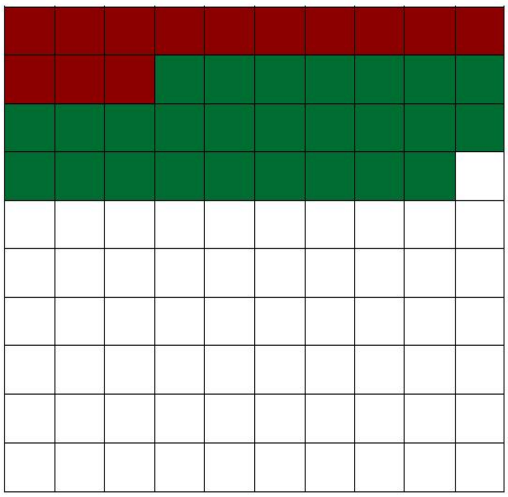


Figura 2.3: Quadro adição de números decimais.

A adição e a subtração de decimais, embora simples, são consideradas as mais importantes por servirem de base para o estudo das demais operações. Porém, deve-se observar que a subtração apresenta um grau de complexidade superior à adição. Para consolidar a aprendizagem e evitar erros, Ribeiro (2011, p.416), alega que:

> *A abordagem às operações deverá ser efectuada utilizando não apenas os registros escritos, mas também modelos e materiais manipuláveis, sendo sua utilização predominante quando se abordam essas operações envolvendo números fracionários. É assim fundamental, que antes de abordarem as operações com decimais, os alunos já consigam navegar entre diversas das diferentes possíveis representações e formas de efectuar as operações.*

Com o presente estudo acredita-se que a escola fazendo uso do raciocínio contextualizado possa minimizar a complexidade da representação simbólica. Moysés (2010) destaca que o uso do contexto simplifica ou dispensa o uso exagerado de fórmulas ou regras. A valorização do conhecimento cotidiano é considerada importante para o trabalho pedagógico em matemática. Sacristán (2000) argumenta que o desenvolvimento de habilidades na escola está ligado à necessidade de vincular a formação de capacidades ao conteúdo e ao contexto cultural em que essas habilidades e tarefas adquirem significado.

Para aprofundar-se nos conhecimentos matemáticos o aluno precisa alcançar uma relação consciente com o processo de compreensão do conteúdo e com a forma de adquiri-lo. Segundo Giardinetto (1999), tal intenção só é alcançada quando se rompe com os limites da lógica - prático - utilitária do conhecimento cotidiano. Dessa forma, o aluno avança e se apropria do conhecimento matemático escolar. Meirieu (1998, p.118), diz que “é preciso, em primeiro lugar, simplificar, concentrar-se em um número limitado de aquisições conceituais fundamentais às quais o aluno poderá ligar de maneira pertinente, posteriormente, toda uma série de informações que passarão a ter sentido para ele”.

Percebe-se que as aquisições essenciais que representam um avanço para o aluno, quando articuladas, constituem um passo mais importante para o seu êxito escolar do que o acúmulo de regras que podem ser rapidamente esquecidas. Considera-se importante que os alunos atribuam significado (sem efetuar o cálculo) a expressões/ situações como:

- A décima parte de um décimo é um centésimo (0,1 x 0,1).
- Dez vezes um centésimo são dez centésimos, logo, é um décimo (10 x 0,01).
- A centésima parte de dez unidades é um décimo (0,01 x 10).

- Se dividir dez unidades em cem partes iguais, ou seja, cada unidade dividida em dez partes iguais, cada uma dessas partes será um décimo.

Ao se multiplicar racionais deve-se levar o aluno a perceber a analogia com a adição e também com a ideia de repetição presente na multiplicação de naturais. Trabalhando com decimais, o processo operatório relaciona o número de ordens decimais dos fatores com o número de ordens decimais do produto, o que pode ser observado pelo aluno ao efetuar diferentes multiplicações, descobrindo padrões ou regularidades presentes em diversas situações.

Pode-se perceber, por exemplo, que quando um dos fatores é 1 (elemento neutro da multiplicação), o produto é igual ao outro fator. Ou, quando o multiplicador cresce e o multiplicando permanece o mesmo, o produto cresce na mesma proporção que o multiplicador.

a) Elaboração de tabelas

1 x 0,3=	0,3
2 x 0,3=	0,6
3 x 0,3=	0,9
4 x 0,3=	1,2
5 x 0,3=	1,5

Tabela 2.4: Quadro multiplicação de números decimais.

b) Utilização da reta numérica. Exemplo: 5 x 0,2

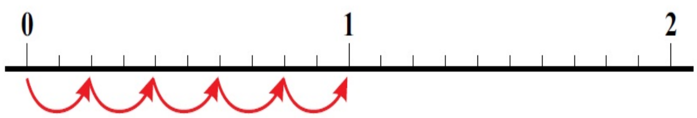


Figura 2.4: Multiplicação de números decimais na reta.

c) Interpretação da multiplicação de decimais no quadro posicional: Exemplo: 3 x 2,14

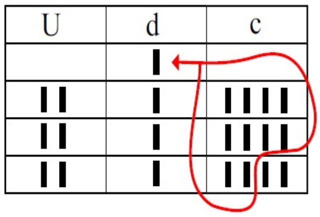


Figura 2.5: Quadro posicional para multiplicação de números decimais.

Segundo Silva (2006), para efetuar a multiplicação de um número decimal por um número natural (diferente de 10 e de suas potências) pode-se recorrer a vários processos. No entanto, é aconselhável seguir algumas etapas que possibilitarão ao aluno refletir sobre as regras envolvidas:

- Multiplicar o número decimal por alguma potência de 10 que o transforme em número natural.
- Efetuar a multiplicação dos dois números naturais.
- Dividir o produto pela mesma potência de 10 que foi multiplicado o decimal.

Esses procedimentos podem ser utilizados para a multiplicação de dois decimais.

Exemplo: Calcular 4,25 x 15.

- Multiplicar 4,25 por 100 para encontrar um número inteiro: 4,25 x 100 = 425.
- Multiplicar os dois inteiros: 425 x 15 = 6375.
- Dividir o resultado por 100: $6375 \div 100 = 63,75$.

Ribeiro (2011) em seus trabalhos apresenta algumas maneiras para se concretizar a multiplicação de números decimais para que tenha significado para o aluno.

a) Multiplicação de um número decimal por um inteiro.

Por exemplo, para calcular o produto 0,4 x 2, pode-se utilizar dois quadrados divididos em dez partes iguais e toma-se quatro das dez partes em cada um dos quadrados obtendo como resultado oito décimos. Inicialmente, os alunos associam com a adição (0,4 + 0,4 = 0,8).

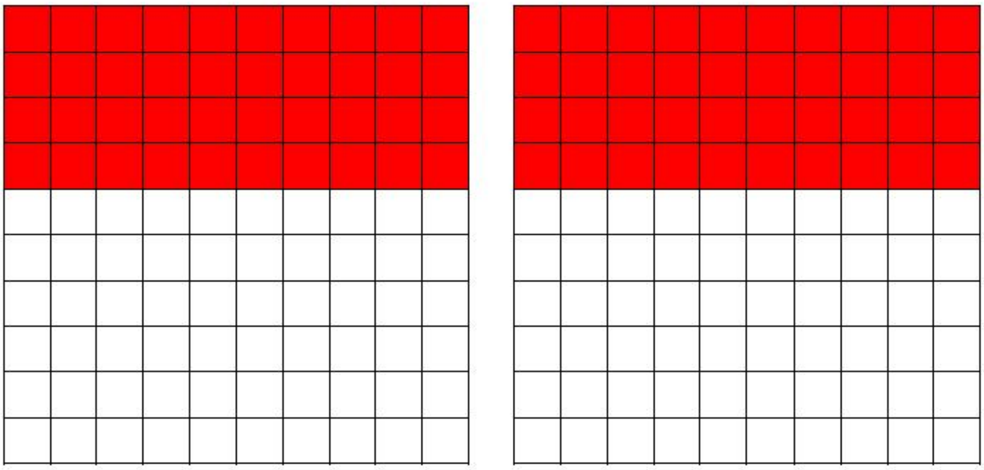


Figura 2.6: Quadros multiplicação de número decimal por inteiro.

Também, pode-se representar a quantidade obtida como produto, em relação à unidade.

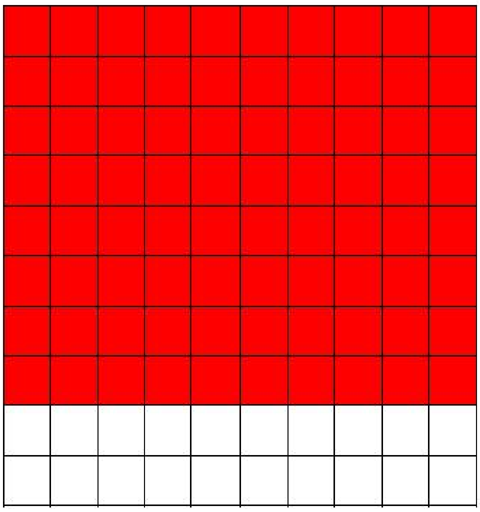


Figura 2.7: Quadro resultado da multiplicação de decimal por inteiro.

b) Multiplicação de um número decimal por um número decimal superior à unidade.

Para efetuar a multiplicação 0,7 x 1,5 (sete décimos de uma unidade e meia) precisa-se dividir uma unidade e meia (1,5 = 15 décimos) em dez partes iguais e tomar sete dessas partes. Considerando sete partes da unidade tem-se o equivalente a sete décimos ou setenta centésimos (0,7 = 0,70) e sete partes de meia unidade, o equivalente a trinta e cinco centésimos (0,35).

Assim obtém-se 0,7 x 1,5 = 0,70 + 0,35 = 1,05.

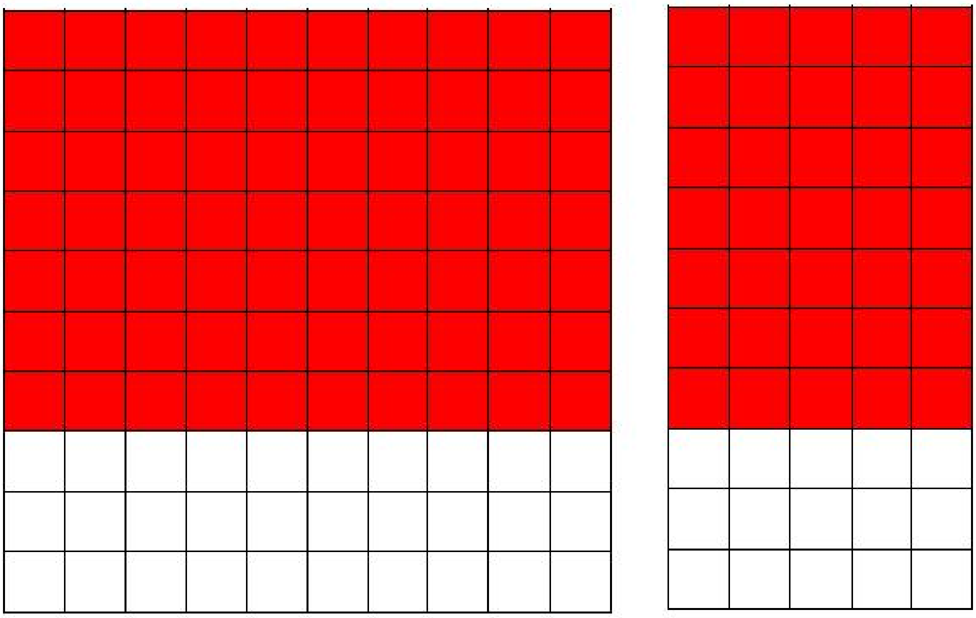


Figura 2.8: Quadros multiplicação de número decimal por decimal.

c) Multiplicação de dois números decimais inferiores à unidade.

Para calcular 0,7 x 0,5 deve-se assumir uma interpretação da multiplicação como área.

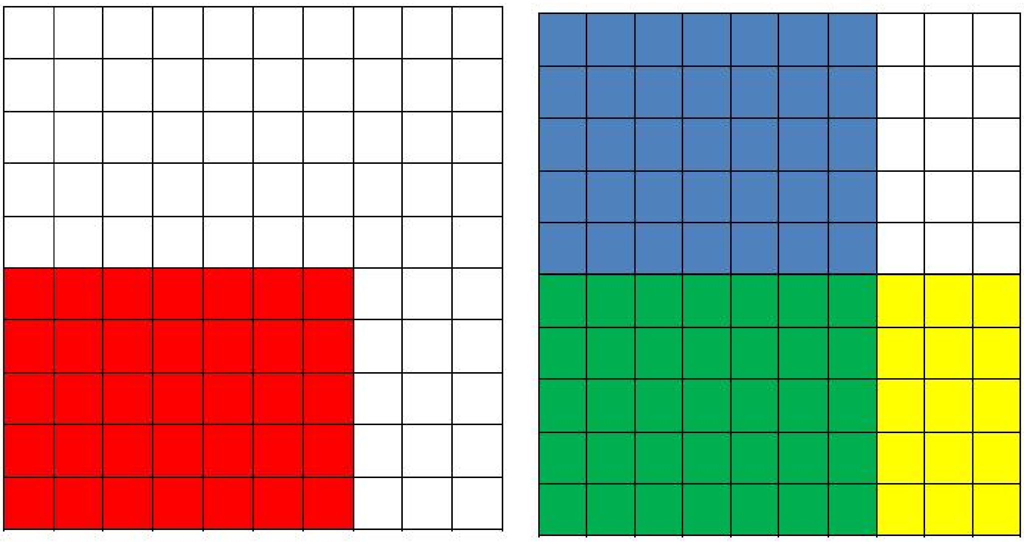


Figura 2.9: Quadros multiplicação de decimais menores que a unidade.

- Pode-se empregar um quadrado de lado medindo dez unidades para fazer essa representação, assinalar sete unidades de um lado (base) e cinco unidades no outro lado (altura). O retângulo destacado representa o produto desejado.
- Além desse tipo pode-se tomar sete unidades (por exemplo, no comprimento) e pintar de uma cor (azul); a seguir tomar cinco unidades na largura e pintar de outra cor (amarela). A parte pintada pelas duas cores (verde) representará o resultado de 0,7 x 0,5.

Essas representações são muito apropriadas para que o aluno possa construir seu próprio conhecimento e descobrir que ao se multiplicar um número que possua apenas uma casa decimal (décimos) por outro que também é formado por apenas uma casa decimal, o resultado obtido será centésimos. Chegando, assim, à regra para se multiplicar decimais que diz que o produto de dois decimais possui a soma da quantidade de casas decimais dos dois fatores.

Para confirmar a validade desses argumentos, Ribeiro (2009, p.17), expressa sua opinião dizendo que:

> *As operações com números fracionários, em particular decimais, por não serem tão intuitivas como as que envolvem números naturais (inteiros), são, por vezes, encaradas pelos professores como apenas um conjunto de regras que os alunos devem aprender e aplicar. Esta prática apenas poderá ser alterada se os próprios professores forem possuidores de um saber ensinar a fazer, mais do que apenas um saber fazer, pois se isso não se verificar continuarão a apresentar aos seus alunos uma matemática escolar orientada para a aquisição de conceitos e regras, o que não permitirá, neste caso específico, uma utilização dos algoritmos com efectiva compreensão.*

As divisões podem ser trabalhadas simultaneamente com a multiplicação de decimais utilizando a ideia de partilha. Por exemplo: 0,936 kg de ouro foram fundidos em 3 barras. Quanto pesa cada barra?

Para resolver a situação-problema descrita, anteriormente, o aluno pode utilizar várias estratégias, tais como:

- trabalhar com o número decimal como se fosse um número inteiro: $936\ gramas \div 3 = 312\ gramas$

- por decomposição: $(0,900 \div 3) + (0,030 \div 3) + (0,006 \div 3)$ = $0,300 + 0,010 + 0,002 = 0,312\ kg$

- por aproximação: se a barra pesasse 0,900 kg, cada uma das 3 barrinhas iriam pesar 0,300 kg; assim $0,936 \div 3$ deve ser um pouco mais de 0,300 kg.

- usar a regra operatória dos naturais com o algoritmo na forma decimal: para evitar erros absurdos deve-se levar o aluno a fazer uma estimativa do quociente.

De acordo com Silva (2006, p.179), para efetuar divisões envolvendo números decimais deve-se empregar a propriedade "quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente da divisão não se altera". Assim, as etapas para se efetuar a divisão são: i) multiplicar o dividendo e o divisor por uma mesma potência de 10 (10,100, 1000, etc.) de forma que tanto o dividendo quanto o divisor se tornem números naturais; ii)fazer a divisão dos números naturais, resultantes da multiplicação anterior, para obter o resultado.

Exemplo: Dividir 2,7 por 0,45

- Multiplicar o dividendo por 100 para transformá-lo em natural: 2,7 x 100=270.

- Multiplicar o divisor por 100 para transformá-lo em um natural: 0,45 x 100 = 45.

- Dividir os resultados encontrados: $270 \div 45 = 6$.

Van de Walle (2009, p.362), destaca algumas ideias importantes para o ensino de números decimais elencadas a seguir.

- Os números decimais são simplesmente outro modo de escrever frações. Ambas as notações têm seu valor. Uma maior flexibilidade é adquirida por meio da compreensão de como os dois sistemas simbólicos estão relacionados.

- O sistema numérico posicional de base dez se estende infinitamente em dois sentidos: para valores minúsculos como também para valores gigantescos. Entre quaisquer dois valores posicionais vizinhos, a razão 10:1 permanece a mesma.

- A vírgula decimal é uma convenção que foi desenvolvida para indicar a posição das unidades. A posição à esquerda da vírgula decimal é a unidade que está sendo contada como conjuntos ou unidades.

Observação: Em países de língua inglesa adota-se o ponto em vez da vírgula como indicador e separador da parte inteira e da parte decimal.

- As porcentagens são simplesmente centésimos e, como tal, são um terceiro modo de escrever frações e decimais.
- A adição e subtração com decimais estão baseadas no conceito fundamental de adicionar e subtrair números em valores posicionais - uma extensão simples dos números inteiros.
- A multiplicação e divisão de dois números produzirão os mesmos algarismos, não importando as posições da vírgula decimal. Como resultado, para a maioria dos propósitos práticos, não há razão para desenvolver novas regras para multiplicação e divisão decimais. Em vez disso, os cálculos podem ser realizados com números inteiros com a vírgula decimal posicionada por meio de raciocínio estimativo.

2.3.3 Reflexões didáticas sobre a causa dos erros no ensino de números racionais na forma decimal

O aprendizado e a utilização dos números decimais na forma decimal são essenciais para o nosso dia dia. No entanto, verifica-se que os alunos cometem muitos erros quando estão operando com esse tipo de número. Muitos estudiosos questionam se esses erros são indicativos de uma aprendizagem pouco consistente por parte dos alunos ou de um fracasso da escola que não está conseguindo oferecer metodologias adequadas para fazer com que se aprenda de forma correta um conteúdo utilizado em vários ramos de atividades.

Reflexões segundo Pérez (1997, p.142):

- **Conhecimento insuficiente das regras de numeração decimal.** Há a necessidade do domínio de conhecimentos relativos ao sistema de numeração posicional antes de se introduzir o conceito de número decimal (número com vírgula).
- **Conhecimento suficiente dos números naturais, porém dificuldade para entender a escrita da parte decimal do número.** Muitos alunos interpretam corretamente as unidades, dezenas e centenas, no entanto, não associam esses conhecimentos à escrita de décimos, centésimos e milésimos, etc. Não conseguem entender que

se trata de um mesmo modelo de representação (por exemplo: 10 unidades formam uma dezena e 10 décimos formam uma unidade). Dessa forma os professores precisam fazer com que os alunos descubram e entendam esses mecanismos de forma significativa.

- **A forma como os números decimais são apresentados aos alunos.** Todas as formas de se introduzir os números decimais que não permitem que sejam vistos como números, que com algumas propriedades distintas dos naturais podem ocasionar obstáculos que ampliem as dificuldades epistemológicas associadas ao conceito. Por exemplo: 1,23 m = 123 cm passa a ideia de que a todo decimal pode-se associar um natural fazendo uma mudança de unidades.

- **Regras que os alunos inventam para obter os resultados.** Alguns alunos criam regras próprias para obter resultados corretos que funcionam em certas situações e em outras podem levar ao erro. Por exemplo: Regra para ordenar decimais que diz que é menor o número que tem mais símbolos após a vírgula; 12,04 < 12,4. No entanto, tal regra é falha na hora de ordenar 12,413 e 12,4.

- **Aplicações a situações práticas, reais e familiares aos alunos.** Uma causa de erros pode ser a ausência de situações significativas nas quais os alunos são apresentados aos números decimais. Assim, o aluno é obrigado a decorar o que deve fazer ao se deparar com os números decimais, transformando o processo de aprendizado em “decoreba emergencial” que pode ser útil para a realização das provas, entretanto, sem significado algum para ele. A significação acontece quando o aluno estabelece relações de suas experiências com o novo, dessa forma, fatos já vivenciados servem de referência para a compreensão da nova situação em questão.

2.3.4 Contextualizações dos números decimais

Os números racionais e sua representação decimal surgiram a partir da necessidade que os homens sentiram de fazer mensurações e, em consequência, representar numericamente as partes não inteiras de suas medidas.

Quando os números decimais são apresentados às crianças é relevante motivá-las com situações do seu contexto social, levando em consideração que elas ainda não possuem a vivência de um adulto.

Uma das melhores maneiras para as crianças pensarem sobre quantidades reais é associar números às medidas de coisas. As relações numéricas com quantidades do mundo real e das medidas e o uso de números em estimativas simples podem ajudar as crianças a desenvolver ideias flexíveis e intuitivas sobre os números mais desejados.

De acordo com o Van de Walle (2009, p.161), "apenas medir e registrar os resultados não será muito eficaz, pois não há razão para as crianças ficarem interessadas ou pensarem sobre o resultado". Para ajudar o aluno a refletir sobre o número seria mais interessante que antes de utilizar alguma forma para conferir as medidas dos objetos que ele sugerisse uma estimativa para esse valor.

Pode-se observar que muitas estimativas no dia a dia envolvem frações, decimais e porcentagens. As estimativas servem como fonte de motivação para as atividades envolvendo medidas, tornando-se divertido quando os valores sugeridos se aproximam da medida aferida. Além disso, essas estratégias auxiliam a desenvolver familiaridade com o uso de unidades padrão de medidas.

O aluno deve estimar cálculos decimais bem antes de aprender a calcular usando lápis e papel, mesmo que para isso ele necessite fazer estimativas grosseiras, elaborando arredondamentos dos números para números inteiros ou frações simples.

Van de Walle (2009, p. 236) argumenta que o professor não deve permitir que os alunos estudem conceitos de valor posicional sem a utilização dos números no mundo ao seu redor. Esse autor considera que as habilidades com o sistema monetário são problemas para o professor do Ensino Fundamental, por isso ele enumera algumas ideias e habilidades que são exigidas para esse nível.

- Reconhecimento de notas e moedas.
- Valores de notas e moedas.
- Uso dos valores de notas e moedas.
- Contagem de conjuntos de notas e moedas (inclusive comparar dois conjuntos).
- Coleções equivalentes de moedas (mesmas quantidades, moedas diferentes).
- Seleção de moedas para uma determinada quantidade.
- Estabelecer valor de troco.

O conceito de porcentagem possui grande uso social, econômico e financeiro decorrente da facilidade de comparação entre grandezas. O trabalho com porcentagem deve estar relacionado ao estudo de frações e decimais (especialmente ao conceito de centésimo). Exemplo: 25% = 25 em 100 = $\frac{25}{100}$ = 0,25

Torna-se mais fácil comparar grandezas expressas em forma de porcentagem do que em forma de fração. Exemplo: Qual é o maior $\dfrac{3}{4}$ ou $\dfrac{4}{5}$? Expressos em porcentagens tem-se que 75% < 80%, logo $\dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$.

A equivalência entre frações, números decimais e “por cento” facilita a compreensão de situações veiculadas em propagandas de lojas ou anúncios de jornais. Problemas que envolvam uma situação real é o melhor caminho para que o aluno entenda os cálculos com porcentagem, no entanto, nem todos os problemas reais de porcentagem apresentam números fáceis para o aluno manipular. Assim, em certas situações a utilização de estimativas ou aproximações ajuda a resolver o problema e a refletir sobre o mesmo.

Capítulo 3

Análise da Sequência Didática

O ensino de números racionais que abrange os inteiros, as frações, as dízimas periódicas, os decimais exatos, as porcentagens, dentre outros, proporciona ao aluno melhor compreensão de sua realidade. Ao resolver problemas que envolvam números racionais, o aluno pode vivenciar situações que estão relacionadas ao seu dia a dia.

Os números racionais aparecem em situações caseiras (receitas, uso de material de limpeza e higiene, etc.), em jornais e revistas com relatos para análise de dados nas reportagens ou em gráficos e tabelas. Na vida escolar, esses números estão relacionados a vários conteúdos, ou mesmo, para indicar as notas obtida em trabalhos e provas.

Com a sequência de atividades visa-se investigar o conhecimento prévio dos alunos sobre esse assunto em relação à compreensão do conceito, analisando as dificuldades apresentadas para realização das operações e resolução dos problemas. Este diagnóstico servirá de base para a elaboração de atividades que possam favorecer a aprendizagem utilizando-se materiais concretos e estratégias que facilitem o ensino e motivem os alunos para que consigam melhores rendimentos.

Para realizar a sequência de atividades cada aluno utilizou uma folha com as questões copiadas e um lápis ou caneta. Não foi permitido o uso de calculadoras. As atividades foram realizadas em duas aulas de cinquenta minutos cada, sem consulta a nenhum material e nem mesmo aos colegas.

Optou-se por elaborar as atividades enfocando o ensino de números racionais na forma decimal. Foram elaboradas questões que abrangessem simplesmente a realização de somas e subtrações de decimais, cálculos com valores representando quantias em dinheiro e interpretação de situações que envolviam medidas de comprimento e massa.

Em razão de se trabalhar com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, focou-se a pesquisa na representação dos números racionais na forma decimal fazendo uma contextualização com as unidades de medidas e, também, com unidades monetárias, por considerar que os alunos desse nível de escolaridade já foram apresentados a esses conteúdos em séries anteriores.

Caraça (1958), em sua obra Conceitos Fundamentais de Matemática, procura descrever o surgimento dos números racionais como resposta do homem à necessidade de comparar grandezas, quando a habilidade de contar, que o homem já dominava, não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que a outra.

3.1 Sondagem das aprendizagens através da análise das respostas

Esta sondagem serviu para analisar os acertos e erros apresentados pelos alunos ao responderem às questões do teste diagnóstico. Para tanto foram descritas as respostas de sete alunos, nas quais foram comprovados os erros mais comuns cometidos pelos alunos da turma. Este teste foi referência para o desenvolvimento das atividades a serem propostas levando em consideração os conhecimentos que os alunos detiveram até o momento, sabendo que grande parte dos alunos apresenta nítidas dificuldades de aprendizagem.

3.1.1 No contexto matemático

Com estas questões, objetiva-se investigar se os alunos do 6º ano operam com decimais no contexto matemático, sem nenhuma aplicação prática. Desejava-se investigar se os alunos posicionavam os dígitos corretamente e se interpretavam tais operações como números decimais, bem como observar se eles conheciam a nomenclatura referente à posição dos símbolos nas casas decimais.

Observando as respostas de cada item fornecidas por alguns alunos pode-se verificar se a maioria deles não faz distinção de número racional/inteiro para número racional/decimal. Verifica-se que não adquiriram ainda o conceito referente às noções da diferença entre a parte inteira e a parte decimal do número.

Questão 1: Efetue.

a)0,74 + 0,25	b)0,8 + 0,5	c)2,5 + 0,5 + 0,7	d)2,746 + 0,92	e)4 + 0,013
f)8,2 - 1,1	g) 4,92 - 0,48	h)3,8 - 1,543	i)2,456 - 0,9	j)5 - 0,345

Tabela 3.1: Quadro operações com decimais

Respostas obtidas para o item a)

- Aluno F : 0,74 + 0,25 = 99. Pode-se concluir que embora se tratando de uma operação simples de soma de números decimais que não necessitava fazer nenhuma transformação, o aluno ignorou a vírgula e somou como se os valores fossem inteiros.
- Os demais alunos responderam corretamente ao item a.

Respostas obtidas para o item b)

- Aluna B : 0,8 + 0,5 = 0,3. Pode-se concluir que por se tratar de uma operação que necessitava transformar décimos em unidades, a aluna pensou corretamente, no entanto, não conseguiu completar a ideia, esquecendo-se de transformar dez décimos em unidades.
- Aluna D e aluno C: 0,8 + 0,5 = 0,13. Pode-se concluir que os alunos não dominam as regras para se operar com números com vírgulas. Eles realizam de maneira independente as operações da parte inteira e da parte decimal. Ainda não construíram o conceito que a cada 10 décimos, forma-se uma unidade.
- Um aluno armou a conta, mas não conseguiu uma forma de escrever a resposta, os demais alunos responderam corretamente ao item b.

Pérez (1997) afirma que erros desse tipo servem para mostrar que os alunos não dominam convenientemente o sistema de numeração decimal. Reforça, ainda, que isso se repete com mais frequência na escrita de números decimais menores que a unidade.

Respostas obtidas para o item c)

- Aluno F e aluno E : 2,5 + 0,5 + 0,7 = 37. Pode-se concluir que os alunos ignoraram a vírgula e realizaram as contas como se estivem lidando com números inteiros.
- Aluna B: 2,5 + 0,5 + 0,7 = 2,7. Como aconteceu no item b, percebe-se que a aluna reconhece que precisa fazer uma transformação de décimos em unidades, porém, mesmo escrevendo o valor acima dos algarismos das unidades, não opera com ele.
- Aluno C: 2,5 + 0,5 + 0,7 = 2,17. Conforme ocorreu no item b, o aluno somou de maneira independente a parte inteira e a parte decimal.
- Um aluno armou a conta, mas não conseguiu escrever a resposta, os demais alunos responderam corretamente ao item c.

Respostas obtidas para o item d)

- Aluna A: 2,746 + 0,92 = 28,38. Observa-se que quando os valores a serem somados não possuem a mesma quantidade de casas decimais, a aluna faz como se estivesse operando com números inteiros e utiliza a vírgula na casa que está mais próxima dos últimos valores.
- Aluna B, aluno E e aluno C: 2,746 + 0,92 = 2,838. Observa-se que quando os valores a serem somados não possuem a mesma quantidade de casas decimais, os alunos operam como se estivessem trabalhando com números inteiros e utilizam a vírgula na casa que está mais próxima dos primeiros valores.
- Um aluno armou a conta, todavia não escreveu a resposta, os demais alunos responderam corretamente ao item d.

Respostas obtidas para o item e)

- Alunos A, B, C, D e E: 4 + 0,013 = 0,017. Da mesma forma como aconteceu no item anterior, quando os valores a serem somados não possuíam a mesma quantidade de casas decimais, os alunos operaram como se estivessem trabalhando com números inteiros e utilizaram a vírgula na posição que se encontrava no número decimal.
- Um aluno não fez e uma aluna respondeu corretamente.

Respostas obtidas para o item f)

- Aluna B: 8,2 - 1,1 = 9,1. Pode-se concluir que embora se tratando de uma operação simples de subtração de números decimais que não necessitava fazer nenhuma transformação, a aluna subtraiu a parte decimal e somou a parte inteira.
- Um aluno se recusou a fazer, dizendo que estava cansado e os demais alunos responderam corretamente ao item f.

Respostas obtidas para o item g)

- Alunos A, C e E: 4,92 - 0,48 = 4,56. Observa-se que os alunos realizaram as subtrações retirando o menor valor do maior não importando se estava no minuendo ou no subtraendo.
- Um aluno não fez, duas alunas fizeram corretamente e uma aluna obteve a resposta 5,05 sem apresentar um padrão de erro.

Respostas obtidas para o item h)

- Alunas A e B: 3,8 - 1,513 = 1,543. As alunas não conhecem as regras das operações e, também, não captaram as ideias de que nos números decimais para se realizar subtrações necessita-se escrever vírgula embaixo de vírgula. Armaram a conta e para chegar ao resultado, subtraíram o menor valor do maior, não importando se estavam no minuendo ou no subtraendo e, após, posicionaram a vírgula onde ela se encontrava.
- Aluno E: 3,8 - 1,543 = 2257. Fez corretamente a subtração, no entanto esqueceu-se de posicionar a vírgula.
- Alunos C e G: 3,8 - 1,543 = 2,343. Armaram corretamente a conta, subtraíram os inteiros e os décimos e repetiram os centésimos e milésimos, esquecendo-se que para realizar subtrações os números necessitam ter a mesma quantidade de casas decimais.
- Dois alunos decidiram não resolver esse item.

Respostas obtidas para o item i)

- Alunos C, E e G: 2,456 - 0,9 = 2,556. Pode-se concluir que embora tendo armado a conta corretamente, verificaram que precisavam transformar uma unidade em décimos, no entanto, não diminuíram a unidade que foi transformada.
- Alunas A e B: 2,456 - 0,9 = 2,453. Armaram a conta como se estivessem operando com números inteiros e subtraíram o menor valor do maior. Aconteceu o mesmo problema do item h.
- Dois alunos não fizeram esse item.

Respostas obtidas para o item j)

- Alunos B,C e G: 5 - 0,345 = 5,345. Subtraíram a parte inteira e repetiram a parte decimal, não perceberam que fizeram uma subtração e ficaram com um valor maior ainda.
- Aluna A: 5 - 0,345 = 5,340. Subtraiu o inteiro dos milésimos.
- Três alunos decidiram não resolver o item, alegando que estava muito complicado.

Questão 3: 2 inteiros e sete milésimos é igual a A)2,7 B)2,07 C)2,007 D)2,0007

- Alunas A e G: Assinalaram o item A, demonstrando que não conhecem a nomenclatura referente às casas decimais.
- Alunos C e E: Assinalaram o item D, demonstrando que desconhecem a nomenclatura referente às casas decimais.
- Duas alunas assinalaram a resposta corretamente, no entanto, não tinham segurança de que era a resposta correta, e um aluno preferiu não assinalar nenhuma, alegando não saber do que se tratava.

Questão 4:

A leitura correta de 0,049 é

A) quarenta e nove décimos

B) quarenta e nove centésimos

C) quarenta e nove milésimos

D) quatro inteiros e nove décimos

- Apenas uma aluna assinalou corretamente a resposta, mas não tinha consciência se estava certa, tanto assim, que ela errou a questão anterior. Os demais foram marcando, aleatoriamente, e erraram.

De acordo com Pérez (1997), uma boa parte dos alunos pensa que para haver milésimos tem que aparecer três zeros.

Questão 5:

O valor da expressão 1 - (0,8 + 0,08 + 0,008) é A) 0,012 B) 0,113 C) 0,111 D) 0,112

- Alunas A, B e D: Assinalaram o item correto, fizeram a soma corretamente e foram testando quais das alternativas poderiam servir, embora não dominassem a subtração de números decimais.
- Alunos C, E e G: Assinalaram o item B aleatoriamente, sem fazer as contas, e erraram.
- Aluno F: Preferiu não arriscar nenhum palpite, alegando que certamente erraria

Pérez (1997) argumenta que existe uma particular dificuldade para que os alunos compreendam os números decimais. Ela menciona, também, que muitos alunos necessitam de modelos visuais de décimos, centésimos, etc. para entenderem corretamente esses conceitos.

3.1.2 No contexto monetário

Com estas questões, pretende-se investigar se os alunos do 6º ano são capazes de resolver situações problemas que envolvam quantias em dinheiro por se tratar de realidade bem próxima do que é vivenciado por eles.

Observando as respostas fornecidas pelos alunos, pode-se constatar que mesmo em situações mais práticas, que possuíam certo significado para os alunos, eles não conseguiram de forma satisfatória realizar as operações com números decimais.

Questão 2:

Ana Cristina foi a uma lanchonete fazer um lanche. Os preços estavam em um cartaz na parede.

Produto	Valor em R$
Cachorro quente	2,50
Refrigerante	2,00
Suco	1,50
Pão de queijo	1,00
Doce	0,50
Bombom	0,50

Tabela 3.2: Quadro cartaz com preços

Ela comprou um pão de queijo, um suco e um bombom.

a) Quanto ela gastou?

b) Quanto recebeu de troco se deu para pagar uma nota de R$10,00?

Respostas obtidas para o item a

- Alunas A, D e G conseguiram resolver corretamente.
- Aluno C errou, pois considerou o valor do suco R$1,00.
- Os demais alunos não conseguiram acertar a questão. Fizeram os cálculos mentalmente, sem realizar contas. Não foi possível constatar por que responderam : R$5,00 e R$5,50.

Respostas obtidas para o item b

- Alunas A, D e G conseguiram resolver corretamente, pois acertaram o item a.
- Os demais alunos não conseguiram acertar a questão, pois erraram o item a, no entanto, responderam de forma coerente com a resposta que forneceram no item anterior.

Questão 6:

Minha despesa em um restaurante foi de R$ 16,27. Se paguei com duas notas de R$ 10,00, quanto devo receber de troco?

- Nenhum aluno acertou, pois pegaram 20 reais e subtraíram 16 reais e somaram com 27 centavos, alguns escreveram 72 no lugar de 27 centavos, por engano.

Questão 8:

Os alunos irão receber 10 moedas, feitas de papel, de cada tipo (R$0,05; R$0,10; R$0,25; R$0,50 e R$1,00).

Os alunos devem descobrir quanto possuem em moedas. Caso prefiram podem preencher a tabela abaixo para facilitar os cálculos.

Tipo da moeda	Valor de 10 moedas
R$0,05	
R$0,10	
R$0,25	
R$0,50	
R$1,00	
Total	

Tabela 3.3: Quadro para resolução da questão 8

- Aluna A: Conseguiu resolver corretamente a questão, fazendo uso da tabela.
- Alunos C e E: Erraram a resposta, pois se esqueceram de somar os 50 centavos referentes às dez moedas de 5 centavos.
- Os demais alunos não conseguiram acertar a questão, acertaram apenas qual o valor correspondente a dez moedas de 1 real.

3.1.3 No contexto das medidas

Com estas questões, pretende-se pesquisar se os alunos do 6° ano resolvem situações problemas envolvendo medidas de comprimento e de massa.

Observando as respostas produzidas pelos alunos verifica-se que eles não possuem um conhecimento muito consistente, ora erram, ora acertam, no entanto, cometem menos erros em comparação com as questões no contexto matemático.

Questão 7:

Veja a seguir os números de uma competição de lançamento de peso. Os resultados obtidos pelas quatro primeiras classificadas foram os seguintes:

Ana Clara .... 9,23 metros

Ana Cristina.......................... 8,4 metros

Tânia .... 9,37 metros

Joselaine .... 8,35 metros

De acordo com os resultados acima, preencha a tabela abaixo.

Classificação	Nome
1º lugar	
2º lugar	
3º lugar	
4º lugar	

Tabela 3.4: Quadro para resolução da questão 7

- Alunas A e D: Completaram corretamente a tabela de acordo com a classificação na competição.
- Alunos C, E, F e G: Não conseguiram descobrir que para comparar decimais é necessário completar as casas decimais para não cometer enganos. Pensaram que 8,4 era menor que 8,35.
- Aluna B: Apenas copiou os nomes na ordem que foram passados na questão.

Questão 9:

Quem é mais pesado?

a) João que tem 82,125 kg, ou Maria, que tem 82,1 kg?.....................................

b) Cláudio que tem 78,12kg,ou Jéferson,que tem 79,12 kg?...............................

c) Jorge que tem 69,129 kg, ou Cristina, que tem 69,121 kg?............................

d) Lucas que tem 78,12 kg, ou Júnior, que tem 78,2 kg?....................................

- Aluna A: Errou apenas o item a (distração).
- Aluna B: Respondeu a todos os itens corretamente.
- Aluno E: Errou apenas o item d (não completou as casas decimais para fazer corretamente a comparação).
- Aluna D: Errou apenas o item d (não completou as casas decimais para fazer corretamente a comparação).
- Aluno F: Alegando cansaço não respondeu
- Aluno C: Acertou a e d e justificou nos itens b e d que as duas pessoas tinham o mesmo peso. Item b (mesma parte decimal) e item d(mesma parte inteira)
- Aluna G: Respondeu a todos os itens corretamente.

Questão 10:

Quem é maior?

a) Lídia que tem 1,52 m, ou Renata, que tem 1,53 m?......................................

b) Rodolfo que tem 1,69 m, ou Mário que tem 1,6 m?..

c) Neto que tem 1,85 m, ou Nina, que tem 1,9 m?...

d) Maria que tem 1,72 m, ou Liz, que tem 1,71 m?...

- Alunas A e B: Responderam a todos os itens corretamente.
- Aluno E: Errou apenas o item c (não completou as casas decimais para fazer corretamente a comparação).
- Aluna D: Errou apenas o item d (não completou as casas decimais para fazer corretamente a comparação).

- Aluno F: Alegando cansaço não respondeu
- Aluno C: Confundiu-se um pouco, pois comparou cada item com os demais. Disse que os da letra a eram os baixos, no entanto não disse qual era a mais baixa das duas. Comparou o item b com o item d. Errou o item c. Errou o item d.
- Aluna G: Errou apenas o item c (não completou as casas decimais para fazer corretamente a comparação) e o d, por distração.

Capítulo 4

Atividades e Estratégias Para o Ensino de Números Decimais Utilizando Materiais Didático-Pedagógicos

A expressão número decimal será usada aqui para fazer referência aos números que são escritos com uma ou mais casas decimais, ou seja, a um numeral representado com vírgula.

Observa-se que nos últimos anos o estudo dos números decimais tem apresentado maior destaque que o dos números fracionários em razão do emprego das calculadoras. Além disso, os números com vírgula aparecem em diversas situações do cotidiano.

4.1 Emprego do material dourado para o ensino-aprendizagem dos números decimais

O Material Dourado é uma criação da médica e educadora italiana Maria Montessori (1870 - 1952), para auxiliar no ensino da matemática às crianças que apresentavam dificuldades de aprendizagem.

Esse material fez muito sucesso, então,os professores começaram a utilizá-lo em sala de aula para trabalhar as estruturas do Sistema de Numeração Decimal, os algoritmos das quatro operações fundamentais, conceitos geométricos, frações, números decimais, porcentagem, áreas e volumes com todos os alunos.

O nome material dourado deve-se à versão original que era feita com contas douradas. Quando passou a ser produzido de forma industrial, esse material começou a ser fabricado em madeira mantendo, no entanto, o nome original. O material é constituído por cubinhos, barras, placas e o cubo, apresentando as regras de agrupamento na base 10.

A manipulação e o uso desse recurso podem reforçar a noção de troca no sistema posicional.

O material dourado propicia aos alunos o descobrimento das relações entre as peças, como por exemplo, uma barra é formada por dez cubinhos, uma placa por dez barras e o cubo por dez placas.

Inicialmente, o contato da criança com o material dourado deve acontecer de forma lúdica para que ela perceba a forma, a constituição, os tipos de peças do material e as relações que se podem estabelecer entre elas.

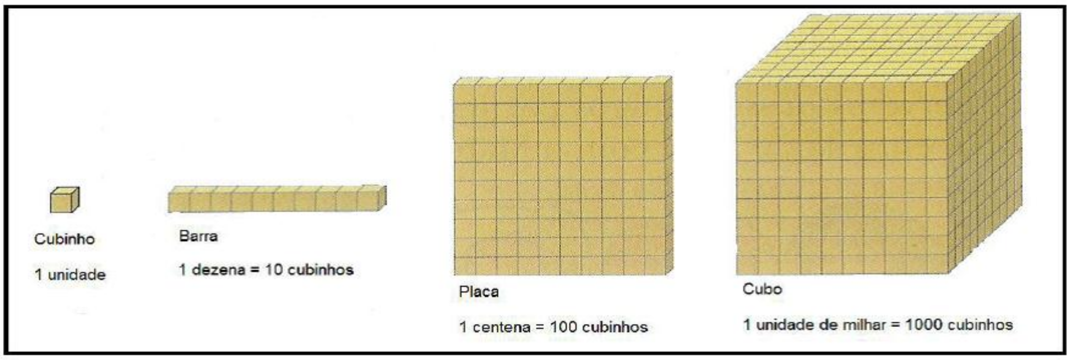


Figura 4.1: Representação de peças do material dourado.
Fonte: www.fecilcam.br - Acesso em 21.02.13, 17 h.

Os agrupamentos e reagrupamentos devem acontecer de modo gradativo, iniciando pelas unidades (cubinhos), passando para as dezenas (barras), depois pelas centenas (placas) e por último pela milhar (cubo).

A passagem de uma ordem para outra só deve acontecer quando a criança tiver compreendido o significado desses agrupamentos no Sistema de Numeração Decimal para depois aplicá-lo nas técnicas operatórias das operações fundamentais e, também, no estudo dos números decimais.

Pode-se utilizar o cubo para representar um inteiro (1), a placa para representar um décimo (0,1), a barra para representar um centésimo (0,01) e o cubinho para representar um milésimo (0,001).

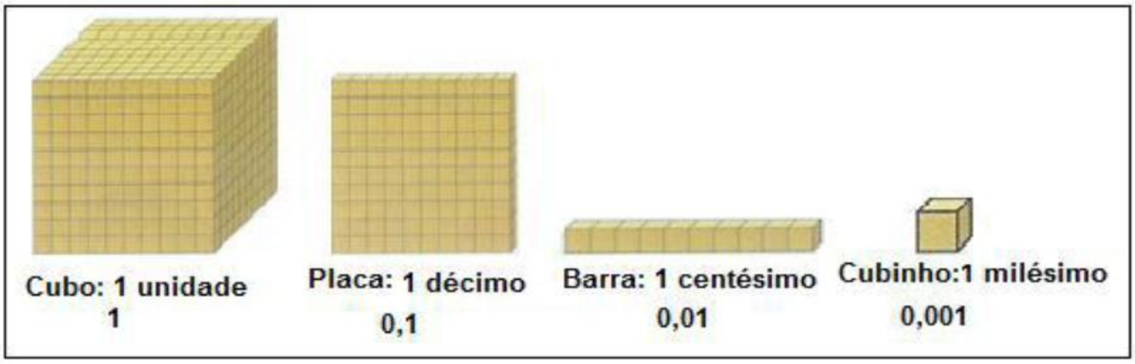


Figura 4.2: Números decimais com peças do material dourado.

Fonte: www.fecilcam.br - Acesso em 21.02.13, 17 h 10 min.

ATIVIDADE 1

Objetivos

- Manusear livremente o material.
- Descobrir relações entre as peças e os números decimais.
- Representar números decimais utilizando o material dourado.
- Resolver as operações com números decimais usando o material.

Antes da realização das atividades o professor pode sugerir que os alunos organizem algumas montagens, como: uma barra feita de cubinhos; uma placa feita de cubinhos, uma placa feita de barras, etc.

Para estimular os alunos a obterem algumas conclusões podem ser feitos questionamentos,como: Quantos cubinhos são necessários para se formar uma barra? E quantos formarão uma placa?

Considere o cubo como uma unidade; a placa como 0,1 (um décimo); a barra como 0,01 (um centésimo) e o cubinho como 0,001 (um milésimo).

I- Escreva as representações abaixo na forma decimal e registre, por extenso, a leitura das mesmas.

Fonte: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br - Acesso em 21.02.13, 17 h 10 min.

a)

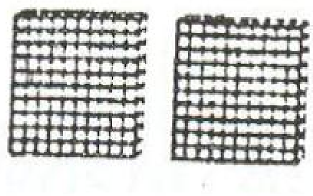


Figura 4.3: Representação de peças do material dourado.

b)

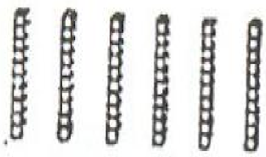


Figura 4.4: Representação de peças do material dourado.

c)

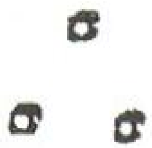


Figura 4.5: Representação de peças do material dourado.

d)

Figura 4.6: Representação de peças do material dourado.

e)

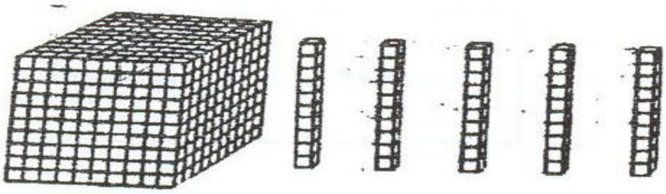


Figura 4.7: Representação de peças do material dourado.

II- Represente os números abaixo utilizando o material dourado.

a) 1,6

b) 0,8

c) 0,14

d) 2,32

e) 1,043

III- Efetue as operações indicadas utilizando o material dourado e represente os resultados utilizando números decimais.

a) 0,2 + 0,5 =

b) 0,8 + 0,6 =

c) 1,3 + 0,7 =

d) 3,4 + 2,1 =

e) 0,124 + 0, 462=

Observação: Quem não puder adquirir o material dourado industrializado pode confeccioná-lo de papel cartão ou emborrachado.

4.2 Emprego do ábaco para o ensino-aprendizagem dos números decimais

O ábaco é um material usado como recurso para o ensino-aprendizagem de Matemática para desenvolver atividades envolvendo o Sistema de Numeração Decimal. Esse material é de origem oriental e tem como referência as contagens realizadas por povos antigos. Pode ser utilizado para facilitar o ensino de números decimais da mesma forma que o material dourado.

Há vários tipos de ábacos, mas todos obedecem, basicamente, aos mesmos princípios. No ábaco horizontal, em uma moldura de madeira são fixados alguns fios de arame. Dez bolinhas correm em cada fio. As do 1º fio representam as unidades; as do 2º fio representam as dezenas; as do 3º fio, as centenas, e assim por diante. E, quando adaptado para se trabalhar com números decimais, no 1º fio anterior ao das unidades, as bolinhas representam os décimos; no 2º fio, os centésimos; no 3º fio, os milésimos, etc. No ábaco de pinos, são fixadas várias hastes em uma base de madeira. Em cada uma dessas hastes são colocadas as peças referentes às contagens. Quando a contagem atinge dez peças, elas são trocadas por uma peça da ordem imediatamente superior. O ábaco de pinos (Figura 4.8) apresenta uma vantagem em relação ao ábaco horizontal (Figura 4.9), pela possibilidade de movimentação das peças, que podem ser retiradas e não apenas movidas de um lado para o outro.

Figura 4.8: Ábaco de pinos.

Fonte: http://ensinando-matemática.blogspot.com.br - Acesso em 21.02.13, 17 h 15 min.

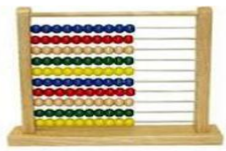


Figura 4.9: Ábaco horizontal.

Fonte: http://pitagoras.blogspot.com.br - Acesso em 21.02.13, 17 h 20 min.

ATIVIDADE 2

Objetivos

- Manusear livremente o material.
- Descobrir relações entre as peças e os números decimais.
- Representar números decimais utilizando o ábaco.
- Resolver as operações com números decimais usando o material.

I- Represente os números abaixo utilizando o ábaco.

a) 1,3

b) 0,7

c) 0,12

d) 3,325

e) 1,03

II- Efetue as operações indicadas utilizando o ábaco e represente os resultados através de números decimais.

a) 0,12 + 0,35 =

b) 0,8 + 0,7 =

c) 1,3 + 9,8 =

d) 3,4 + 8,5 =

e) 0,09 + 0,05=

4.3 Jogos com cartas

4.3.1 Jogo das famílias

ATIVIDADE 3

Objetivos

- Revisar simplificação de frações.
- Conhecer diferentes formas de representação dos racionais positivos.
- Saber transformar uma fração em número decimal.
- Reconhecer a representação de uma fração pela parte colorida de uma figura.

Descrição do material: 48 cartas com 12 valores diferentes, cada um expresso de quatro maneiras distintas.

- Fração irredutível
- Número decimal
- Parte sombreada de uma tira, placa ou cubo
- Divisão correspondente

Número aconselhável de Jogadores: 4 a 6

Objetivo do jogo: reunir tantas famílias quanto possível com as 4 cartas de mesmo valor, com diferentes representações.

Regras:

- Distribuem-se 4 cartas para cada jogador, e as que sobrarem ficam numa pilha.
- O jogador que começa (A) pede a outro qualquer (B) uma carta da mesma família que ele possua. Por exemplo, se o jogador possui 0,1 pode solicitar a outro jogador a fração correspondente (1/10) ou a figura pintada ou a divisão (1 : 10).
- Se o jogador (B) tiver a carta, ele deverá doá-la ao jogador A. Então, o jogador poderá continuar, solicitando uma carta a outro jogador (C). Se o jogador (C) a possui, deverá entregá-la ao jogador (A). Caso o jogador (C) não tenha, o jogador (A) deverá tirar uma carta da pilha e passar a vez ao jogador seguinte.
- Caso algum jogador complete uma família de cartas, deverá coloca-la sobre a mesa e continuar jogando.
- O jogo continua até que acabem de formar todas as famílias. Ganha quem tiver formado mais famílias (SILVA, 2006, p.226).

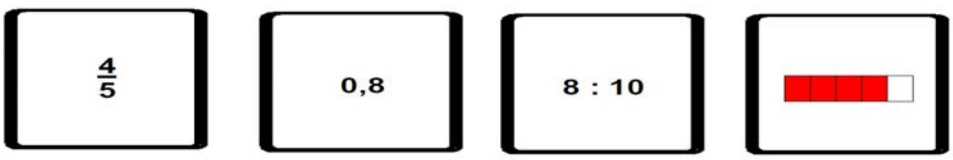


Figura 4.10: Modelos de Cartas Jogo das Famílias.

4.3.2 Jogo das representações decimais

ATIVIDADE 4

Objetivo

- Comparar números racionais na representação decimal.

Planejamento

- Organizar grupos com 4 alunos
- Serão necessárias cartas com diferentes números decimais para cada grupo

Encaminhamento

- Explicar para os alunos que irão utilizar um jogo bastante interessante e que farão comparação de números racionais na representação decimal.
- Discutir as regras do jogo com os alunos e se necessário distribuir as regras para todos os grupos.
- Observar os grupos enquanto jogam para verificar se está acontecendo discordância na comparação dos números.
- Registrar as dúvidas que considerar importantes para trabalhar com os alunos posteriormente.

Material necessário

- 28 cartas

Regras

- Embaralhar as cartas e distribuir entre os 4 jogadores. A face marcada com os números deve ficar virada para a mesa.
- Simultaneamente os jogadores viram uma carta mostrando os números.
- Quem tiver a carta com o maior valor leva as 4 cartas.
- O jogo termina quando acabarem todas as cartas. O vencedor será aquele com maior número de cartas

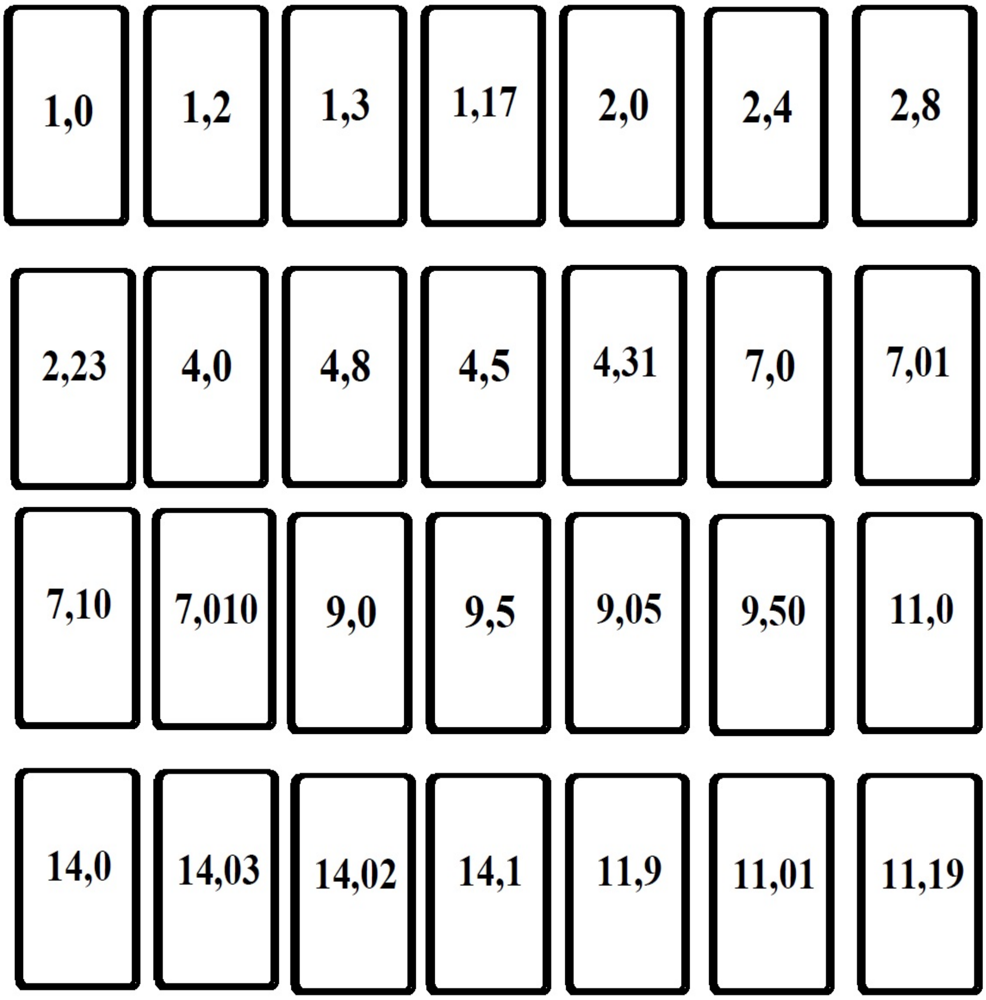


Figura 4.11: Cartas Jogo das Representações Decimais.

4.4 Dominó

O dominó é um jogo formado por peças retangulares, com o formato de paralelepípedos, em que uma das faces está marcada por pontos indicando valores numéricos.O jogo surgiu na China e sua criação é atribuída a um soldado chinês chamado Hung Ming, que viveu de 243 a.C. a 182 a.C.

O conjunto tradicional de dominós é formado por 28 peças ou pedras. Uma face maior do dominó é dividida em dois quadrados que são marcadas por pontos de zero a seis.

O jogo de dominó pode ser adaptado para o ensino de vários conteúdos matemáticos. Basta que o local em que estejam marcados os pontos seja substituído pelo conteúdo desejado.

4.4.1 Dominó Matemático: números decimais

ATIVIDADE 5

Objetivo

- Identificar a escrita de um número racional na representação decimal.

Planejamento

- Organizar grupos com 5 alunos (no máximo).

Regras

- Embaralhar as peças e virá-las para que a face escrita fique voltada para a mesa.
- Cada jogador deve retirar duas peças e as restantes formarão uma pilha no centro da mesa.
- Fazer um sorteio para decidir a ordem dos jogadores. O 1º jogador coloca na mesa uma de suas peças.
- O 2º jogador deve procurar entre suas peças, um número ou uma leitura de número, que represente uma das partes da peça colocada na mesa. Caso não encontre deve pegar da mesa até encontrar o que necessita.
- Os jogadores seguintes devem proceder da mesma maneira, procurando um número ou leitura de número correspondente aos lados livres das peças.
- Quando o jogador não encontrar na pilha uma peça que sirva para ele, fica sem jogar, aguardando a próxima jogada.
- Será o vencedor quem primeiro conseguir se livrar de todas as peças.

Material necessário

- 28 peças duplas

Observação: O dominó poderá ser construído em papel cartão e depois plastificado para evitar que as peças fiquem deterioradas com o manuseio pelos alunos.

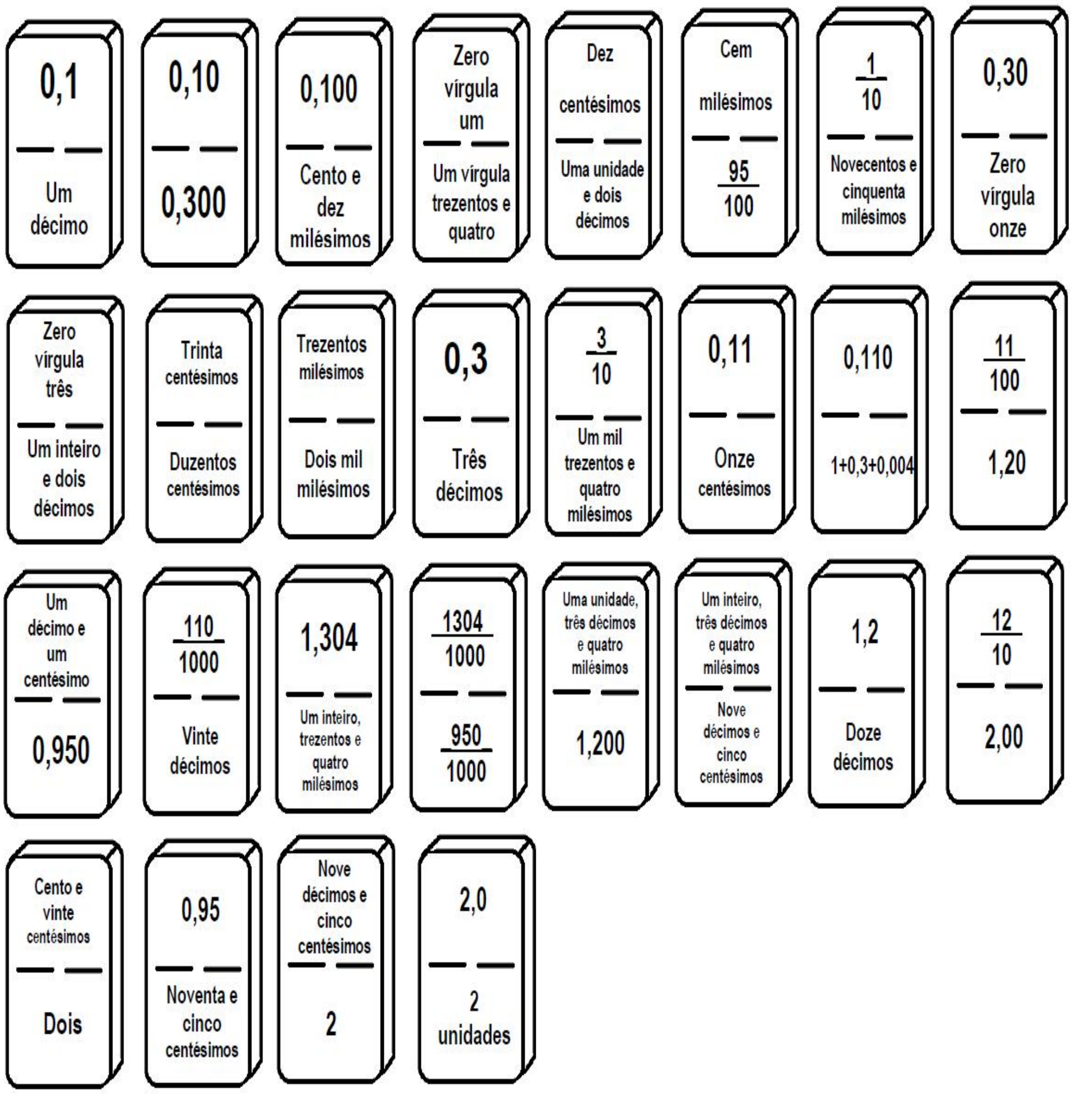


Figura 4.12: Peças do dominó matemático.

4.5 Jogo dez não pode decimal

ATIVIDADE 6

Objetivo

- Identificar a escrita de um número racional na representação decimal.

Número de Participantes: 2 a 5

Material : Material Dourado, dois dados, lápis e papel.

Regras

- Posicionar o Material Dourado no centro da mesa, ao alcance de todos, ou então, com algum aluno, fazendo o papel de "caixa".
- Cada aluno, na sua vez, joga os dados. Deverá pegar tantos cubinhos (milésimos) quantos forem os pontos dos dados.
- Quando juntar dez elementos iguais, deverá trocá-los por um elemento que tenha o valor equivalente ao dez. Assim, dez cubinhos (milésimos) serão trocados por uma barrinha (centésimo), dez barrinhas serão trocadas por uma placa (décimo) e dez placas serão trocadas por cubo (unidade).
- Cada jogador deve registrar os valores correspondentes a cada jogada.
- Vence quem chegar primeiro a um número combinado antecipadamente ou, então, quem tiver mais pontos depois de um tempo estipulado previamente (GRASSESCHI, 1999, p.127).

Observação 1: Quem preferir pode construir o Material Dourado Planificado usando papel cartão. Nesse caso, um quadradinho representará um milésimo; uma tirinha, um centésimo; um quadrado, um décimo; para representar a unidade pode ser construído um cubo de papel ou utilizar um "amarrado"de 10 quadrados.

Observação 2: Os materiais e atividades sugeridos foram empregados como motivadores e facilitadores do processo ensino - aprendizagem de números racionais.

Considerações Finais

O presente trabalho foi de suma importância por ter-nos possibilitado a oportunidade de aprofundamento dos conhecimentos em relação ao ensino-aprendizagem dos números racionais tendo como base as pesquisas de diversos estudiosos, além da análise dos acertos e erros cometidos pelos alunos durante a realização das atividades.

Pelo estudo realizado, pode-se perceber que grande parte dos problemas encontrados na aprendizagem dos números racionais com representação decimal, é consequência da falta de conexões estabelecidas com o sistema de numeração decimal. Os alunos não são preparados no sentido de conhecerem as relações existentes entre os números racionais decimais e o nosso sistema de numeração, fato que interfere na construção dos conceitos, levando ao conhecimento de técnicas algorítmicas e regras para operar com esse tipo de número sem saber justificar por que são realizadas dessa forma. As operações são feitas de maneira puramente mecânica demonstrando um conhecimento baseado no treino e na memorização de regras, que induzem ao erro, quando não bem assimiladas ou parcialmente esquecidas.

A análise do teste diagnóstico mostra que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram decorrentes da apropriação do conhecimento que eles possuem a respeito de números decimais, destacando que a maioria deles não conhece o significado da vírgula, pois operaram com os números como se fossem naturais/inteiros. Tal fato demonstra que os alunos não fazem as conexões necessárias entre os conhecimentos adquiridos com relação ao sistema posicional decimal e os cálculos envolvendo racionais na forma decimal. Mesmo em situações práticas que envolviam valores em dinheiro, a maior parte dos alunos comete erros ao lidar com os centavos. Quanto ao cálculo envolvendo medidas, apresentaram menos erros do que no contexto matemático sem aplicação.

O uso de material manipulativo diversificado colabora para a construção do conhecimento por parte do aluno, porém, cabe ressalvar que o papel do professor é fundamental em atividades nas quais são utilizados materiais didático-pedagógicos, pois o material sozinho não garante o aprendizado significativo do aluno. Compete ao professor elaborar atividades e promover questionamentos objetivando alcançar a apropriação do saber.

Destaca-se também a quantidade excessiva de regras para se operar com números decimais, pois dificultam a aprendizagem, tornando-se mais produtivo utilizar estratégias que possibilitem ao aluno uma compreensão sólida do valor posicional e uma conexão entre decimais e frações. Convém ressaltar, também, que o domínio de cálculo com estimativas proporciona ao aluno a focagem do pensamento no significado do número e das operações e, não, em regras prontas que podem ser esquecidas.

É necessário salientar que os alunos devem ser estimulados a utilizar tanto a representação fracionária quanto a decimal, fazendo uso de materiais pedagógicos como ábacos, material dourado, jogos, etc., para que consigam atingir um aprendizado mais consistente.

O aluno estrutura seu conhecimento sobre números naturais/inteiros de maneira progressiva, partindo da construção do conceito de número até as operações. Para conseguir compreender os números racionais, necessita fazer generalizações e ampliar os conceitos sobre números num contexto em que realiza menos experiências concretas. Daí a importância da manipulação de materiais que facilitem a apropriação dos conceitos, e da aplicação de atividades que simulem situações reais levando à descoberta de princípios, dentro da capacidade de compreensão do aluno.

Percebe-se, pelo estudo, que é relevante o aluno utilizar adequadamente a linguagem que remete ao registro decimal do número racional e consiga interpretar o significado das expressões verbais, avançando de maneira segura para a realização do registro formal dessas ideias.

Deve-se levar em consideração que os racionais na forma decimal aparecem em mostradores de calculadoras, nas quantias em dinheiro (reais e centavos), nos preços de mercadorias, no registro das medidas usuais, na sinalização de pontos nos esportes e, até mesmo, em situações muito próximas da vida escolar, como nas notas recebidas em trabalhos ou provas.

Desta forma o trabalho com esse tipo de representação não é difícil de ser contextualizado em situações reais. É importante ressaltar que para motivar e iniciar a aprendizagem esses referenciais são muito úteis, porém, a assimilação dos conceitos matemáticos escolares pode garantir ao aluno a apropriação de novos saberes necessários à vida de modo a romper os limites do conhecimento cotidiano.

Torna-se importante destacar que o sucesso no trabalho com os racionais na forma decimal depende dos fundamentos adquiridos no estudo do sistema de numeração decimal (base 10), pois princípio posicional, valores absoluto e relativo dos algarismos, conceito de ordem, etc., constituirão a base tanto para o registro na representação decimal como na realização das operações envolvendo esse tipo de número.

Referências Bibliográficas

ALVES, W. M. C. (coord.). **Guia Curricular de Matemática**: ciclo básico de alfabetização, ensino fundamental. v. 2. Belo Horizonte: SEE/MG, 1997.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática Através dos Tempos**: um guia fácil e prático para professores entusiastas. Tradução: Elza Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos e Fundamentos da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1958.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.** Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2007.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática escolar e matemática na vida cotidiana.** Campinas, SP: Autores Associados, 1999.

GRASSESCHI, M. C. C. et al. **PROMAT**: projeto oficina de matemática. São Paulo: FTD, 1999.

GUELLI, O. **A Invenção dos Números.** São Paulo: Ática, 1992.

GUNDLACH, B. H. **Números e Numerais.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, G. **Os Números: a história de uma grande invenção.** Traduação: Stella Maria de Freitas Senra. 7. ed. São Paulo: Globo, 1994.

IMENES, L. M. **Os números na história da civilização.** São Paulo: Scipione, 1989.

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** v. 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, J. N. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

MEIRIEU, P. **Aprender ... sim, mas como?** Tadução: Vanise Pereira Dresch. 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.** 10. ed. Campinas: Papirus, 2010.

NERI, C.; CABRAL, M. **Curso de Análise Real.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2006.

NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais.** Tradução: Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

PEREIRA, T. M. (org.). **Matemática nas séries iniciais.** 2.ed. Ijuí: UNIJUÍ, 1989.

PÉREZ, J. C. **Numeros Decimales. Por qué? Para qué?** Madrid: Sintesis, 1997.

PITOMBEIRA, J. ; ROQUE, T. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

RIBEIRO, C. M. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações. **Educação e Pesquisa**, agosto 2011, v. 37, n. 2, p.407-422. ISSN 1517-9702. Universidade de São Paulo.

RIBEIRO, C. M. Conhecimentos Matemáticos para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. **Bolema.** Rio Claro/SP: ano 22, n. 34, p. 1-26, 2009.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SACRISTÁN, J. G.; GÓMEZ, A.I. P. **Compreender e transformar o ensino.** Tadução: Ernani F. da Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTOS, V. M. P. (coord. E org.). **Avaliação da aprendizagem e raciocínio em Matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

SILVA, A. L. V. et al. **Matemática na Educação 2.** v. 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006.

SMITH, D. E. **History of Mathematics.** v. 2. Special Topics of Elementary Mathematics. New York: Dover, 1958.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Apêndice

Sequência de Atividades

Questão 1: Efetue.

a)0,74 + 0,25	b)0,8 + 0,5	c)2,5 + 0,5 + 0,7	d)2,746 + 0,92	e)4 + 0,013
f)8,2 - 1,1	g) 4,92 - 0,48	h)3,8 - 1,543	i)2,456 - 0,9	j)5 - 0,345

Questão 2:

Ana Cristina foi a uma lanchonete fazer um lanche. Os preços estavam em um cartaz na parede.

Produto	Valor em R$
Cachorro quente	2,50
Refrigerante	2,00
Suco	1,50
Pão de queijo	1,00
Doce	0,50
Bombom	0,50

Ela comprou um pão de queijo, um suco e um bombom.

a) Quanto ela gastou?

b) Quanto recebeu de troco se deu para pagar uma nota de R$ 10,00?

Questão 3: 2 inteiros e sete milésimos é igual a A)2,7 B)2,07 C)2,007 D)2,0007

Questão 4:

A leitura correta de 0,049 é

A) quarenta e nove décimos

B) quarenta e nove centésimos

C) quarenta e nove milésimos

D) quatro inteiros e nove décimos

Questão 5:

O valor da expressão 1 - (0,8 + 0,08 + 0,008) é A) 0,012 B) 0,113 C) 0,111 D) 0,112

Questão 6:

Minha despesa em um restaurante foi de R$16,27. Se paguei com duas notas de R$10,00, quanto devo receber de troco?

Questão 7:

Veja a seguir os números de uma competição de lançamento de peso. Os resultados obtidos pelas quatro primeiras classificadas foram os seguintes:

Ana Clara .... 9,23 metros

Ana Cristina......................... 8,4 metros

Tânia .... 9,37 metros

Joselaine .... 8,35 metros

Classificação	Nome
1º lugar	
2º lugar	
3º lugar	
4º lugar	

Questão 8:

Os alunos irão receber 10 moedas, feitas de papel, de cada tipo (R$0,05; R$0,10; R$0,25; R$0,50 e R$1,00).

Os alunos devem descobrir quanto possuem em moedas. Caso prefiram podem preencher a tabela abaixo para facilitar os cálculos.

Tipo da moeda	Valor de 10 moedas
R$0,05	
R$0,10	
R$0,25	
R$0,50	
R$1,00	
Total	

Questão 8:

Os alunos irão receber 10 moedas, feitas de papel, de cada tipo (R$0,05; R$0,10; R$0,25; R$0,50 e R$1,00).

Os alunos devem descobrir quanto possuem em moedas. Caso prefiram podem preencher a tabela abaixo para facilitar os cálculos.

Tipo da moeda	Valor de 10 moedas
R$0,05	
R$0,10	
R$0,25	
R$0,50	
R$1,00	
Total	

Questão 10:

Quem é maior?

a) Lídia que tem 1,52 m, ou Renata, que tem 1,53 m?......................................

b) Rodolfo que tem 1,69 m, ou Mário que tem 1,6 m?..

c) Neto que tem 1,85 m, ou Nina, que tem 1,9 m?..

d) Maria que tem 1,72 m, ou Liz, que tem 1,71 m?..