Elza Maria Dos Santos do Prado

Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Setembro de 2014

Elza Maria Dos Santos do Prado

Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sergio Dias da Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Setembro de 2014

Elza Maria Dos Santos do Prado

Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 5 de setembro de 2014

Profª Liliana Angelina Léon Méscua.
D.Sc. - UENF

Prof. Mikhail Petrovisch Vishnhevskii.
D.Sc. - UENF

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Prof. Dr. Paulo Sergio Dias da Silva
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a todos os professores que, com empenho e seriedade, fazem a diferença na vida de seus alunos.
E a minha mãe; por ser meu exemplo, minha força, minha inspiração e minha melhor amiga.

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus, por iluminar o meu caminho, renovar as minhas forças e me conceder essa oportunidade.

Aos meus pais, porque sempre investiram na minha educação e acreditaram nos meus sonhos.

De modo especial agradeço à minha mãe, Angela, por ser minha incansável companheira, minha razão e meu motivo. A minha força e a minha doçura.

Ao meu orientador, professor Paulo Dias, pela atenção e carinho, e a todos os professores do PROFMAT UENF pela aprendizagem.

À minha família e amigos; pela torcida, orações e palavras de apoio. Aos meus padrinho, por se fazerem presente sempre que preciso. Aos colegas de trabalho, pelas experiências trocadas.

Aos meus alunos, que despertam em mim a vontade de sempre melhorar. E que não fazem ideia do quanto me ensinam!

À todos os professores que tive ao longo da minha formação. Cada um deles deixou contribuições valiosas.

Aos meus amigos de turma no mestrado, sou grata pelo companheirismo, pelos e-mails, pela motivação, pelas risadas, pelos churrascos. Por fazerem esta caminhada menos árdua e muito mais divertida. Aprendi muito com vocês!

À equipe da oncologia e do cti terciário do Hospital São José do Avaí. Sem os cuidados de vocês, seria impossível chegar a esta conquista! De modo especial, agradeço ao Dr Leandro Dutra Peres, por todo empenho e carinho, pela confiança transmitida mesmo nos momentos mais críticos.

Ao José Carlos,por alegrar a minha vida. À Thuanne, por ser essa amiga tão querida que se faz irmã. À Thiara e à Sabrina pela presença, dedicação, carinho e alegria. Que a gente ainda tenha muito pra comemorar juntas! Ao Felipe, por cuidar de mim do seu modo particular. Pela troca de energia sempre que preciso. Ao Jorge, pela paciência, pela torcida, pelos telefonemas e mensagens. Por me aturar e me ouvir. Todos vocês me ajudaram a acreditar que essa conquista era possível!

"Se experimentar prazer com a Matemática,
não a esquecerá facilmente e haverá, então,
uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais:
uma ocupação favorita,
uma ferramenta profissional,
a própria profissão,
ou uma grande ambição."

George Pólya

Resumo

Fator essencial para a aprendizagem de um conteúdo é a forma como ele é apresentado. Este trabalho trata de equações e funções do segundo grau,conteúdos ensinados no nono ano do ensino fundamental. Mas o foco reside na forma de trabalhar esses conteúdos em sala de aula.

Faz-se essencial relacionar esses conteúdos com sua parte história,com um breve relato sobre os matemáticos que deixaram contribuições sobre esse assunto. E também mostrar sua aplicabilidade;desde simples faróis de carros passando pela construção de pontes e o movimento de planetas.

Foram analisados os objetivos traçados pelo Ministério da Educação,com os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Prova Brasil,no que diz respeito a esses conteúdos. O resultado em sala de aula ainda é extremamente insatisfatório.

O livro didático,que ocupa importante papel no processo de ensino e aprendizagem também é analisado. De maneira ampla e profunda pelo MEC e de um modo mais específico neste trabalho.

São expostos alguns fundamentos que serviram como base para a sequência didática elaborada. E a sequência é o ponto alto desse trabalho. Com atividades simples e variadas buscou-se ensinar equações e funções do segundo grau de modo a motivar os alunos, facilitar a compreensão dos conteúdos e despertar o prazer em aprender.

Para isso foram utilizados softwares como o Winplot e o Geogebra. Estimulou-se a criatividade e a capacidade artística em atividades que envolviam a História da Matemática. Construíram-se refletores luminosos e foram mostradas formas diversas de resolver uma mesma equação.

Palavras-chaves: Equação do segundo Grau, Função do segundo grau,Parábola,História da Matemática,Winplot

Abstract

Essential to learning a content factor is the way it is presented. This paper deals with equations and functions of the second degree, content taught in the ninth year of elementary school. But the focus lies on the way to work this content into the classroom ..

It is essential to relate these contents with its history part, with a brief account of the mathematicians who left contributions on this subject. And also show its applicability, from simple headlights of cars passing through the construction of bridges and the movement of planets.

The goals outlined by the Ministry of Education, with the National Curriculum Guidelines and the Exam Brazil, with regard to these contents were analyzed. The results in the classroom is still extremely unsatisfactory.

The textbook, which plays an important role in the teaching and learning process is also analyzed. Broadly and deeply by MEC and more specifically in this work.

Are exposed some fundamentals that were the basis for the instructional sequence developed. And the sequence is the culmination of that work. With simple and varied activities it sought to teach equations and functions of the second degree in order to motivate students, facilitate understanding of the content and arouse pleasure in learning.

For this software like Winplot and Geogebra were used. Stimulated the creativity and artistic ability in activities involving the history of mathematics. Built up bright reflectors and were shown various ways to solve the same equation.

Key-words: Quadratic equation, Second degree Function, Parabola, History of Mathematics, Winplot .

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

MUV	Movimento Uniformemente Variado
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Saeb	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
Inep	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério de Educação e Cultura
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
IPT	Instituto de Pesquisas Tecnológicas
SEB	Secretaria de Educação Básica
DVD	Digital Versatile Disc , em português, Disco Digital Versátil
Saerj	Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro
IFF	Instituto Federal Fluminense

Lista de símbolos

Δ	Letra grega maiúscula Delta
IR	O conjunto dos números reais
Φ	Letra grega maiúscula Phi

Sumário

Introdução

Escolheu-se como tema para este trabalho as equações e funções do segundo grau. Focando no modo que esses assuntos, normalmente ensinados no nono ano do ensino fundamental, são apresentados e trabalhados com os alunos. Ambos possuem diversas aplicações e serão revistos e reutilizados nos anos escolares subsequentes.

Elon Lages afirma em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática nº 13 [29] que:

> Por mais antigo tradicional e reprisado que seja o assunto que estamos ensinando convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história.

Acredita-se que o modo de ensinar um conteúdo não pode ser estático mas, ao contrário, deve acompanhar as mudanças na sociedade e refletir isso em sala de aula. Vive-se em uma época na qual a tecnologia se faz cada vez mais presente. É importante que se faça presente também nas aulas. Atualmente, se espera dos alunos uma postura mais crítica e participativa. Para isso, é essencial desenvolver atividades que explorem essa criatividade e estimulem seu senso crítico. Só assim realmente se ensina e aprende. Só desta maneira os alunos poderão compreender e desmistificar a Matemática.

Reforçando que não basta que os alunos saibam repetir uma "fórmula de Bhaskara" decorada ou traçar o gráfico de uma função do segundo grau pelo simples ligar de alguns pontos. Almeja-se bem mais do que isso. Busca-se que os alunos percebam que a Matemática se faz presente no seu cotidiano.

É importante que desenvolvam seu raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas por meio da análise de dados e façam a escolha do melhor caminho para a solução, que consigam realizar uma análise crítica, que tenham a capacidade de formular hipóteses e de verificar a veracidade delas. Que tenham opções e não sejam reféns da decoreba ou de padrões pré-estabelecidos.

O grande pensador Paulo Freire afirma que "educar é impregnar de sentido o que fazemos a cada instante" [47]. Faz-se Matemática a todo instante e o professor deve impregnar isso de sentido e prazer! Nesta dissertação, a equação e a função quadrática são abordadas por meio da sua história, com contextualizações, aplicações e tecnologia. Para alcançar os objetivos, este trabalho foi organizado em capítulos da seguinte forma:

No primeiro capítulo, fez-se uma breve revisão sobre equações e funções quadráticas incluindo uma resenha histórica e a sua aplicabilidade.

No capítulo dois, são analisados os objetivos traçados pelo Ministério da Educação no que se refere ao ensino de equação e função do quadrática. Também trata-se do Plano Nacional do Livro Didático, responsável pela análise das obras que serão distribuídas às escolas públicas. Neste ponto, foi realizada uma pequena análise de algumas obras no que se refere à apresentação dos conteúdos trabalhados nesta dissertação. Ainda no capítulo dois, os pilares vitais para um bom trabalho em Matemática são abordados, pilares esses sobre os quais a sequência didática foi elaborada.

A sequência didática é apresentada no capítulo três onde também são consideradas as opiniões dos alunos sobre as atividades realizadas e seus resultados são analisados. No final desse capítulo algumas questões sobre equação e função quadrática são apresentadas e resolvidas para demonstrar sua aplicabilidade no nosso cotidiano.

No anexo,é disponibilizado o jornal criado em uma das atividades desta sequência e que recebeu o nome de "O Número."

Capítulo 1

Equação e Função do Segundo Grau:Uma abordagem Matemática e Histórica

Neste capítulo será feita uma breve revisão sobre os conceitos de equações e funções do segundo grau. Inclusive, formas diversas de solucionar as equações quadráticas serão analisadas. É apresentada também uma pequena revisão histórica além da abordagem sobre as aplicações das parábolas no cotidiano

1.1 Equação do segundo grau

A definição para equação encontrada no dicionário Aulete [19] é "sentença matemática de igualdade condicional entre expressões, na qual ao menos uma delas contém no mínimo um termo variável".

Toda equação com uma incógnita (digamos; sem perda de generalidade, x) que **pode ser escrita** na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com **a,b** e **c** números reais e **a** diferente de zero é chamada equação do segundo grau ou equação quadrática. Ela recebe este nome porque seu termo de maior grau tem grau dois.

É importante aqui frisar que a incógnita x foi apenas uma escolha, lembrando que os alunos não devem ficar condicionados ao uso de uma única letra. Deve ser claro para eles que a incógnita pode ser representada pela letra que preferirem.

A igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de forma geral da equação do segundo grau, ou forma reduzida. Os números representados por **a,b** e **c** são os coeficientes desta equação e o coeficiente **a** deve ser diferente de zero para garantir a presença do termo ax^2, que garante que a equação seja do segundo grau. Quando **b** e **c** são diferentes de zero a equação do segundo grau é dita completa. Se pelo menos um dos coeficientes **b** ou **c** é nulo, diz-se que a equação do segundo grau é incompleta.

1.2 Encontrando as Raízes de uma Equação do Segundo Grau

Um número é dito raiz de uma equação se, quando colocado no lugar da incógnita, é obtida uma sentença verdadeira. Dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, um número real que substituído na incógnita x produz a igualdade 0=0 é uma de suas raízes. Pode-se determinar as raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, trabalhando com seus termos de modo a obter uma expressão da forma $(p+q)^2$=0.

A seguir,estarão listados métodos de resoluções de equações do segundo grau incompletas.

1º caso: Equações do tipo $ax^2 - c = 0$

Para resolver esse tipo de equação devem ser seguidas as etapas:

$$ax^2 = c$$
$$x^2 = \frac{c}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

É possível efetuar a divisão por **a** pois já foi garantido que **a** não é zero.

2º caso: Equações do tipo $ax^2 = 0$

Nesse caso, as etapas seguidas serão:

$$ax^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{0}{a}$$
$$x^2 = 0$$

x=0

Como +0 e -0 indicam o mesmo número pode-se afirmar que esse tipo de equação tem sempre duas raízes iguais a zero.

3ºcaso: Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolver esse caso de equação incompleta será usada fatoração e a incógnita x colocada em evidência, obtendo:

$$x(ax+b)=0$$

$$x=0 \text{ ou } ax+b=0$$

$$ax=-b$$

$$x=-\frac{b}{a}$$

$$\text{Raízes } x=0 \text{ ou } x= -\frac{b}{a}$$

Agora, formas de resolver equações completas do segundo grau (ou seja, equações com todos os coeficientes não nulos) serão apresentadas. Uma maneira bastante interessante é completando quadrados.

Se a equação na forma $ax^2+bx+c=0$ já for um trinômio do quadrado perfeito, tudo que é preciso fazer é reescrevê-la como $(px+k)^2=0$. Daí ,concluí-se que:

$$px+k=0$$

$$px=-k$$

$$x=-\frac{k}{p}$$

Mas se a equação $ax^2+bx+c=0$ não for um trinômio do quadrado perfeito, será seguido o procedimento habitualmente conhecido como completar quadrados. Completar quadrados consiste em somar e subtrair termos em ambos os membros de uma equação de modo que um de seus membros se torne um trinômio do quadrado perfeito, ou seja, um trinômio resultante da elevação de um binômio ao quadrado.Para isso, a equação é reescrita na forma $ax^2+bx=-c$ e a ambos os lados é somado um valor k tal que ax^2+bx+k seja um trinômio perfeito.

Para descobrir qual seria esse valor, basta lembrar que, para ax^2+bx+k ser um trinômio do quadrado perfeito, é preciso que ele possa ser reescrito como $(tx+m)^2$ sendo $a=t^2$, b=2tm e $k=m^2$. Portanto, o valor k pode ser encontrado como $(\frac{b}{2t})^2$.

Feito isso tem-se:

$$ax^2+bx+k=c+k$$

$$(tx+m)^2=c+k$$

$$tx+m=\pm\sqrt{c+k}$$

$$x=\frac{\sqrt{c+k}}{t}-m$$

ou

$$x=\frac{-\sqrt{c+k}}{t}-m$$

Na definição só foram trabalhados casos com valores positivos de **a**. Caso a equação tenha o coeficiente **a** negativo, ela pode ser facilmente multiplicada por menos um o que faz com que ela recaia no que foi definido anteriormente.

Generalizando a ideia de completar quadrados é obtida uma fórmula para a resolução de equações do segundo grau que relaciona as raízes com os coeficientes da equação. No Brasil esta fórmula é comumente conhecida como fórmula de Bhaskara(será feita uma análise histórica e comentários mais aprofundados sobre esta denominação mais adiante).Será considerada a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$. Dividindo ambos os membros por **a** (que pode-se garantir ser não nulo) obtém-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}\text{ x+ }\frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Será completado então o quadrado do primeiro membro. Para isso, adiciona-se $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os lados da igualdade. Assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtém-se:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É interessante notar que a fórmula obtida pode também ser utilizada para equações incompletas, pois todos os passos podem ser efetuados normalmente mesmo se **b** ou **c** forem nulos.Comumente denomina-se o valor da expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (Delta maiúsculo). Realizando essa substituição na fórmula da resolução de equações do segundo grau será obtido:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observe-se que o valor de Δ é que determina quantas raízes reais a equação possui. Quando ele é positivo, a equação terá duas raízes reais distintas. Se ele for zero a equação tem duas raízes reais iguais e quando ele é negativo, a equação não tem raízes reais.

Outro ponto interessante é a relação que se pode estabelecer entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e a soma e o produto de suas raízes. Para verificar essa relação, representam-se as raízes de uma equação do segundo grau por x´ e x´´. A soma dessas raízes é determinada por $\frac{-b}{a}$ enquanto seu produto é determinado por $\frac{c}{a}$.

Já foi visto que as raízes serão x´=$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e x´´=$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Realizando a soma obtém-se:

$$x'+x''=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})+(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

Para o produto tem-se:

$$x'.x''=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}).(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2}=$$
$$\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

1.3 O método de Viète para resolução de equações do 2º grau

Uma forma menos conhecida para resolução da equação do segundo grau é o chamado Método de Viète(A vida do matemático François Viete será abordada com mais detalhes na seção 1.7). Será resolvida uma equação do segundo grau na forma

$$ax^2+bx+c=0;$$

com **a** $\neq 0$

O método consiste na mudança da variável x para variáveis auxiliares. Este método está apresentado no trabalho de Maurício [37]

Serão usadas no exemplo u e v para as novas variáveis. O primeiro passo é fazer x = u + v na equação, obtendo:

$$a(u+v)^2+b(u+v)+c=0$$

ou

$$au^2+2auv+av^2+bu+bv+c=0$$

Em seguida, reescreve-se a igualdade acima como uma equação na variável v:

$$av^2+(2au+b)v+au^2+bu+c=0$$

Viète transformou a equação acima numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v, 2au + b. Para isso, ele escolheu u $=\dfrac{-b}{2a}$.

Assim, a equação fica:

$$av^2 + a((\frac{-b}{2a})^2 + b((\frac{-b}{2a}) + c = 0$$

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$av^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

Isolando v, obtém-se v $=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como já mencionado, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada determinante

Como x = u + v, u = $\frac{-b}{2a}$ e v $=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, segue que: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Como exemplo, será usado o Método de Viéte para resolver a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$. Substitui-se x = u + v na equação dada, obtendo:

$$(u + v)^2 - 4(u + v) + 3 = 0$$

$$u^2 + 2uv + v^2 - 4u - 4v + 3 = 0$$

Reescrevendo na variável v, temos $v^2 + (2u - 4)v + u^2 - 4u + 3 = 0$. Escolhe-se u $=\dfrac{4}{2}$=2 para anular o coeficiente 2u -4 de v, chegando em

$$v^2 + 4 - 8 + 3 = 0$$

$$\text{ou ainda } v = \pm 1$$

Então, de x = u + v, u = 2 e $v = \pm 1$, vem x = 2 ± 1. Assim, são obtidas às soluções da equação, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

É necessária uma reflexão sobre a mudança de variáveis(x = u+v) e a escolha u $=\dfrac{-b}{a}$. O uso das variáveis auxiliares não altera o valor das raízes da equação original em x. É apenas um artifício com o intuito de facilitar a resolução.

A escolha de u = $\dfrac{-b}{a}$ pode gerar a impressão de que o resultado final ficara comprometido. No entanto, deve-se ressaltar que u é uma variável auxiliar e assim é possível escolher outras expressões para ela. Salienta-se que a escolha sugerida pelo Método de Viète é a melhor, pois com ela se passa de uma equação do segundo grau completa para uma incompleta, o que torna mais fácil a solução.

1.4 Resolvendo equação do segundo grau com régua e compasso

Serão utilizadas agora construções geométricas realizadas com régua e compasso para solucionar equações do segundo grau da forma $x^2 + bx + c = 0$. Para isso será considerado $\mathbf{c} \neq 0$, pois caso contrário, as raízes da equação sempre seriam 0 e –b .Esta forma de resolver equações quadráticas também está apresentada no trabalho de Maurício [37]

Feita esta consideração têm-se dois casos:

1º caso: c $>$ 0

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 da equação têm o mesmo sinal, uma vez que $x_1.x_2 = c$. Além disso, $|x_1|+ |x_2| = |b|$ e $|x_1|.|x_2| = |c|$ Deste modo:

i) Se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 =$ -b < 0, ou seja b > 0 . Assim $|x_1|\,| + |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) =$ -(-b)$= |b|$.

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 =$ -b>0 , ou seja b < 0 . Assim $|x_1| + |x_2| = -x_1 - x_2 =$ (-b)$= |b|$.

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e que o produto seja $|c|$ ou simplesmente c, uma vez que c > 0

Procedimentos Geométricos

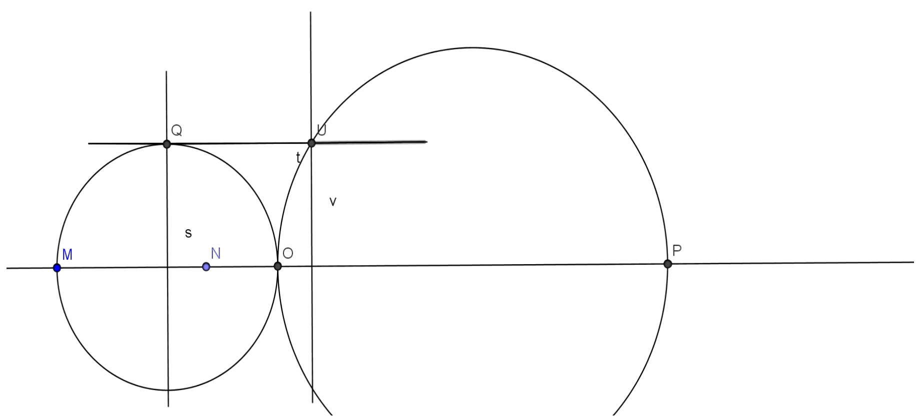

Figura 1 – Primeira construção

1. Traçou-se a reta r e nela marcaram-se os segmentos $(\bar{MN})$ =$|c|$, $(\bar{NO})$ =1 e $(\bar{OP})$= $|b|$
2. Em seguida, foram traçadas duas circunferências que terão $(\bar{MO})$ e $(\bar{OP})$ como diâmetro.
3. Por N levantou-se a perpendicular s à reta r, determinando Q na circunferência de diâmetro $(\bar{MO})$. Assim obtém-se: $(\bar{NQ})^2$=$(\bar{MN})$.$(\bar{NO})$=c.1=c $\leftrightarrow$ $(\bar{NQ})$=$\sqrt{c}$ pela relação métrica do triângulo retângulo(Pode-se garantir que MQO é um triângulo retângulo pois está inscrito na circunferência e um dos seus lados é o diâmetro)
4. Pelo ponto Q traçou-se a reta t, paralela à r, que encontrará a circunferência de diâmetro $(\bar{OP})$ no ponto que será denominado U. Por U traçou-se a reta v, perpendicular à r, determinando G em r.
5. Tem-se pela construção que,$(\bar{NQ})$ = $(\bar{GU})$. Analogamente ao raciocínio para o triângulo MQO, o triângulo OUP é retângulo e $(\bar{GU})^2$ = $(\bar{OG})$.$(\bar{GP})$. Como $(\bar{NQ})$ =$(\bar{GU})$, segue que $(\bar{NQ})^2$ = $(\bar{GU})^2$ = $(\bar{OG})$.$(\bar{GP})$ = c. Mas $(\bar{OG})$+ $(\bar{GP})$ = |b|

Então $(\bar{OG})$ e $(\bar{GP})$ são dois segmentos cuja soma é |b | e o produto é c. Ressalta-se que:

* Se b $<$ 0, as raízes são positivas, ou seja, x_1= $(\bar{OG})$ e x_2=$(\bar{GP})$

* Se b $>$ 0, as raízes são negativas, ou seja, x_1=$-(\bar{OG})$ e x_2= $-(\bar{GP})$

<u>Observação:</u> Se a reta t não interceptar a circunferência de diâmetro $(\bar{OP})$ isto é, se $\sqrt{c} < \dfrac{b}{2}$ as raízes são imaginárias e não é possível determiná-las com a construção geométrica. O mesmo ocorre no caso b=0 (com c $>$ 0).

2º caso: c $<$ 0

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 da equação têm sinais contrários e supondo que $|x_1|$ $>$ $|x_2$ | deve-se ter | x_1|- $|x_2|$= |b| e$|x_1|$. $|x_2|$= |c|. De fato,

i) Se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2$ = -b $<$ 0, ou seja, b $>$0 . Assim $|x_1|$- $|-x_2|$ = - $x_1 - x_2$ = - $(x_1 + x_2$) = -(-b) = |b|

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2$ = -b $>$ 0 , ou seja, b $<$ 0. Assim $|x_1$ |- $|x_2$ | = $x_1 + x_2$ = - $(x_1 + x_2$) = -b = |b|.

É preciso então determinar dois segmentos de reta cuja diferença seja |b| e que o produto seja |c|.

Procedimentos Geométricos:

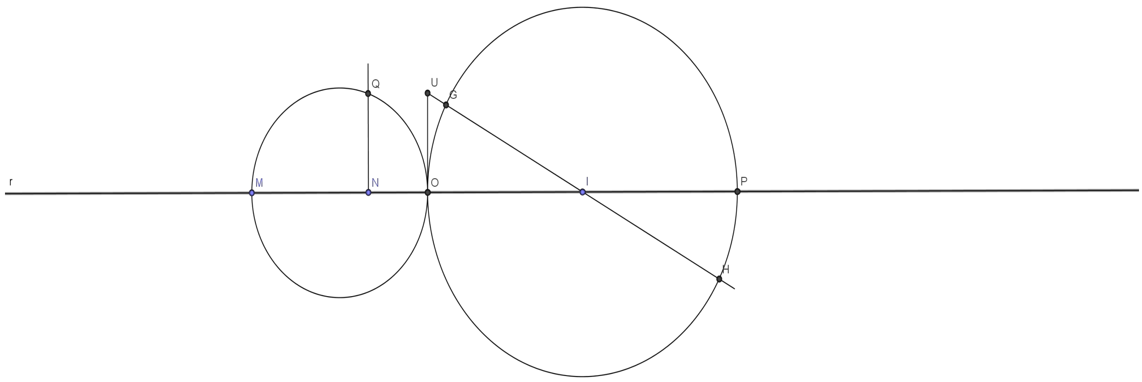

Figura 2 – Segunda construção

Da mesma forma seguem-se os passos (1), (2) e (3) do caso anterior.Na sequência:

- Transladou-se $(\bar{NQ})$ em uma direção paralela a s, obtendo o segmento $(\bar{OU})$
- Ligou-se U ao centro da circunferência I, determinando o diâmetro $(\bar{GH})$
- Os segmentos $(\bar{UH})$ e $(\bar{UG})$ representam os valores absolutos das raízes da equação. De fato: $(\bar{UH})$ - $(\bar{UG})$= $(\bar{GH})$ = |b| (diâmetro), e também pelo fato de tanto $(\bar{OU})$ ser tangente quanto de $(\bar{UH})$ ser secante a circunferência de diâmetro $(\bar{OP})$, temos:

$$(\bar{OU}) = (\bar{NQ}) = \sqrt{c}$$
$$(\bar{OU})^2 = (\bar{NQ})^2 = |c|$$
$$(\bar{OU})^2 = (\bar{UH}).(\bar{UG})$$
$$|c| = (\bar{UH}).(\bar{UG})$$

Então $(\bar{UH})$ e $(\bar{UG})$ são dois segmentos cuja diferença é |b| e o produto é |c|. Deste modo:

* Se b $<$ 0, as raízes são: x_1= $(\bar{UH})$ e x_2= -$(\bar{UG})$

* Se b $>$ 0, as raízes são: x_1= - $(\bar{UH})$ e x_2=$(\bar{UG})$

Observação: Neste caso, o problema sempre tem solução. Se b=0, tem-se o caso degenerado em que I=O=G=H(o raio da circunferência de centro I é zero, ou seja, não existe a circunferência) e as raízes serão $(\bar{UO})$ e - $(\bar{UO})$

Caso questões para serem resolvidas por esse método sejam aplicadas em sala, alguns cuidados devem ser tomados. Preferencialmente que as raízes reais sejam números inteiros e que os coeficientes sejam também inteiros e pequenos, para facilitar o processo. Isso porque a precisão nos desenhos muitas vezes não é a ideal.

Vale ressaltar que a importância desse método está mais na questão histórica, além de ser interessante mostrar para os alunos que existem diversas formas de resolver um mesmo problema. No entanto, no que se refere à aplicabilidade, existem maneiras bem mais simples de encontrarmos as raízes de uma equação do segundo grau.

1.5 Equação Biquadrada

Toda equação do quarto grau que pode ser escrita na forma ax^4+bx^2+c=0 com **a,b** e **c** reais e **a** diferente de zero é chamada de equação biquadrada.

A solução dessa equação pode ser encontrada por meio de equações do segundo grau. Para isso, substituímos x^2 por outra variável, por exemplo, por y. E assim x^4 será substituído por y^2. Dessa forma, a equação biquadrada, originalmente uma equação do quarto grau na variável x, pode ser reescrita como: ay^2+by+c=0 que é uma equação do segundo grau na variável y.

Para resolvê-la, será adotado o modo que se julgar mais apropriado. Feito isso serão encontrados os possíveis valores de y e, é preciso lembrar que a questão inicial era determinar os possíveis valores de x. Por meio da igualdade x^2=y encontrar-se ão esses valores. Basta realizar:

$$x^2=\mathrm{y}$$

$$\mathrm{x}= \pm\sqrt{y}$$

1.6 Equação Irracional

Outro tipo de equação que pode ser resolvida com o auxílio de equações quadráticas são as equações nas quais a incógnita x aparece em um radicando. Este tipo de equação é denominada equação irracional.

$$m\sqrt{x+k}\ +\mathrm{px}+\mathrm{t}=0$$

Com **m,k,p** e **t** pertencentes aos reais e **m** e **p** não nulos.

Para resolvê-las é necessário isolar o radical no primeiro membro da equação. Obtém-se então a seguinte igualdade:

$$\sqrt{x+k} = \frac{-px-t}{m}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, recai-se em uma equação do segundo grau em x, da forma x+k=$(\frac{-px-t}{m})^2$, que será resolvida da maneira que for julgada mais eficiente.

É preciso, no entanto, cuidado com as raízes obtidas. Elas deverão ser testadas na equação inicial, pois este procedimento pode gerar raízes chamadas de estranhas à equação. Ou seja, raízes que não correspondem às da equação original. Somente depois de testados pode-se afirmar que os valores encontrados são realmente as raízes procuradas

1.7 Um pouco da História da Matemática nas Equações do Segundo Grau

A álgebra provavelmente teve sua origem na Babilônia, por volta do ano 2000 a.C. Era escrita totalmente em palavras, sem o uso de abreviações ou símbolos como se faz atualmente.

Problemas que recaem em uma equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. A questão de encontrar dois números sabendo sua soma (s) e seu produto(p) é encontrada em textos escritos pelos babilônios.

Pensando em termos geométricos, este problema equivale ao de encontrar os lados de um retângulo se são conhecidos seu semiperímetro s e a sua área p. Se for representado um dos números procurados por x, o outro será s-x. Obtém-se então o seu produto como:

$$p=x(s-x)=sx-x^2$$

Logo, os números procurados são as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2-sx+p=0$$

A regra para achar dois números cuja soma e produto são dados era enunciada pelos babilônios da seguinte forma:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Na notação usada atualmente, esta regra fornece as raízes:

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{(\frac{s}{2})^2-p}$$

e

$$\text{s-x}= \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}$$

Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios nunca tiveram preocupação com possíveis soluções negativas fornecidas por sua regra. No entanto, ocorriam casos em que $(\frac{s}{2})^2$ é menor do que p. Isto não os levou a inventar os números complexos. Quando isto ocorria, os babilônios simplesmente afirmavam que os números procurados não existem (o que é uma afirmação correta quando se está trabalhando no conjunto dos números reais)

A álgebra também surgiu no Egito por volta de 1850 a.C e os egípcios tratavam da mesma forma de equações simples do segundo grau. Um exemplo encontrado no papiro Moscou é de um problema no qual é pedido para calcular a base de um retângulo cuja altura l é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base e cuja área é igual a 12.

Com a notação moderna, pode-se escrever:

$$\text{l.}(\frac{3l}{4})=12$$
$$\frac{3l^2}{4}=12$$

Boyer [5] afirma que os egípcios tiveram dificuldades para solucionar equações quadráticas. Pesquisas mostram que a matemática dos babilônios era muito mais desenvolvida.

A álgebra grega foi formulada pelos pitagóricos (540 a.C) e por Euclides (300 a.C) e era basicamente geométrica. Os problemas babilônios citados anteriormente, em que eram dados a soma e o produto de dois lados de um retângulo e se pediam as suas dimensões eram tratados pelos gregos de forma diferente da "álgebra aritmética" dos babilônios. Surgia então a "álgebra geométrica".

Nela, as equações deveriam ser tratadas geometricamente sendo uma grande contribuição dos gregos a interpretação geométrica para o quadrado da soma de dois números e para a diferença de dois quadrados.

Na álgebra hindu citam-se como nomes a serem destacados Brahmaguta e Bhaskara. Os hindus resolviam equações quadráticas completando quadrados, aceitavam os números negativos e os irracionais e tinham também o conhecimento de que uma equação quadrática com raízes reais possui duas raízes.

As contribuições de Brahmaguta à álgebra são extremamente importantes, pois ele apresentou soluções gerais das equações quadráticas, inclusive duas raízes sendo uma delas negativa. Bhaskara continuou alguns estudos a partir da obra de Brahmaguta e complementou algumas lacunas. Ele escreveu os livros Lilavat e Vija Ganita que contém problemas sobre equações lineares e quadráticas. É dele a primeira resposta plausível para a divisão por zero. Em seu trabalho "Vija-Ganita" ele afirma que tal quociente é infinito

Porém é na Arábia que a álgebra teve um dos seus pontos mais importantes; com Mohammed ibu Musa al-Khowarizmi, que era matemático e astrônomo. Foi através do seu livro, "Al jabr wa´l muqabalah", que a Europa aprendeu este ramo da Matemática que recebeu, também por causa do livro, o nome álgebra .Boyer [5] afirma que apesar do matemático grego Diofante ser comumente chamado de pai da álgebra, esse título pertence mais a al-Khowarizmi.

Ainda hoje não se sabe ao certo o significado de "al jabr"e "muqabalah", mas imagina-se que "al jabr"significa algo como restauração ou completação e se refere à transposição de elementos para o outro lado da equação enquanto o termo "muqabalah"significaria redução ou equilíbrio. Uma referência ao cancelamento de termos iguais em lados opostos da equação.

A álgebra de al-Khowarizmi é considerada a primeira obra sobre o assunto. A importância de seu texto para a álgebra é comparável com a dos Elementos de Euclides para a geometria.

Dentre os matemáticos posteriores a al-Khowarizmi que fizeram contribuições a respeito das equações do segundo grau, podemos citar Fibonacci que difundiu a Matemática árabe no ocidente e também o matemático francês François Viete (1540-1603).

Figura 3 – Viéte

Viéte estudou e chegou a exercer o Direito. Dedicava-se à matemática por prazer e deixou importantes contribuições. Ele foi o primeiro matemático a fazer a representação de incógnitas e constantes usando letras. Usava vogais para representar quantidades desconhecidas e consoantes para representar grandezas ou números supostamente conhecidos. Tratou das equações do segundo grau aceitando os números negativos como quantidades que devem ser subtraídas e desenvolveu o método de resolução abordado na seção 1.3

Bhaskara:

Figura 4 – Bhaskara

Desde 1960, é comum no Brasil dar o nome de Bhaskara à fórmula de resolução de uma equação do segundo grau. No entanto, na literatura internacional este nome não é dado à fórmula.

Realmente, a nomenclatura "fórmula de Bhaskara"não é a mais adequada. Primeiro porque Bhaskara não trabalhava com fórmulas. Na realidade, até o fim do século XVI, não se utilizava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não existia a notação usual de hoje. Além disso, viu-se que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam muito antes de Bhaskara.

Ainda assim, em alguns momentos nos referiremos à fórmula de resolução de equações quadráticas pelo seu nome devido à praticidade e ao senso comum.

Bhaskara nasceu em 1114 na cidade de Vijayapura, na Índia. Também era conhecido como Bhaskaracharya. Nasceu em uma tradicional família de astrólogos indianos, seguiu a tradição profissional da família, porém com uma orientação científica, dedicando-se mais à parte matemática e astronômica Seus méritos foram logo reconhecidos e muito cedo atingiu o posto de diretor do Observatório de Ujjain, que era, na época,o maior centro de pesquisas matemáticas e astronômicas da Índia.

Bhaskara obteve grande reconhecimento pelas suas importantes contribuições para a Matemática. Tanto que em 1207, uma instituição educacional foi criada para estudar o seu trabalho. Em um templo indiano, existe uma inscrição medieval na qual se pode ler:

Triunfante e ilustre professor Bhaskara cujas importantes realizações são reverenciadas pelos sábios e eruditos. Um talentoso poeta com fama e mérito religioso. Ele é como a crista de um pavão.

Bhaskara morreu aos 71 anos de idade em Ujjain, Índia, em 1185.

1.8 O conceito de Função

Antes de tratar de funções do segundo grau, será feita uma breve revisão sobre o conceito de função.Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação f de A em B recebe o nome de função se, e somente se, para todo x pertencente a A, existe um único y pertencente a B, tal que (x,y) pertence a *f*.

Toda função é, portanto uma relação binária de A em B. Assim, toda função é um conjunto de pares ordenados. É preciso salientar que uma função só fica bem definida se são conhecidos três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de formação.

Nessa definição, o conjunto A é chamado de domínio e o conjunto B de contradomínio da função *f*. A lei que permite a associação entre cada elemento de A um único elemento de B é a lei de formação. O conjunto $f(\mathrm{A}) = \{\ \mathrm{y} \in \mathrm{B}\ ; \exists\ \mathrm{x} \in \mathrm{A}\ ,\ f\ (\mathrm{x}) = \mathrm{y}\ \}$ é chamado conjunto imagem de f e dado $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, o único elemento $\mathrm{y} = f(\mathrm{x}) \in \mathrm{B}$ correspondente é chamado de imagem de x. Assim, uma função f cujo domínio é o conjunto A, o contradomínio é B, e, a cada x pertencente a A, associa-se $f(\mathrm{x})$ em B é escrita como:

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

$$\mathrm{x} \to f\ (\ \mathrm{x}\ )$$

Duas funções f: A $\to$ B e g: C $\to$ D são iguais se, e somente se, apresentarem o mesmo domínio(A=C), o mesmo contradomínio (B=D) e se $f(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x})$ para todo x do domínio.

1.9 Função do Segundo Grau

Uma função f: IR $\to$ IR é chamada função do segundo grau, ou função quadrática, quando existirem números reais **a,b,c** com **a** não nulo, tais que $f(\mathrm{x}) = ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ para todo x pertencente a IR

Verifica-se que se ax^2+bx+c=a´x^2+b´x+c´ para todo x pertencente aos reais então a= a´,b=b´ e c=c´. Veja-se:

Tomando x=0 obtém-se c=c´. Pode-se então eliminar c e c' da equação. Será obtido ax^2+bx=a´x^2+b´ para todo x ∈ IR. Em particular, a igualdade é válida para todo x diferente de zero. Sendo assim, obtém-se ax+b=a´x+b´ para todo x não nulo. Fazendo x=1 obtém-se a+b=a´+b´. Fazendo x=-1 obtém-se –a+b=-a´+b´.Dessas equações é possível concluir que a=a´e b=b´.

Mas, para se obter a igualdade entre os coeficientes, não é necessário exigir que ax^2+bx+c=a´x^2+ b´x+c´ para todo x ∈ IR. Basta, como será mostrado, que esta igualdade seja satisfeita para três valores distintos de x. Suponha-se que as funções do segundo grau f(x) =ax^2+bx+c e g(x)=a´x^2+b´x+c´ assumam os mesmos valores para três números reais distintos x_1 , x_2 e x_3. Ou seja, tem-se $f(x_1)$=$g(x_1)$, $f(x_2)$=$g(x_2)$ e $f(x_3)$=$g(x_3)$

Escrevendo α = a-a´, β = b-b´ e γ = c-c´ mostra-se que α=β =γ. Sabe-se que $f(x_1)$-$g(x_1)$=0,$f(x_2)$- $g(x_2)$ =0 e $f(x_3)$-$g(x_3)$=0. Assim obtém-se:

$$\alpha\ x_1^2 + \beta\ x_1 + \gamma=0$$

$$\alpha\ x_2^2 + \beta\ x_2 + \gamma=0$$

$$\alpha\ x_3^2 + \beta\ x_3 + \gamma=0$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, tem-se:

$$\alpha\ (x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1)=0$$

e

$$\alpha\ (x_3^2 - x_1^2) + \beta\ (x_3 - x_1)=0$$

Como x_2 - x_1 e x_3 - x_1 são não nulos podemos dividir a primeira destas equações por x_2 - x_1 e a segunda por x_3 - x_1.Obtém-se então:

$$\alpha\ (x_1 - x_2) + \beta=0$$

e

$$\alpha(x_1 - x_3) + \beta=0$$

Subtraindo membro a membro, tem-se α $(x_3 - x_2)$=0. Como $x_3 \neq x_2$ tem-se que $x_3 - x_2$ é não nulo e daí resulta que $\alpha = 0$. Substituindo $\alpha = 0$ nas equações anteriores obtém-se que β =0 e γ =0. Mostra-se assim que se duas funções do segundo grau assumem os mesmos valores em três pontos distintos, então estas funções assumem o mesmo valor para qualquer número real.

Os zeros ou raízes da função quadrática f(x)=ax^2+bx+c são os valores de x tais que f(x)=0, ou seja, as soluções da equação do segundo grau ax^2+bx+c=0. Como foi visto anteriormente estas soluções podem ser encontradas por:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A função quadrática pode ser escrita de uma forma mais conveniente, chamada forma canônica. Tem-se assim:

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 = a(\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})=a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] = a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})]$$

Representando b^2-4ac por Δ, é obtida a forma canônica:

$$f(x)= a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})]$$

Esta forma ajuda a descobrir os valores máximo e mínimo de f e; dada a função quadrática f(x)=ax^2+bx+c. para quais valores x e x´ distintos tem-se f(x)=f(x´). Pela forma canônica verifica-se que f(x)=f(x´) se e somente se:

$$(x+\frac{b}{2a})^2= (x'+\frac{b}{2a})^2$$

Como se está considerando que x e x´ são distintos, temos:

$$x' + \frac{b}{2a} = -(\ x+ \frac{b}{2a})$$

Ou seja:

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Portanto, a função do segundo grau f(x)=ax^2+bx+c só assumirá o mesmo valor para x e x´ distintos se esses pontos são equidistantes de $\frac{-b}{2a}$

A forma canônica também permite determinar de modo mais fácil se a função assumirá valor máximo ou mínimo e qual é esse valor.

Suponha-se **a** maior do que zero. A forma canônica exibe, no interior dos colchetes uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e será sempre positiva enquanto a segunda é constante. O menor valor dessa soma será atingido quando (x+$\frac{b}{2a}$)^2 é igual a zero. Ou seja, quando x=$\frac{-b}{2a}$. Neste ponto, a função f(x) também assumirá seu valor mínimo, que será:

$$f(\frac{-b}{2a})=\frac{-\Delta}{4a}$$

Analogamente, se **a** é menor que zero, o valor $f(\frac{-b}{2a})$ é o maior valor assumido por f(x) para qualquer x real.

Quando **a** >0, a função quadrática f(x)=ax^2+bx+c não assume valor máximo. Ou seja,é uma função ilimitada superiormente. De modo análogo, quando **a** <0 a função f(x) não assume valor mínimo, pois é ilimitada inferiormente.

1.10 Gráfico de Função do Segundo Grau

Dada uma função f : A $\rightarrow$ B , o gráfico de *f*, Graf(f), é o conjunto $\{(x, y) \in A \times B ; y=f(x)\}$ .O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola. Nesse momento, é importante revisar-se o conceito de parábola:

Dados um ponto F e uma reta d que não contém F, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de F e de d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, é chamada de eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice da parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Serão analisados os efeitos que cada coeficiente **a,b** e **c** causa na parábola que representa a função quadrática definida pela forma geral f(x)=ax^2+bx+c sendo **a,b** e **c** $\in$ IR e **a** diferente de zero e forma canônica f(x)= a[(x + $\frac{b}{2a})^2$ - $(\frac{\Delta}{4a^2})$]

O coeficiente **a** está relacionado com a concavidade e abertura da parábola. Quando **a** >0 a concavidade será para cima enquanto quando **a** <0 a parábola terá concavidade para baixo. Quanto menor o valor absoluto de **a**, maior será a abertura da parábola (parábola mais aberta) enquanto maior o valor absoluto de **a**, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada). Este estudo será ilustrado com a utilização do Winplot na seção 3.5.

O coeficiente **b** nos indica se a parábola irá intersectar o eixo y no seu ramo crescente (caso **b** >0),decrescente (caso **b** <0) ou no vértice (quando **b**$=0$). Já o coeficiente **c** indica em qual ponto a parábola intersectará o eixo y (A intersecção ocorrerá no ponto (0,c)).

Em uma interpretação geométrica, diz-se que as raízes de uma função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola que a representa corta o eixo x.

Denominando essas abcissas por α e β, o ponto médio do segmento $[\alpha , \beta]$ é a abcissa do vértice da parábola.

A análise feita na forma canônica (na qual se comprova que a função quadrática assume valores iguais em pontos distintos x e x´ se e somente se esses pontos são simétricos em relação a $\frac{-b}{2a}$) significa que a reta vertical x = $\frac{-b}{2a}$ é o eixo dessa parábola.

Além disso, sabe-se que o vértice da parábola é um ponto de mínimo quando **a** é positivo e é um ponto de máximo quando **a** é negativo. Obtém-se também pela análise na forma canônica que:

$$X_v = \frac{-b}{2a}$$

e

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

1.11 Um pouco mais de História da Matemática através da contribuição de alguns matemáticos

O período de cerca de 300 a 200 a.C. é denominado "Idade Áurea" da Matemática grega, pois nessa época se destacaram três grandes nomes: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga.

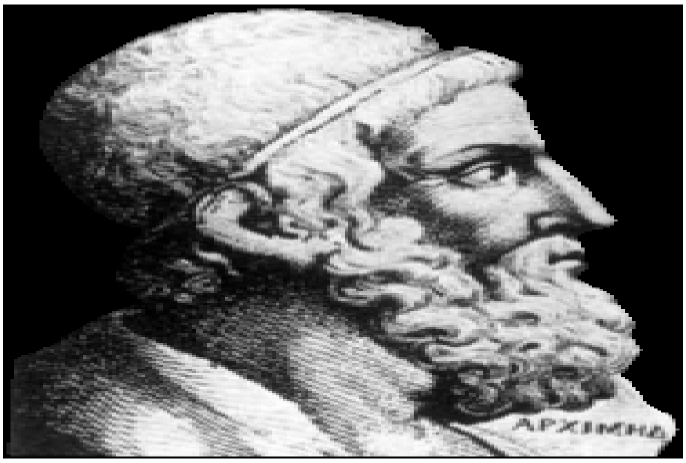

Figura 5 – Arquimedes

Arquimedes (287-212 a.C.) era nativo de Siracusa, na Sicília. Foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego. Seu pai foi um astrônomo de pouco destaque na história da ciência, chamado Fídias. No entanto, o que o pai não fez pode-se afirmar que o filho realizou com sobra. Não houve assunto importante na época para o qual Arquimedes não tenha deixado uma contribuição inteligente.

Ele calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola, problema conhecido como a Quadratura da Parábola. Há também uma lenda segundo a qual Arquimedes destruiu a frota que sitiava a cidade de Siracusa, incendiando os navios com raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora na teoria tal feito seja possível, existem sérias dúvidas sobre a capacidade tecnológica da fabricação de tais espelhos na época.

Figura 6 – Apolônio

Apolônio foi membro da escola de Matemática de Alexandria. Nasceu em Perga, cidade ao sul do que hoje é a Turquia, entre 246 e 221 a.C. A mais importante de suas obras é "As Cônicas", que além de superar os estudos anteriores sobre o assunto, introduz as denominações elipse, parábola e hipérbole.

Anteriormente, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto, de acordo com o ângulo do vértice (agudo, reto ou obtuso). Apolônio mostrou que não seria necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de apenas um único cone poderiam ser obtidas todas as três espécies de secções, variando-se a inclinação do plano da secção, relacionando assim as curvas umas com as outras. Em outra consideração sobre o tema, prova-se que o cone não precisa ser reto, podendo ser também oblíquo ou escaleno.

Apolônio também contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria. As seções cônicas ao serem inseridas na Geometria Analítica, definidas como lugares geométricos (conjunto de pontos que verificam certa propriedade), ganharam uma expressão algébrica. Sua importância e sua aplicabilidade foram então ampliadas

A Astronomia encontrou, nas secções cônicas, grande aplicação. Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas ou a trajetória descrita por um projétil.

Euclides (330 a. C. - 260 a. C) foi um dos primeiros geômetras. Nasceu na Síria e estudou em Atenas.

Figura 7 – Euclides

Após a morte de Alexandre, o Grande, no ano 324 a.C, o Egito ficou sob o domínio de Ptolomeu. Na cidade de Alexandria, Ptolomeu criou um centro de ensino e pesquisa chamado Museu (refúgio das musas). Muitos dos grandes cientistas da época trabalharam nesse Museu, entre eles estava Euclides.

O livro "Os Elementos"– escrito por Euclides por volta de 300 a.C. e depois copiado e recopiado centenas de vezes – teve uma repercussão enorme nos meios científicos. Os Elementos são constituídos por treze livros e, depois da Bíblia,essa é provavelmente, a obra mais reproduzida e estudada na história do mundo ocidental. Possui importância excepcional na história da matemática e um dos motivos é a forma de apresentar a geometria como um sistema lógico

Na sua “Álgebra” Euclides representava as quantidades desconhecidas por segmentos de retas, quadrados, retângulos, triângulos, etc. Euclides manejava com muita facilidade o hoje conhecido produto notável; quadrado da soma de dois termos. Interpretando-o através de construções geométricas

O século XVII é muito importante na história da matemática, pois marca o desenvolvimento da matemática moderna.

Galileu Galilei (1564-1642), nascido em Pisa, era de uma família que valorizava as artes e as novas ideias Quando era professor em Pisa, dizem que deixou cair diferentes pesos da torre inclinada, pesquisando o movimento da queda dos corpos. Isso porque Aristóteles pensava que objetos mais pesados caíam mais depressa e Galileu mostrou que, leves ou pesados, os objetos levavam o mesmo tempo para chegar ao chão, com velocidade sempre crescente (caso não haja resistência do ar.).

Ele estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda

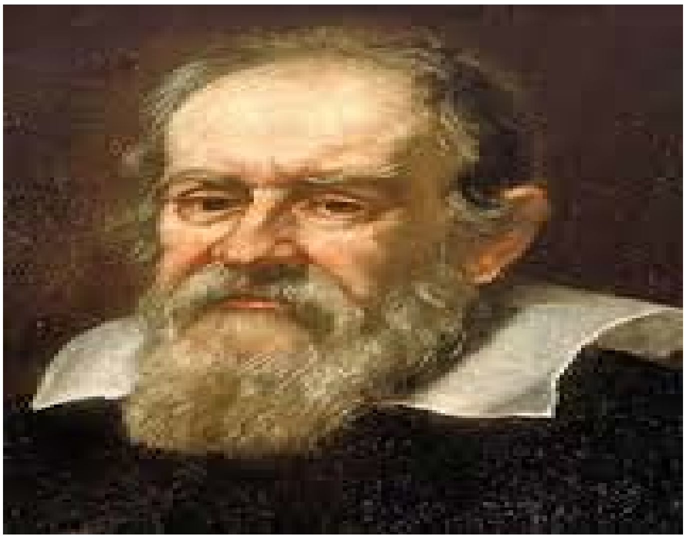

Figura 8 – Galileu Galilei

livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda e se traduz na fórmula s= $\frac{gt^2}{2}$, sendo s a distância percorrida pelo corpo a partir de uma altura h no instante de tempo t, estando submetido a aceleração da gravidade, g.

Provou que a trajetória de um projétil é uma parábola e fundou a ciência da dinâmica.

1.12 Parábolas ao nosso redor

Girando uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada paraboloide de revolução ou superfície parabólica. Está superfície possui inúmeras aplicações interessantes.

Frutos da lenda de Arquimedes (comentada na seção 1.11) ainda resta hoje um pouco prático, mas bastante criativo, acendedor solar de cigarros. Seu funcionamento consiste em fazer os raios de sol convergirem para o foco de uma superfície parabólica polida.

Curiosidade: Dioclés, em um livro do século II a.C, propôs que para se sacrificar uma vítima diante de uma multidão ela deveria ser colocada no foco de um espelho parabólico, que acenderia um ponto inflamável visível no corpo. Não há registros se essa ideia chegou a ser posta em prática, mas a palavra latina focus também pode significar lareira.

Serão analisados alguns instrumentos que são exemplos de aplicações das parábolas:

Faróis de carro: Ao ligarmos os faróis de um carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada que se encontra no foco da parábola, incidem num espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.

Fornos solares: Essa é mais uma aplicação curiosa das parábolas. E pouco conhecida. Como a distância do Sol até a Terra é de cerca de 150 milhões de quilômetros, quando o feixe de luz solar atinge a Terra, seus raios já estão praticamente paralelos. Quando são refletidos no espelho do forno solar, os raios desse feixe convergem para o foco, promovendo uma grande concentração de energia, tanto luminosa quanto térmica. Ocorre então, no foco do espelho uma elevação de temperatura. Nesse ponto, é colocado o dispositivo que utilizará essa energia concentrada. Se a distância focal do espelho for 10 m, esse dispositivo deverá ser colocado a 10 m do vértice do espelho, para assim, ficar exatamente sobre o foco.

Em Odeillo, uma cidade no sul da França, onde a incidência de luz do Sol é intensa, foi construído um grande espelho côncavo que é usado como "forno solar". Formado por 9.500 espelhos planos individuais e com a altura de um edifício de sete andares, focaliza os raios solares em um forno dentro da torre do coletor. Com ele é possível alcançar temperaturas de até 3.800ºC.

Antenas parabólicas: As antenas parabólicas, apesar de não refletirem luz, são espelhos. São construídas para refletir ondas de radio frequências, que têm comprimento de onda muito maior do que o da luz. São utilizadas da rádio-astronomia aos aparelhos de televisão.

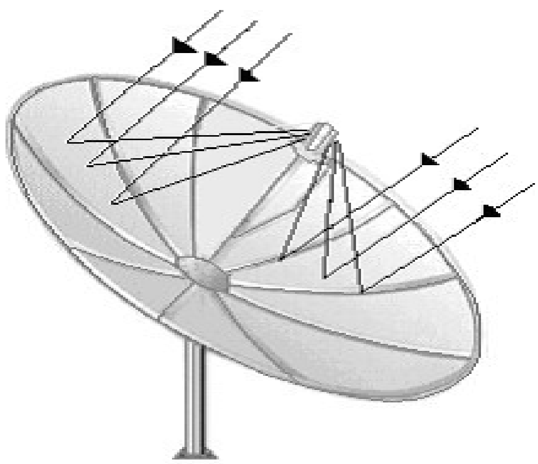

Figura 9 – Antena Parabólica

Elas captam ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite artificial, colocado em uma órbita geoestacionária. Essas ondas formam um feixe de raios, que atingem a antena e são refletidos convergindo para um único ponto, o foco da parábola. No foco, estará um aparelho receptor que amplifica consideravelmente a intensidade desses sinais provenientes do satélite e os converte em sinal de TV. As antenas parabólicas geralmente têm um diâmetro grande (parábola mais aberta, **a** pequeno) para captar uma quantidade maior de sinais do satélite.

As antenas que captam sinais do espaço são parabólicas porque os sinais recebidos (ondas de rádio ou de luz) são muito fracos. É necessário concentrá-los em um ponto para que sejam amplificados e a parábola possui essa propriedade

Pontes Pênseis: As pontes pênseis ou suspensas são apropriadas para grandes vãos livres, pois permitem máxima leveza e um "peso morto" mínimo. Nelas o tabuleiro contínuo é sustentado por vários cabos metálicos ligados a dois cabos maiores que, por sua vez, ligam-se às torres de sustentação. Os cabos comprimem as torres de sustentação, que transferem os esforços de compressão para as fundações.

Nas pontes pênseis os tirantes são espaçados regularmente, assim a carga da ponte fica uniformemente distribuída nos cabos que formam uma parábola.

Um exemplo famoso desse tipo de ponte é a Golden Gate Bridge localizada no estado da Califórnia, nos Estados Unidos. Ela liga a cidade de São Francisco a Sausalito, na região metropolitana de São Francisco. São 2737 metros de comprimento total, incluindo os acessos, e 1966 metros de comprimento suspenso.A distância entre as duas torres de 1280 metros e as torres de suspensão erguem-se a 227 metros acima do nível do mar.

É o principal cartão postal da cidade, uma das mais conhecidas construções dos Estados Unidos, considerada uma das Sete maravilhas do Mundo Moderno pela Sociedade Americana de Engenheiros Civis.

Figura 10 – Ponte Golden Gate Bridge

No Brasil, um exemplo de ponte pênsil é a Hercílio Luz localizada em Florianópolis. A ponte foi construída com o objetivo de ligar a parte insular da capital do estado, na ilha de Santa Catarina à sua parte continental.

Ela é uma das maiores pontes pênseis do mundo e a maior do Brasil. Teve sua construção iniciada em 14 de novembro de 1922 e foi inaugurada em 13 de maio de 1926, durante o governo de Hercílio Luz. A ponte tem 821,005 m de comprimento total.

Figura 11 – Ponte Hercílio Luz

1.13 O Movimento Uniformemente Variado

No movimento uniformemente variado (MUV) tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo. Um exemplo é a queda de corpos no vácuo, ou seja, a queda de corpos que estão sujeitos apenas à ação da gravidade. Na descrição desse tipo de movimento, o modelo matemático adotado é a função do segundo grau.

A posição em um instante t é dada pela abscissa $f(\mathrm{t})$

$$f(\mathrm{t})=\frac{1}{2}at^2+\mathrm{bt}+\mathrm{c}$$

A constante **a** é chamada de aceleração, **b** é a velocidade inicial (velocidade no instante t=0) e **c** é a posição inicial do ponto.

Em qualquer movimento, dado por uma função *f*, o quociente:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\text{ espaço percorrido/tempo de percurso}$$

é chamado de velocidade média do ponto no intervalo de extremos t e t+h. No caso do movimento uniformemente variado, a velocidade média do móvel entre os instantes t e t+h é igual a at+b+$\frac{ah}{2}$. Tomando h cada vez menor, o valor se aproxima de at+b. Sendo assim, a velocidade do ponto em movimento uniformemente variado no instante t é:

$$V(t) = at+b$$

Quando t=0 tem-se v(0) = **b** e é por isso que **b** é chamado de velocidade inicial. Além disso, tem-se que **a** $=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ para quaisquer que sejam t e h. Logo, a aceleração constante **a** é a taxa de variação da velocidade. É por isso que o movimento recebe o nome de uniformemente variado.

Ele é dito uniformemente acelerado quando v e **a** possuem o mesmo sinal (isto é, t $> \frac{-b}{a}$) ou uniformemente retardado quando v tem sinal oposto ao de **a** (ou seja, t $< \frac{-b}{a}$)

O movimento uniformemente variado também pode ocorrer no plano. Um exemplo é o lançamento de um projétil por uma força instantânea e a partir de então, sujeito somente à ação da gravidade (desprezando a resistência do ar).

Ainda que o movimento ocorra no espaço tridimensional a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Em um movimento retilíneo (movimento que ocorre sobre um eixo), a velocidade do móvel é expressa por um número. Mas se o movimento ocorre no plano ou no espaço a velocidade é dada por um vetor, cujo comprimento se chama velocidade escalar do móvel (dada em metros por segundo). A direção e o sentido do vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

Vamos tomar, no plano em que ocorre o movimento, um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e que tem como eixo y a vertical que passa por esse ponto. A velocidade inicial do projétil será dada pelo vetor v = (v_1, v_2), sendo que a primeira coordenada fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (a projeção do projétil sobre o eixo horizontal).

Como a única força que atua sobre o projétil é a gravidade e ela não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre este movimento horizontal. Ele é, portanto, um movimento uniforme. Assim, sendo P= (x, y) a posição do projétil no instante t, tem-se x=v_1t.

A aceleração (ou força) da gravidade é por sua vez constante, vertical e igual a –g (nesse caso, o uso do sinal de menos é para indicar que o sentido da gravidade é oposto á orientação do eixo vertical). Assim, a componente vertical do movimento de P é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo y, com aceleração igual a –g e velocidade inicial v_2

Em cada instante t, a ordenada y do ponto P= (x, y) é dada por y= $\frac{-1}{2}$gt^2+ v_2t.

Se v_1=0, então, para todo t tem-se x=v_1t=0. Logo P= (0,y) com y=$\frac{-1}{2}$gt^2+ v_2t e a trajetória do projétil será vertical.

Já se v_1 for diferente de zero, tem-se x= v_1t de onde se obtém t=$\frac{x}{v_1}$. Ao substituir t por este valor na expressão obtém-se:

$$y=ax^2+bx, \text{ onde } \mathbf{a}=\frac{-g}{2v_1^2} \text{ e } \mathbf{b}=\frac{v_2}{v_1}$$

.

O que mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

1.14 O Número de Ouro

O número de ouro é um número irracional que aparece frequentemente na natureza em forma de razão. É denotado pela letra grega Φ (Phi maiúsculo), em homenagem ao nome de Phideas, escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas. O número é também chamado de seção áurea, razão áurea ou razão de ouro.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Trata-se de uma razão bastante apreciada e estudada por matemáticos, astrônomos, físicos, biólogos e artistas. Sua relação e influência sobre a arte, arquitetura, música, geometria e a natureza é o que a torna tão fascinante.

Figura 12 – O Nascimento de Vênus

Na arte, pode ser observado em obras como *O Nascimento de Vênus*, quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. Outro exemplo é o quadro da *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci que utiliza o número de ouro nas relações entre seu tronco e cabeça, e também entre elementos do rosto. Em *O Sacramento da Última Ceia* de Salvador Dalí, as dimensões do quadro, que media aproximadamente 270cm x167 cm, estão na razão áurea.

Na natureza pode ser observado entre outros exemplos no arranjo das pétalas de uma rosa; nas espirais que aparecem no abacaxi, no modo como as sementes estão dispostas no centro de diversas flores.

A proporção áurea é dada por $\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}$ que resulta de determinar o ponto x que divide um segmento de reta de comprimento 1 em média e extrema razão

que implica em:

$$x^2\text{-x-1=0}$$

que é uma equação do 2º grau. Resolvendo-a tem-se:

$$\text{x}=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A solução positiva desta equação é Φ , o número de ouro

Capítulo 2

Fatores no Processo de Ensino e Aprendizagem

Estudar os fenômenos relacionados ao ensino-aprendizagem requer a análise de alguns dos principais fatores envolvidos nesse processo:o aluno, o professor e conhecimento abordado. E também a análise das relações entre esses fatores.

É cada vez mais esperado que o aluno assuma o papel de protagonista da construção de sua aprendizagem. Para isso, o papel do professor ganha novas dimensões. Ele deve abandonar a função de detentor de todo o conhecimento para assumir o de facilitador e mediador no processo de construção do saber.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Elaborado pelo Ministério da Educação, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são um documento que visa à construção de um referencial para orientar a prática escolar. Pretende contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham a possibilidade de acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite a sua inserção como verdadeiros cidadãos, tanto no mundo do trabalho quanto no das relações sociais e da cultura.

Os Parâmetros discutem a variedade de caminhos para efetivamente "fazer Matemática" na sala de aula. Entre eles, destacam a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação.

Em oposição à simples reprodução de procedimentos e acúmulo de informações o PCN indica a Resolução de Problemas como ponto de partida para a atividade matemática. Isso porque considera que o conhecimento matemático agrega significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e são estimulados a desenvolver estratégias de resolução.O PCN afirma que:

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. Do mesmo modo, a resolução de problema, que vem sendo apontada como um bom caminho para trabalhar conceitos e procedimentos matemáticos, tem sido objeto de interpretações equivocadas, pois ainda se resume em uma mera atividade de aplicação ao final do estudo de um conteúdo matemático. [6]

Contudo, a resolução de problemas ainda não desempenha seu verdadeiro papel nas aulas de Matemática. Isso porque os problemas ainda costumam ser utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos. Um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula, não se encaixa na visão de problemas matemáticos proposta no PCN. Um problema só é realmente capaz de fazer o aluno aprender, se levá-lo a interpretar o enunciado da questão e assim refletir sobre a situação que lhe é apresentada.

Além disso, faz-se necessário desenvolver nos alunos habilidades que permitam mais do que só provar os resultados, mas comparar diferentes caminhos para obter a solução. Trabalhando dessa forma, a obtenção da resposta correta deixa de ser o foco: a importância passa a estar no processo de resolução.

São apresentados nos Parâmetros Curriculares, como objetivos no ensino da Matemática, a utilização de diversas linguagens (verbal, corporal, plástica, musical e inclusive matemática) como forma de os alunos produzirem e expressarem suas ideias. Também apresentam a utilização de diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos, além da capacidade de questionar a realidade formulando problemas e resolvendo-os. Utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a capacidade de análise crítica.

2.2 Prova Brasil e Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

A Prova Brasil e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) são avaliações desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). O objetivo é avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro. Para isso, são periodicamente aplicados testes padronizados e questionários socioeconômicos.

Os testes são aplicados a cada dois anos para turmas de quinto e nono ano do ensino fundamental e na terceira série do ensino médio de escolas da rede pública de ensino com mais de 20 estudantes matriculados por série alvo da avaliação.

São constituídos por questões de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas. Além disso, o questionário socioeconômico é uma maneira de coletar informações sobre fatores de contexto que podem estar associados ao desempenho. Os professores e diretores das turmas e escolas avaliadas também respondem a questionários, com o intuito de traçar o perfil profissional e das condições de trabalho.

A partir das informações coletadas pelo Saeb pela Prova Brasil o MEC e as secretarias estaduais e municipais de Educação definem quais ações serão tomadas, em busca de um aprimoramento da qualidade da educação. Podem, por exemplo, direcionar seus recursos técnicos e financeiros para áreas identificadas como prioritárias.

2.3 O que se avalia em Matemática

Em 1997, foram desenvolvidas as Matrizes de Referência com a descrição das competências e habilidades que os alunos deveriam dominar em cada série avaliada, permitindo assim maior precisão na elaboração das questões dos testes e na análise dos resultados da avaliação. Em 2011, as Matrizes de Referência foram atualizadas.

É necessário ressaltar que as matrizes de referência não englobam todo o currículo escolar. É feito um recorte baseado no que é possível aferir por meio do tipo de instrumento de medida utilizado na Prova Brasil, sendo, ao mesmo tempo, representativo do que está contemplado nos currículos vigentes.

É definido, em documento do Ministério da Educação [9]:

> [...] que as competências cognitivas podem ser entendidas como as diferentes modalidades estruturais da inteligência que compreendem determinadas operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos físicos, conceitos,situações, fenômenos e pessoas. [...] que habilidades referem-se, especificamente, ao plano objetivo e prático do saber fazer e decorrem, diretamente, das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades.

A opção por estruturar a matriz de referência de Matemática com o foco Resolução de Problemas indica a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado, quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Por isso mesmo, os testes buscam priorizar situações nas quais a resolução de problemas seja significativa para o aluno e mobilize seus recursos cognitivos.

Uma das habilidades que se espera que o aluno desenvolva é a capacidade de resolver problemas que envolvam equação do segundo grau. Pretende-se avaliar se o aluno é capaz de equacionar os dados de um problema, resolver a equação do $2^{\underline{o}}$ grau obtida e, quando for o caso, criticar as raízes obtidas, chegando ao resultado do problema.

Questões com o objetivo de avaliar essa habilidade são estruturadas como o exemplo:

Uma galeria vai organizar um concurso de pintura e faz as seguintes exigências:

$1^{\underline{o}}$) A área de cada quadro deve ser 600 cm^2;

$2^{\underline{o}}$) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Qual deve ser a altura dos quadros?

(A) 10 cm (B) 15 cm (C) 20 cm (D) 25 cm

Como sugestões para o professor auxiliar seus alunos no melhor desenvolvimento dessa habilidade indica-se que as atividades em sala devem iniciar-se com representações simples de sentenças matemáticas e, gradativamente, evoluir para a construção de equações do segundo grau. No entanto, não há comentários nem sugestões sobre a melhor forma de motivar e facilitar esse processo de construção.

Não há na matriz de referências nenhuma habilidade relacionada ao estudo de funções do segundo grau, mesmo sendo esse um tema recorrente nos livros didáticos do nono ano do ensino fundamental. A inclusão de habilidades relacionadas a esse assunto é uma sugestão para enriquecer a matriz e aprimorar a avaliação

É preciso refletir sobre os resultados da prova Brasil. Em 2011, para os anos finais do ensino médio, as escolas estaduais (uma média entre os resultados das escolas estaduais urbanas e rurais) obtiverem 235,2. Atingiram assim o quinto nível em uma escala de treze níveis de desempenho (os níveis vão do 0 ao 12). Somente no último nível é considerado que os alunos consigam resolver problemas que envolvam equações do segundo grau.

Analisar o que precisa ser feito para melhorar esses resultados é uma necessidade real e urgente! É inaceitável que os alunos terminem o nono ano do ensino médio sem terem desenvolvido essa habilidade. Por isso mesmo é tão importante à discussão sobre como apresentar as informações aos alunos e como trabalhá-las.

2.4 O Papel do Livro Didático

O livro didático tem sido apoio importante para o trabalho do professor, além de fonte para a aprendizagem do aluno. Seu papel de importância no ensino-aprendizagem está justamente na capacidade de promover esse diálogo entre ambos.

Contudo, é necessário ressaltar que os efeitos positivos da presença do livro didático nas escolas não se relacionam apenas com uma boa escolha do livro, mas principalmente, com o uso adequado desse instrumento.

Lajolo [27] afirma que não há livro que seja à prova de professor: o pior livro pode ficar bom na sala de um bom professor e o melhor livro desanda na sala de um mau professor. Pois o melhor livro, deve-se reforçar, é apenas um livro, instrumento auxiliar da aprendizagem.

Em concordância com a afirmação de Lajolo, salienta-se que o livro didático é um recurso e, portanto, coadjuvante no processo de ensino-aprendizagem. Logo, não pode ocupar o papel dominante nesse processo. Cabe assim ao professor manter-se atento para que sua autonomia pedagógica não seja comprometida.

Mesmo com sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte para o trabalho pedagógico do professor. É essencial que o professor busque complementá-lo, seja para ampliar suas informações e as atividades nele propostas ou para contornar possíveis deficiências.

Além disso, faz-se necessário levar em consideração as especificidades sociais e culturais da comunidade em que o livro é utilizado. Só assim o seu papel na formação do aluno pode ser mais efetivo.

2.5 Programa Nacional do Livro Didático

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como objetivo prover as escolas públicas (de ensino fundamental e médio) com livros didáticos. E também com obras complementares, dicionários e acervos de obras literárias. O programa é executado em ciclos trienais alternados. Deste modo, a cada ano o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) adquire e distribui livros para todos os alunos de uma determinada etapa de ensino e repõe e complementa os livros reutilizáveis para outras etapas.

Os critérios para inscrições das obras são especificados em um edital. Os títulos são inscritos pelas editoras e avaliados pelo MEC. Esse processo consiste em uma análise ampla e criteriosa dos aspectos didático-pedagógicos e metodológicos das obras.

Para verificar se as obras inscritas se enquadram nas exigências, uma triagem é realizada pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. Esses especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos. Esse guia é disponibilizado às escolas para que os professores possam fazer suas análises e escolher a coleção que melhor se adequar a proposta pedagógica do colégio.

O PNLD em 2013, apenas para o Ensino Fundamental, representou um investimento de 751.725.168,04 reais. Atendeu 24.304.067 alunos com 91.785.372 livros distribuídos em 50.343 escolas com turmas dos anos finais do Ensino Médio.

Na área de tecnologia ocorreu um importante avanço nos programas do livro. Isso porque em 2012 foi publicado um edital com o objetivo de formar parcerias para a estruturação e operação de disponibilização de materiais digitais para usuários da educação, como um serviço público e gratuito.

O objetivo do edital é a constituição de acordos de cooperação entre o FNDE e instituições interessadas para a estruturação e a operação de serviço virtual para que sejam disponibilizadas obras digitais e outros conteúdos educacionais digitais para professores, estudantes e outros usuários da rede pública de ensino. Isso por meio de tecnologia que assegurem o atendimento em escala nacional e também protejam os direitos autorais digitais e a propriedade intelectual dos acervos.

Também em 2012 foi a primeira vez que as editoras puderam inscrever, na esfera do PNLD 2014, objetos educacionais digitais complementares aos livros impressos. Esse novo material multimídia, que inclui jogos educativos, simuladores e infográficos animados, será enviado para as escolas em DVD (uma alternativa para as escolas que não possuem internet) para serem utilizados pelos alunos dos anos finais do ensino fundamental no ano letivo de 2014.

Os novos livros didáticos trarão também endereços on-line para que os estudantes tenham acesso ao material multimídia e complementem o assunto estudado,além do intuito de tornar as aulas mais modernas e interessantes.

Para o ano letivo de 2015, foi lançado em 2012 o edital que possibilita que as editoras apresentem obras multimídia, reunindo livro impresso e livro digital. Neste caso, a versão digital deve trazer, além do mesmo conteúdo do material impresso, objetos educacionais digitais, como vídeos, animações, simuladores, imagens, jogos, textos, entre outros itens para auxiliar na aprendizagem.

Assim é possível perceber, também no PNLD, a inclusão das novas tecnologias com o intuito de tornar a aprendizagem mais dinâmica, além de mais atraente. Essa é uma realidade para a qual todos devem se preparar: alunos, professores e até o material didático adotado.

2.6 Como funciona a análise de livros didáticos para o PNLD

De acordo com as normas estabelecidas pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), será excluída do PNLD a coleção de Matemática que:

- apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no manual do professor e, quando houver, no glossário;

- deixar de incluir um dos campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação;
- der atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos, em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
- apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas;
- deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização; supervalorizar o trabalho individual;
- apresentar publicidade de produtos ou empresa

2.7 Analisando algumas obras

Com o intuito de traçar-se um panorama sobre a forma como os conceitos de equação e função do segundo grau são trabalhados nos livros didáticos, será feita uma análise particular. Nela serão investigados alguns aspectos em especial, como o modo com que os conteúdos são introduzidos, a importância dada à história da Matemática, se as explicações e exercícios são contextualizados, se são abordadas as aplicações desses conteúdos no cotidiano e se recursos tecnológicos são sugeridos.

Não existe intenção de classificação qualitativa dos livros analisados (até porque para isso seria necessário uma análise mais profunda) nem de comparar essa análise com as feitas pelo PNLD (pois essas são muito mais detalhadas e abrangentes). O objetivo é apenas verificar como são tratadas as equações e funções do segundo grau em um recurso tão primário quanto o livro didático!

A análise se baseou em seis obras distintas, todas direcionadas para o nono ano do ensino fundamental. São elas:

- Projeto Teláris-Matemática, 9º ano

  DANTE, L. R. **Projeto Teláris-Matemática, 9º ano**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ática, 2012. [11]

- Projeto Velear Matemática, 9º ano

  LOPES, A. J. **Projeto Velear Matemática, 9º ano**. 1 ed. Rio de Janeiro: Scipione, 2012. [32]

- Matemática, 9º ano

  BIANCHINI, E. **Matemática, 9º ano**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. [4]

- Vontade de saber Matemática

  SOUZA, J; PATORA, P. M. **Vontade de Saber Matemática, 9º ano**. 2 ed. Rio de Janeiro: FTD, 2012. [54]

- Matemática: Ideias e desafios

  MORI, I; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e desafios.** 17 ed. São Paulo: Saraiva, 2012. [42]

- Projeto Araribá Matemática

  LEONARDO, F. M. (ed.). **Projeto Araribá: Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010 [28]

Para proporcionar uma melhor visualização dos resultados dessa análise, as informações obtidas foram organizadas em gráficos e estão apresentadas abaixo:

O conceito foi apresentado por meio de uma situação problema ?

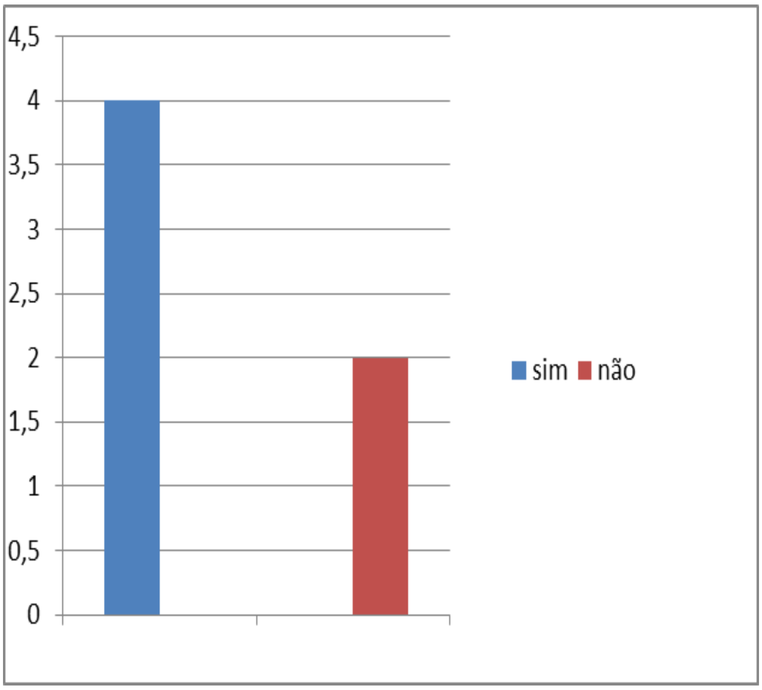

Figura 13 – Referente à equação e função do segundo grau

Para que uma determinada situação seja considerada um problema, deverá implicar em um processo de reflexão, de tomada de decisões quanto ao caminho que será utilizado na sua resolução.

É preciso fazer com que os alunos tornem-se capazes de enfrentar diferentes situações dentro de contextos diversos, fazendo com que busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. É importante criar nos alunos o hábito de determinar por si próprios respostas às questões que lhe são propostas, ao invés de esperar uma resposta já pronta .

A História da Matemática é valorizada na apresentação desse conteúdo?

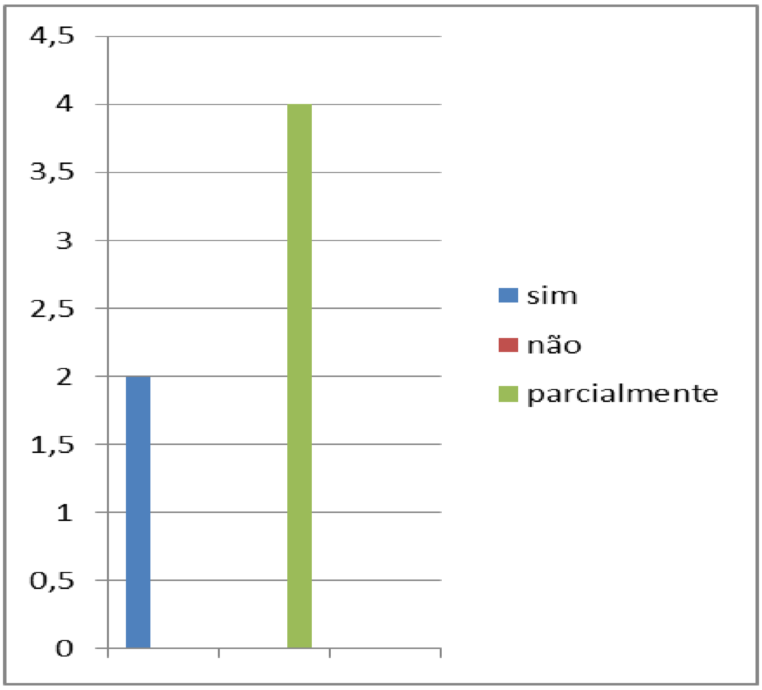

Figura 14 – Referente à equação do segundo grau

Considerando que a História da Matemática é valorizada na apresentação de um determinado conteúdo se ela se faz presente durante toda a apresentação. Ou seja, se a história da matemática é utilizada como forma de facilitar o entendimento daquele conteúdo.

Nos livros nos quais a História da Matemática aparece apenas como modo de introduzir ou fechar o assunto, essa valorização é classificada como parcial.Considera-se que nesses casos, apesar da história da matemática ser utilizada, ela não é aproveitada com todas as suas possibilidades

Preza pela contextualização desses conteúdos?

Infelizmente a contextualização dos assuntos estudados frequentemente ainda ocorre em apenas algumas questões, geralmente em uma seção especial dos livros tratadas como desafios ou questões complementares. Isso contribui para que muitos alunos criem a falsa

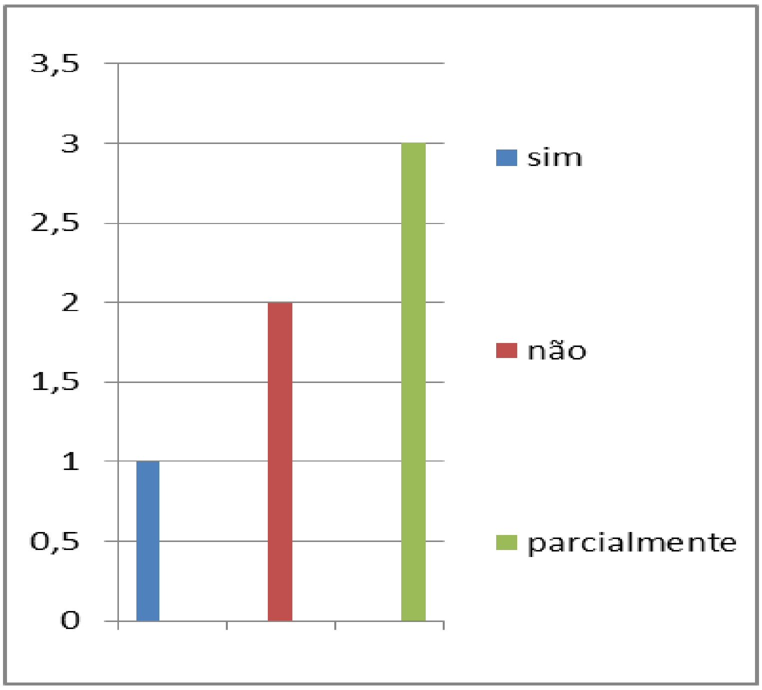

Figura 15 – Referente à função do segundo grau

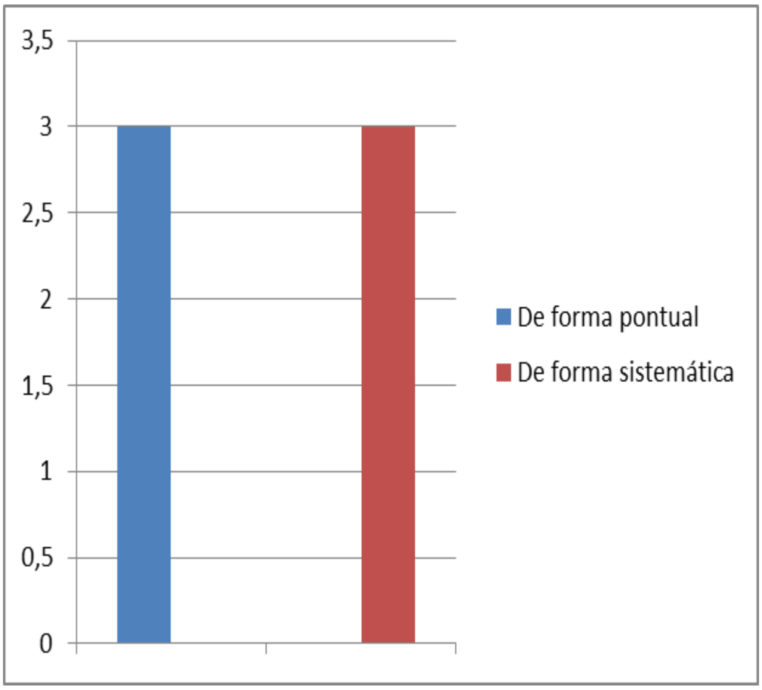

Figura 16 – Referente à equação e função do segundo grau

impressão de que a Matemática não está presente no seu dia a dia. A contextualização, para ser realmente efetiva precisa ser contínua.

É necessário cuidado para evitar a contextualização forçada, na qual uma situação extremamente artificial é criada apenas para a utilização de determinado conceito.

Cabe aqui ressaltar um ponto positivo observado em todas as obras: a associação dos conteúdos tratados com a Geometria, que pode ser observada nos exemplos e também nos exercícios. Essa associação é interessante tanto para recordar conceitos geométricos quanto para reforçar a relação da Álgebra com a Geometria no intuito de efetivamente fazer Matemática.

Aborda as aplicações desse conteúdo?

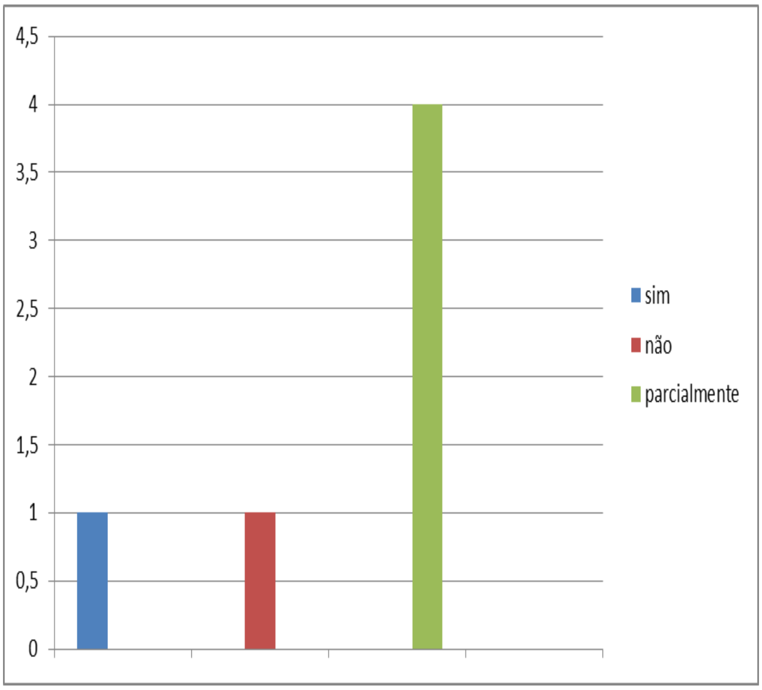

Figura 17 – Referente à função do segundo grau

Nas obras que receberam a classificação parcial, a aplicação dos conteúdos é apenas citada, mas não debatida e explicada. Por exemplo, os livros comentam que o nome "antena parabólica" vem da palavra parábola, ou que a trajetória de uma bola de basquete lançada para a cesta se assemelha a uma parábola. Mas não há justificativa para esses fatos.

Informações sem a devida explicação não acrescentam conhecimento; mais interessante do que apenas indicar uma possível aplicação é analisar a Matemática envolvida nela

A utilização de recursos tecnológicos é sugerida?

Esperava-se que, devido à variedade de softwares matemáticos existentes (muito deles inclusive gratuitos), a utilização de recursos tecnológicos fosse uma sugestão mais presente nos livros didáticos ao abordarem função do segundo grau. Mesmo entendendo

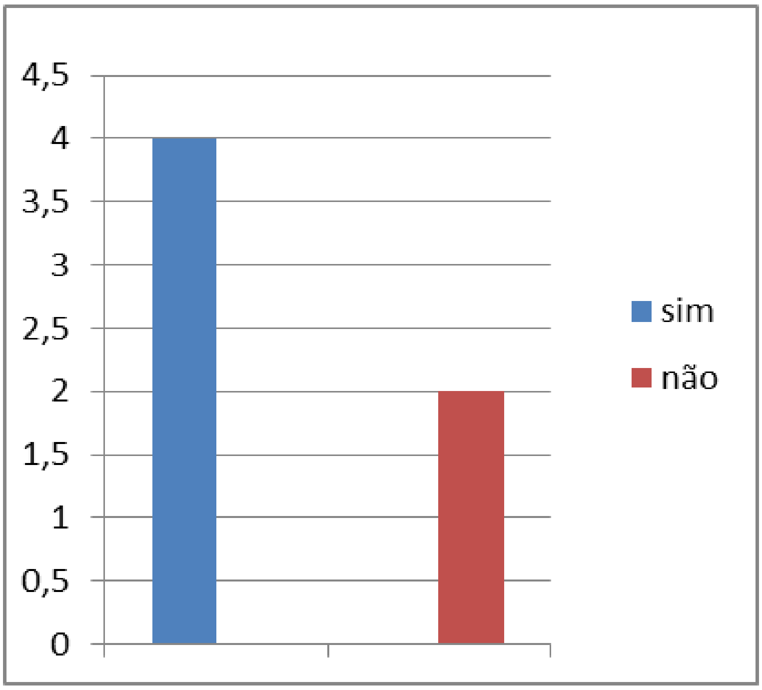

Figura 18 – Referente à equação do segundo grau

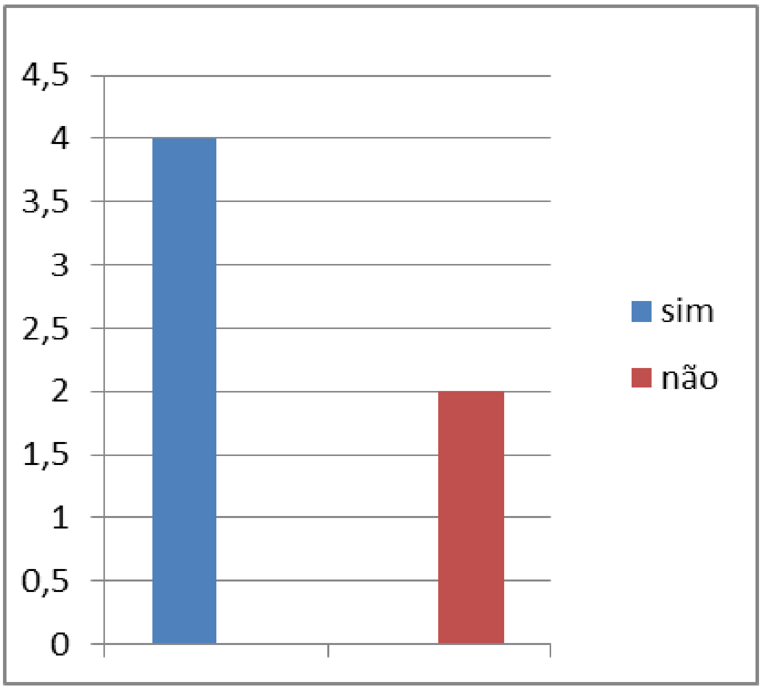

Figura 19 – Referente à função do segundo grau

que essa tecnologia não é uma realidade em todas as escolas, considera-se que a sugestão pelo seu uso não prejudica aqueles que não possuem acesso, ao mesmo tempo em que enriquece a aprendizagem daqueles que possuem essa possibilidade.

Nessa análise a calculadora também foi considerada como recurso tecnológico e em algumas obras a sua utilização é estimulada na resolução de determinados exercícios.

Consideração: Observou-se que, em algumas obras, todos os exemplos e exercícios usam a mesma letra pra representar a incógnita ou a variável (no caso a letra x).

Atente-se que a escolha sempre pela mesma letra para essas representações pode provocar nos alunos a falsa conclusão de que "equação é tudo aquilo que tem x" ou que não existe outra forma de representar uma função se não escolhendo x para variável.

A escolha pela utilização de outras letras é uma atitude simples que minimiza o risco de interpretação equivocada.

2.8 A Importância das Demonstrações

Na obra Projeto Velear Matemática [32], encontra-se o quadro reproduzido abaixo:

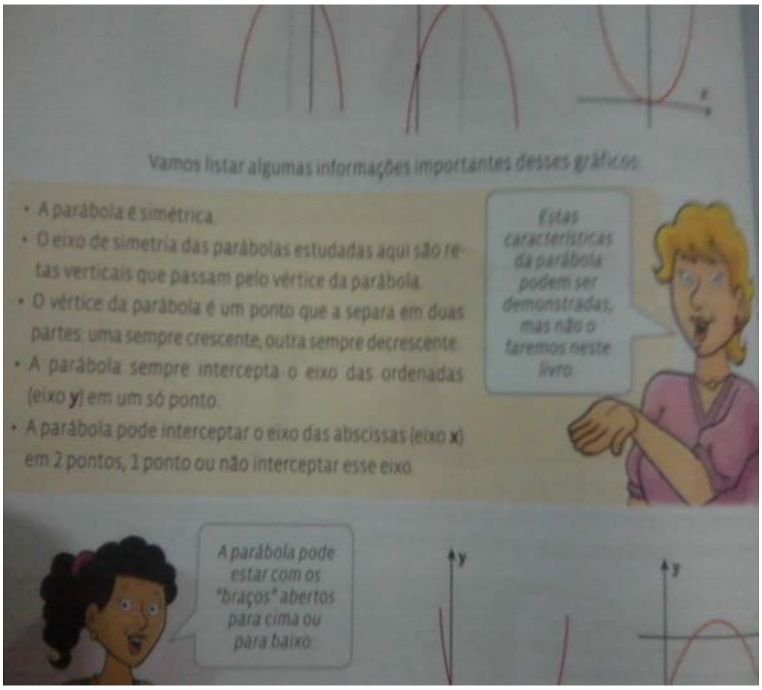

Figura 20 – Quadro com informações sobre a parábola

Chama a atenção o fato de algumas características serem apresentadas já com a indicação de que não seriam demonstradas. Isso inibe o espírito questionador dos alunos, levando os a acreditar que, na Matemática, alguns pontos já surgem prontos e por isso devem ser simplesmente aceitos e decorados.

A Matemática só é realmente compreendida se os alunos têm a possibilidade de explorá-la. O trabalho só é efetivo se o aluno se sentir construindo aquele conhecimento.

Por isso mesmo, a demonstração de resultados ou características exerce papel tão fundamental.

No entanto, algumas vezes as demonstrações matemáticas exigem conhecimentos além dos trabalhados em determinado ano escolar (mesmo considerando que isso não chega a ser uma verdade para todas as características da lista, pois algumas possuem demonstrações simples e rápidas). Ainda assim, mais interessante do que levar o aluno a aceitar determinado fato como verdadeiro seria trabalhar com alguns exemplos de modo a levá-los a intuí-las.

2.9 O Ensino

Ensinar é estimular o pensamento independente, é desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Deste modo, os professores devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção e o raciocínio lógico.

Educadores críticos e reflexivos devem estar abertos à mudança e ao novo. Os professores devem ser capazes de transformar o modo de ver o ensino e, assim, partir para uma nova educação que contemple as necessidades sociais. Se, o professor almeja superar os atuais entraves da educação, deve levar em consideração todos os avanços tecnológicos e a globalização da informação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs [7]:

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescente e globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

É sabido que os PCNs indicam que os educadores devem proporcionar aos alunos a oportunidade de serem ativos, participativos, criativos e autônomos em seu aprendizado Para isso precisará envolvê-los em situações significativas e que promovam o conhecimento. É vital que os professores saibam fazer da sala de aula um ambiente de debates, discussões, aproveitando cada momento para proporcionar a aprendizagem.

2.10 O Lúdico

Vygotsky afirma que "Ao brincar, a criança assume papéis e aceita as regras próprias da brincadeira, executando, imaginariamente, tarefas para as quais ainda não está apta ou não sente como agradáveis na realidade.". [48]

O lúdico como forma de envolver os educandos é de extrema importância. Paulo Nunes de Almeida [2] cita Froebel quando afirma que a educação que é capaz de proporcionar às crianças auto expressão e participação social é a educação mais eficiente

Quando bem compreendida e usada de maneira correta, a Educação Lúdica pode contribuir para a melhoria do ensino, de forma que o aluno adquire uma formação crítica e satisfação em estar na escola. O lúdico está longe de ser apenas uma brincadeira ou entretenimento. É uma ação que sempre leva em direção ao conhecimento.

É preciso frisar que o potencial de um jogo não está no material de que ele é confeccionado, mas sim na transformação que ele pode gerar em quem o utiliza. O jogo significa para o aluno muito mais que o simples ato de brincar. Através dele, o aluno se expressa e se comunica. Cabe ao professor usar a atividade lúdica como elemento que auxilia na compreensão e no desenvolvimento da aprendizagem.

O sentido real e funcional de uma educação lúdica estará garantido caso o professor esteja preparado para realizá-lo. Desse modo, é essencial que o professor se encante pela proposta, mas para que haja encantamento é fundamental que haja conhecimento.

O bom funcionamento de toda atividade lúdica e pedagógica depende, quase que exclusivamente, do preparo e liderança do professor. É preciso entender que a aprendizagem não se dá pelo jogo, mas com base nele. Por isso a qualidade do jogo no processo educativo está ligada à capacidade de compreender que tal fenômeno permite a exploração de uma série de situações interessantes ao desenvolvimento e que pode ter sua potencialidade aumentada tendo em vista uma intencionalidade na aplicação.

2.11 Material concreto

Azevedo apud Fiorentini e Miorim declara que:"Nada deve ser dado a criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração" [21]

Para Piaget [46], o conhecimento se dá através de um processo de interação. A partir do momento em que o sujeito interage em contato com o objeto, um modifica o outro, assim ocorre à construção do conhecimento pelo sujeito. Para Fiorentini e Miorim [21], o importante da ação é que ela seja reflexiva e que o aluno aprenda de modo significativo, desenvolvendo atividades nas quais raciocine, compreenda, elabore e reelabore seu conhecimento, sendo que o uso de materiais pode trazer uma grande contribuição nesse sentido.

Obviamente, não apenas o uso do material concreto é condição suficiente para a aprendizagem de Matemática. Isso porque a aprendizagem não está diretamente relacionada a alguma atividade ou material, mas sim ao modo que essa atividade é desenvolvida e que esse material é utilizado. Novamente o professor possui papel central na escolha e preparação desse material. A potencialização do uso destes instrumentos depende da vontade e da capacidade de criação dos professores.

Uma das vantagens do material concreto para as aulas de Matemática é que ele pode ser facilmente confeccionado, pelos professores ou até mesmo pelos alunos. Com criatividade, é possível construir material com baixo custo. E em muitos casos o material produzido pode ser usado em diversas turmas e situações, só alterando, para isso, a maneira de trabalhar com ele.

É necessário atentar que as noções matemáticas se formam na mente dos alunos e não no próprio material. Ele apenas favorece o aprendizado, desde que seja bem utilizado. Freitas [23] afirma que todos os materiais têm como característica principal o fato de oferecer suporte aos alunos, a partir da manipulação e de entender conceitos importantes.

2.12 Interdisciplinaridade

Morin diz que: "O parcelamento e a compartimentação dos saberes impedem apreender o que está tecido junto.". [43]

Infelizmente, na prática a maioria das escolas ainda difunde o conhecimento fragmentado. Delimitam assim as disciplinas e passam para os alunos a falsa impressão de que elas não "conversam entre si". Segmentam o saber e não percebem a relação natural entre matérias consideradas distintas. Não percebem as disciplinas como processos históricos e culturais correlacionados.

É preciso entender a interdisciplinaridade como mais do que uma simples integração de conteúdos. De acordo com o PCN:

> A interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ao contrário, mantém sua individualidade. Mas integra as disciplinas a partir da compreensão das múltiplas causas ou fatores que intervêm sobre a realidade e trabalha todas as linguagens necessárias para a constituição de conhecimentos, comunicação e negociação de significados e registro sistemático dos resultados. [7]

A interdisciplinaridade só será realmente alcançada quando os conhecimentos de diversas disciplinas forem usados para a resolução de um problema ou compreensão de um fenômeno.

Para que a interdisciplinaridade ocorra satisfatoriamente é preciso que o professor conheça bem sua matéria (fator indispensável para qualquer um que pretende ensinar), que tenha uma boa compreensão entre as várias disciplinas e que entenda o modo como os alunos constroem seus conhecimentos e desenvolvem suas capacidades mentais.

2.13 Aplicação no Dia a Dia

Nikolai Lobachevsky reitera que "Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.". [36]

Não faz sentido imaginar que os conteúdos apresentados nas escolas não possuem aplicabilidade no cotidiano. Com a Matemática não é diferente. Matemática é vida e se faz extremamente presente no dia a dia. Mas muitas vezes sua usabilidade não é tão evidenciada nas escolas. Isso cria nos alunos a falsa impressão de que o que estudam não passa de um saber formal, desvinculado do mundo prático. D' Ambrosio [18] afirma que: "Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta, e poderia ser tratada como um fato histórico".

Articular o ensino com as várias práticas e necessidades sócias é indispensável. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), ao problematizar situações cotidianas articuladas aos conceitos matemáticos, permite-se que o aluno faça inter-relações entre vários conceitos e entre os seus diversos modos de representação.Segundo D'Ambrosio

> Devemos discutir sobre a importância da matemática para construção da cidadania, em ênfase principalmente, na participação crítica e autônoma dos alunos, proporcionando-lhes o estabelecimento de conexões da matemática com outros temas de sua vida cotidiana. [13]

Adotar metodologias que procurem contextualizar o ensino na sala de aula com o intuito de levar o estudante a construir e compreender a matemática e seus procedimentos e que também o auxiliem na formalização de diferentes conceitos da disciplina é uma alternativa para desmistificar a matemática. Ainda segundo D'Ambrósio [18],

> É importante à adoção de uma nova postura educacional, a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino aprendizagem. É necessário que ele se empenhe no mundo que cerca os alunos, na sua realidade aproveitando cada oportunidade a fim de sugerir atividades para que o desenvolvimento do ensino aprendizado da matemática seja efetivo e prazeroso, e que no final de cada aula o educador tenha aplicado a matéria com qualidade e que tenha conseguido ensinar ao aluno de forma clara.

2.14 História da Matemática

Segundo afirmação de Frank Swetz: "A Matemática não é algo mágico e ameaçadoramente estranho, mas sim um corpo de conhecimento naturalmente desenvolvido por pessoas durante um período de 5000 anos...". [22]

Entender a evolução do conhecimento matemático permite aos professores produzirem estratégias para facilitar a construção do conhecimento dos alunos. Dessa forma o contexto histórico pode ser uma fonte de inspiração. A Matemática que hoje utilizamos é fruto de um processo. Ela não surge pronta. É desenvolvida de acordo com as necessidades de cada época e com a contribuição de importantes personagens.

Reconhecer isso pode torná-la mais próxima dos alunos. É preciso frisar que o ensino da matemática recorrendo à sua história é a forma de tratá-la como uma manifestação cultural. Assim, a história da matemática e principalmente sua interpretação são vistas como essenciais à Educação Matemática.

De acordo com D'Ambrosio a história da matemática no ensino deve ser encarada, sobretudo pelo seu valor motivacional. Deve-se dar curiosidades, coisas interessantes que poderão atrair alguns alunos. Ele afirma que:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. [14]

É necessário entender que a história da matemática tem o potencial para fazer a integração necessária entre os conteúdos da matemática e também os desta com as demais disciplinas. Isso porque ela acompanha a própria história da humanidade.

Ainda de acordo com D'Ambrosio [15]: "Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas."

2.15 Álgebra e Geometria

Nadir Afonso declara: "Todas as culturas foram iluminadas pela Geometria, cujas formas despertam no espírito um sentimento de exatidão e de evidência absoluta.". [36]

Em 1931, durante o governo Vargas, ocorre no Brasil a Reforma Francisco Campos. A sua proposta para a educação é uma reforma do então ensino secundário. Neste ano, as carteiras de Álgebra, Aritmética, Geometria e Trigonometria, que até então eram lecionadas separadamente, foram reunidas formando a disciplina Matemática.

Porém, mesmo depois da reforma, ainda é grande o número de professores que trabalha a Álgebra e a Geometria de forma isolada, sem fazer relação entre ambas, o que torna o ensino fragmentado. E o que é pior: muitas vezes, a Geometria acaba desprestigiada nas nossas escolas.

É preciso entender que não se faz Matemática dissociando Álgebra da Geometria e muito menos desvalorizando uma delas. Ressaltando a importância da Geometria, Lorenzato [33] diz que ela tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática.

Segundo Fainguelernt [20], a Geometria desempenha um papel fundamental no ensino porque ativa as estruturas mentais na passagem de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização; é tema integrador entre as diversas partes da Matemática, sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência.

Cabe, mais uma vez ao professor, saber relacionar Álgebra e Geometria para assim oferecer aos seus alunos uma aprendizagem significativa de ambas. Para isso ele precisa promover atividades que levem seus alunos a perceberem essa relação, atividades nas quais eles possam trabalhar com a Álgebra e com a Geometria simultaneamente e de maneira significativa. Só assim os alunos conseguirão perceber que fazer Matemática é algo muito mais ampla do que divisões curriculares.

2.16 Softwares

Segundo afirmação de Milani:

> O computador, símbolo e principal instrumento do avanço tecnológico, não pode mais ser ignorado pela escola. No entanto, o desafio é colocar todo o potencial dessa tecnologia a serviço do aperfeiçoamento do processo educacional, aliando-a ao projeto da escola com o objetivo de preparar o futuro cidadão. [38]

O avanço da informática na sociedade deve refletir na educação. Seja pela qualificação do ensino aprendizagem ou pelo surgimento de novas formas de aprender e pensar. É natural que atualmente exista uma preocupação, por parte dos professores, em fazer uso inteligente do computador em sala de aula.

O Ministério da Educação afirma que [39]:

> [...] a utilização do computador na educação é possível ao professor e a escola dinamizarem o processo de ensino-aprendizagem, com aulas mais criativas, mais motivadoras e que despertem, nos alunos, a curiosidade e o desejo de aprender, conhecer e fazer descobertas. A dimensão da informática na educação, não está, portanto, restrita à informatização da parte administrativa da escola ou ao ensino da informática para os alunos.

Mas é importante frisar que o simples fato de os alunos serem levados ao laboratório de informática da escola e usarem algum software não implica necessariamente em aprendizado. É essencial organizar o projeto pedagógico da escola para que ele envolva a utilização do computador e seus recursos. Só assim garantimos que o aluno não ocupe o papel de mero digitador, mas seja estimulado a produzir conhecimento.

Segundo Ostrowski [45] as novas tecnologias farão o processo educacional reorganizar sua estrutura:

> A mudança da função do computador como meio educacional acontece juntamente com um questionamento da função da escola e do papel do professor, que deixa de ser o repassador de conhecimento - o computador pode fazer isto e o faz mais eficientemente do que o professor - para ser o criador de ambientes de aprendizado e facilitador do processo pelo qual o aluno adquire conhecimento

É preciso que os softwares passem por uma análise prévia do professor considerando as características visuais, os aspectos relacionados quanto à qualidade, usabilidade, eficiência e os aspectos pedagógicos.

2.17 Observação sobre a utilização de calculadoras

D'Ambrosio [12] reitera que:

> "Hoje, todo mundo deveria estar utilizando a calculadora, uma ferramenta importantíssima. Ao contrário do que muitos professores dizem, a calculadora não embota o raciocínio do aluno – todas as pesquisas feitas sobre aprendizagem demonstram isso."

D'Ambrosio atribuiu os receios quanto ao uso da calculadora em sala de aula a um certo conservadorismo e desconhecimento histórico sobre o papel que a tecnologia tem exercido no desenvolvimento das civilizações. Em sua análise histórica, ele mostra que a sociedade vem se organizando a partir da tecnologia disponível. Assim, não faz sentido olhar as horas a partir do céu se já existe o relógio. Da mesma forma, não se justifica se operar apenas com o lápis e o papel diante das tecnologias atualmente disponíveis, como calculadoras e computadores.

Quando se opta por utilizar a calculadora em sala de aula, faz-se a escolha por um modo de ensinar Matemática que não está voltado unicamente para habilidades de cálculo ou resolução de operações básicas, mas sim para o desenvolvimento do raciocínio.

Por isso mesmo a calculadora não pode ser encarada unicamente como uma máquina de somar e subtrair, mas sim, como uma preciosa ferramenta que auxilia o aluno a resolver diversos problemas de seu dia a dia. A utilização da calculadora em sala de aula deve ser bem planejada. E para isso faz-se necessário que o professor tenha um conhecimento prévio de suas possibilidades e também de suas limitações. Para os alunos, é importante que esteja claro por que as atividades serão desenvolvidas com o uso dessa ferramenta e com quais objetivos.

Portanto, é essencial que o professor esteja preparado para direcionar seus alunos ao bom uso da tecnologia, garantindo um bom aprendizado e não apenas fazendo continhas sem papel.

Não se está, de modo algum, desvalorizando a necessidade de os alunos serem capazes de fazer conta. Em turmas do nono ano é esperado que os alunos já tenham adquirido essa habilidade e por isso mesmo o professor possa focar as atividades em outras competência

Capítulo 3

Sequência didática

Elaborou-se uma sequência didática para ser aplicada em turmas de nono ano do Ensino Fundamental, em que comumente os conceitos de equação e de função do segundo grau são apresentados. Em sua maior parte, foi sistematicamente aplicada nas turmas de nono ano do Colégio Estadual Dez de Maio, localizado em Itaperuna, interior do estado do Rio de Janeiro, nos anos de 2012 e 2013. As reações dos alunos ás atividades serão comentadas durante a sua descrição e analisadas com mais cuidado na conclusão

Salienta-se que as mesmas atividades podem ser utilizadas em turmas do 1º ano do Ensino Médio, como maneira de recordar esses conteúdos ou em qualquer ano subsequente, e que podem (e devem) ser adaptadas à realidade de qualquer outro colégio ou turma.

As atividades aqui tratadas são de fácil elaboração e aplicação. Foram planejadas cuidadosamente, levando em consideração os pilares analisados no capítulo 2 e principalmente, de modo que as turmas desenvolvessem o raciocínio lógico, a capacidade de fazer matemática e o gosto por essa ciência.

Na aplicação das atividades, a participação dos alunos foi extremamente valorizada. Afinal, a sequência só faz sentido se for elaborada de modo a estimular essa participação, não só com atividades atrativas e variadas, mas principalmente no modo de serem trabalhadas. De nada adiantaria uma sequência que não despertasse o interesse nos alunos e na qual as suas opiniões e questionamentos não fossem admirados.

Foram aproveitados os recursos existentes no colégio onde a sequência foi aplicada (como um laboratório de informática e um auditório com projetor e tela interativa). É claro que, infelizmente, estes recursos não estão disponíveis em todas as escolas. É uma pena que para alguns alunos a tecnologia ainda não se faça presente no seu processo de aprendizagem. Contudo, isso não justificaria a não utilização de toda a potencialidade disponível para a elaboração e aplicação dessa sequência.

Os alunos foram autorizados a utilizar calculadora sempre que considerassem necessário. Entretanto, foi interessante perceber que o seu uso foi naturalmente reduzindo de acordo com o andamento da sequência feita.

Isso porque, inicialmente os alunos estavam muito presos à calculadora com a falsa impressão de que ela tornaria mais fácil a obtenção de respostas certas. Mas as questões foram cuidadosamente escolhidas de modo a não serem centralizadas em cálculos ou aplicação mecânica de fórmulas. Com o passar das atividades, os alunos perceberam a valorização centrada no raciocínio e a calculadora passou a ocupar a função de simples ferramenta.

3.1 A Elaboração de Músicas, Poesias e Peças de Teatro envolvendo conceitos da História da Matemática.

Buscando trabalhar de forma dinâmica e que estimulasse a criatividade foi desenvolvida uma atividade na qual os alunos foram divididos em grupos e cada um desses grupos deveria criar uma manifestação artística (paródia, música, poesia, peça de teatro entre outras) que envolvesse os conceitos históricos matemáticos relacionados à equação do segundo grau; assunto que era estudado na época.

Os grupos eram livres para escolher a manifestação artística que preferissem. As únicas exigências eram que eles fossem criativos em seus trabalhos e apresentações e que a História da Matemática fosse o centro de suas criações.

Alguns dos pontos da História da Matemática envolvida no conceito de equações do segundo grau foram apresentados em sala, por mim, conforme tratávamos do conteúdo. Sua apresentação buscava tanto atrair o aluno quanto o fazer entender como o conteúdo que estava sendo ensinado foi desenvolvido. Além disso, os alunos foram estimulados a pesquisar mais sobre a História da Matemática de modo a ter mais informações que lhes auxiliassem nesse processo de criação.

A data da apresentação dos trabalhos foi marcada com um mês de antecedência, para que os alunos tivessem tempo suficiente para a sua elaboração. Os minutos finais das aulas que antecederam a apresentação foram reservados para que os grupos pudessem mostrar o andamento do trabalho e esclarecer as dúvidas que por ventura surgissem nesse período.

Entre os vários trabalhos apresentados será compartilhada a letra de um rap criado por um dos grupos. Na apresentação do trabalho para a turma eles não só cantaram como também se caracterizaram como um grupo de rap.

"Vamos contar a História de Bhaskara

Um grande Matemático que nasceu na Índia

Em 1114 ele nasceu

Só até 1185 ele viveu

Ele tinha uma filha, que queria se casar

Mas a menina era cheia de azar

Lilavat era o seu nome

Tudo o que ela queria era arranjar um homem

É também o nome do livro que ele escreveu

Um dos mais importantes que o mundo conheceu

Foi o criador de uma conhecida fórmula

Que você conhece e vai ter que estudar

O valor de delta é fácil aprender

B ao quadrado menos 4ac

A fórmula de Bhaskara agora você vai usar

Menos b mais ou menos a raiz de delta sobre 2 vezes a

E é assim que você vai solucionar

A equação do segundo grau que a Elza vai passar

E com esse rap você vai lembrar

Pro resto da vida como é fácil acertar"

Nessa atividade a capacidade artística dos alunos é estimulada. E se torna uma atividade mais significativa do que as atividades tradicionais de pesquisa. Além disso, sua execução pode envolver os professores de outras disciplinas; como os de Língua Portuguesa e de Artes. O que tornaria o trabalho ainda mais enriquecedor e com certeza traria resultados ainda melhores

Ao apresentar a famosa fórmula para encontrar as raízes dessas equações foi esclarecido para os alunos que apesar do nome comumente adotado no Brasil, a fórmula não foi descoberta por Bhaskara. Ainda assim eles ficaram livres na hora da criação para usar as informações que obtiveram da forma que preferissem

Foi uma atividade que deixou os alunos bastante entusiasmados. Eles gostaram de desenvolver uma atividade diferente, se entusiasmaram com a possibilidade de apresentar suas habilidades artísticas (alunos que, por exemplo, tocam violão e ficaram completamente encantados com a possibilidade de tocar em uma aula de Matemática).

De um modo geral, além de trabalhos muito bem feitos, aumentou-se a motivação e a participação da turma. E ainda mostrou-se de forma criativa que a Matemática é desenvolvida ao longo do tempo. Entender a história da Matemática é essencial para entender a própria Matemática.

3.2 A Criação de um Jornal cujo tema central fosse a História da Matemática envolvida no conceito de Equações do Segundo Grau

Novamente, a ideia era apresentar de forma criativa a História da Matemática envolvida no assunto que estava sendo abordado (equação do segundo grau). Para isso, foi criado um jornal fictício, chamado de "O Número" (disponibilizado em anexo).

Esse jornal foi estruturado de forma semelhante a um jornal real e a cada semana os alunos recebiam uma de suas páginas. A leitura do texto era feita em sala e debatia-se sobre ele.

O interesse principal era atrair os alunos e por isso mesmo o jornal conta com uma dose de humor e apresenta diversas curiosidades. Neste caso, toda a sua elaboração ficou sob a responsabilidade da professora, mas uma possibilidade bastante interessante é que o jornal fosse constituído por textos elaborados pelos alunos. Isso tornaria a atividade ainda mais participativa!

O humor e a percepção de que a Matemática não é uma ciência que surge pronta, mas sim é desenvolvida de acordo com as necessidades de cada época atraíram os alunos. Frisando que os resultados poderiam ser ainda melhores se a participação dos alunos fosse mais ativa. Os alunos sentiram falta de participar da execução do jornal, ao invés de simplesmente recebê-lo pronto.

Mais uma vez essa atividade pode ser enriquecida se trabalhada em conjunto com professores de outras disciplinas.

3.3 A Geometria ajudando a Álgebra

É muito comum pensar na resolução de um determinado problema por caminhos puramente algébricos ou então puramente geométricos. Mas e se fosse utilizada a geometria para resolver uma questão que parece apenas algébrica? Esse é o foco dessa atividade.

Al-Khowarizmi foi um matemático árabe que viveu há mais de mil anos. E ele completava quadrados utilizando a geometria para resolver problemas que hoje se conhecem como equações do segundo grau.

Como exemplo, será resolvida a equação $x^2 + 6\text{x} = 27$. O primeiro passo é construir um quadrado de lado x. Ou seja, quadrado cuja área vai corresponder ao termo x^2.

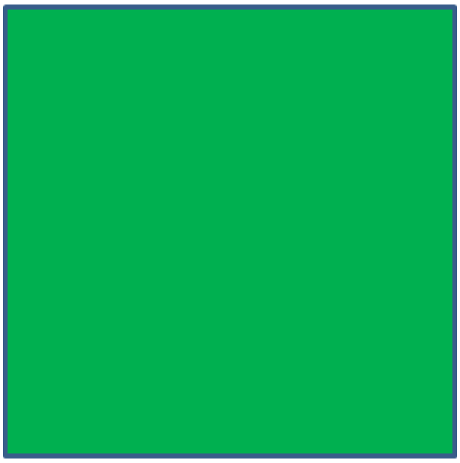

Figura 21 – Quadrado com área x^2

O termo 6x será associado à área de um retângulo, cujos lados valem seis e x. Esse retângulo será dividido em quatro retângulos de mesma área. Ou seja, retângulos de área 1,5x ,cujos lados valem 1,5 e x.

Figura 22 – Retângulo com área 6x

Será aplicado cada um desses quatro retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2, pois eles possuem um dos lados em comum, o lado que vale x. A área dessa figura em forma de cruz é x^2+1,5x +1,5x+1,5x+1,5x.Isto é, x^2+6x que vale 27.

Completa-se a figura para obter um quadrado. A área desse quadrado será a área anterior (27) mais o que foi acrescentado. 27 + 4 . (1,5 . 1,5) = 27 + 9 = 36. Portanto, esse quadrado terá área igual a 36.

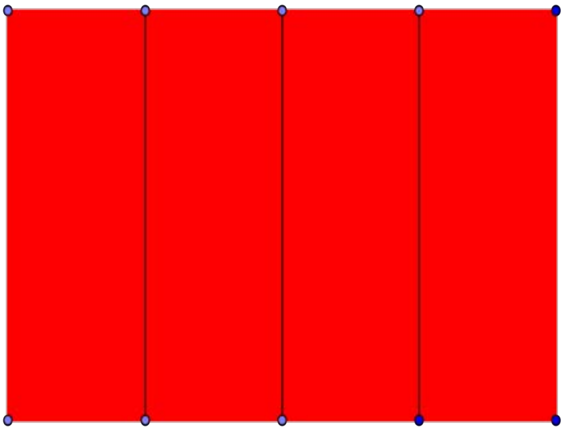

Figura 23 – Retângulos com área 1,5x

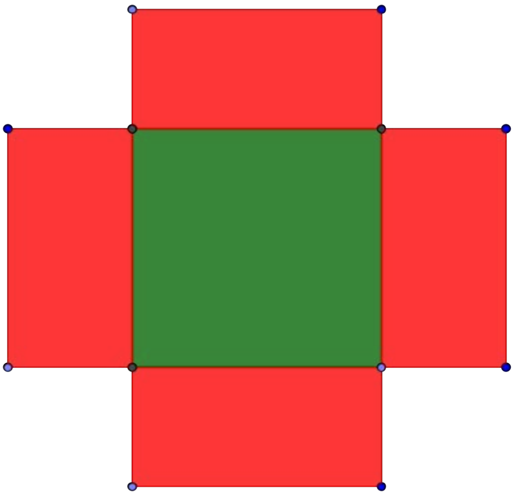

Figura 24 – Figura em forma de cruz

Agora a área desse quadrado será a área anterior (27) mais o que foi acrescentado. $27 + 4 \, . \, (1{,}5 \, . \, 1{,}5) = 27 + 9 = 36$. Portanto, esse quadrado terá área igual a 36.

A resolução da equação termina quando é encontrado o valor de x. Então, deve-se encontrar quanto vale cada lado desse quadrado. Sabe-se que sua área é 36, assim seu lado irá valer o mesmo que a raiz quadrada de 36, ou seja, terá lado igual a 6. Sabendo

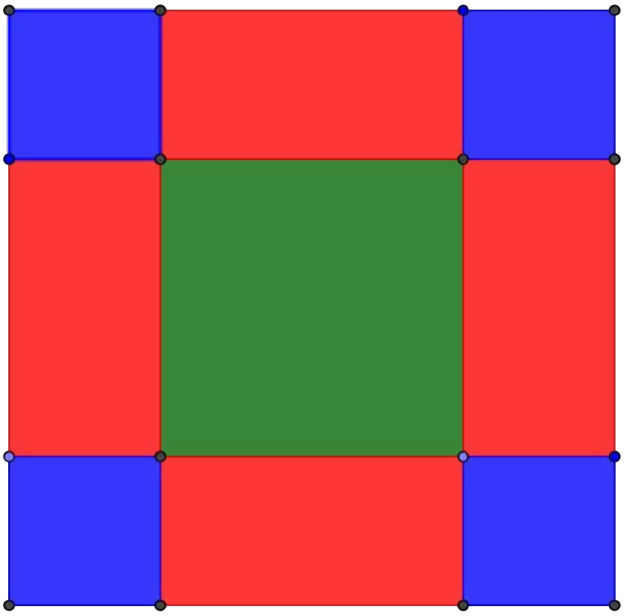

Figura 25 – Quadrado obtido

que cada lado mede 1,5 + x + 1,5 e que isso equivale a 6, forma-se uma equação e o valor de x é obtido.

$$1{,}5 + x + 1{,}5 = 6$$
$$3 + x = 6$$
$$x = 6 - 3$$
$$x = 3$$

É claro que para os dias de hoje, esse método, apesar de bastante interessante, tem as suas desvantagens. A principal é que com ele não são obtidas as soluções negativas da equação. Sendo x representado como a medida do lado de um quadrado, x sempre assumirá o valor positivo.

Contudo, Al-Khowarizmi sequer percebeu essa "desvantagem" .Isso porque, na sua época, os números negativos ainda não eram conhecidos.

Mesmo com algumas desvantagens, trata-se de um método interessante para ser compartilhado com os alunos. Permite, além de ampliar um pouco o conhecimento histórico, uma visão diferente da habitual com relação à equação do segundo grau, uma abordagem geométrica que pode, em alguns casos, facilitar o entendimento. Além disso, o conceito de completar quadrados se torna algo mais visível e, portanto, mais fácil de ser compreendido.

Na apresentação dessa maneira de solucionar equações para a turma, é essencial que a parte histórica seja abordada. Só assim os alunos serão capazes de entender as suas deficiências e a sua importância.

Alguns exemplos devem ser resolvidos no quadro e para isso pode ser interessante a construção de modelos coloridos que facilitem a visualização. Optou-se pela construção do material em EVA pelo seu baixo custo e facilidade de ser encontrado.

Após os exemplos, foi solicitado que os alunos resolvessem algumas equações também usando o método geométrico. Na atividade dada, eles resolveram as equações apenas com desenhos nos seus cadernos, mas outra possibilidade era solicitar que construíssem seus próprios modelos de EVA ou com o material que considerassem mais convenientes.

A maioria dos alunos está tão habituada ao uso, quase automático, de fórmulas que a princípio não gostou muito dessa nova forma de resolver equações. O que mais lhes chamou a atenção foi perceber a "evolução" da Matemática. Notar que esse é um conteúdo sujeito a modificações.

Abaixo, algumas fotos de como ficaram os exemplos cortados em EVA. Eles são respectivamente referentes às equações x^2+12x=85 e x^2+8x=33

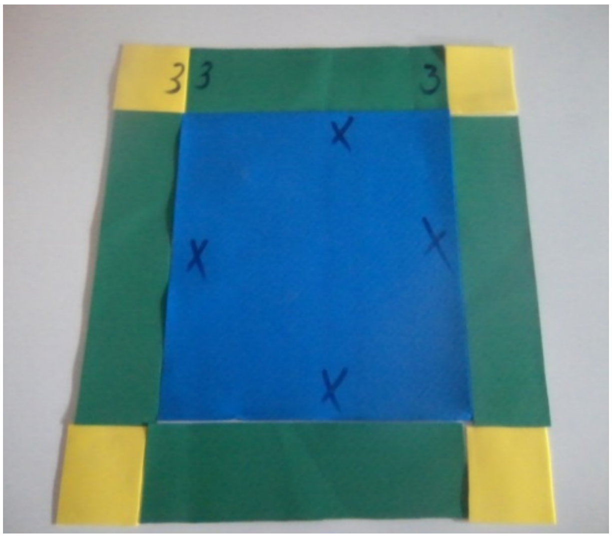

Figura 26 – Construção em EVA

Figura 27 – Outra construção em EVA

3.4 Construção de um refletor de raios luminosos em formato de parábola

Quando se trata de funções do segundo grau, os alunos são estimulados a traçar, interpretar e analisar parábolas. Mas a pergunta que surge é: Será que as parábolas possuem algum tipo de aplicação no nosso cotidiano? Claro que sim. Demonstrar essa aplicabilidade por meio de uma atividade prática pode ser uma forma de atrair ainda mais os alunos.

Nesta atividade, os alunos são orientados na construção de um refletor de raios luminosos, com o formato de uma parábola. Nesse refletor, os raios de luz irão incidir paralelamente ao eixo de simetria da mesma. O objetivo é demonstrar de forma simples e concreta aos alunos uma das propriedades das parábolas que são utilizadas nas antenas parabólicas. Para a melhor organização da atividade, é recomendável que os alunos sejam organizados em pequenos grupos.

Os materiais necessários para a construção de um refletor são:

- um suporte de papelão grosso 30x30 (cm);
- uma folha de papel laminado;
- uma cartolina;
- um palito de madeira roliço;
- cola;
- fita adesiva transparente;

- uma folha de papel sulfite;
- régua de pelo menos 30 cm;
- lápis;
- folha de alumínio;
- uma lanterna com feixe de luz

Sua construção se dá de acordo com os seguintes passos:

Primeiro, é preciso o molde de uma parábola. Esse molde pode ser construído pelos alunos ou entregue já pronto pelo professor. Uma maneira fácil de obter esse molde é através da utilização de softwares como o Geogebra (que será abordado mais detalhadamente adiante). Esse molde será utilizado para desenhar a parábola na cartolina que deverá ser colada no suporte de papelão. É importante marcar o foco da parábola. A folha laminada deverá ser fixada contornando a parábola. O palito também deve ser encapado com a folha de alumínio e colocado no foco da parábola.

Os refletores construídos ficarão similares aos modelos abaixo:

Figura 28 – Refletor de raios luminosos

Agora é só utilizar a lanterna de forma que os raios de luz incidam sobre a superfície parabólica da folha laminada paralelamente ao eixo de simetria da parábola. Caso a construção tenha sido feita corretamente, os alunos verificarão que os raios de luz irão convergir ao foco. Comprovarão assim uma das propriedades das parábolas.

Esta atividade deve ser aproveitada para uma análise de alguns objetos que possuem esta propriedade e são úteis no nosso cotidiano. Como por exemplo, as antenas parabólicas e os faróis de carro. Assim os alunos poderão perceber como a Matemática está presente em situações do seu dia a dia que antes eles não imaginavam. Entender que o assunto estudado tem uma aplicação prática muitas vezes motiva os alunos. E o professor pode aproveitar o momento para solicitar uma pesquisa sobre a Matemática envolvida nesses ou em outros objetos.

Esta é a única atividade desta sequência que não foi aplicada nas turmas testes do Colégio Estadual Dez de Maio. Ela foi retirada do trabalho de Machado [34]. Sua não aplicação foi devido a questões de cronograma, mas ela certamente enriqueceria a sequência com demonstrações prática de aplicabilidade e, por isso mesmo, fica aqui sugerida.

3.5 Atividades com o Winplot

O Winplot é um programa para plotagem de gráficos de funções de uma e duas variáveis. Ele é bastante simples de utilizar, pois dispensa o conhecimento de qualquer linguagem de programação e sua distribuição é gratuita. Entre os diversos softwares disponíveis o Winplot foi escolhido devido à simplicidade de manuseio e pela função animação, muito útil na análise da relação entre os coeficientes da função e o seu respectivo gráfico.

Essa atividade foi elaborada para que os alunos aprimorassem a análise e traçado de gráficos de função do segundo grau, além de buscar reforçar a relação entre os coeficientes da função e o seu gráfico. Iniciou-se a atividade no auditório do colégio, que conta com um projetor e uma tela interativa. Utilizando o projetor, a turma foi apresentada ao software e suas principais funções.

Além da rapidez e precisão no desenho dos gráficos, esse tipo de recurso oferece uma enorme gama de possibilidades. Salienta-se aqui que não interessa a utilização do software apenas como modo de obter os gráficos das funções. Isso seria restringir (e muito) suas possibilidades. E, além disso, mesmo que levando mais tempo e sem tanta precisão, os alunos são capazes de esboçar esses gráficos. O que realmente interessa são as possibilidades de análise dessa construção, que são potencializadas pelo software. Isso porque se tornam mais interativas, dinâmicas e de mais fácil visualização.

Em pesquisa realizada por Maia [35], após análise de livros didáticos:

> [...] percebeu a predominância de duas formas da passagem da representação algébrica para a representação gráfica: por meio da construção de tabelas, que na maioria das vezes são escolhidos números inteiros, ou utilizando-se apenas alguns pontos especiais, os quais os livros chamam de pontos notáveis da parábola. Salientou, também, que mesmo se tratando de funções que pertencem a uma mesma família de curvas, todo esse processo de construção é realizado novamente, sem que se faça qualquer relação entre os gráficos. E, ainda, que a passagem inversa, ou seja, do gráfico para a fórmula, é pouco realizada.

Ainda tratando desse aspecto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

[8] afirmam:"que a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções."

As atividades são planejadas com o intuito de facilitar e ampliar essa compreensão. Ir além do "ligar os pontos"para o traçado de um gráfico e possibilitar um real entendimento sobre funções. Nessa tarefa, o Winplot é um excelente aliado.

Em busca de uma melhor compreensão da relação que ocorre entre os coeficientes e o gráfico da função, os alunos foram estimulados a formular suas hipóteses a partir da análise de um conjunto de gráficos. Para verificar se essas hipóteses correspondiam ou não à realidade, foi usada a função animação que permite observar as mudanças nos gráficos a partir de uma variação no coeficiente.

Em outro momento, a partir das funções, os alunos deveriam responder a algumas perguntas sobre como seria o gráfico correspondente antes mesmo de traçá-lo (Tocaria o eixo x? Em quantos e quais valores? Teria concavidade para cima ou para baixo? Em qual valor tocaria o eixo y?). Após as respostas, o gráfico traçado no Winplot seria utilizado para a conferência.

Outra atividade desenvolvida foi a apresentação do gráfico e, a partir da sua análise, pedir para que os alunos encontrem a lei de formação da função correspondente. Este é um recurso lúdico que o Winplot disponibiliza para a descoberta da equação de gráficos gerados. Depois de realizar os cálculos, deve-se clicar em equação adivinhar e digitar sua resposta. Caso esteja correta, aparecerá escrito: "Perfeito!" Caso contrário, "tente outra vez"e o gráfico correspondente à equação digitada será traçado.

Em seguida, os alunos foram levados ao laboratório de Informática da escola e, em duplas, foram estimulados a seguir uma sequência de atividades similar a que tinha sido desenvolvida no auditório. O interessante neste ponto é o contato direto do aluno com o software. Para uma geração cada vez mais habituada á tecnologia, esse contato na escola tem função motivadora. Além disso, como o Winplot é gratuito e fácil de manusear, os alunos foram estimulados a instalá-lo em seus computadores pessoais e ter assim a chance de também utilizá-lo em casa.

O último ponto dessa atividade funcionou como uma grande gincana (já novamente realizada no auditório) em que as turmas se dividiram em dois grupos. Cada grupo era responsável por, utilizando como base o Winplot e tratando de gráfico de função do segundo grau, formular questões para serem respondidas pelo grupo adversário.

A elaboração das questões como responsabilidade dos próprios alunos gera uma reflexão ainda maior sobre o assunto abordado. Eles precisam realmente compreender do que estão tratando para poder criar as questões e classificá-las de acordo com um grau de dificuldade. Além disso, desenvolve-se a estratégia e o trabalho em equipe.

3.5.1 Exemplos de Atividades com o Winplot

O objetivo com essas atividades é fazer com que os alunos identifiquem e compreendam os efeitos que a variação dos coeficientes causa nos gráficos das funções quadráticas.

Variação no parâmetro a: Para isso, utilizando o Winplot, realizou-se a construção no mesmo sistema cartesiano das funções f (x)= x^2, g(x)=$\frac{1}{2}x^2$, h(x)= $2x^2$ e j(x)=$5x^2$. Em seguida, os gráficos das funções k(x)= $-x^2$, l(x)= $\frac{-1}{2}x^2$, m(x)= $-2x^2$ e n(x)= $-5x^2$.

Com essa atividade pôde-se concluir que a concavidade e a abertura da parábola estão relacionadas ao parâmetro **a** da equação. Sua concavidade será voltada para cima, quando o **a** > 0 e voltada para baixo quando **a** < 0. Além disso, parábolas com parâmetros **a** opostos são reflexões em relação ao eixo x. Quanto maior o módulo de **a**, mais fechada é a parábola e quanto menor o módulo de **a**, mais aberta ela é.

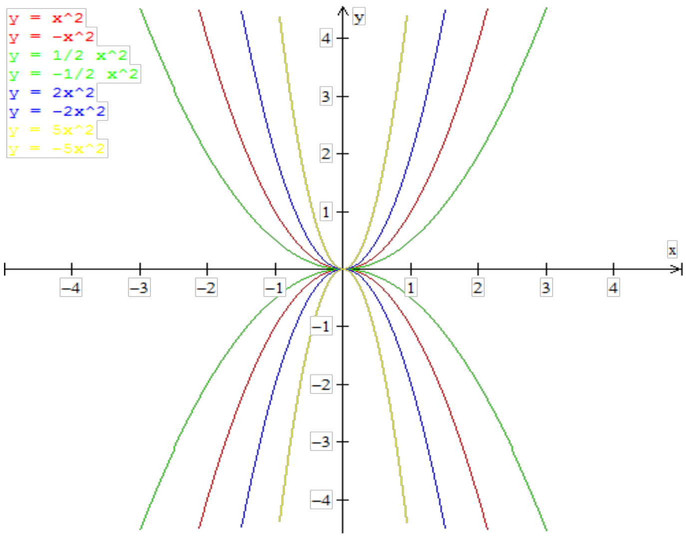

Figura 29 – Gráfico de funções para análise da variação parâmetro a

Translações Verticais: Essa atividade tem como objetivo identificar o que ocorre com os valores do coeficiente **c** da função quadrática, quando a parábola é transladada verticalmente para cima ou para baixo. Considerando as funções quadráticas definidas por f(x) =ax^2 +c, com **a**$\neq$ 0 e **b** $=$ 0. Em um mesmo sistema cartesiano, serão traçadas as funções f(x) =x^2, g(x) =x^2 +4 e h(x) = x^2 -2.

Note-se que a parábola f(x) $=$ ax^2 + c é igual à parábola de f(x) $=$ ax^2, porém sua posição é, em valores absolutos, **c** unidades acima ou abaixo, conforme **c** seja positivo ou negativo. Deste modo, pode-se construir gráficos de funções pensando em translações verticais para cima ou para baixo. Isso ocorre quando se varia somente o coeficiente **c** da função.

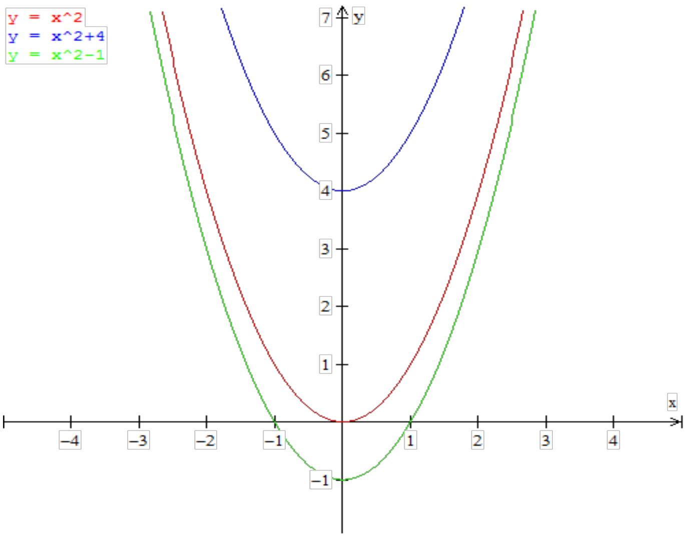

Figura 30 – Gráfico de funções para análise da translação vertical

Translações Horizontais: A parábola que resulta de translação horizontal da função f(x) $= ax^2$ também possui uma raiz dupla e sua equação é da forma g (x) $=$ $a(x-m)^2$, com **a**$\neq$0 e **m** $= \dfrac{-b}{2a}$

Para observar tais translações, construiu-se, utilizando o Winplot, num mesmo sistema cartesiano, as funções definidas por , f(x) $=x^2$, g(x) $=(x+4)^2$ e h(x) $=(x-1)^2$.

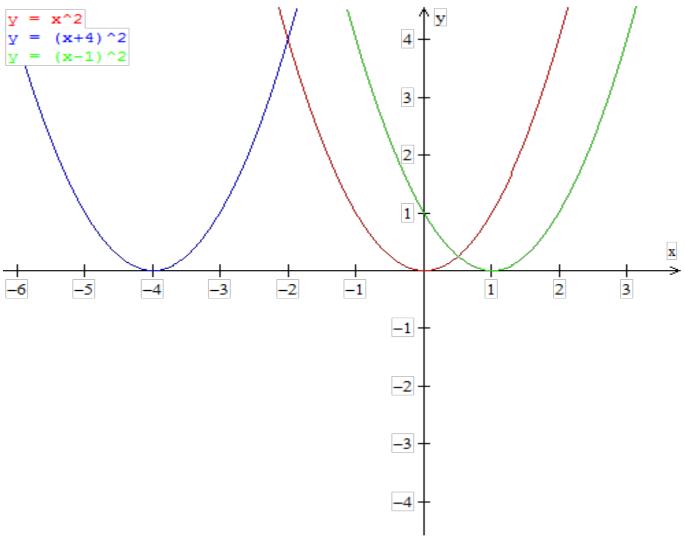

Figura 31 – Gráfico de funções para análise da translação horizontal

Observe-se que o gráfico de g(x) $= a(x+m)^2$ é bem similar ao gráfico de f(x)$=ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, **m** unidades à direita ou à esquerda do gráfico de f(x), conforme **m** seja positivo ou negativo, respectivamente. Assim, pode-se construir gráficos de funções pensando em translações horizontais. Isso acontece quando se altera apenas a base da potência, ou seja, varia-se de $f(x) = ax^2$ para $g(x) = a(x+m)^2$.

Animação de parâmetros: Essa atividade utiliza o recurso de animação do Winplot e é uma forma bastante dinâmica e divertida de englobar as três atividades anteriores.

Trabalhando inicialmente com a animação do parâmetro **a**, para isso, escreveu-se uma equação como, por exemplo, $ax^2 + 2x+1$. E escolheu-se na opção animação variar o parâmetro **a**. Pode-se inclusive escolher quais serão os extremos desse intervalo de variação. Assim, é fácil visualizar a variação da concavidade da parábola (para cima e para baixo-mais aberta ou mais fechada).

Uma opção interessante para debate é perceber que quando o parâmetro **a** assume o valor zero a representação passa a ser uma reta. Analisar com os alunos o porquê disso é mais uma chance de reflexão e aprendizagem.

A mesma reflexão pode e deve ser feita com a variação dos parâmetros **b** e **c** e sua respectiva análise.

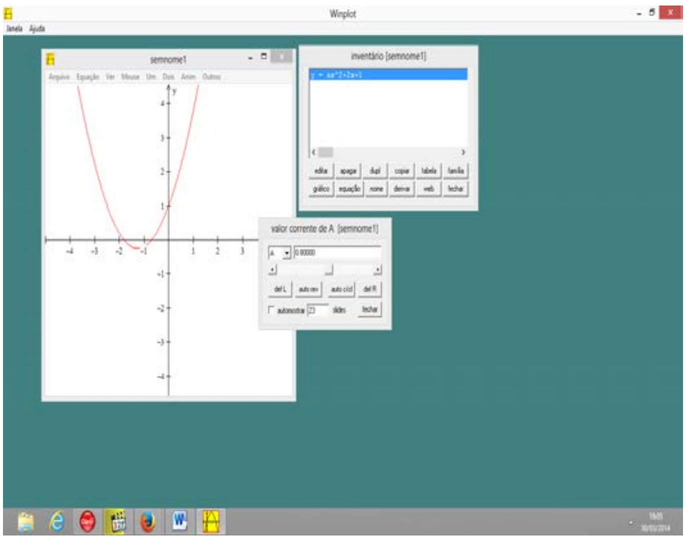

Figura 32 – Animação de parâmetros

Os alunos adoraram essa atividade. Foram atraídos pela dinâmica, pelo uso do software e principalmente gostaram de se sentir atuantes na atividade e no processo de aprendizagem.

Seus resultados foram extremamente positivos, tanto na questão motivacional quanto por facilitar a visualização do que estava sendo estudado, favorecendo uma análise reflexiva e a melhor compreensão do conteúdo.

3.6 Um pouco sobre o Geogebra

GeoGebra,que vem da junção de Geometria e Álgebra, é um aplicativo gratuito de matemática. Foi criado, em um projeto iniciado em 2011, para ser utilizado em sala de aula.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta etc. Também permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente. Além de oferecer comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Possui a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um objeto.

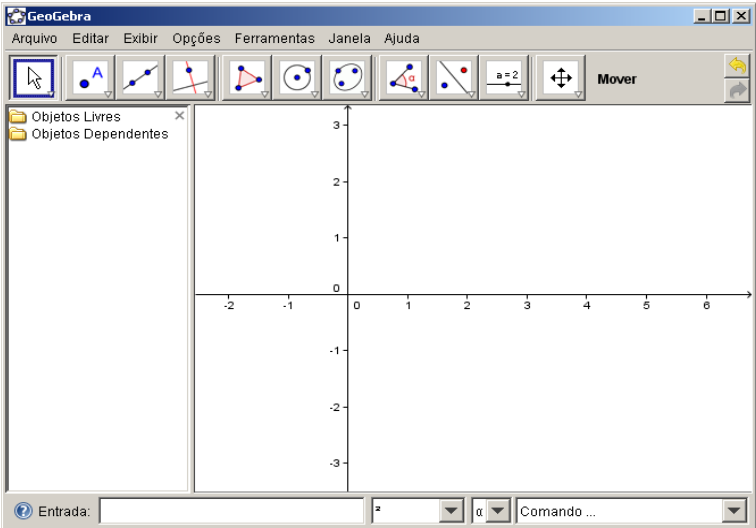

Figura 33 – Ambiente do Geogebra

Ao tratar da atividade de construção do refletor de raios luminosos em formato parabólico, comentou-se sobre a necessidade de um molde para a parábola. Será descrito a seguir o passo a passo para esse molde ser obtido.

Para iniciar, abriu-se a tela do Geogebra e entrou-se no menu exibir para desmarcar a opção eixo. Construiu-se então uma reta horizontal, que será a diretriz da parábola, utilizando a opção reta definida por dois pontos. Para que a construção fique mais clara, é possível "apagar"esses pontos. Para isso basta clicar sobre o ponto A, com o botão direito do mouse e desmarcar a opção exibir objeto. Depois, repetir o procedimento para o ponto B.

Em seguida, marcou-se um ponto sobre a reta (que será denominado ponto D)e um ponto fora da reta (que será denominado ponto F).Esse ponto F será o foco da parábola. Selecionando a opção "Segmento definido por dois pontos" constrói-se o segmento DF.

A mediatriz m do segmento DF é construída selecionando a opção mediatriz e clicando sobre o segmento, depois, clicou-se com o botão direito do mouse sobre a mediatriz e escolheu-se a opção "Habilitar Rastro". Por fim, é só mover o ponto D. O lugar geométrico do rastro, quando D se move sobre a reta, é o que se chama Parábola.

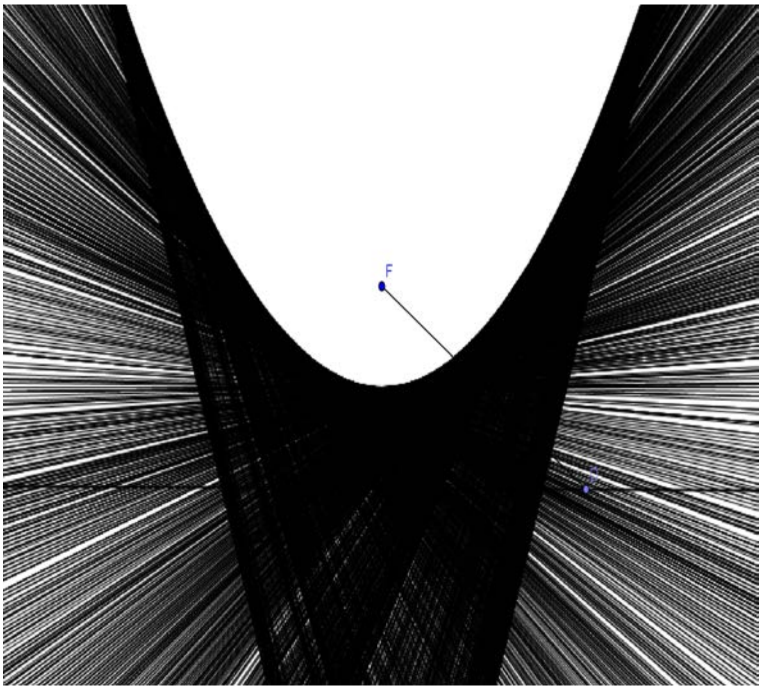

Figura 34 – Molde de parábola construído no Geogebra

Essa atividade é bastante interessante, pois, trabalha-se com a definição geométrica de parábola e conceitos como foco e diretriz se tornam mais facilmente compreendidos!

3.7 Análise da Sequência

Na proposta da sequência de atividades deste trabalho verifica-se que:

- Houve grande empenho dos alunos na investigação e realização das atividades;
- Ao final das atividades com o Winplot , notou-se que já estavam familiarizados com o software e realizavam as construções e suas análises mais facilmente;
- Os alunos compreenderam que as investigações propostas nas atividades tinham o objetivo de desenvolver o seu conhecimento, abstração e gosto pela matemática. Gostaram de se sentir atuantes na aprendizagem, tiveram seu interesse desperto e aumentaram sua capacidade de debate e deduções;
- Perceberam a importância da História da Matemática, não só como elemento motivador. Compreenderam que cada conteúdo estudado não surgiu pronto, mas é fruto da busca por respostas em um determinado momento histórico;

- Perceberam que a Matemática está mais presente no seu cotidiano do que imaginavam, entendendo que os conteúdos estudados fazem parte da sua vida em situações que antes não imaginavam;
- Entenderam que existem diferentes formas de analisar uma questão e que Álgebra e Geometria não devem ser estudadas como ciências separadas, mas como complementares na formação Matemática.

Pelas considerações acima, é possível concluir que a sequência de atividades desenvolvida cumpriu seu papel de facilitar o ensino dos principais conceitos de equação e função quadrática assim como o de desenvolver nos alunos o comportamento investigativo tão essencial no processo de ensino-aprendizagem.

Após a aplicação dessa sequência didática os resultados dos alunos nos testes escolares e a participação e atenção em aula teve uma melhora considerável. Além disso, apresentaram bom desempenho nas avaliações externas a que foram submetidos como Saerj ou prova admissional para o IFF.

Ressalta-se, no entanto, que essa sequência didática é apenas uma sugestão. Seu intuito é demonstrar que, com criatividade e empenho, é possível fazer diferença, alcançar resultados melhores, despertar mais do que o gosto pela matemática, despertar o gosto por aprender.

3.8 Questões sobre equação e função quadrática e suas aplicações

Algumas questões sobre equação e sobre função quadrática. O objetivo com essas questões é demonstrar como diversas situações do cotidiano são resolvidas com um pouco de conhecimento desses conteúdos. Todas as questões estão acompanhadas de sua solução e quase sempre a solução apresentada é apenas uma das maneiras de resolver esses problemas.

Questões de equação quadrática:

Exemplo 3.1- José possui um terreno retangular com dimensões 22m por 30m. Sabe-se que um dos lados que mede 22m já possui um muro construído e ele quer utilizar parte desse muro para fazer um cercado retangular de $56m^2$. Dispondo de 32m de tela é possível construir esse cercado? Quais são as medidas dos seus lados?

Solução:

Chamando a medida de um dos lados do cercado de x, a outra medida será então (32-2x). Admita-se que o lado com medida x é o não paralelo ao muro. Assim, a área do cercado é x(32-2x) e pode-se escrever: x(32-2x) = 56; ou seja, x^2 -16x + 28 = 0.

Obtém-se então uma equação do segundo grau, que conforme foi visto no capítulo 1, pode ser resolvida de diversas formas. Nesse exemplo, escolheu-se a resolução completando quadrado. Tem-se então$(x-8)^2$ - 64 + 28 = 0; o que leva a $(x-8)^2$ = 36; e assim x -8 = ±6, de onde obtêm-se as soluções da equação x = 14 ou x = 2.

Encontram-se duas soluções para a equação x^2-14x + 24 = 0, porém só uma delas satisfaz o problema. Isso ocorre porque para x = 2, o cercado teria dimensões 24m por 2m, o que não é possível, já que o muro só possui 22m de extensão. Desse modo, a única solução possível para o problema é x = 14, tendo-se assim um cercado com dimensões 4m por 14m.

Observe-se que a equação proposta possui duas soluções distintas, mas uma delas não é solução do problema. É importante, através de problemas como este, que os alunos percebam que nem sempre as raízes da equação são as soluções do problema. É preciso após a resolução da equação, analisar e decidir quais soluções atendem as condições estabelecidas inicialmente.

Exemplo 3.2- Um motorista está dirigindo por uma estrada com uma determinada velocidade v (em quilômetros por hora) quando avista um obstáculo a sua frente e pisa no freio. Até que o carro pare completamente ele ainda se desloca por uma distância que será chamada de d(em metros).

A fórmula para se encontrar essa distância é dada por: d = $\frac{v}{10+} + \frac{v^2}{250}$

Sabendo disso, a qual velocidade vinha um automóvel que percorreu 75 metros do momento em que o motorista viu o obstáculo até parar?

Solução:

Tem-se então que 75= $\frac{v}{10} + \frac{v^2}{250}$. Para facilitar a nossa resolução, o primeiro passo será reduzir os denominadores ao denominador comum e eliminá-lo. Assim,se obterá: 18750= 25 v+ v^2 que é equivalente a v^2 +25v-18750=0.

Novamente obtém-se uma equação do segundo grau. Utilize-se agora a fórmula resolutiva de equações do segundo grau para resolver esse problema.

$$\Delta = 25^2\text{- }4.1.(-18750)=625+75000=75625$$

$$\text{v}=\frac{-25 \pm \sqrt{75625}}{2} = \frac{-25 \pm 275}{2}$$

De onde são obtidas as soluções da equação v= -150 ou v=125.

Encontram-se duas soluções para a equação, porém só uma delas satisfaz o problema. Isso ocorre porque sendo v a velocidade de um automóvel em uma estrada não faz sentido que v assuma valores negativos. Mais uma vez é preciso que os alunos analisem as soluções obtidas de acordo com as condições da questão!

Assim sendo, a única solução para o problema é a velocidade de 125 km por hora.

Questões de função quadrática:

Exemplo 3.3-(Uerj 2005-Adaptado) Considere as seguintes funções, relativas a uma ninhada de pássaros: C = x^2-12x+48; C = custo mensal, em centenas de real, para a manutenção de x pássaros. V = 2x+3; V = valor arrecadado, em centenas de real, com a venda de x pássaros. Sabe-se que o lucro mensal obtido é determinado pela diferença entre os valores de venda V e custo C.

a) Determine os possíveis valores de x, para que haja lucro nas vendas.

b) Calcule o valor de x que proporciona o maior lucro possível e o valor, em reais, desse lucro.

Solução:

a) O lucro será determinado pela função que será denominada de L= - x^2-12x+48-2x-3=- x^2+14x+45. Para que haja lucro, essa função deve assumir valores positivos. Deverá ser feita a análise de sinal da função a partir do seu gráfico.

Depois de construído o gráfico, é fácil perceber que a função lucro assume valores positivos no intervalo 5 < x < 9

b) Nesse item, é requerido o ponto de máximo da função, ou seja, o vértice da parábola. Para determina-lo, pode-se utilizar a fórmula para x e y do vértice (X_v=$\frac{-b}{2a}$ e Y_v= $\frac{\Delta}{2a}$).

Mas na verdade, a aplicação da fórmula não se faz necessária. Basta lembrar que o X_v é o ponto médio entre as raízes. Como, nesse exemplo, as raízes da função são 5 e 9, o valor de x que proporciona o maior lucro é 7, ou seja, o lucro será máximo se forem 7 os pássaros vendidos.

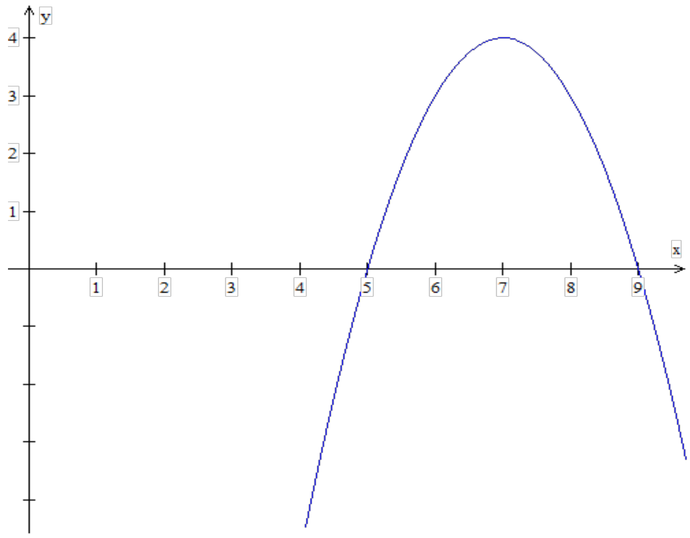

Figura 35 – Gráfico da função L=x^2+14x+45

Para determinar-se de quanto será esse lucro, é só substituir a variável independente na função por 7. Será obtida então 7^2+14.7+45 = 49 +98+45=4.Como se está trabalhando com centenas de real, o maior lucro possível será de 400 reais.

Exemplo 3.4-(Exame de acesso-Profmat 2012) Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

Solução:

Denomina-se como x o comprimento dos lados do retângulo perpendiculares ao muro e y o comprimento do lado do retângulo paralelo ao muro. A metragem utilizada de cerca será então de 2x+y, que deve ser igual a 40 m. Segue que y= 40-2x.

Como a área do retângulo que o fazendeiro quer maximizar é dada por xy obtém-se:

$$xy = x.(40-2x) = -2x^2+40x.$$

Essa é uma função do segundo grau e para determinar as suas raízes pode-se, entre outros meios, usar a fatoração. Tem-se então: 2x(-x+20)=0 e determinando assim que as raízes dessa função são x= 0 e x= 20. Seu valor máximo ocorrerá, portanto no ponto médio entre as raízes, isto é, em x= 10. Dessa forma obtém-se y= 40-2.10 = 20.

Portanto, o retângulo de maior área terá seus lados com dimensão 10m e 20m.

Exemplo 3.5- (Uerj-2002) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por 2,00 reais. A partir daí, o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

A) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia da colheita.

B) Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor

Solução:

a) Para melhor entender-se o problema, colocam-se os dados em uma tabela.

Frutas			Período da colheita		
	Dia 1	Dia 2	Dia 3	...	Dia n+1
Valores em reais	2	2-0,02x	2-0,02x^2	...	2-0,02x^n
Quantidade	80	80+1	80+2	...	80 + n

Tabela 1 – Dados da questão 3.5

Assim, o ganho do fruticultor pode ser representado por G(n)= (80 + n) (2,00 - 0,02 . n) G(n)= 160 + 0,4 n - 0,02 n^2.Ou seja, chega-se a uma função do segundo grau que relaciona o dia ao ganho.

b) Nesse item, mais uma vez, é preciso determinar o ponto de máximo da função. Para isso, dessa vez será utilizada a fórmula para a abscisa do vértice ($\frac{-b}{2a}$). Tem-se:

$$\frac{-0,4}{2.(-0,02)} = \frac{-0,4}{-0,04} = 10$$

Mas é essencial perceber que o dia, informação requerida na questão, é o valor de n acrescido de uma unidade. Para isso, o aluno precisa refletir e realmente compreender o item a. Assim, o dia de maior ganho será o décimo primeiro dia.

Considerações Finais

Infelizmente ainda é muito comum a associação entre Matemática e a capacidade de decorar algumas fórmulas. Neste caso não é necessário entendimento, raciocínio lógico ou senso crítico. Basta encontrar o resultado, usando a fórmula que foi decorada ao invés de entendida, de modo mecânico e repetitivo.

No entanto, esse comportamento não corresponde a real aprendizagem da Matemática. Só se aprende de verdade um assunto quando uma postura investigativa é assumida, quando existe questionamento e participação. Quando esse conteúdo passa a fazer sentido pra quem o estuda.

Este trabalho teve como objetivo propor, por meio de uma sequência didática, uma forma diferenciada de trabalhar equação e função quadrática .Visando tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, atraente e eficiente. Fazendo com que aluno e professor construam esse conhecimento juntos. A intenção é incentivar os docentes a utilizarem a abordagem histórica, formal e tecnológica relacionadas para uma proposta de ensino que contribuirá para uma melhor formação dos alunos.

O fundamento não está nas atividades aqui descritas, mas sim na forma como elas foram planejadas. Espera-se que os pilares expostos neste trabalho e que nortearam a elaboração da sequência didática estejam presentes em qualquer atividade e em todas as aulas de matemática.

O educador precisa estar sempre buscando novos recursos que motivem e promovam o verdadeiro aprendizado através de indagações, análise crítica e confrontos de ideias. O escritor norte-americano Alvin Toffler afirma que: "O analfabeto do século XXI não será aquele que não consegue ler e escrever, mas aquele que não consegue aprender, desaprender, e reaprender.". [49]

É indispensável que o professor não se aprisione a uma única forma de ensinar, mas que ele também seja capaz de desaprender e reaprender para melhorar as suas aulas. A sequência didática aqui apresentada é apenas uma sugestão. Que ela possa servir como ponto de partida dessa mudança. Que ela mesma seja muito transformada e melhorada por cada professor que tiver acesso a esse trabalho.

Referências

[1] ALMEIDA JÚNIOR, R. C. V. **Desenvolvimento de Conceitos e Resolução de Atividades de Função Quadrática com o Uso do Software Geogebra.** Campo Grande, MS: [s.n.], 2013. Disponível em: < *https* : //*sistemas.ufms.br*/*sigpos*/*portal*/*trabalhos*/*download*/1135/*cursoId* : 148 >. Acesso em: 29 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul Nenhuma citação no texto.

[2] ALMEIDA, P. N. **Técnicas e Jogos Pedagógicos**. São Paulo: Loyola, 1998. Citado na página 57.

[3] **Bhaskara**. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/bhaskara.htm>. Acesso em: 30 jun. 2014. Nenhuma citação no texto.

[4] BIANCHINI, E. **Matemática, 9º ano** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. Citado na página 50.

[5] BOYER,C. B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Blucher, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

[6] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: < *http* : //*portal.mec.gov.br*/*seb*/*arquivos*/*pdf*/*matematica.pdf* > . Acesso em: 27 jun. 2014. Citado na página 44.

[7] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília, 1999 . Citado 2 vezes nas páginas 56 e 58.

[8] BRASIL. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2006. v.1. Disponível em:< *http* : //*portal.mec.gov.br*/*seb*/*arquivos*/*pdf*/*book_volume_*01_*internet.pdf* > . Acesso em: 27 jun. 2014. Citado na página 75.

[9] BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de desenvolvimento da educação**. Brasília: MEC, SEB, INEP, 2008.< *portal.mec.gov.br/arquivos/livro/* >. Acesso em: 27 jun. 2014. Citado na página 45.

[10] DANTE, L. R. **Matemática - Contexto e aplicações Ensino Médio.** Rio de Janeiro: Ática, 2000. Nenhuma citação no texto.

[11] DANTE, L. R. **Projeto Teláris-Matemática, 9º ano**. Rio de Janeiro: Ática, 2012. Citado na página 49.

[12] D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática.** São Paulo: Summus, 1986. Citado na página 62.

[13] D'AMBROSIO, U. **A transdisciplinaridade como acesso a uma história holística in: Rumo a nova transdisciplinaridade: sistemas abertos de conhecimento.** São Paulo, Summus, 1993. Citado na página 59.

[14] D'AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. **Cadernos CEDES** ,40, Campinas, SP: Papirus, 1996. Citado na página 60.

[15] D'AMBROSIO, U.. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática . In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas** São Paulo: UNESP, 1999. Citado na página 60.

[16] D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.** 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. Nenhuma citação no texto.

[17] D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Revista Educação e Pesquisa,** São Paulo, SP, v. 31, n.1, p.99-120, Jan./Abr. 2005. Disponível em: < *http : //www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1* >. Acesso em: 25 jun. 2014. Nenhuma citação no texto.

[18] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da Teoria a Prática**. 14. ed. Campinas: Papirus, 2007. Citado na página 59.

[19] EQUAÇÃO. In: AULETE, C. **Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2009, p.322 Citado na página 15.

[20] FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** (Educação Matemática em Revista), [S.l], nº4, 1. sem. 1995. Citado na página 61.

[21] FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da Sociedade Brasileira de**

Educação Matemática, São Paulo, SP, n. 7, p. 5-10, Jul./Ago 1990. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ espec/meb/files/Umareflexao_sobre _o_uso _de_ materiais_concretos _e_jogos _no_ensino _da_Matematica.doc>. . Acesso em: 25 jun. 2014. Citado na página 57.

[22] **Frases da Matemática.** Disponível em: < *http : //www.prof2000.pt/users/folhalcino/activmat/frasemat.htm* >. Acesso em: 28 jun. 2014. Citado na página 59.

[23] FREITAS, R. C. O. **Um ambiente para operações virtuais com o material dourado.** Vitória, ES: [s.n.], 2004. Disponível em: < *http : //ronyfreitas.tripod.com/produo/dissertao.pdf* >. Acesso em: 29 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo. Citado na página 58.

[24]**GeoGebra**. Disponível em: < *pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra* >. Acesso em: 27 jun. 2014. Nenhuma citação no texto.

[25] IEZZI, G; MURAKAMI,C. **Fundamentos da Matemática Elementar: conjuntos e funções.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1. Nenhuma citação no texto.

[26] JÚNIOR,F.M. **Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau.** Campo Grande, MS: [s.n.], 2013. Disponível em:<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/ bitstream/handle/ 123456789/369/2011_ 00236_FLODOALDO _ MORENO_ JUNIOR.pdf?sequence=1 >. Acesso em: 27 jun. 2014 Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul Nenhuma citação no texto.

[27] LAJOLO, Marisa. LIVRO DIDÁTICO: um (quase) manual de usuário. **Revista Em Aberto,** Brasília, DF, ano 16, n.69, p. 3-9, jan./mar. 1996. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/93>. Acesso em: 28 jun. 2014. Citado na página 47.

[28] LEONARDO, F. M.(edit) **Projeto Araribá: matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010. Citado na página 50.

[29] LIMA, E. L., A Equação do Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, n° 13, IMPA: Rio de Janeiro, 1988. Citado na página 13.

[30] LIMA, E. L. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. Nenhuma citação no texto.

[31] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Profmat. Nenhuma citação no texto.

[32] LOPES, A. J. **Projeto Velear Matemática, 9º ano**. Rio de Janeiro: Scipione, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 55.

[33] LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** (Educação Matemática em Revista), [S.l.], nº 4, p. 3-13, 1. sem. 1995. Disponível em:$< http://pt.scribd.com/doc/97762456/Por-que-nao-ensinar-geometria-Lorenzato >$. Acesso em: 25 jun.2014. Citado na página 61.

[34] MACHADO, M. T. G. **Parábolas - as curvas preciosas.** Disponível em: $< http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf >$. Acesso em: 28 jun. 2014. Citado na página 74.

[35] MAIA, D. **Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma abordagem computacional.** São Paulo, SP: [s.n.], 2007. Disponível em: $< http://www.sapientia.pucsp.br//tde\_busca/arquivo.php?codArquivo = 4537 >$. Acesso em: 27 jun. 2014 . Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-SP. Citado na página 74.

[36] **Matemática? Asbolutamente!** Disponível em<http://mat.absolutamente.net/i_citac.php>: . Acesso em: 28jun. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.

[37] MAURÍCIO, H. A. **Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações** Juiz de Fora, MG: [s.n.], 2013. Disponível em:<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui /bitstream/handle/ 123456789/206/2011 _00044 _HENRIQUE _ APARECIDO_ MAURICIO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 26 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

[38] Milani, E. A informática e a comunicação matemática. Em K. S. Smole e M. I. Diniz (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed,2001 Citado na página 61.

[39] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Secretaria de Educação profissional e tecnologia.** Brasília, 2007 Citado na página 61.

[40] MIRANDA, D. **Resolvendo geometricamente uma equação do segundo grau.** Disponível em: $< http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/resolvendo-geometricamente-uma-equacao-2-grau.htm >$. Acesso em: 24 jun. 2014. Nenhuma citação no texto.

[41] MORENO,J, F. **Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau.** Campo Grande, MS: [s.n.], 2013. Disponível em: $< https :$

$//sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/download/1127/cursoId : 148 >$. Acesso em: 29 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Nenhuma citação no texto.

[42] MORI, I; ONAGA, D. S. **Matemática: Idéias e desafios 9ºano.** 17 ed. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado na página 50.

[43] MORIN, E. **Os Sete Saberes necessários à Educação do Futuro.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 2000. Citado na página 58.

[44] NETO,P.R.S. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem** Teresina, PI: [s.n.], 2013. Disponível em:< http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/ 123456789/515/2011_00411 _ PABLO_ ROBERTO_ DE_ SOUSA_ NETO.pdf?sequence=1 >. Acesso em: 23 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Piauí Nenhuma citação no texto.

[45] OSTROWSKI, S. A. O. F. **Proposta de modelo de informática como ferramenta pedagógica**. Florianópolis, SC: [s.n.], 2002. Disponível em:< $https : //repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/83784/188850.pdf?sequence = 1 >$. Acesso em: 29 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina. Citado na página 62.

[46] PIAGET, J. **A psicologia da criança**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998 Citado na página 57.

[47] **Pensador: frases e pensamentos** Disponível em: $< http : //pensador.uol.com.br/frases\_de\_paulo\_freire/ >$. Acesso em: 28 jun. 2014 Citado na página 13.

[48] **Pensador: frases e pensamentos**. Disponível em:<http://pensador.uol.com.br/frase/ODI0MzIy/>. Acesso em: 28 jun. 2014. Citado na página 56.

[49] **Pensador: frases e pensamentos**. Disponível em:<http://pensador.uol.com.br/alvin_toffler/>. Acesso em: 28 jun. 2014. Citado na página 86.

[50] RIBEIRO, D. M. A. A. **Uma Abordagem Didática para Função Quadrática**. Campos dos Goytacazes, RJ: [s.n.], 2013.Disponível em:<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/241/2011_00082 _DAYSE_MARIA _ALVES_DE _ANDRADE_ RIBEIRO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 23 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF. Nenhuma citação no texto.

[51] SILVA, A. V. **A calculadora no percurso de formação de professores de Matemática.** Portugal, 1991. Nenhuma citação no texto.

[52] SOARES, J. H. S. **Função Quadrática.** Natal, RN: [s.n.], 2013. Disponível em: < *http* : *//repositorio.ufrn.br* : 8080/*jspui*/*bitstream*/1/7531/1/*JobsonHSS_DISSERT.pdf* >. Acesso em: 22 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Nenhuma citação no texto.

[53] SOUSA NETO, P. R. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem.** Teresina, PI: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/515 /2011_00411_ PABLO_ROBERTO_DE _SOUSA _NETO.pdf?sequence=1 >. Acesso em: 23 jun. 2014. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Piauí. Nenhuma citação no texto.

[54] SOUZA, J; PATORA, P. M. **Vontade de Saber Matemática, 9º ano**. 2 ed. Rio de Janeiro: FTD, 2012. Citado na página 50.

[55] TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem de Matemática em sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática. Nenhuma citação no texto.

Anexos

ANEXO A

O Número.Desvendando a História; descobrindo a Matemática

Figura 36 – Edição 1687, 4^0 Editora chefe: Elza Prado

Bhaskara: O Homem da fórmula que você conhece não conhecia fórmulas!

Figura 37 – Saiba tudo sobre esse caso na reportagem especial

Tudo sobre o badalado "não casamento" de Lilavati !! Tudo o que acontece (e o que não acontece) na nossa coluna social

Você é bonito?A Matemática pode trazer essa resposta

Faça o teste e descubra

Não perca as πadas

Meliante responsável por roubo há centenas de anos é até hoje famoso

Estamos falando de Bhaskara, um matemático indiano que nasceu em 1114 e morreu em 1185. Seu pai era astrônomo e lhe ensinou os princípios da matemática e astronomia. Foi chefe do observatório astronômico de Ujjain, o principal centro de matemática da Índia na época.

No Brasil, a fórmula para resolução de equações do segundo grau é comumente chamada de fórmula de Bhaskara. Mas apesar da fórmula levar seu nome, Bhaskara não foi o responsável por sua descoberta! Isso porque problemas que recaem em uma equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática.

Encontramos em textos escritos pelos babilônios antes de Cristo a questão de encontrar dois números sabendo sua soma s e seu produto p. Os egípcios também já tratavam, antes de cristo, de equações simples do segundo grau.

E para piorar; Bhaskara nem trabalhava com fórmulas. Isso porque na realidade até o fim do século XVI nem se utilizavam fórmulas para obter as raízes de uma equação do segundo grau. Simplesmente porque não existia a notação usual de hoje Os problemas eram escritos totalmente em palavras, sem o uso de abreviações ou símbolos como estamos acostumado.

Mas é claro que, mesmo não sendo responsável pela fórmula que atualmente usamos com o seu nome, Bhaskara foi um grande matemático. Contribuiu com avanços como resolver equações quadráticas completando quadrados, aceitar os números negativos e os irracionais e também o conhecimento que uma equação quadrática com raízes reais possui duas raízes.

Seu desejo é não morrer solteira ? Uma boa dica pode ser evitar as pérolas!!

Lilavati era a única filha de Bhaskara..Muito culta, pois seu pai tinha sido particularmente cuidadoso com a sua educação. E também muito bonita.

Aos dezoito anos, Lilavati disse ao pai que gostaria de casar [1]. Ela sabia que, ao nascer, os astrólogos consultados por Bhaskara tinham previsto que ela teria uma vida longa mas nunca se casaria. Ansioso pela felicidade da filha, Bhaskara fez cálculos e mais cálculos, e finalmente descobriu.

As estrelas permitiam a Lilavati casar, mas apenas se o casamento fosse feito numa certa hora de um determinado dia. Assim sendo, o casamento foi preparado. Nesse dia Lilavati estava enfeitada com as suas mais belas joias, um véu tapando-lhe o rosto para só poder ver o noivo depois de terminada a cerimónia. Ao lado de Lilavati os astrônomos tinham colocado uma clepsidra (relógio de água): o momento em que a última gota de água se escoasse era a altura exata para o casamento se efetuar.

Todos esperavam com ansiedade que a clepsidra finalmente se esvaziasse, mas estranhamente isso tardava em acontecer. Intrigados, os astrónomos acabaram por descobrir a causa de tanta demora. Lilavati ansiosa estava sempre a analisar a clepsidra.Uma das pérolas do seu vestido tinha-se soltado para dentro da clepsidra, impedindo a água de escorrer. O momento escolhido pelos céus para o casamento tinha já passado e Lilavati ficou solteira!

Para consolar a filha, Bhaskara prometeu torná-la imortal dando o seu nome ao tratado de matemática que estava a escrever e que recebeu o nome de Lilavati – A bela.

[1] Essa história é apenas uma lenda!Sua veracidade não foi comprovada.

Beleza Matemática

O retângulo áureo ou de ouro é um retângulo especial no qual vale a seguinte relação entre seu comprimento (c) e sua largura (l):

$$\frac{c}{l} = \frac{l}{c-l} \rightarrow \text{chamada proporção áurea}$$

O retângulo de ouro marca forte presença nas artes, (como na arquitetura, na pintura e até na publicidade). Até mesmo nas situações mais práticas do cotidiano encontra-se aproximações do retângulo de ouro, como por exemplo, o formato dos cartões de crédito.

Se considerar-se c=1, a proporção será:

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{1-l} \rightarrow l^2\text{+l-1}$$

O inverso da raiz positiva dessa equação é $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}608$, o chamado de número de ouro.

Mas você deve estar se perguntando qual a relação do número de ouro com a sua beleza! Para saber se você realmente se encaixa na definição de beleza matemática existe um teste simples: Com uma fita métrica faça as seguintes medidas e anote os resultados:

- Meça sua altura e depois divida pela altura do seu umbigo até o chão;
- Meça seu braço inteiro e depois divida pelo tamanho do seu cotovelo até o dedo;
- Meça sua perna inteira e divida pelo tamanho do seu joelho até o chão;

Some os três resultados obtidos com as divisões e calcule a média. Quanto mais perto do número de ouro for o valor; mais bonito matematicamente você é!

Importante!Lembre-se que isso é apenas uma brincadeira e que está sujeita a erros de medição! E que mesmo se a sua média estiver muito distante do número de ouro, a sua mãe ainda te acha lindo!

Entretenimento e Lazer

Figura 38 – Quadrinhos

Grana na Calça

O professor de matemática pergunta ao aluno:

— Luizinho. Se você tivesse 30 reais num bolso e 70 no outro, o que teria?

— A calça de uma outra pessoa, professor!

Como se faz para desmaiar um vetor? Tira sua ponta, pois assim ele perde os sentidos

O que o 2 disse para o 10? Você é grande, mas não é dois!

O que é pior do que ser atingido por um raio? Ser atingido pelo diâmetro!

"Um homem com um relógio sabe a hora certa. Um homem com dois relógios só sabe a média."

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza. (Bertrand Russel)

Para Informações Ligue 0-800-[10x)(13i)^2]-[sin(xy)/2.362x]

O Objetivo deste jornal é informar enquanto diverte!Sua editora não acredita que essas duas coisas sejam opostas.Pelo contrário;acredita que funcionem melhor juntas!

Contato Professora Elza Prado: pradoelza@yahoo.com.br