BRUNO FRANÇA MARQUES DA SILVA

MÚLTIPLOS E DIVISORES: IMPORTANTES FERRAMENTAS NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2014

BRUNO FRANÇA MARQUES DA SILVA

MÚLTIPLOS E DIVISORES: IMPORTANTES FERRAMENTAS NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Mikhail Petrovich Vishnevski

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
JULHO DE 2014

BRUNO FRANÇA MARQUES DA SILVA

MÚLTIPLOS E DIVISORES: IMPORTANTES FERRAMENTAS NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 11 de Julho de 2014.

Prof. Paulo Sergio Dias da Silva
D.Sc. UENF

Prof. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IF Fluminense - Campos dos Goytacazes

Prof. Mikhail Petrovich Vishnevski
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho a minha querida esposa, Nathalia,
e a meus amados pais, Carlos e Analita.*

Agradecimentos

"Graças dou por minha vida,
que Jesus já transformou
e também por meu futuro
e por tudo o que passou;
pelas bênçãos derramadas;
pelo amor, pela aflição,
pelas faltas perdoadas,
grato sou de coração."

Hino 419 - Hinário Para o Culto Cristão

Agradeço inicialmente a Deus, por ter me concedido saúde e disposição para enfrentar esse desafio. À minha amada esposa, Nathalia Miranda, pela compreensão, paciência e apoio durante esse suado período de estudo. Aos meu amados pais, Carlos Alberto e Analita França, por todo incentivo e amor. Ao meu irmão Rafael França, pelo grande apoio. Aos meus nobres colegas de curso, em especial os amigos de viagem e estudo semanal, Paulo Fernando, Jefferson Maciel e Luciano Flor, pela cumplicidade, ajuda e incentivo. À professora Silvia Cristina Freitas Batista, pela grande contribuição nesta reta final. Ao grande professor doutor Mikhail Petrovich, pela dedicação e atenção que me orientou ao longo deste período.

‘‘Há uma força motriz mais
poderosa que o vapor, a
eletricidade e a energia
atômica: A vontade’’

Albert Eistein

Resumo

Esta dissertação pretende investigar um tema relevante para o estudo da Matemática: Múltiplos, Divisores, Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC), a partir da teoria de frações. Motivados pela enorme deficiência que percebemos em nossos alunos de Ensino Médio, especialmente em situações-problema que envolvem múltiplos e divisores, e observando que agravam-se ainda mais nas situações de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, quando exigidos de forma implícita no texto, decidimos propor um estudo a fim de levar uma reflexão sobre esse tema que problematize e, ao mesmo tempo, viabilize soluções para os professores de Matemática do Ensino Médio. Por observarmos a deficiência desse assunto ao longo do processo educacional básico, nosso trabalho será estruturado num diálogo entre esses dois ciclos da educação (ciclo Fundamental e ciclo Médio), já que essa carência é observada a partir de problemas triviais como adição e/ou subtração de frações com denominadores diferentes e certamente, que alcançam problemas que exigem interpretação. Esta dificuldade não é exclusividade do ensino público, ocorrendo também nas instituições particulares. Estudos evidenciam inúmeros casos nos quais universitários apresentam enorme deficiência nesses assuntos. Portanto, mostraremos, ao longo do trabalho, algumas experiências e atividades propostas que comprovam a necessidade e a importância de se investir neste tema.

Palavras-chaves: Múltiplos; Divisores; Mínimo Múltiplo Comum (MMC); Máximo Divisor Comum (MDC).

Abstract

This thesis aims to investigate an important issue for the study of mathematics: Multiple, dividers, Minimum Common Multiple (MMC) and Greatest Common Divisor (MDC), from the theory of fractions. Motivated by the huge deficiency that we perceive in our high school students, especially in problem situations that involve multiple, dividers, and noting that worsen further in situations of least common multiple and greatest common divisor, when required implicitly in the text , we decided to propose a study to lead a reflection on this theme that problematizes and at the same time, makes possible solutions for mathematics teachers of high school. By observing the failure of that subject throughout basic educational process, our work will be structured as a dialogue between these two cycles of education (primary and secondary cycle cycle), since this deficiency is observed from trivial problems such as addition and / or subtraction fractions with different denominators and certainly reaching problems that require interpretation. This difficulty is not unique to public education, also occurring in private institutions. Studies show numerous instances in which university have enormous deficiency in these matters. Therefore, we will show, throughout the work, some experiments and proposed activities that demonstrate the need and the importance of investing in this theme.

Key-words: Multiple; Divider; least common multiple (MMC); Greatest Common Divisor (MDC).

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

MMC	Mínimo (ou menor) Múltiplo Comum.
MDC	Máximo (ou maior) Divisor Comum.
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio.
CIEP	Centro Integrado de Educação Pública - Rio de Janeiro.
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
ESSA	Escola de Sargentos das Armas - Minas Gerais.
IFF	Instituto Federal Fluminense - Macaé - Rio de Janeiro.
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
UniCamp	Universidade de Campinas - São Paulo
PUC	Pontifícia Universidade Católica - São Paulo
UnifeSP	Universidade Federal de São Paulo

Sumário

Introdução

Motivado pela enorme dificuldade apresentada pelos alunos, especialmente de Ensino Médio, decidimos investir no assunto que abrange os conceitos e definições de múltiplos e divisores, focando em Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Deficiência essa que vai das simples operações (adição e subtração) com frações que possuem denominadores diferentes até situações do cotidiano.

As trocas de experiências com colegas professores de Matemática nos permitiram enxergar que existe uma acentuada defasagem de conteúdo e conceitos, especialmente quando, do aluno, é exigida a necessidade de interpretar situações-problema que precisam dessas “ferramentas”, MMC e MDC. A ideia primitiva de múltiplos e divisores podem contribuir de forma expressiva para a solução de inúmeras situações do nosso dia a dia, a partir do momento que nossos alunos perceberem uma relação entre esses conceitos teóricos e aplicabilidade prática. Por exemplo: Porque precisamos igualar os denominadores para efetuar a soma de $\frac{1}{3}$ com $\frac{4}{5}$? Ou, se numa linha de produção em uma indústria, certo tipo de manutenção é feita na máquina A a cada 3 dias, na máquina B a cada 4 dias, e na máquina C, a cada 6 dias. Se no dia 2 de janeiro foi feita a manutenção das três máquinas, qual será o próximo dia em que a manutenção ocorrerá nas três máquinas simultaneamente?

Baccarin (2012) coordenou um trabalho, no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência na Universidade Estadual do Paraná, que tratou do assunto que estamos dissertando. O referido autor afirma, sobre uma de suas oficinas de trabalho, que: "Na realização desta oficina, tivemos alguns contratempos, uma vez que aquilo que havíamos preparado e pensáramos ser muito simples e fácil, teve uma certa rejeição e muita dificuldade por parte dos alunos. Percebemos que num simples conteúdo o que parece óbvio para nós, para o aluno, não é, tão logo a compreensão de algo tão simples fica comprometida. Notando tamanha dificuldade dos alunos, tivemos que nos reprogramar, para as futuras oficinas, trabalhando conteúdos básicos, como as quatro operações, tabuada". Este foi um dos trabalhos que nos confirmou que deveríamos nos empenhar nesta causa.

Os encontros com o Professor Orientador, Mikhail Petrovich, intensificaram nosso interesse pelo assunto, pois, segundo ele, muitos alunos ingressam na universidade carregando uma enorme carga de carências matemáticas, especialmente em operações básicas.

Há muita dificuldade em somar e subtrair frações. Uma parte considerável dos alunos não sabe a diferença entre frações decimais e frações ordinárias. Ele afirma que "este tema em especial não é trabalhado de forma suficiente e eficaz, com a importância devida no ensino básico, e que se queremos minimizar este problema na universidade precisamos trabalhar com o abstrato".

A revista "Cálculo - Matemática Para Todos", edição 28 – 2013, publicou uma reportagem com o professor Filipe Amaral, da Universidade do Porto, em Portugal, em que ele declara: "No ensino de Matemática, uma das ideias centrais é mostrar ao aluno como ele deve resolver problemas quando está fora da escola." Compartilhamos deste pensamento e acreditamos que o aluno ao "resolver um problema" deve praticar uma ação real (concreta ou imaginada): inicialmente ele interpreta, depois agrupa, separa, ordena, coloca em série, transpõe etc, e, após investir e dedicar alguns tempos de aula tratando desse assunto, propus três atividades, que serão expostas e discutidas mais à frente (capítulos 3 e 5), aos meus alunos de 2º ano do Ensino Médio, turma 2009 do Ciep 257, em Rio das Ostras (Amaral 2013).

A revista "Cálculo – Matemática Para Todos", edição 12 de 2012, publicou uma reportagem que pergunta: "Todo mundo leva vantagem ao estudar Matemática? Ou alguns desperdiçam seu tempo?". O professor Antônio Fernandes, um dos entrevistados, afirma que: "O estudante de Matemática aprende a mudar o ângulo pelo qual olha um problema, ou a trazer um problema para um plano no qual ele realmente faz sentido, principalmente quando aprende a correlacionar duas coisas." Compactuando com este pensamento, decidimos investir em atividades, com a turma 2009 (já citada), de forma a submeter esses alunos, inicialmente a revisões de conteúdos e conceitos de múltiplos, divisores e frações, e logo após à situação do cotidiano que envolvem aplicabilidade de alguns destes conceitos, com a finalidade de identificar até que ponto conseguem relacionar a necessidade com a utilização da "ferramenta" adequada. Sendo assim, estariam como disse o professor Antônio Fernandes, "correlacionando duas coisas" (Fernandes 2012).

O trabalho foi organizado em 6 capítulos.

No primeiro capítulo trabalharemos frações, pois é onde encontrarmos, inicialmente, a necessidade do MMC e MDC, ao realizarmos operações (adição e subtração) com denominadores diferentes.

No segundo capítulo trataremos de Números Primos e Fatoração, pois enxergamos uma relação íntima entre os assuntos múltiplos e divisores e as ideias de Números Primos e Fatoração. Estes conteúdos precisam ser bem trabalhados, pois são "nobres ferramentas" no estudo de MMC e MDC.

No terceiro capítulo abordaremos a dificuldade dos nossos alunos em trabalhar expressões do tipo:

a) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$

c) $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d} \neq \frac{a-c}{b-d}$

d) $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$

e) $\frac{a}{n}$ - $\frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$

f) $\frac{a}{n} \times \frac{b}{n} = \frac{a \times b}{n^2}$

g) $\frac{a}{n} \div \frac{b}{n} = \frac{a}{b}$

Veremos alguns exemplos práticos, que foram apresentados à turma 2009 do Ciep 257, que exigem a interpretação e decisão do aluno em relação a que tipo de ferramenta usar.

No quarto capítulo voltaremos a tratar de frações, porém focaremos as operações (adição e subtração) com denominadores diferentes. Sendo assim, começaremos a tratar de MMC e MDC, inclusive mencionando os principais métodos para determiná-los.

No quinto capítulo traremos algumas práticas pedagógicas propostas aos alunos da turma 2009 do Ciep 257, em Rio das Ostras, no ano de 2013, turma essa que ministrei a disciplina "Resolução de Problemas", e assim sendo tive autonomia para trabalhar os conteúdos que julgo como fundamentais e importantes, sugerindo algumas atividades (exercícios atuais de concursos públicos como Correios, Petrobras, Banco do Brasil, Casa da Moeda, Polícia Civíl e especialmente o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM))

E no último capítulo concluímos a dissertação com considerações finais, na expectativa de ter gerado reflexão acerca do tema abordado; seguidas das referências bibliográficas.

Capítulo 1

História das frações

Iniciaremos esta dissertação trabalhando este assunto (frações) por entender que o primeiro momento que o aluno se depara com a necessidade de usar as ferramentas MMC e MDC, que é o nosso foco, é quando começa a trabalhar com frações heterogêneas. Sendo assim não poderíamos falar de MMC e MDC sem antes apresentar um panorama sobre frações (história e operações) ao aluno. O objetivo de estudar a história das frações não é apenas o de narrar e constatar fatos do passado, mas buscar as suas origens e principalmente as suas consequências.

Segundo Pedroso (2009), o estudo de frações surgiu por necessidade prática, quando as divisões não eram exatas.

É possível que os egípcios tenham adquirido uma grande habilidade no manejo das frações devido ao sistema econômico e social da realeza faraônica. Eles usavam apenas frações que possuíam o número 1 dividido por um número inteiro, como, por exemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$... Tais frações eram denominadas frações egípcias. Posteriormente outras frações foram expressas em termos delas, como: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Os babilônios usavam em geral frações com denominador 60. Banzatto e Sodré acreditam que o uso do número 60 pelos babilônios se deva ao fato de que é um número menor do que 100 com maior quantidade de divisores inteiros. Os romanos, por sua vez, usavam constantemente frações com denominador 12. Provavelmente, por ser um número, que embora pequeno, possui uma quantidade expressiva de divisores inteiros. Com o passar do tempo, muitas notações foram usadas para representar frações. A atual maneira de representação data do século XVI. E a leitura das frações é enunciada de acordo com o denominador (Banzatto;Sodré 2005).

As frações aparecem nos mais antigos documentos matemáticos e, em geral, foram resultado dos vários modos de se operar a divisão. Conta-nos a história que os babilônios já utilizavam as frações por volta do ano 2000 a.C., os egípcios usaram frações no Papiro de Rhind – um texto matemático muito precioso, escrito por volta de 1650 a.C., contendo 85 situações-problema copiadas de trabalhos anteriores – e os gregos passaram a usá-las em períodos posteriores.

Vejamos alguns exemplos de frações decimais: $\frac{1}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{47}{1000}$, entre outras.

Segundo Souza (2013), as frações foram conhecidas na antiguidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram, durante muito tempo, mal fixadas e inadaptadas às aplicações práticas. Os matemáticos e astrônomos chineses (200 d.C.) têm os mais antigos relatos de uso científico das frações decimais. Esse assunto foi muito trabalhado por Leonardo Fibonacci (também conhecido como Leonardo de Pisa ou ainda Leonardo Pisano (Pisa, 1170-1250)), que havia sido apresentado ao assunto durante suas viagens pelo norte da África. Fibonacci trabalhou nos princípio da construção de uma aritmética dessas frações. Assim, ele representou, por exemplo, o número 0,79 como sendo a adição das frações $\frac{7}{10}$ com $\frac{9}{100}$, ou ainda mais: $\frac{7}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}$.

A partir de 1350 d.C., vários outros matemáticos europeus passaram a utilizar frações decimais, porém de forma bem rudimentar. Contudo Stevin (1580 d.C.) investiu num estudo sistemático dessas frações e de seu uso na representação dos números reais gerando o que hoje conhecemos como expansão decimal dos números reais, ou representação dos reais (por meio de adição de frações decimais), inclusive com algoritmos para as operações aritméticas, tornando-se um elemento fundamental para o surgimento das ciências e tecnologias modernas.

Esse breve histórico foi apresentado tendo em vista que o estudo de frações está diretamente ligado ao estudo de MMC e MDC. A assimilação da noção de fração exige uma manipulação considerável de grandezas divididas em partes iguais. Essa manipulação com "intimidade", se torna quase que impossível, numa medida suficiente, usando elementos básicos, como barras de chocolates, laranjas, pizzas, entre outros artifícios que normalmente usamos nas nossas aulas, como sugerem os livros didáticos.

As frações com que nos defrontamos diariamente quase sempre são partes de quantias numéricas ou de conjuntos de objetos numericamente determinados, e que em geral o resultado é algo palpável, concreto, por exemplo: metade da turma; a quarta parte do grupo de professores; um sexto da matilha, dois terços de uma barra de chocolate etc. Mas quando alguém herda a metade de uma casa, não imaginamos parti-la em duas partes iguais, como faríamos, por exemplo, com uma maçã; mas sim, ficar com a metade do valor equivalente ao imóvel.

Mediante tal utilidade e importância, estudaremos, ao longo do trabalho (especialmente no capítulo 3), algumas propriedades das frações ordinárias (que são as frações cujo denominador é diferente de qualquer potência de 10) e das frações decimais (que são todas as frações que possuem denominador igual a uma potência de 10). Toda fração decimal pode ser representada por um número decimal, isto é, um número que tem uma parte inteira e uma parte decimal, separados por uma vírgula. A fração $\frac{127}{100}$ pode ser escrita na forma mais simples, como:

$$\frac{127}{100} = 1,27$$

em que 1 representa a parte inteira e 27 representa a parte decimal. Esta notação subentende que a fração $\frac{127}{100}$ pode ser decomposta na seguinte forma:

$$\frac{127}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1 + 0,27 = 1,27$$

A fração $\frac{5}{10}$ pode ser escrita na forma 0,5, sendo 0 a parte inteira e 5 a parte decimal. Podemos observar que este número decimal é menor do que 1 porque o numerador é menor do que o denominador da fração.

Aproveitando a ideia que serviu de base à criação da numeração de posição, isto é, a convenção segundo a qual o último algarismo da direita de um número representa unidades, o seu vizinho da esquerda representa dezenas, o seguinte centenas e, assim, sucessivamente, resolveu-se colocar uma vírgula seguindo o algarismo das unidades e convencionou-se que o primeiro algarismo após esta vírgula representaria décimos desta mesma unidade e os seguintes centésimos, milésimos etc.

Vejamos algumas observações que merecem um destaque mediante sua importância.

Observe que em uma divisão entre dois números:

a) A simples colocação da vírgula à direita das unidades do quociente, e o acréscimo de um zero à direita do resto, equivale à transformação do resto em décimos e abre a possibilidade de se obter o quociente expresso em décimos. Caso a divisão dos décimos seja exata, o quociente estará completo.

b) Sempre que, sendo o dividendo e o divisor primos entre si, não haja potência de 10 que seja múltiplo do divisor, o quociente exato não pode ser equivalente a uma fração decimal.

c) A divisão nem sempre pode ter o sentido de distribuição: ela tem sempre por finalidade determinar um quociente cujo produto pelo divisor seja equivalente ao dividendo. Como na distribuição (em partes iguais) isto acontece, muitos entendem que toda divisão corresponde a uma distribuição.

Vejamos alguns exemplos numéricos que tratam desses assuntos abordados acima:

a) $12 = 1 \times 10 + 2 \times 10^0$

b) $\dfrac{121}{10} = 12{,}1 = 1 \times 10 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} = 10 + 2 + 0{,}1 = 12{,}1$

c) $\dfrac{13045}{100} = \dfrac{2609}{20} = 130{,}45 = 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 0 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

d) Qualquer fração da forma $\frac{2}{n}$, em que n é um número ímpar, pode ser decomposta numa soma de duas ou mais frações, cujo numerador é 1. Assim, como vimos $\frac{2}{5}$ pode escrever-se $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Os egípcios conheciam bem esse fato e, como a decomposição de frações implica cálculos longos e delicados, estabeleceram uma tábua modelo de decomposição, começando em $\frac{2}{5}$ e chegando em $\frac{2}{101}$. Essa tábua, que desempenhava um papel considerável no ensino, constitui a parte mais importante do Papiro Rhind. (Pedroso 2009)

e) Observe que a fração $\frac{4}{11}$ não pode ser representada por uma fração decimal. Então, ela não é um número decimal exato. Há números decimais finitos (exatos) e números decimais infinitos (periódicos ou não-periódicos). Toda forma decimal finita corresponde a uma fração decimal.

f) $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$, é chamada de Dízima Periódica. Note que após a vírgula todos os algarismos se repetem. Neste caso somente o algarismo 3. Então, temos uma Dízima Periódica Simples.

g) $\frac{5}{6} = 0{,}8333...$, também é uma dízima periódica. Observe que o algarismo 8, após a vírgula, não se repete. Essa dízima é chamada de Dízima Periódica Composta, pois após a vírgula existe um termo que não se repete.

h) Observe que 0,3232323232... é uma dízima periódica e sua representação fracionária é $\frac{32}{99}$. Esta representação decimal pode ser associada a soma de termos de uma Progressão Geométrica Infinita (Soma $= \dfrac{a_1}{1-q}$). Como descrita a seguir.

Podemos escrever o número decimal 0,323232... como:

0,32 + 0,0032 + 0,000032 + ... que é uma progressão geométrica infinita, de razão (q) igual a 0,01. Então, temos:

$\dfrac{0,32}{1-0,01}$ que é igual a $\dfrac{32}{99} = 0{,}323232...$

i) A dízima periódica composta -0,31222... pode ser escrita como $\dfrac{-281}{900}$.

j) Observe a fração $\frac{m}{n}$. Podemos fatorar o denominador n. Vejamos, por exemplo:

n $= 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times 7^{\alpha_4}$

Se $\alpha_2 \neq 0$ e $\alpha_4 \neq 0$ ou qualquer outra potência de números primos diferentes de 2 e 5, nossa expansão decimal é infinita e periódica.

Se a fração irredutível $\frac{N}{D}$ tiver no denominador potência(s) diferente(s) de 2 ou 5, ou ainda fatores diferentes envolvendo tais potências, então essa fração gerará uma dízima periódica simples. (Lacerda 2010)

Por exemplo: Seja x = 0,24545454545...

Temos: x $= \frac{2}{10} + \frac{45}{1000} + \frac{45}{1000} \times \frac{1}{100} + ...$ podemos pensar em soma dos termos de uma progressão geométrica, como citado acima.

Poderíamos pensar de outra forma:

Se x = 0,245454545... então 10x = 2,454545... e 1000x = 245,45454545...

Observe que 1000x - 10x = 243

Então: x $= \dfrac{243}{990}$.

k) O fato de sempre existir, entre dois números racionais, um outro número racional não me autoriza a afirmar que os racionais preenchem completamente os pontos da reta, o que significa que existem pontos da reta que não representam números racionais. Existe um conjunto numérico que preenche essas lacunas, é o Conjunto dos Números Irracionais.

Número Irracional é todo número que não pode ser escrito na forma de fração, ou seja $\frac{a}{b}$, com a e b naturais e b diferente de zero.

Os principais relatos sobre os irracionais atribuem-se a Hipaso de Mataponto, um discípulo da Pitágoras. Após algum tempo, Euclides dedicou seu décimo segundo livro da coleção Os Elementos, a esse assunto.

Vejamos alguns exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π ...

Vamos demonstrar, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é irracional.

Então afirmaremos que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, com a e b primos entre si, ou seja, tendo o número 1 com único divisor comum.

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado temos:

$\dfrac{a^2}{b^2} = 2$, então: $a^2 = 2b^2$, como b é par, então a também é par. Podemos chamar a de 2k.

Substituindo, temos: $(2k)^2 = 2b^2$. Ou seja:

$4k^2 = 2b^2$ e sendo assim $2k^2 = b^2$. Podemos concluir então que b também é um número par. Mas isso é um absurdo, pois por hipótese o Máximo ou (maior) Divisor Comum (MDC) entre a e b é 1. Então podemos afirmar que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, então $\sqrt{2}$ é um número irracional. Destaca-se que esse assunto será trabalhado no capítulo 4.

De maneira geral, é impossível escrever os números irracionais na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números naturais, mas se a e b forem números decimais essa escrita é possível.

São números irracionais todos os números decimais não exatos, que possuem representação infinita e não periódica. (Iezzi 2011)

Um bom recurso para construção de números irracionais é usar o fato de que se α é irracional e r é racional não nulo, então teremos:

α + r; $\alpha\times$ r; $\dfrac{\alpha}{r}$ e $\dfrac{r}{\alpha}$ são todos números irracionais.

Observe:

k1: o número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.

k2: o número 1,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é uma dízima periódica.

Capítulo 2

Números Primos e Fatoração

Divisores de um número natural são todos os números naturais que ao dividirem tal número, resultarão em uma divisão exata, isto é, com resto igual a zero. O conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito, mas como determinar quantos divisores um número natural possui? Tanto para a identificação da quantidade de divisores de um número, assim como para que possamos encontrar tais divisores, iremos recorrer à fatoração ou decomposição em fatores primos. Definiremos números primos a seguir.

Observe os divisores de alguns números naturais:

a) Os divisores de 2 são: 1 e 2.

b) Os divisores de 8 são 1, 2, 4 e 8.

c) Os divisores de 15 são: 1, 3, 5 e 15.

d) Os divisores de 17 são: 1 e 17.

Note que alguns desses números têm apenas dois divisores naturais distintos. Quando isso acontece são chamados de Números Primos. A palavra "primo" vem do latim primus, que significa primeiro.

O número 2 é o único número natural par primo. Conjuntos de 3, 5, 7 ou 11 objetos não podem ser colocados em duas ou mais colunas iguais, porque estes números só podem ser divididos por eles mesmos e por um. Sendo assim, estes números (3, 5, 7 e 11) pertencem ao Conjunto dos Números Primos.

A propriedade de ser um primo é chamada "primalidade", e a palavra "primo"também é utilizada como substantivo ou adjetivo, se um número inteiro tem módulo maior que um e não é primo, ou seja possui mais de dois divisores naturais distintos, é chamado Número Composto. No nosso exemplo acima, o 8 e o 15 são números compostos. Como "dois"é o único número primo par, o termo "primo ímpar"refere-se a todo primo maior do que dois.

Se ampliarmos o campo de trabalho e começarmos a pensar no conjunto dos Números Inteiros poderemos afirmar que número primo é todo número p cujo conjunto dos divisores não inversíveis não é vazio, e todos os seus elementos são produtos de p por inteiros inversíveis. De acordo com esta definição, -1, 0 e 1 não são números primos.Um número inteiro primo p é aquele que tem exatamente quatro divisores distintos, p pertence a Z: ± 1 e $\pm p$. Já um número natural primo, como já foi dito, tem exatamente dois divisores naturais distintos: o número um e ele mesmo.

Observe que o número 1 não é primo nem composto, pois ele tem um único divisor natural, que é ele mesmo.

Existe um outro grupo muito interessante: os Números Primos Entre Si. Dois ou mais números são ditos primos entre si quando o seu único divisor comum for a unidade, se limitamos o conjunto numérico aos Naturais. Observe que 4 e 15 não são números primos, mas o único divisor comum entre esses números é o 1. Portanto 4 e 15 são Números Primos Entre Si. Podemos afirmar que dois números naturais sucessivos são sempre primos entre si. Podemos garantir também que tendo dois números naturais, a e b, cuja soma seja um número primo p, certamente a e b serão primos entre si. O mesmo se aplica quanto trabalhamos com Números Inteiros, sendo que os divisores comuns são -1 e 1.(Lacerda 2010)

O matemático Christian Goldbach (1690 – 1764), em 1742 afirmou que "todo número par maior que 2 é igual à soma de dois números primos". Por exemplo: $8 = 3 + 5$; $32 = 3 + 29$; etc.

Erathóstenes (276 a.C. – 195 a.C.), astrônomo, geógrafo, historiador e matemático grego, criou um método, um algoritmo, muito prático para a obtenção de números primos até um determinado limite. É conhecido como o Crivo de Erathóstenes. Foi criado pelo matemático grego Eratóstenes (285-194 a.C.), o terceiro bibliotecário-chefe da Biblioteca de Alexandria.

Vejamos como funciona:

a) construa um tabela com os números naturais de 2 até 100, a sugestão é usar dez linhas e dez colunas;

b) risque todos os pares, maiores que 2;

c) risque os múltiplos de 3 maiores que ele;

d) risque também os múltiplos de 5 e os múltiplos de 7 maiores que eles;

e) o maior número primo a ser checado corresponde à raiz quadrada do valor-limite, arredondado para baixo.

Os números que não foram riscados são os números primos até 100.

Vejamos como Euclides de Alexandria (figura 1) trata esse assunto:

Figura 1 – Euclides de Alexandria

Segundo Picado, Euclides afirmou que: "Há mais números primos do que qualquer quantidade proposta de números primos". Euclides ofereceu uma demonstração desta afirmação acima, em sua obra “Os Elementos” no livro IX. Vejamos fragmentos de sua obra: (Picado 2006)

“Tomando-se , uma lista finita qualquer de números primos:

L $= p_1, p_2, p_3, ...p_n$

Pode-se mostrar que existem números primos que não estão nessa lista. Da seguinte maneira:

Sendo P o produto de todos os números primos na lista:

P $= p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_n$, e sendo q = P + 1.

Então, q pode ser primo ou não. Vejamos as duas possibilidades:

* Se q é primo então há pelo menos um número primo a mais que não está listado.

* Se q não é primo, então algum fator primo p divide q. Esse fator p não está na nossa lista L: se estivesse, ele dividiria P, pois P é o produto de todos os números na lista; mas como sabemos, p divide P + 1, que vale q. Então, para não deixar resto, p teria que dividir a diferença entre os dois números, que é [P + 1] - P, ou seja, 1. Mas não existe número primo que divida 1, assim haveria uma contradição, logo, p não pode estar na lista. Podemos afirmar então que há pelo menos mais um número primo além dos que estão na lista.

Isso nos garante que para qualquer lista finita de números primos, há um número primo que não está na lista. Sendo assim, a sucessão de números primos é ilimitada, não tem fim, e ainda não há uma “fórmula” que os gere em sua totalidade.

Observamos inúmeros relatos errôneos que afirmam que Euclides provou esse resultado por contradição, iniciando pela suposição de que o conjunto inicialmente considerado contém todos os números primos, ou que contém precisamente os n menores primos, ao invés de qualquer conjunto finito arbitrário de números primos.

Por contradição, podemos pensar da seguinte forma: suponhamos que o conjunto dos números primos seja finito:

P = 2, 3, 5, ..., p.

Assim, tomemos o número m, tal que:

m = $(2 \times 3 \times 5 \times ... \times p) + 1$

Note que m não é divisível por nenhum elemento de P, pois o resto da divisão é sempre 1. Podemos observar que m é outro número primo ou é um número composto cujos fatores são números primos que não estão na lista. Concluímos que nossa suposição inicial não é válida. Sendo assim, o conjunto dos números primos não é finito. O que prova o teorema citado acima.

Vejamos alguns exemplos:

Se o conjunto P que aparece na demonstração do teorema for constituído dos primeiros r números primos, então as fatorações de n = 2.3. ... .p_r + 1 para alguns valores de r estão representadas na Tabela de Fatoração (Figura 2) abaixo:

r	$n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$	Fatoração de n	Tipo
1	$3 = 2 + 1$	3	primo
2	$7 = 2 \cdot 3 + 1$	7	primo
3	$31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$	31	primo
4	$211 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$	211	primo
5	$2311 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$	2311	primo
6	$30031 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$	$59 \cdot 509$	composto
7	$510511 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1$	$19 \cdot 97 \cdot 277$	composto

Figura 2 – Tabela de Fatoração

Pierre de Fermat (1601-1665) descobriu que todo número primo da forma 4n + 1 tal como 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc., é a soma de dois quadrados. Vejamos alguns exemplos:

$$5 = 1^2 + 2^2,$$

$$13 = 2^2 + 3^2,$$

$$17 = 1^2 + 4^2,$$

$$29 = 2^2 + 5^2,$$

$$37 = 1^2 + 6^2,$$

$$41 = 4^2 + 5^2.$$

Fermat pensou que a fórmula $2^{2^n} + 1$ forneceria números primos para n = 0, 1, 2... estes números são conhecidos como Números de Fermat e são comumente denotados por Fn. Os cinco primeiros números são:

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$; sendo todos primos.

Hoje são conhecidos dois grupos de números primos:

- (4n + 1) que podem sempre ser escritos na forma $(x^2 + y^2)$; e
- (4n − 1) nunca podem ser escritos na forma $(x^2 + y^2)$.

Certamente, seria muito imaturo, tratando-se de números primos, fazer qualquer generalização baseando-se apenas em algumas observações, não solidamente comprovada matematicamente. Uma observação mais atenta na forma como se distribuem os números primos revela que não há uma regularidade nesta distribuição. Algumas fórmulas produzem muitos números primos, por exemplo: x^2 - x + 41, fornece números primos quando x = 0, 1, 2, ..., 40. Observe que há restrição. Note que para x = 41, a fórmula resulta em 41^2 = 1681, que não é primo.

Em janeiro de 2013, foi divulgado o maior número primo já calculado. Tem 17425170 dígitos que, se fosse escrito por extenso, ocuparia 3,4 mil páginas impressas com cinco mil caracteres cada. É o número $2^{57885161}$ - 1.

Provamos, então, que existem infinitos números primos.

O conceito de número primo é muito importante na teoria dos números. Um dos resultados da teoria dos números é o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única (desconsiderando a ordem) como um produto de números primos (chamados fatores primos): este processo se chama decomposição em fatores primos (fatoração).

Todo número natural composto (que não é primo e diferente de 1) pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores, diferentes de 1, e fatorar um número significa transformá-lo em uma multiplicação (mostrar os fatores).

Quando um número está decomposto em um produto em que todos os fatores são números primos, dizemos que esse número está “decomposto em fatores primos”.

E essa decomposição dá-se através da divisão do número dado pelo seu menor divisor primo, procedendo-se da mesma maneira com o quociente obtido até se encontrar o quociente 1.

Quando há fatores repetidos em uma fatoração, podemos usar a potenciação para simplificar sua escrita.

Por exemplo, $2^2 \times 3^2$ é a decomposição em fatores primos do número 36.

Vejamos outro caso:

$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 = 2 \times 9 \times 5$

Aqui temos o número composto 90, constituído por um átomo do número primo 2, dois átomos do número primo 3 e um átomo do número primo 5.

Conhecemos também os Números Primos de Mersenne, conjunto numérico que recebe esse nome em homenagem ao estudioso que muito investiu nesse assunto, o padre, músico, filósofo e matemático Marin Mersenne (1588 - 1648). Um número é chamado de Primo de Mersenne quando for um número primo obtido através da equação 2^p - 1, com a condição de p um número primo.(Texto escrito com base no material da disciplina MA14 ministrada no PROFMAT-2012)

Vejamos alguns exemplos:

a) Se p = 2, então 2^2 - 1 = 3

b) Se p = 3, então 2^3 - 1 = 7

c) Se p = 5, então 2^5 - 1 = 31

d) Se p = 7, então 2^7 - 1 = 127,

e assim por diante.

Capítulo 3

Atividades realizadas na sala de aula: Recordação de propriedades

Investimos, inicialmente, nestas sete situações algébricas, com a finalidade de recordar propriedades importantes. Essas propriedades são ferramentas fundamentais para nosso objeto de estudo: MMC e MDC.

- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + c}{b + d}$
- $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d} \neq \frac{a - c}{b - d}$
- $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}$
- $\frac{a}{n}$ - $\frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}$
- $\frac{a}{n} \times \frac{b}{n} = \frac{a.b}{n^2}$
- $\frac{a}{n} \div \frac{b}{n} = \frac{a}{b}$

Primeiramente, foi trabalhado, de maneira tradicional (exposição, explicação das equações acima por meio de exemplos numéricos e exercícios no quadro), cada uma das situações destacadas.Vencida esta etapa, foi apresentada ao discente uma situação-problema que deveria ser interpretada e que, para ser solucionada, precisaria recorrer aos conceitos ministrados anteriormente. Investimos um tempo num debate sobre as possíveis ferramentas a serem usadas, ou os possíveis caminhos a serem traçados para que alcançássemos a solução. Vejamos alguns destes exercícios propostos:

3.1 Frações Homogêneas:

Fazendo uso das seguintes propriedades:

- $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n} = \dfrac{a+b}{n}$
- $\dfrac{a}{n}$ - $\dfrac{b}{n} = \dfrac{a-b}{n}$

foi proposto o seguinte problema:

Problema 1: Um canteiro de margaridas ocupa $\frac{1}{6}$ de um terreno e outro, de rosas, ocupa $\frac{3}{6}$ desse mesmo terreno. Na parte restante foi feito um canteiro de gérberas. Que fração representa a região do canteiro de gérbera? (Data da aplicação: 23-08-2013)

Solução: Note que a parte ocupada pelas gérberas é equivalente à: $\frac{6}{6}$ - $\frac{1}{6}$ - $\frac{3}{6} = \frac{2}{6}$ do terreno.

Neste exemplo mostramos uma possível situação que exige o conhecimento de subtração de frações com denominadores iguais. Como esse é um caso simples o resultado e o envolvimento dos alunos foi extremamente satisfatório.

- $\dfrac{a}{n} \times \dfrac{b}{n} = \dfrac{a \times b}{n^2}$

Problema 2: Observe a expressão: $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{7} = \frac{6}{49}$ (Data da aplicação: 23-08-2013)

Essas situações mais algébricas são mais bem aceitas, em geral, pelos alunos, desde que seja investido um tempo em teoria. Não tivemos grandes dificuldades.

3.2 Frações Heterogêneas:

Fazendo uso das seguintes propriedades:

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a+c}{b+d}$

- $\dfrac{a}{b}$ - $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a-c}{b-d}$

foi proposto o seguinte problema:

Problema 3: Dividimos uma barra de chocolate da seguinte forma: $\frac{1}{4}$ para mim; $\frac{2}{3}$ do que sobrou para meu irmão e o restante para minha irmã. Que fração representa a parte que minha irmã recebeu? (Data da aplicação: 23-08-2013)

Solução: Observe que precisamos usar alguma ferramenta especial para solucionar este problema, pois temos: a barra inteira subtraída de $\frac{1}{4}$ dela mesma subtraída de $\frac{2}{3}$ do que sobrou. Note que as partes (denominadores) não são iguais. Sendo assim,precisamos pensar em algo do tipo:

$\frac{B}{4} + \frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de B (que significa $\frac{2}{3}$ do que sobrou) somado a $\frac{B}{4}$ (que é o que sobrou) $=$ B (que é a barra de chocolate completa). Esta situação específica ($\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$) foi trabalhada com mais atenção no problema 4.

Esse tipo de problema, que exige um pouco mais de domínio do abstrato, gera mais desconforto, mais dificuldade, especialmente no que diz respeito à interpretação. Mas não entraremos nesta problemática pois fugiremos do foco. Os alunos entenderam melhor o que o problema pedia quando usamos duas barras de chocolates de tamanhos iguais mas com divisões diferentes. O uso do recurso lúdico contribuiu bastante para o processo de aprendizagem.

- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$

Problema 4: Ana reservou $\frac{3}{5}$ de um terreno para plantar rosas, e resolveu que em $\frac{2}{3}$ desse canteiro as rosas plantadas seriam vermelhas. (Data da aplicação: 30-08-2013)

Solução: Note que a parte do terreno ocupada pelo canteiro de rosas vermelhas ($\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$) corresponde a $\frac{6}{15}$ do terreno.

Problema 5: Determine o número de unidades que devemos subtrair do denominador da fração $\frac{7}{45}$, de modo que a mesma fique três vezes maior. (Data da aplicação: 30-08-2013)

Solução: Para que essa fração fique três vezes maior, devemos multiplicá-la por 3, ou seja: $\frac{7}{45} \times 3 = \frac{7}{15}$.

- $\dfrac{a}{n} : \dfrac{b}{n} = \dfrac{a}{b}$

Problema 6: Quantas garrafas cheias de suco Carlos precisa despejar para encher um recipiente que comporta no máximo 4 litros, sabendo que na garrafa só cabem $\frac{2}{3}$ de litro? (Data da aplicação: 30-08-2013)

Solução: Perceba que cada $\frac{2}{3}$ de litro representa o conteúdo de uma garrafa. Então: $\frac{4}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$ garrafas

Problema 7: Colégio Naval - Uma pessoa, depois de gastar $\frac{3}{8}$ de seu dinheiro pagou uma dívida de $\frac{2}{3}$ do que restou, ficando ainda com 120,00 Reais. Quanto possuía essa pessoa? (Lacerda 2010) (Data da aplicação: 30-08-2013)

Solução: Se a pessoa gastou $\frac{3}{8}$ sobrou $\frac{5}{8}$ do seu dinheiro. A dívida foi paga com $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, que corresponde a $\frac{5}{12}$ do dinheiro. A parte que restou foi 120 Reais. Sendo assim essa pessoa gastou: $\frac{3Q}{8} + \frac{5Q}{12} = \frac{19Q}{24}$. Então $\frac{5Q}{24}$ equivale ao que sobrou: 120,00 Reais. Desta forma, o valor que tinha inicialmente era 576,00 Reais.

Os problemas descritos nesse capítulo foram resolvidos pelos alunos e essas resoluções foram recolhidas pelo professor (autor deste trabalho). A análise das mesmas permitiu afirmar que o resultado do trabalho foi satisfatório. Ficou comprovada a hipótese de que nossos alunos de Ensino Médio, neste caso especificamente de 2º ano, não se lembravam de algumas propriedades muito importantes, ferramentas valiosas no estudo que estamos propondo. Podemos afirmar que a grande maioria dos 38 alunos da turma 2009 apresentaram muitas dificuldades em conceitos que são tratados como essenciais. À medida que direcionamos a visão dos alunos para uma matemática aplicada, demos a ele a possibilidade de ampliação de visão diante dos obstáculos encontrados. Desta feita coloca-se a matemática como uma “surtida caixa de ferramentas” que pode ser utilizada tanto nos problemas teóricos de sala de aula, como também, futuramente no exercício de sua profissão, ou em outra atividade informal qualquer.

Após essas abordagens notamos uma evolução considerável dos alunos, especialmente no que diz respeito ao interesse pelas aulas.

Capítulo 4

Operações com Frações Heterogêneas; MMC e MDC

A metodologia usada foi executada em duas etapas. A primeira foi a tradicional, onde os conceitos, as definições e as expressões foram expostas no quadro. Num segundo momento foram propostas situações problema que exigiam do aluno uma interpretação matemática e que para encontrar a solução, precisava dominar os conceitos ministrados anteriormente. Vejamos:

a) Um reservatório contém água até seus $\frac{2}{3}$. Colocando-se mais 36 litros de água, ele ficará com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade. Quantos litros cabem nesse reservatório?

Solução: A maior parte das soluções apresentadas pelos alunos foi com este tipo de configuração:

$\frac{2}{3}$ da capacidade $+$ 36 L $=$ $\frac{3}{4}$ da capacidade, e resolvendo esta equação encontramos 432 litros de capacidade.

b) Gastei $\frac{3}{7}$ do meu salário. Depois, gastei a metade do que sobrou. Sabendo que ainda me restaram 180,00 Reais, quanto eu tinha inicialmente?

Solução: A solução mais comum apresentada pelos alunos foi:

$\frac{3}{7}$ do salário - $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{7}$ do salário $=$ 180,00 Reais, e seguindo a solução desta equação, determinamos que o meu salário é 630,00 Reais.

c) É possível dividir um terreno entre três pessoas de modo que a primeira receba $\frac{1}{2}$, a segunda $\frac{1}{3}$ e a terceira $\frac{1}{4}$ do terreno?

Esse exercício gerou um pouco mais de conflito. Mediante tal desconforto apresentei aos alunos a história da divisão de camelos proposta por Beremiz Samir, narrada no livro

O Homem que Calculava,de Malba Tahan.

"Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e, ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e, a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas? O homem que calculava, muito esperto, decidiu ceder o camelo que usava para os três irmãos e assim eles teriam 36 camelos ..." (Tahan 2012. Páginas: 21, 22 e 23)

A discussão deste famoso problema nos forneceu alguns instrumentos muito importantes para seguirmos os estudos, nos mostrou uma aplicabilidade prática desta ferramenta. Os alunos entenderam que a primeira dificuldade era a divisão proposta pelo pai, perceberam também que o nobre calculista entendeu que a adição das frações (divisão proposta pelo pai) era menor que um inteiro e que poderia tirar proveito desta situação.

O objetivo dessa atividade foi confrontar o aluno com a necessidade de usar uma outra ferramenta para solucionar o problema, ter um leque de possibilidades, e desta feita introduzir, de maneira prática e contextualizada, os conceitos e propriedades de MMC e de MDC.

Entendemos que o fundamental é fazer o aluno construir, guiado pelo mecanismo lógico, seus próprios instrumentos matemáticos: isso seria impossível, se não os colocássemos em situações bem sequenciadas, sob o ponto de vista da estrutura em questão. Nessa visão estruturamos nosso método didático.

Para alcançar êxito nessa atividade, enxergamos a necessidade de relembrar algumas noções básicas de múltiplos e divisores.

4.1 Propriedades do M.D.C.

.

Seja a e b dois números inteiros, não simultaneamente nulos. Afirmaremos que o número inteiro c é um divisor comum de a e de b se e somente se: c dividir a e se c dividir b. Essa é, basicamente a definição dada por Euclides e se constitui em um dos pilares de sua aritmética.

Por exemplo, os números -5, -1, +1 e +5 são os divisores (inteiros) comuns de 15 e 25.

Podemos afirmar que o número natural c é um máximo divisor comum de a e b (frequentemente abreviada como mdc(a, b) ou (a, b)), não simultaneamente nulos, se possuir as propriedades a seguir:

a) c é um divisor comum de a e de b;

b) c é divisível por todo divisor comum de a e de b, ou seja, se d é um divisor comum de a e de b, então d divide c;

c) Propriedade Fundamental do mdc: todo divisor comum de dois ou mais números inteiros é divisor do m.d.c. destes números;

d) Dizemos que dois números inteiros a e b são primos entre si se e só se (a,b)=1;

e) Se p é primo, então mdc(a,p) é 1 ou p;

f) Se a divide c, então mdc(a,b) dividi mdc(c,b);

g) Se mdc(a,b) = 1, então mdc(ac,b) = mdc(c,b);

h) O Lema de Euclides diz que: sejam a, b, n pertencentes aos Inteiros. Se existe (a, b − na), então (a,b) existe e (a,b) = (a, b − na);

i) Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros n e m tais que na + mb = 1.

Voltando ao exemplo usado anteriormente, vemos que os divisores comuns de 15 e 25 são: -5, -1, 1 e 5. Sendo assim, o maior entre todos os divisores comuns é o 5 (o mdc entre 15 e 25 é 5).

Observe a solução do problema a seguir, usando o método de decomposição em fatores primos:

Calcule o MDC entre os números 8, 12 e 28:

8	12	28	2
4	6	14	2
2	3	7	2
1	3	7	3
1	1	7	7
1	1	1	

Figura 3 – Decomposição em fatores primos de 8,12 e 28

Para determinar o mdc (8, 12, 28) basta multiplicar os números primos que dividem os três números decompostos ao mesmo tempo, os fatores comuns. Então, temos:

mdc(8, 12, 28) $= 2 \times 2 = 4$.

Essa é a ferramenta que os alunos têm maior intimidade.

Vejamos outro exemplo:

Sejam $a_n = 100 + n^2$ e $d_n = mdc(a_n, a_n + 1)$.

Calcular d_n para todo n.

Solução:

$d_n =$ mdc $(100 + n^2$, $100 + (\mathrm{n} + 1)^2) =$ mdc $(100 + n^2$, $2\mathrm{n} + 1)$.

Como $2\mathrm{n} + 1$ é ímpar, então o mdc $(4, 2\mathrm{n} + 1) = 1$ e usando as propriedades já apresentadas, temos que:

$d_n =$ mdc $(400 + 4n^2$, $2\mathrm{n} + 1)$

$d_n =$ mdc $(401, 2\mathrm{n} + 1)$.

Como 401 é primo, então:

- mdc $(401, 2\mathrm{n} + 1) = 401$ se $2\mathrm{n} + 1 = 401\mathrm{k}$ (com $\mathrm{k} = 2\mathrm{r} + 1$ inteiro ímpar), e
- mdc $(401, 2\mathrm{n} + 1) = 1$ caso contrário.

Este tipo de exercício não foi trabalhado em sala de aula pois entendemos que não traria benefícios práticos para uma turma de 2º ano do Ensino Médio, que tem como objetivo o ENEM.

Segundo Zelci Clasen de Oliveira uma outra forma de enxergar o MDC é: "Dados dois números naturais a e b, construímos um retângulo com essas dimensões. Cobrindo esse retângulo com os maiores quadrados possíveis, o lado do menor quadrado será o MDC entre a e b." (Oliveira 1995)

4.2 Teorema de Bachet-B'ezout

Sejam a e b números pertencentes ao Conjunto dos Números Inteiros Positivos. Acreditamos que existem x e y, também Inteiros, tal que a equação ax + by seja exatamente igual ao MDC(a,b). Portanto, se c também é um número inteiro e é tal que c divide a e divide b, então podemos afirmar que c divide o MDC(a,b). (Apostila de MA14 do PROFMAT 2012)

Não investimos no estudo desse teorema, com os alunos, por entender que deveríamos focar nas ferramentas mais conhecidas por eles mesmos.

4.3 Propriedades do M.M.C.

Em aritmética e em teoria dos números inteiros positivos, o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois inteiros a e b é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de a e de b. Se não existir tal inteiro positivo, por exemplo, se a = 0 ou b = 0, então mmc (a, b) é zero por definição.

O mínimo múltiplo comum é útil quando se adicionam ou subtraem frações vulgares (frações que possuem denominadores diferentes), pois é necessário o mínimo denominador comum (não é necessário que o denominador seja mínimo, mas sê-lo,agiliza os cálculos) durante esses processos. Considere o exemplo:

$$\tfrac{2}{21} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{42} + \tfrac{7}{42} = \tfrac{11}{42},$$

o denominador 42 foi usado porque mmc (21, 6) = 42.

Se a e b são diferentes de zero, o mínimo múltiplo comum pode ser computado usando o máximo divisor comum (mdc) entre a e b:

$$\text{mmc (a,b)} = \frac{a.b}{mdc(a,b)}$$

Assim, o Algoritmo Euclidiano para o mdc também nos dá um algoritmo rápido para o mmc. Retornando ao exemplo acima, temos:

$$\text{mmc (21,6)} = \frac{21.6}{mdc(21,6)} = \frac{21.6}{3} = 21 \times 2 = 42$$

Agora note que como:

$$\text{mmc (a,b)} = \frac{a.b}{mdc(a,b)}$$

Então, podemos afirmar que:

$$\text{mmc (a,b)} \times \text{mdc (a,b)} = \text{a} \times \text{b}$$

A fórmula:

$$\text{mmc (a,b)} = \frac{a.b}{mdc(a,b)}$$

é adequada para o cálculo do mmc para números pequenos.

Calcula-se o mmc também usando:

$$\text{mmc (a,b)} = \frac{a}{mdc(a,b)} \times b$$

deste modo, no exemplo anterior:

$$\text{mmc (21,6)} = \frac{21}{mdc(21,6)} \times 6 = \frac{21}{3} \times 6 = 7 \times 6 = 42$$

Mesmo que os números sejam grandes e não sejam rapidamente fatorizáveis, o mdc pode ser rapidamente calculado com o Algoritmo de Euclides.

Há de se também pensar em decomposição em fatores primos para encontrar facilmente o mmc de um grupo de números.

Vejamos algumas propriedades, considerado como operação binária, o mmc de dois inteiros positivos.

• Comutatividade: $a\times$ mmc(b,c) $=$ mmc $(a \times b, a \times c)$, ou seja: mmc (a, b) $=$ mmc (b, a).

• Associatividade: mmc (a, mmc (b,c)) $=$ mmc (mmc (a,b), c).

• O mmc é idempotente, ou seja: mmc (a,a) $=$ a

• Propriedade Fundamental do mmc: todo múltiplo comum de dois ou mais números inteiros é múltiplo do m.m.c. destes números.

Por exemplo: Encontrar o valor de mmc (45, 120, 75):

• $45 = 2^0 \times 3^2 \times 5^1$

• $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

• $75 = 2^0 \times 3^1 \times 5^2$

O mmc é o número que tem o maior múltiplo, ou maior expoente, de cada tipo diferente de átomo. Assim:

mmc (45, 120, 75) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1800$

Observe solução do problema a seguir, usando o método de decomposição em fatores primos:

Calcule o mmc entre os números 8, 12 e 28:

8	12	28	2
4	6	14	2
2	3	7	2
1	3	7	3
1	1	7	7
1	1	1	

Figura 4 – Decomposição em fatores primos de 8,12 e 28

Como queremos o mmc (8,12,28) basta multiplicar todos os fatores primos comuns e não comuns.

Observe que o método, a ferramenta que usamos para determinar o MMC e o MDC é a mesma: a decomposição em fatores primos. O que muda é a interpretação dos dados.

4.4 Algoritmo de Euclides

Já trabalhamos o assunto decomposição de um número natural em fatores primos. Isso certamente é suficiente para obter o mdc entre dois ou vários números naturais. No entanto, para obter o mdc entre dois números naturais muito grandes torna-se complicado porque a decomposição pode não ser imediata.O método a seguir é baseado no livro sétimo dos Elementos de Euclides. Apesar de existirem evidências históricas que este método seja anterior a este livro.

Na prática, o Algoritmo de Euclides nos fornece um meio prático de escrever o mdc de dois números como soma de dois múltiplos dos números em questão.

Vejamos um exemplo: Calcule mdc(1001, 109).

Solução: Realizando as divisões sucessivas, temos:

$$1001 = 109 \times 9 + 20$$
$$109 = 20 \times 5 + 9$$
$$20 = 9 \times 2 + 2$$
$$9 = 2 \times 4 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Assim, temos:

mdc(1001, 109) = mdc(109, 20) = mdc(20, 9) = mdc(9, 2) = mdc(2, 1) = mdc(1, 0) = 1.

Agora, enunciaremos o teorema citado:

"Obtendo o mdc entre dois números naturais X e Y onde X é maior que Y.

• Divida X por Y e obtenha o resto R_1. Se R_1 for zero, o mdc entre X e Y é Y.

• Se R_1 não for zero, divida Y por R_1 e obtenha o resto R_2. Se R_2 for zero, o mdc entre X e Y é R_1.

• Se R_2 não for zero, divida R_1 por R_2 e obtenha o resto R_3. Se R_3 for zero, o mdc entre X e Y é R_2.

• Se R_n não for zero, divida R_{n-1} por R_n e obtenha o resto R_{n+1}. Se R_{n+1} for zero, o mdc entre X e Y é R_n".

Vejamos um exemplo: Obtenha, pelo Algoritmo de Euclides, o mdc entre 10 e 15.

Solução:

• Dividimos 15 por 10 (porque 15 é maior que 10).

dividendo	divisor
15	10
5	1
resto	quociente

Figura 5 – Esquema de divisão 1

• Como o resto é 5 (não vale zero), devemos dividir o divisor 10 por 5, temos:

dividendo	divisor
10	5
0	2
resto	quociente

Figura 6 – Esquema de divisão 2

• O resto é zero, portanto o mdc entre 15 e 10 é 5 (o divisor da divisão cujo resto é zero).

O Algoritmo de Euclides pode requisitar muitas divisões sucessivas até que se chegue ao resto zero (sempre se chegará). Por conta disso, é melhor usar uma chave que aproveita melhor os resultados anteriores e deixa espaço para os próximos, caso sejam necessários. Vejamos:

• Monte uma grade com, pelo menos, 3 colunas e exatamente 3 linhas (deixe espaço à direita):

Figura 7 – Modelo de grade

• Na grade, insira o 15 e o 10 (vou manter os números do exemplo) assim:

15	10		

Figura 8 – Grade 1

• Sempre na primeira linha, sobre o último divisor usado, escreva o quociente da divisão atual. Na divisão de 15 por 10 o quociente é 1. Registre assim:

	1		
15	10		

Figura 9 – Grade 2

• O resto da divisão atual é registrado abaixo do dividendo da divisão atual. Na divisão de 15 por 10 o resto é 5.

	1		
15	10		
5			

Figura 10 – Grade 3

• Como 5 não é zero, copiamos o 5 ao lado do 10, na próxima casa. Repete-se todo o processo anterior, pensando que a divisão de agora é de 10 por 5.

	1		
15	10	5	
5			

Figura 11 – Grade 4

• Na divisão de 10 por 5 o quociente é 2. Registre assim:

	1	2	
15	10	5	
5			

Figura 12 – Grade 5

- Na divisão de 10 por 5 o resto é 0.

	1	2	
15	10	5	
5	0		

Figura 13 – Grade 6

- Como o resto é zero, o mdc entre 15 e 10 é o número 5.

Esse método foi apresentado aos alunos e, em geral, foi muito bem recebido, especialmente em situações em que trabalhávamos com números pequenos.

4.5 Equações Diofantinas Lineares

Várias questões relacionadas à aritmética buscam solução em equações do tipo aX + bY = c, com a, b e c pertencentes aos Inteiros, para obterem solução. Equações com esse molde são chamadas Equações Diofantinas Lineares, em homenagem a Diofanto de Alexandria (aproximadamente 300 d.C.).

Não nos aprofundaremos no assunto pois, como já foi mencionado, nosso trabalho tem como público alvo alunos do Ensino Médio, com foco nos exercícios cobrados no vestibular, especialmente ENEM. Mas, vejamos um exemplo:

Resolvamos a equação 24X + 14Y = 18.

Solução: a equação tem solução, pois mdc(24,14) divide 18. Dividindo ambos os termos da equação por 2 que é o mdc entre 14 e 24, obtemos uma equação reduzida e equivalente: 12X + 7Y = 9.

Pelo algoritmo de Euclides temos:

$$12 = 7 \times 1 + 5$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos:

$$1 = 12 \times 3 - 7 \times 5, \text{ portanto:}$$

$$9 = 12 \times 27 + 7 \times (-45).$$

Podemos concluir que x_0 = 27 e y_0 = -45 e é a solução particular da equação.

Sendo assim, temos:

x = 27 + 7t e y = -45 − 12t, com t pertencente aos Inteiros.

Vejamos outro exemplo:

Vamos resolver a equação 11X + 7Y = 58.

Solução: Para determiná-las vamos considerar o algoritmo euclidiano a seguir:

$$11 = 7 \times 1 + 4$$

$$7 = 4 \times 1 + 3$$

$$4 = 3 \times 1 + 1, \text{ logo,}$$

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2\ times(11 - 7) - 7,$$

$$\text{que enfim é equivalente a: } 2 \times 11 - 3 \times 7.$$

Daí temos que x0 = 4 e y0 = 2, que é a solução minimal da equação proposta. Então, temos como solução:

x = 4 + 7×t e y = 2 - 11×t.

Este exemplo foi retirado apostila de MA14 do curso do PROFMAT 2012, na Unidade 8, página 8.

Todas as técnicas, os teoremas e conceitos mencionados ao longo deste capítulo foram apresentados aos alunos, sempre consciente que nem todas essas técnicas são úteis hoje pra eles. Inclusive, para resolver equações como as duas últimas citadas, não há a necessidade de usar toda a formalidade técnica como usamos, pois os números envolvidos são pequenos.

Capítulo 5

Atividades propostas aos alunos

Mota acredita que o jogo educativo pode, e deve ser definido como uma atividade lúdica ou competitiva, que permite combinação de espaço e tempo, no qual cada participante ou grupo de participantes está em posição oposta, pretendendo cada um ou cada grupo obter o melhor resultado. O jogo é um meio de interação e comunicação, proporciona o respeito às regras e, também, estimula a possibilidade de levantar estratégias mostrando-se relevante em qualquer idade. Para a autora, a Matemática e os jogos têm características comuns, como o desenvolvimento de técnicas intelectuais, do pensamento lógico e do raciocínio, sendo que os jogos, através de suas regras e estratégias, podem auxiliar na concretização do pensamento matemático. (Mota 2009)

Neste contexto, Grando considera relevante a atenção do professor, de modo que aproveite "os conceitos e/ou habilidades do pensamento matemático que vão emergindo no decorrer das situações de jogo". Dessa forma, se vê evidenciada a responsabilidade do professor, no sentido de considerar e avaliar a proposta e a eficácia do jogo didático, antes de sua aplicação em sala de aula. (Grando 2000)

Munido e embasado nestes fortes argumentos entendemos que era o momento certo para propor aos alunos encarar o desafio de alguns trabalhos lúdicos. E assim fizemos na turma 2009 do Ciep 257, em Rio das Ostras.

5.1 Atividade - Diofanto

Data da aplicação: 13-09-2013

Proposta: Determinar, usando equações algébricas (e por sua vez as ferramentas mmc e mdc)a idade que tinha Diofanto no momento de sua morte.

A vida de Diofanto: A história conservou poucos traços bibliográficos de Diofanto de Alexandria, que é considerado o maior algebrista grego. Na história da evolução matemática este autor desempenha um papel semelhante ao que Euclides (360 – 295 a.C.)

tem na Geometria e Ptolomeu (85 – 165) na Astronomia. Nasceu em 22 de setembro de 250 a.C. Morreu 84 anos depois. Entre vários livros que escreveu, o mais importante deles é "Aritmética", Neste introduz uma notação simbólica com "códigos" diferentes para o quadrado de uma incógnita, para o cubo e para qualquer potência. Escreveu também sobre equações a duas ou mais variáveis cujas soluções são números inteiros ou racionais, e são chamadas Equações Diofantinas.

Foi extraído do epitáfio que figura seu sepulcro, aparentemente criado por seu amigo Metrodorus, o seguinte enigma:

"Aqui jaz o matemático que passou um sexto da sua vida como menino. Um doze avos de sua vida passou como rapaz. Depois viveu um sétimo de sua vida antes de se casar. Cinco anos após nasceu seu filho, com quem conviveu metade de sua vida. Depois da morte de seu filho, sofreu mais 4 anos antes de morrer."

Reproduzamo-lo:

EM VERNÁCULO	NO IDIOMA DA ÁLGEBRA
Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem, ó milagre (!), revelar quão dilatada foi sua vida,	i - idade
(...) cuja sexta parte constituiu sua linda infância.	$\frac{i}{6}$
Transcorrera uma duodécima parte de sua vida, quando seu queixo se cobriu de penugem.	$\frac{i}{12}$
A sétima parte de sua existência transcorreu em um matrimônio estéril.	$\frac{i}{7}$
Passado um quinquênio, fê-lo feliz o nascimento de seu precioso primogênito,	5
(...) o qual entregou seu corpo, sua formosa existência, que durou apenas a metade da de seu pai, à terra.	$\frac{i}{2}$
E com dor profunda desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos ao falecimento de seu filho.	$i = \frac{i}{6} + \frac{i}{12} + \frac{i}{7} + 5 + \frac{i}{2} + 4$

De acordo com esse enigma e resolvendo a equação, e encontrando i = 84, ficamos, também conhecendo mais os seguintes dados bibliográficos de Diofanto: casou-se aos 21 anos, foi pai aos 38 anos, perdeu seu filho quando tinha 80 anos, e faleceu aos 84 anos.

Vejamos como alguns alunos se desenvolveram nessa atividade:

Figura 14 – Enigma de Diofanto

De acordo com esse enigma e resolvendo a equação, e encontrando i = 84, ficamos, também conhecendo mais os seguintes dados bibliográficos de Diofanto: casou-se aos 21 anos, foi pai aos 38 anos, perdeu seu filho quando tinha 80 anos, e faleceu aos 84 anos.

Vejamos como alguns alunos se desenvolveram nessa atividade:

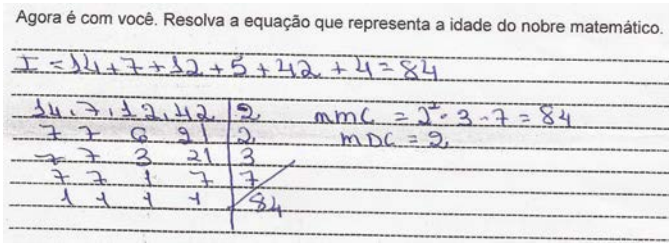


Figura 15 – Solução de um aluno

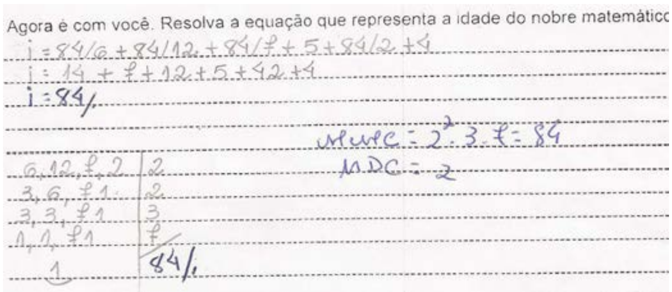


Figura 16 – Solução de um aluno

O objetivo desta atividade era tornar o tema (adição e subtração de frações com denominadores diferentes) mais atraente, mais interessante. Ao propor uma tarefa com uma história tão inusitada imaginamos prender a atenção e o interesse da turma.

Conseguimos êxito na missão. Os alunos se envolveram de maneira satisfatória com esta atividade. Especialmente pela curiosidade histórica que o problema tratava.

5.2 Atividade - Quadra de esporte

Data da aplicação: 20-09-2013

1ª Proposta: Medir a quadra de esportes do colégio.Com a finalidade de colocar o maior número possível de alunos espalhados em cima da linha (limite) da quadra, de tal forma que a distância entre dois alunos, em todo o perímetro, seja a maior possível. Não foi dito ao alunos que uma ferramenta apropriada era o M.D.C..

Figura 17 – Medição da quadra de esportes do CIEP 257

Figura 18 – Medição da quadra de esportes do CIEP 257

Figura 19 – Medição da quadra de esportes do CIEP 257

2ª Proposta: Medir as dimensões da trave (baliza) da quadra de futsal. Com o objetivo de colocar a maior quantidade possível de grampos (para prender a rede) de forma que tenha a maior distância possível entre dois grampos, em todas as dimensões. Não foi mencionada, para não influenciar, a expressão “Máximo Divisor Comum (MDC).

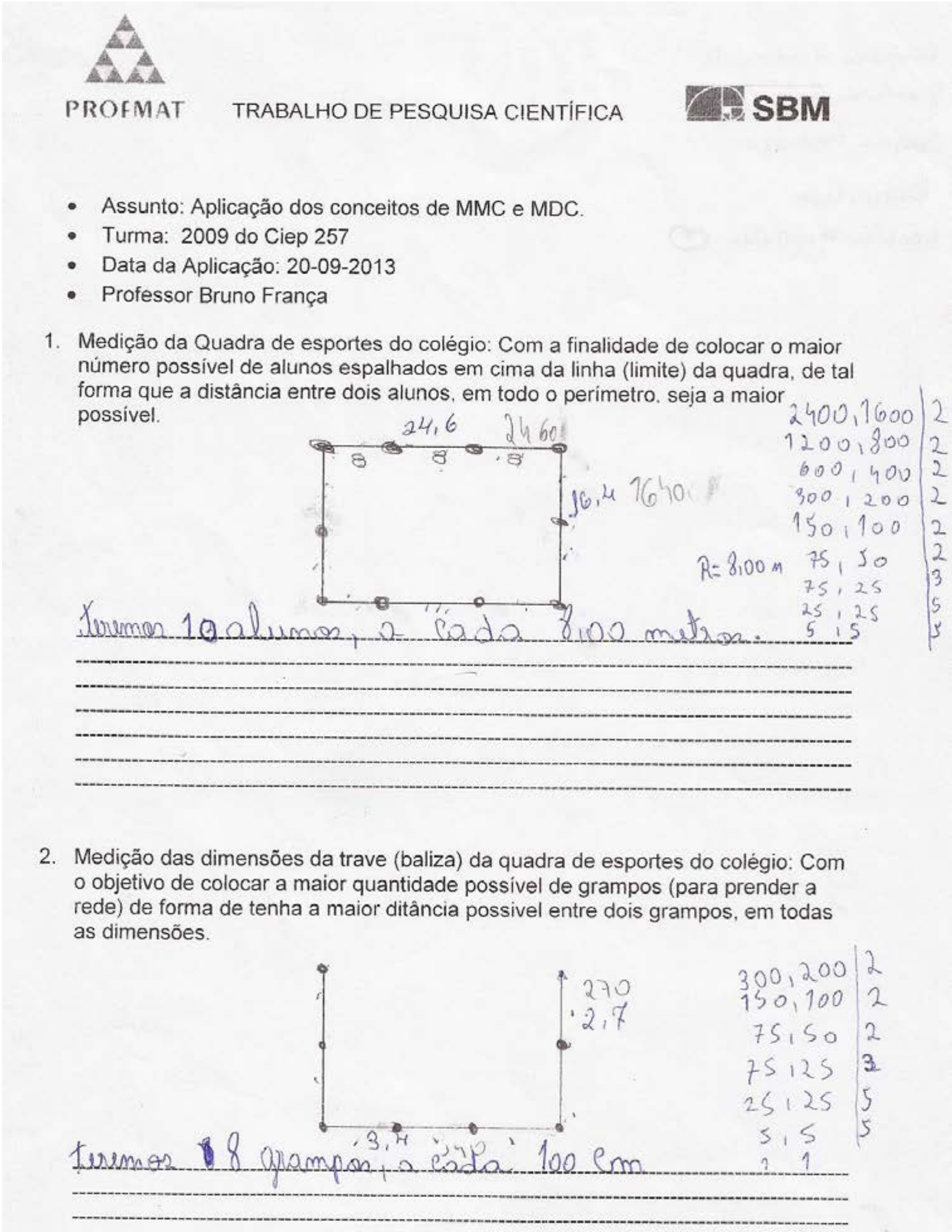
Figura 20 – Medição das traves da quadra de esportes do CIEP 257

Figura 21 – Medição das traves da quadra de esportes do CIEP 257

Figura 22 – Medição das traves da quadra de esportes do CIEP 257

Após a medição, e em outra oportunidade, trabalhamos as informações determinadas na sala de aula e cada grupo, composto com quatro alunos, fez os seus cálculos.

Não foi dada nenhuma dica quanto ao método ou ferramenta a ser usada para solucionar o problema. Vejamos os trabalhos de dois grupos:


PROFMAT TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA SBM

- Assunto: Aplicação dos conceitos de MMC e MDC.
- Turma: 2009 do Ciep 257
- Data da Aplicação: 20-09-2013
- Professor Bruno França

1. Medição da Quadra de esportes do colégio: Com a finalidade de colocar o maior número possível de alunos espalhados em cima da linha (limite) da quadra, de tal forma que a distância entre dois alunos, em todo o perímetro, seja a maior possível.

24,6 2460

16,4 1640

R= 8,00 m

2400, 1600	2
1200, 800	2
600, 400	2
300, 200	2
150, 100	2
75, 50	2
75, 25	3
25, 25	5
5, 5	5

Teremos 10 alunos, a cada 8,00 metros.

2. Medição das dimensões da trave (baliza) da quadra de esportes do colégio: Com o objetivo de colocar a maior quantidade possível de grampos (para prender a rede) de forma de tenha a maior ditância possivel entre dois grampos, em todas as dimensões.

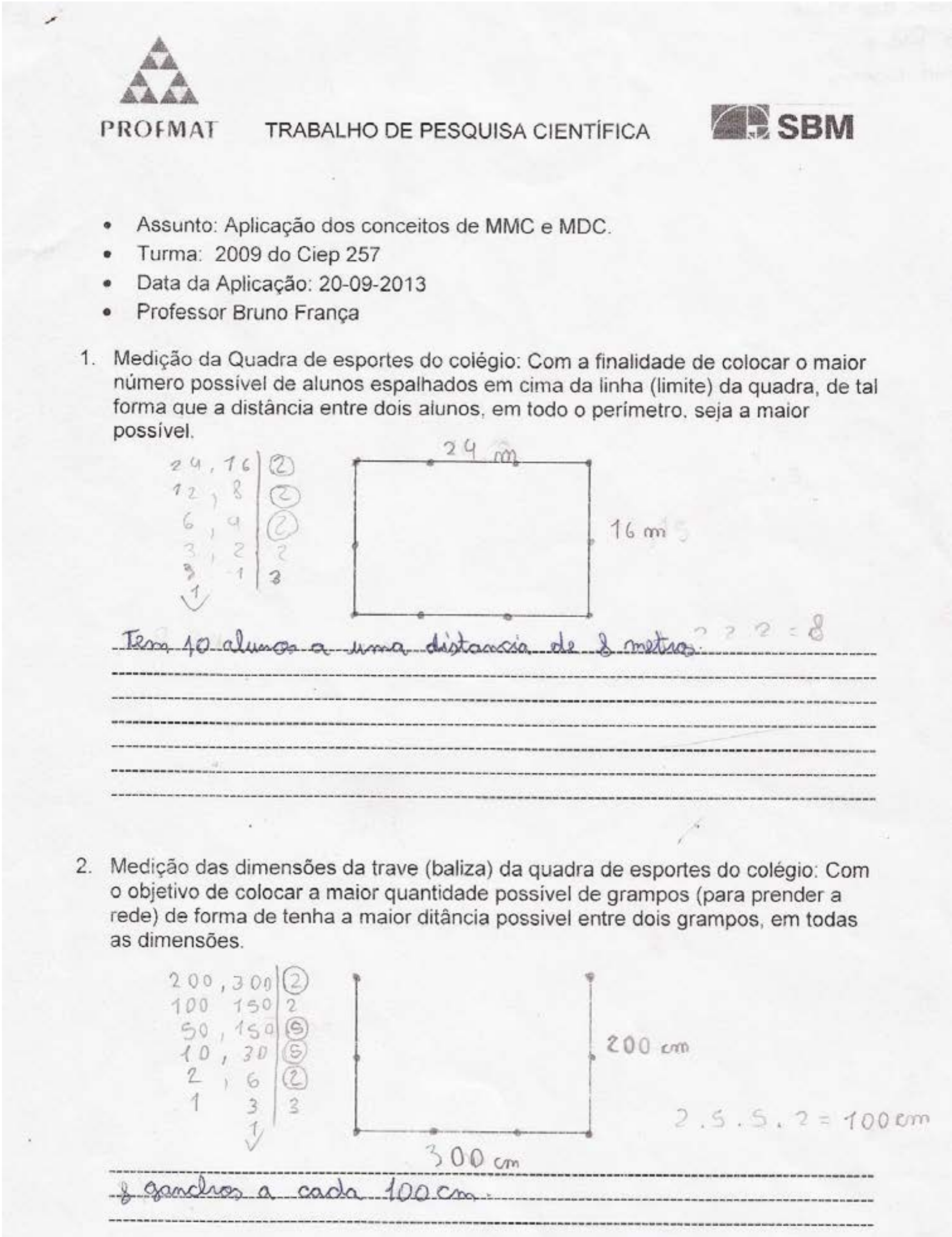
270
2,7

3,4 340

300, 200	2
150, 100	2
75, 50	2
75, 25	3
25, 25	5
5, 5	5
1 1	

Teremos 8 grampos, a cada 100 cm

Figura 23 – Cálculos


PROFMAT TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA SBM

- Assunto: Aplicação dos conceitos de MMC e MDC.
- Turma: 2009 do Ciep 257
- Data da Aplicação: 20-09-2013
- Professor Bruno França

1. Medição da Quadra de esportes do colégio: Com a finalidade de colocar o maior número possível de alunos espalhados em cima da linha (limite) da quadra, de tal forma que a distância entre dois alunos, em todo o perímetro, seja a maior possível.

Tem 10 alunos a uma distancia de 8 metros.

2. Medição das dimensões da trave (baliza) da quadra de esportes do colégio: Com o objetivo de colocar a maior quantidade possivel de grampos (para prender a rede) de forma de tenha a maior ditância possivel entre dois grampos, em todas as dimensões.

8 ganchos a cada 100 cm.

Figura 24 – Cálculos

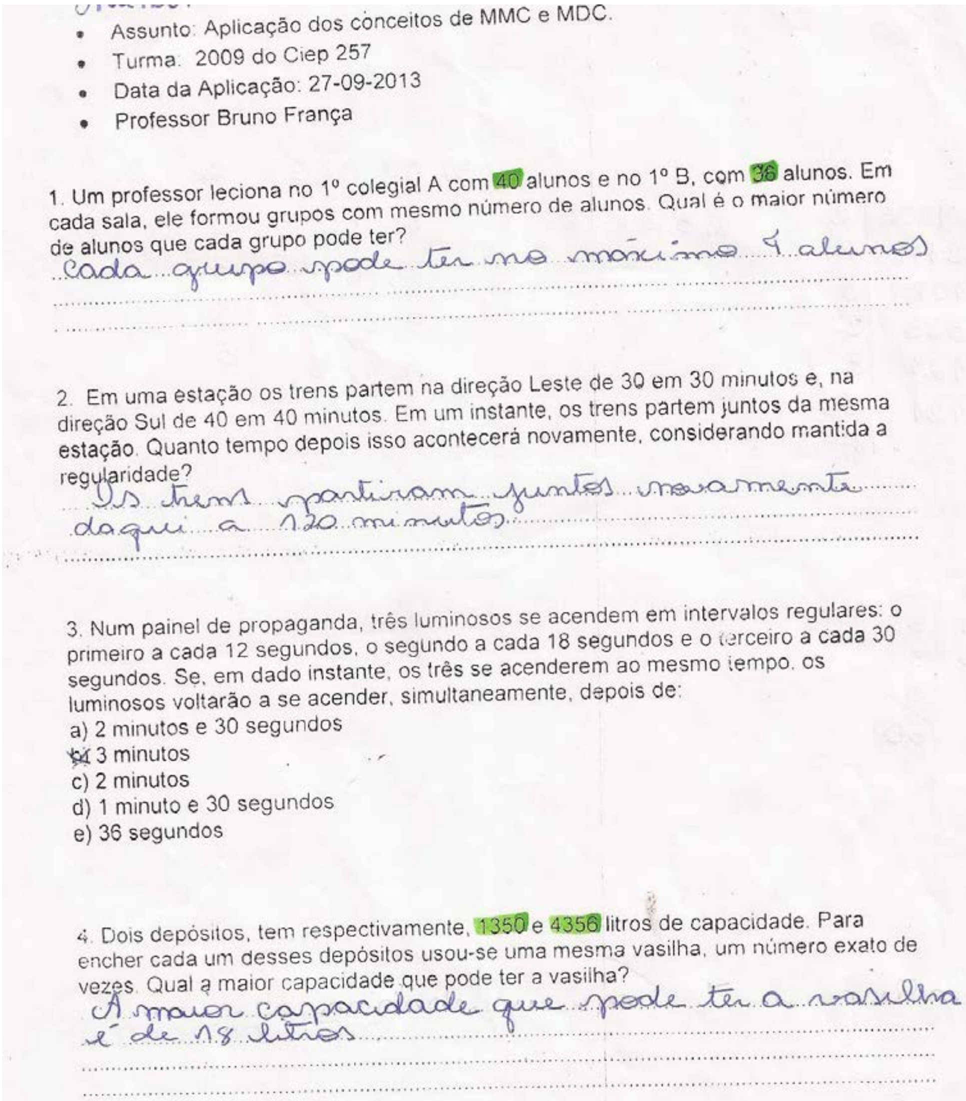
Apresentamos aqui apenas dois dos 9 grupos que se envolveram com a atividade. No geral, o resultado do trabalho foi satisfatório, especialmente por conta do envolvimento dos alunos.

5.3 Atividade - Lista de exercícios

Data da aplicação: 27-09-2013

Proposta: Lista de exercícios de vestibulares anteriores tratando dos assuntos abordados ao longo deste trabalho.

Vejamos:



- Assunto: Aplicação dos conceitos de MMC e MDC.
- Turma: 2009 do Ciep 257
- Data da Aplicação: 27-09-2013
- Professor Bruno França

1. Um professor leciona no 1º colegial A com 40 alunos e no 1º B, com 36 alunos. Em cada sala, ele formou grupos com mesmo número de alunos. Qual é o maior número de alunos que cada grupo pode ter?

Cada grupo pode ter no máximo 4 alunos

2. Em uma estação os trens partem na direção Leste de 30 em 30 minutos e, na direção Sul de 40 em 40 minutos. Em um instante, os trens partem juntos da mesma estação. Quanto tempo depois isso acontecerá novamente, considerando mantida a regularidade?

Os trens partiram juntos novamente daqui a 120 minutos

3. Num painel de propaganda, três luminosos se acendem em intervalos regulares: o primeiro a cada 12 segundos, o segundo a cada 18 segundos e o terceiro a cada 30 segundos. Se, em dado instante, os três se acenderem ao mesmo tempo, os luminosos voltarão a se acender, simultaneamente, depois de:

a) 2 minutos e 30 segundos
b) 3 minutos
c) 2 minutos
d) 1 minuto e 30 segundos
e) 36 segundos

4. Dois depósitos, tem respectivamente, 1350 e 4356 litros de capacidade. Para encher cada um desses depósitos usou-se uma mesma vasilha, um número exato de vezes. Qual a maior capacidade que pode ter a vasilha?

A maior capacidade que pode ter a vasilha é de 18 litros

Figura 25 – Lista de Exercícios

5. (UFSC) Um país lançou em 02/05/2000 os satélites artificiais A, B e C com as tarefas de fiscalizar o desmatamento em áreas de preservação, as nascentes dos rios e a pesca predatória no Oceano Atlântico. No dia 03/05/2000 podia-se observá-los alinhados, cada um em uma órbita circular diferente, tendo a Terra como centro. Se os satélites A, B e C levam, respectivamente, 6, 10 e 9 dias para darem uma volta completa em torno da Terra, então o número de dias para o próximo alinhamento é:

Para o próximo alinhamento será de 90 dias

6. (UNIFACS - 1997) O número de alunos de uma sala de aula é menor que 50. Formando-se equipes de 7 alunos, sobram 6. Formando-se equipes de 9 alunos, sobram 6. Formando-se equipes de 9 alunos , sobram 5. Nessas condições, se forem formadas equipes de 8 alunos, o número de alunos que sobram é:

~~a)~~ 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

7. Calcular o valor de n + p para as condições dadas:

a) A = 2n x 33 x 132 ; B = 24 x 3p x 11 x 13 para M.D.C. (A e B) = 23 x 32 x 13

b) A = 2n x 32 x 11 ; B = 24 x 3p x 7 x 112 para M.M.C. (A e B) = 25 x 33 x 7 x 112

8. (UFF 2002) Um bloco de madeira, na forma de um paralelepípedo retângulo, tem as seguintes dimensões: 36 cm, 60 cm e 84 cm. Sabendo que esse bloco deve ser cortado em cubos idênticos, sem que haja sobra de material, determine:

a) a medida da aresta dos maiores cubos que se podem obter;

A medida será de 12 cm.

b) a menor quantidade possível de cubos resultantes do processo de corte descrito no enunciado.

A menor quantidade possível será de 1.260.

36, 60, 84	2	2.2.3 = 12
18, 30, 42	2	
9, 15, 21	3	
3, 5, 7	3	
1, 5, 7	5	
1, 1, 1	7	
	1,260	

Figura 26 – Lista de Exercícios

Nosso objetivo desde o início (com a introdução às frações, Números Primos e Fatoração, mmc e mdc) era preparar nossos alunos para este momento. O instante que se deparariam com questões de vestibulares, de concursos públicos em geral e até mesmo com a necessidade de saber trabalhar com estas ferramentas no curso superior, especialmente nas matérias de Calculo Integral e Diferencial.

Os resultados dessa tarefa evidenciaram que, para boa parte dos estudantes, era clara a ideia da existência de critérios para divisibilidade e das propriedades de mmc e mdc, especialmente usando a decomposição em fatores primos (que sabemos que é a mais usual), embora não os dominassem. No entanto, quando solicitados a apresentar uma justificativa para o fato de um determinado número ser divisível ou não por outro, após algumas conjecturas, chegavam a um resultado de alguma forma satisfatória. Assim, entende-se que atividade cumpriu sua missão, que visava a consolidação de noções e conceitos.

Com a finalidade de mostra-lo que esse assunto que trabalhamos tem sido cobrado constantemente, que é um assunto muito atual, segue abaixo uma lista de exercícios de concursos anteriores.

5.4 Sugestão de exercícios

1. (ENEM 2010) Em uma sala retangular de piso plano nas dimensões 8,80 m por 7,60 m deseja-se colocar ladrilhos quadrados iguais, sem necessidade de recortar nenhuma peça. A medida máxima do lado de cada ladrilho é:

a) 10 cm

b) 20 cm

c) 30 cm

d) 40 cm

e) 50 cm

Resposta correta: Letra D - 40 cm

Assunto: Máximo divisor comum.

2. (Essa 2007) Um uma unidade do Exército, a soma do efetivo formado por soldados e cabos é 65. Em um determinado dia, 15 soldados não compareceram ao expediente. Em consequência dessas faltas, o efetivo de cabos ficou igual ao efetivo de soldados presentes naquele dia. Qual é o mínimo múltiplo comum entre o número total de soldados e cabos desta unidade militar?

a) 280

b) 260

c) 240

d) 220

e) 200

Resposta correta: Letra E - 200

Assunto: Mínimo múltiplo comum.

3. (IFF - Macaé - 2009) A sede da reserva de Jurubatiba fica em um terreno de 144 m de comprimento e 112 m de largura. O terreno é cercado de árvores que estão plantadas a uma mesma distância uma da outra. Havendo a maior distância possível entre cada duas árvores consecutivas, e uma árvore em cada canto, qual o número de árvores existentes?

a) 16

b) 28

c) 30

d) 32

e) 36

Resposta correta: Letra C - 30 árvores.

Assunto: Máximo divisor comum.

4. (UERJ - Questão retirada do site http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfPnUAJ/livro-teoria-dos-numeros?part=10 no dia 19-06-2014) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

a) 150

b) 160

c) 190

d) 200

Resposta correta: Letra D - 200 segundos

Assunto: Mínimo múltiplo comum.

5. (UNIFESP 2007 - Questão retirada do site http://www.elitecampinas.com.br/gabaritos/uni
no dia 19-06-2014) Entre os primeiros mil números inteiros positivos, quantos são divisíveis pelos números 2, 3, 4 e 5?

a) 60

b) 30

c) 20

d) 16

e) 15

Resposta correta: Letra D - 16 números.

Assunto: Mínimo múltiplo comum.

6. (UERJ 2000 - Questão retirada do site http://vestibularpassoapasso.com.br/wp-content/uploads/2010/10/UERJ-Mat-c08-p105-Conjuntos-NumC3A9ricos.pdf no dia 19-06-2014) O número de fitas de vídeo que Marcela possui está compreendido entre 100 e 150. Grupando-as de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, sempre resta uma fita. A soma dos três algarismos do número total de fitas que ela possui é igual a:

a) 3

b) 4

c) 6

d) 8

Resposta correta: Letra B - A soma é 6.

Assunto: Mínimo múltiplo comum.

7. (UniCamp-SP) Em uma agência bancária cinco caixas atendem os clientes em fila única. Suponha que o atendimento de cada cliente demore exatamente 3 minutos e que o caixa 1 atenda o primeiro da fila ao mesmo tempo em que o caixa 2 atende, o segundo, o caixa 3, o terceiro e assim sucessivamente.

a) Em que caixa será atendido o sexagésimo oitavo cliente da fila?

b) Quantos minutos depois da abertura dos caixas será iniciado o atendimento desse mesmo sexagésimo oitavo cliente?

Resposta correta:

Assunto: Múltiplos e divisores

a) Caixa 3.

b) Após 13 minutos.

8. (PUC SP - Questão retirada do site http://www.soensino.com.br/foruns/viewtopic.php?f=5

no dia 19-06-2014) Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48m, 60m e 80m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Deseja vender tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

Resposta correta: 47 retalhos.

Assunto: Máximo divisor comum.

9. (1º Exame de Qualificação - UERJ 2015)

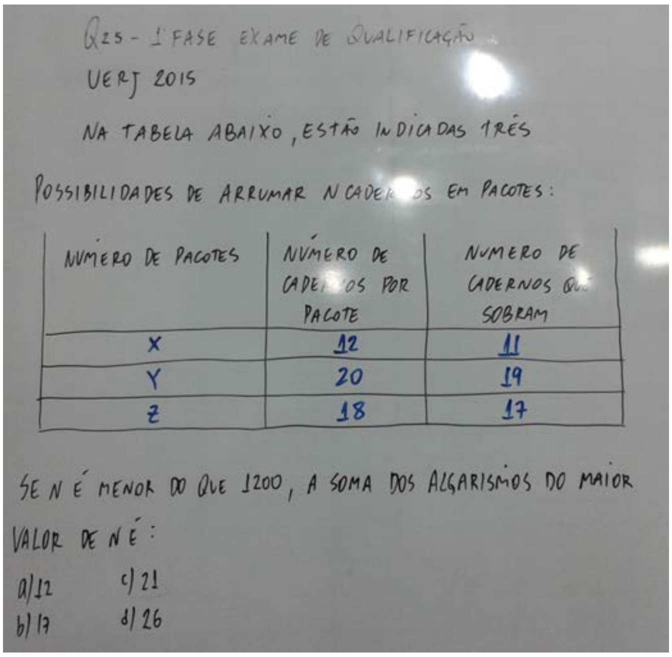


Figura 27 – Questão 25 - 1º Exame de Qualificação UERJ 2015

Este exercício foi trabalhado com os alunos da turma 3008 do CIEP 257 (que tem como base a turma 2009 de 2013 da mesma unidade escolar) no dia 10 de junho de 2014. Vale ressaltar que esta questão foi retirada da prova da UERJ que aconteceu no dia 08 de junho de 2014, comprovando desta forma que investimos em um assunto muito importante e atual.

Resposta correta: A soma é 17 $(1 + 0 + 7 + 9)$.

Assunto: Mínimo múltiplo comum.

10. (Petrobras 2014 - Cargo: Técnico de Exploração de Petróleo Júnior, questão retirada do site: file:///C:/Users/Bruno/Downloads/TECNICOA20DE20MANUTENCAO20JUNIOR2
no dia 19-06-2014) O produto de dois números naturais, x e y, é igual a 765. Se x é um número primo maior que 5, então a diferença y - x é igual a:

a) 6

b) 17

c) 19

d) 28

e) 45

Resposta correta: Letra D

Assunto: Número primo.

Capítulo 6

Conclusões

Transpassando as limitações de tempo e de recursos, naturais de uma pesquisa acadêmica, e na expectativa de ter apresentado tópicos relevantes e coerentes para o estudo de múltiplos e divisores, MMC e MDC, acreditamos que os resultados dessa dissertação tenham contribuído de forma significativa e relevante para a nossa prática docente, como profissionais de Matemática, que lidam diariamente com as dificuldades, limitações e abstrações de nossos alunos, especialmente neste ramo do conhecimento.

Entendemos que a primeira preocupação do professor, antes de abordar um assunto, deve ser a de criar nos alunos condições de assimilação para o que se deseja ensinar, isto é, em linguagem mais técnica e formal, verificar em quais esquemas de assimilação se fará a aprendizagem e diligenciar para que todos os alunos deles disponham e alcancem além da competência a habilidade, que é a visão do ENEM. Motivados desta forma é que propomos aos alunos da turma 2009 do CIEP 257 um estudo a partir de frações, números primos e fatoração, com a finalidade de provar a necessidade de uma ferramenta capaz de solucionar muitas situações de nosso cotidiano educacional e até mesmo alguns casos que ultrapassem os muros do colégio.

Esperamos ter apresentado aqui um trabalho que tenha destacado a real importância dos assuntos múltiplos, divisores, Número Primo, MMC e MDC, que são tão relevantes e atuais. Esperamos também ter estimulado o cuidado e a criação de elementos que substituam o ensino abstrato e expositivo pela provocação constante de raciocínio, visando a construção, pelo aluno, dos seus instrumentos e modelos matemáticos, relacionados à sua realidade, diminuindo assim a fenda entre o pensamento lógico matemático e o concreto, o palpável. Isso não significa necessariamente trabalhos lúdicos ou fora da sala de aula, mas devemos mostrar aos nossos alunos que estes assuntos são muito importantes na hora do vestibular, dos concursos públicos e até mesmo nos cursos universitários, dependendo da carreira escolhida.

Concluímos que não podemos, de forma alguma, minimizar a importância destes assuntos trabalhados aqui.

Referências

1. AMARAL, Filipi. "Ensino de Matemática". Revista Matemática Para Todos, v.28, n.28, 2013. Citado na página 12.

2. FERNANDES, Antônio. "Todo mundo leva vantagem ao estudar matemática". Revista Matemática Para Todos, v.12, n.12, 2012. Citado na página 12.

3. Congresso Nacional - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1996.

4. Parâmetros Curriculares Nacionais - Congresso Nacional - Constituição da Republica Federativa do Brasil - Brasília - Senado Federal, 1988.

5. LACERDA, José Carlos Admo. "Praticando a Aritmética". Issonnarte Editora, 2010. Citado nas páginas 21 e 29.

6. FREIRE, Paulo. Pedagogia do Oprimido, 3ª Edição.

7. TAHAN, Malba. "O Homem que Calculava". Editora Record, 2012. Citado na página 31.

8. DANTE, Luis Roberto. "Projeto Telaris - Matemática". v.6º, 7º, 8º e 9º ano. Ática, 2012.

9. GRANDO, Regina Célia. "O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula". Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000. Citado na página 42.

10. D'AMBRÓSIO, Beatriz. "Como Ensinar Matemática". Retirado do site http: www.academia.edu/1082177/como-ensinar-matematica-hoje no dia 17/06/2013.

11. MARTINEZ, Brochero. MOREIRA. SALDANHA. e TENGAN. - Teoria dos Números - Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

12. FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, n. 7, de julho-agosto de 1990.

13. MOTA, Paula Cristina Costa Leite de Moura. Jogos no Ensino da Matemática. Universidade Portucalense Infante Dom Henrique. Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia. Porto, set. 2009. Disponível em: <http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/198/1/TMMAT. Acesso em: 17 jun 2013. Citado na página 42.

14. DANTE, L. R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 1997.

15. BAIRRAL, Marcelo. UFRRJ. Oficinas de Matemática Lúdica, "Do Lúdico ao Sério em Matemática. 2002.

16. Sistema de Ensino Tamandaré, 3ª edição, Volume 1, Ciências Exatas. Preparatório Para Escolas Militares de Nível Universitário.

17. OLIVEIRA, Zelci Clasen. Uma Interpretação Geométrica do MDC. Revista do Professor de MatemÁtica. v.29, 1995. Citado na página 33.

18. BANZATTO, Liliane. e SODRÉ, Ulysses. Site: pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracdec.htm. Citado na página 14.

19. PEDROSO, Hermes Antônio. A História da Matemática. UNESP de São José do Rio Preto - SP. 2009. Citado nas páginas 14 e 17.

20. IEZZI, Gelson. Metmática: Volume Único. 5ª Edição, São Paulo: Atual 2011. Outros autores: Dolce, Oswaldo. Degenszajn, David. Périgo, Roberto. Citado na página 19.

21. BACCARIN, Fábio Luis. 2012. Universidade Estadual do Paraná http://www.fecea.br/userfiles/PlanoCitado na página 11.

22. SOUZA, Eronildo de Jesus. 2013. SOBRE A HISTÓRIA DOS NÚMEROS. CEFETBA http://www.ifba.edu.br. Citado na página 15.

23. LIMA, E. L. Meu professor de matemática e outras histórias. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1991.

24. PICADO, Jorge. Apontamentos de Álgebra II. 2006. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. site: http://www.mat.uc.pt/ picado/algebraII/apontamentos/sebenta.pdf. Citado na página 22.

25. Material usado na disciplina MA14 na turma do PROFMAT - UENF-RJ 2012. Citado nas páginas 25, 34 e 41.