CARLOS ALBERTO LOPES DOS SANTOS DE OLIVEIRA

Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

SETEMBRO DE 2015

CARLOS ALBERTO LOPES DOS SANTOS DE OLIVEIRA

Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
SETEMBRO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **78/2015**

Oliveira, Carlos Alberto Lopes dos Santos de
Análise combinatória: raciocínio recursivo e processos sistemáticos de enumeração / Carlos Alberto Lopes dos Santos de Oliveira. – Campos dos Goytacazes, 2015.
102 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 87-88.
1. ANÁLISE CONBINATÓRIA – PROBLEMAS, QUESTÕES, EXERCÍCIOS 2. MATEMÁTICA (ENSINO MÉDIO) – ESTUDO E ENSINO 3. PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 511.6

CARLOS ALBERTO LOPES DOS SANTOS DE OLIVEIRA

Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 16 de Setembro de 2015.

Profª. Arilise Morais de Almeida Lopes
D.Sc. - IFF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

À Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele. Aos meus pais, irmãos, minha esposa Jéssica, meus três lindos filhos e toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus acima de tudo. Aos meus pais, por todo suporte e por serem além de pais, meus melhores amigos. A minha esposa Jéssica e meus filhos Mateus, Manuela e Marcela por me amarem e constituir a fortaleza pelo qual eu prezo em minha vida. Aos amigos de curso, pelos sábados incríveis que passamos juntos. E a todos os professores do programa PROFMAT-UENF, por se dedicarem e contribuírem para minha formação.

"Regar o jardim, para animar o verde!
Dar água às plantas sedentas!
Dê mais que o bastante.
E não esqueça os arbustos, também
os sem frutos, os exaustos e os avaros!
E não negligencie as ervas entre as flores,
Que também têm sede.
Não molhe apenas a relva fresca ou
somente a ressecada;
Refresque também o solo nu."

Bertold Brecht

Resumo

Neste trabalho, são apresentados e propostos recursos didáticos e planos de aulas, baseados em análises de pesquisas e experiência própria, propondo um ensino mais significativo da Análise Combinatória no Ensino Médio. Essa abordagem se faz necessária, pois a metodologia que costuma ser utilizada na maioria dos livros didáticos, acaba resumindo-se na aplicação de fórmulas, tentando "encaixar" os problemas, de modo que os alunos acabam decorando alguns formatos e, na maioria dos casos, não conseguem entender o uso de tais e nem mesmo o porquê de as estarem utilizando. No presente documento, a proposta é utilizar-se do princípio onde a ênfase deve ser dada na resolução de problemas combinatórios através de métodos como diagrama de possibilidades e a observação de padrões, sistematicamente e recursivamente, o que de modo possível, levará o aluno à generalização destes modelos. Para tal, é aconselhado mais aproveitável, começar o estudo da Análise Combinatória pelo Princípio Multiplicativo e insistir com ele, até que os alunos sejam capazes de diferenciar os problemas, segundo as peculiaridades de cada um. Depois sim, apresentar os tipos usuais de agrupamento. Ainda assim, o trabalho apresenta como utilizar-se de materiais manipuláveis para contribuir com a aprendizagem do assunto.

Palavras-chaves: Combinatória; Ensino Médio; Ensino; Princípio Multiplicativo; Resolução de Problemas.

Abstract

In this work, are presented and proposed teaching resources and lesson plans, based on research and analysis experience, proposing a more meaningful teaching of Combinatorics in high school. This approach is necessary because the methodology is often used in most textbooks, just to sum up on applying formulas, trying to "fit" the problems, so that the students end up decorating some formats and, in most cases, cannot understand the use of such and even why they are using. In this document, the proposal is assumed where the emphasis should be given in solving Combinatorial problems through methods such as diagram of possibilities and the observation of patterns, systematically and recursively, what possible way, will take the student to generalization of these models. To this end, it is recommended more profitable, begin the study of Combinatorics by Multiplicative Principle and dwell with him, until students are able to differentiate the problems, according to the peculiarities of each. After Yes, present the usual types of grouping. Still, the work presents as manipulable materials used to contribute to the learning of the subject.

Key-words: Combinatorial; High School; Teaching; Multiplicative Principle; Problem Solving.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PCN’s	Parâmetros Curriculares Nacionais
EVA	Etil Vinil Acetato (material emborrachado)

Lista de símbolos

!	Fatorial
C_n^p	Combinação simples de classe p de n objetos
A_n^p	Arranjo simples de classe p de n objetos
P_n	Permutação simples de n elementos
$(PC)_n$	Permutação circular de n elementos
CR_n^p	Combinação com repetição de classe p de n objetos

Sumário

Introdução

Ao estudar Análise Combinatória e Cálculo das Probabilidades, alunos das turmas de Ensino Médio e do Ensino Superior apresentam muitas dificuldades. A Análise Combinatória então, como conteúdo exposto geralmente antes ao estudo do Cálculo de Probabilidades, é sem dúvida, um dos temas mais difíceis da Matemática para estes alunos e mesmo professores evitam a todo custo lecionar o conteúdo. Se o fazem, agem com insegurança e não conseguem com o aluno, uma aprendizagem significativa do assunto. Por um lado, espera-se que o aluno desenvolva o raciocínio combinatório; a familiarização deste com os problemas que envolvem contagem; a sistematização da contagem e dos processos de agrupamento, por outro, com exceções, o método comum de ensino não proporciona que estas habilidades sejam de fato assimiladas por estes. Acontece então, numa aula tradicional, que a Análise Combinatória é trabalhada com aplicação de fórmulas, na maioria das vezes, sem significado.

Diante deste cenário, faz-se necessário buscar métodos alternativos para o ensino da Análise Combinatória baseado no raciocínio combinatório, no incentivo à investigação e na estruturação desse pensamento baseando no raciocínio recursivo, sistemático, onde o aluno deve aprender a raciocinar combinatoriamente mais do que a reproduzir fórmulas.

O raciocínio recursivo pode ser entendido como um tipo de raciocínio que parte de casos mais simples para a estruturação de um caso mais amplo e complexo. Tal raciocínio é indispensável em problemas de Análise Combinatória. Frequentemente, recursividade é um termo usado de maneira mais geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado. O raciocínio recursivo mencionado em todo texto se refere, então, à capacidade de pensar por recursão, ou seja, de usar de casos mais simples para atingir situações mais complicadas.

O estudo da Combinatória, assim como outras áreas da matemática, foi-se construindo e aperfeiçoando ao longo do tempo. Ao que tudo indica, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes de resultados dos jogos que incentivou o estudo dos métodos de contagem. A análise combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

A Análise Combinatória tem tido notável crescimento nas últimas décadas atrelada à Matemática Discreta. A importância dos problemas de enumeração tem crescido significativamente, devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de teoria dos grafos.[1]

O presente trabalho, de caráter explicativo, objetiva oferecer aos professores, sugestões de planos de aula que permitam ao aluno buscar soluções através de técnicas de contagem e desenvolver o raciocínio combinatório para posterior formalização, explorando situações-problema numa abordagem do cotidiano em sala de aula. Na metodologia adotada para este trabalho, em sala de aula, toma-se o problema como ponto de partida e, durante sua resolução, são construídos conceitos e novos conteúdos com a participação ativa dos alunos. Espera-se, com essa proposta, afirmar o ganho que pode ser alcançado no ensino da Análise Combinatória e contribuir para a reflexão de professores e alunos, tendo como finalidade, a aprendizagem concreta do aluno. Para tal, abaixo é relacionado como é estruturado o trabalho.

No Capítulo 1, é dado um breve tratamento histórico, contando a trajetória da Análise Combinatória no passar do tempo, bem como as motivações do seu estudo e sua contribuição para o desenvolvimento humano. Nesse momento, são levantados fatos interessantes que ocorreram na história da matemática citando grandes personalidades que contribuíram para o desenvolvimento desta disciplina. Ainda sim, é apresentado como essa importante área da matemática vem sendo trabalhado nas escolas no ensino médio, com foco nas escolas públicas.

No Capítulo 2, objetiva-se entender um pouco como funciona o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. Neste, é abordado os tipos comuns de problemas, procedimentos básicos de resolução, principais dificuldades encontradas por professores e alunos e alternativas para favorecer um melhor ensino de Combinatória.

No Capítulo 3, acontece a parte mais densa do trabalho. Inicia-se com uma seção discutindo o significado da multiplicação e divisão com números naturais, introduzindo o Princípio Multiplicativo. Em seguida, sugere-se diversos problemas introdutórios onde o professor poderia começar a trabalhar resolvendo-os de forma descritiva. Após, é descrito como materiais manipuláveis podem contribuir com as atividades listadas na seção anterior dando forma aos objetos de estudo. Posteriormente, é dado o tratamento formal ao Princípio Multiplicativo relacionando com a experiência adquirida com o proposto na seção anterior. O capítulo se encerra com outros problemas e a generalização dos modelos. Procura-se mostrar como podemos resolver outros inúmeros problemas utilizando a ideia do principio multiplicativo associados aos significados de multiplicação e divisão mencionadas, de modo que o aluno chegue a generalizar os modelos de agrupamento. (permutações, arranjos,

[1] Problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores, e também problemas de matemática "pura", como o famoso problema das 4 cores

combinações...)

No Capítulo 4, são apresentadas sugestões de planos de aula descrevendo as primeiras atividades para o contato do aluno com o tema, mencionando quais passos poderiam ser seguidos, bem como o que esperar de cada um deles. Ainda, é descrito os processos pelos quais seria cabível analisar os resultados do plano de aula sugerido no capítulo, bem como as possíveis dificuldades encontradas e as soluções cabíveis.

Por fim, são feitas as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido.

Capítulo 1

A trajetória da contagem: Dos povos antigos às escolas modernas

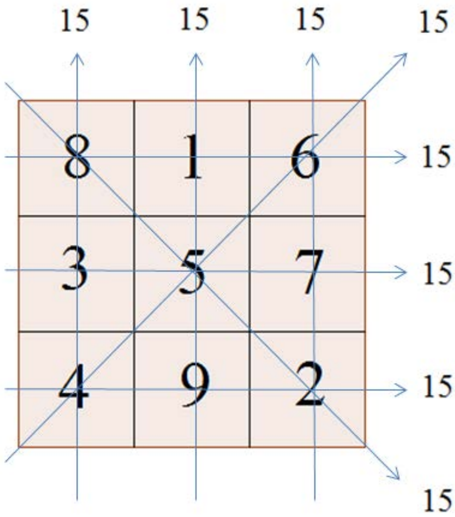
Neste capítulo, um breve tratamento histórico é feito, discutindo o caminho da Análise Combinatória no decorrer do tempo, assim como as motivações do seu estudo e sua contribuição para o desenvolvimento humano. No presente, fatos interessantes que ocorreram na história da matemática são levantados, e grandes personalidades que contribuíram para o desenvolvimento desta disciplina são mencionadas. Ainda sim, é apresentado como essa importante área da matemática vem sendo trabalhado nas escolas no ensino médio, com foco nas escolas públicas.

1.1 Um breve histórico do nascimento da Análise Combinatória

É difícil saber ao certo qual foi o primeiro problema que levou ao surgimento da Análise Combinatória. De acordo com Morgado et al. (2006, p. 02), o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados ao tema. O caso $n = 2$ pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides, em torno de 300 a.C. Os demais casos estão intimamente ligados ao triângulo de Pascal, que por sua vez, já era conhecido por Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso pelos hindús e árabes. Sabe-se que o matemático hindu Báskhara ($1114 - 1185$?), àquele da conhecida "fórmula de Baskhara", sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos.

No entanto, segundo Wieleitner (1928, p. 183-184), o problema mais antigo relacionado à teoria dos números e a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Conhecemos como quadrados mágicos (de ordem n) um grupo ordenado de números $1, 2, 3, ..., n^2$ dispostos em um quadrado n x n de forma que cada linha, coluna ou diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Tais quadrados aparecem na história com diversos significados e certamente os apresentamos aos nossos alunos algum dia (Pelo menos o caso $n = 3$ que é o mais conhecido). A Figura 1 mostra tal quadrado:

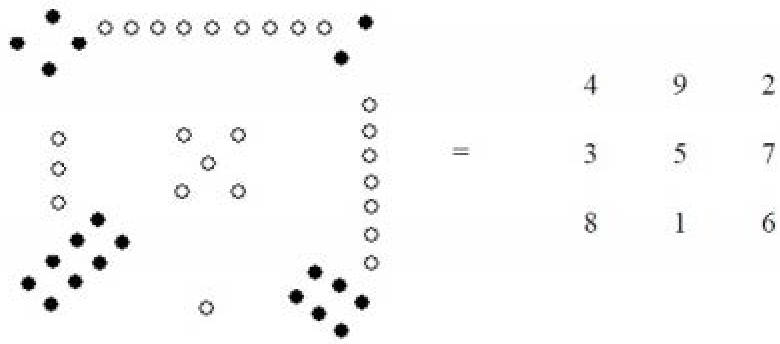
Figura 1 – Quadrado mágico



Fonte: Elaboração própria

O primeiro quadrado mágico conhecido é o *Lo Shu* e é usado como talismã pelo povo Chinês. Segundo Needham (1959, p. 58) data de aproximadamente do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C.(BERGE, 1971, p. 1-11). Aliás é dessa época, na História da China, uma lenda que diz que uma nobre tartaruga apareceu no lendário rio *Lo* carregando nas suas costas nove números ordenados em uma grelha. Os nove números estão posicionados de tal maneira que, quando somados na horizontal, na vertical ou na diagonal, o resultado é sempre 15, que é o número de dias que a Lua Nova leva a tornar-se Lua Cheia. Os chineses sempre acreditaram que o universo é baseado em princípios matemáticos e números. Eles são a chave para as forças invisíveis que governam o céu e a terra. A representação do *Lo Shu* pode ser vista na figura 2 abaixo:

Figura 2 – Loshu e o quadrado mágico



Fonte: (VAZQUEZ, 2011)

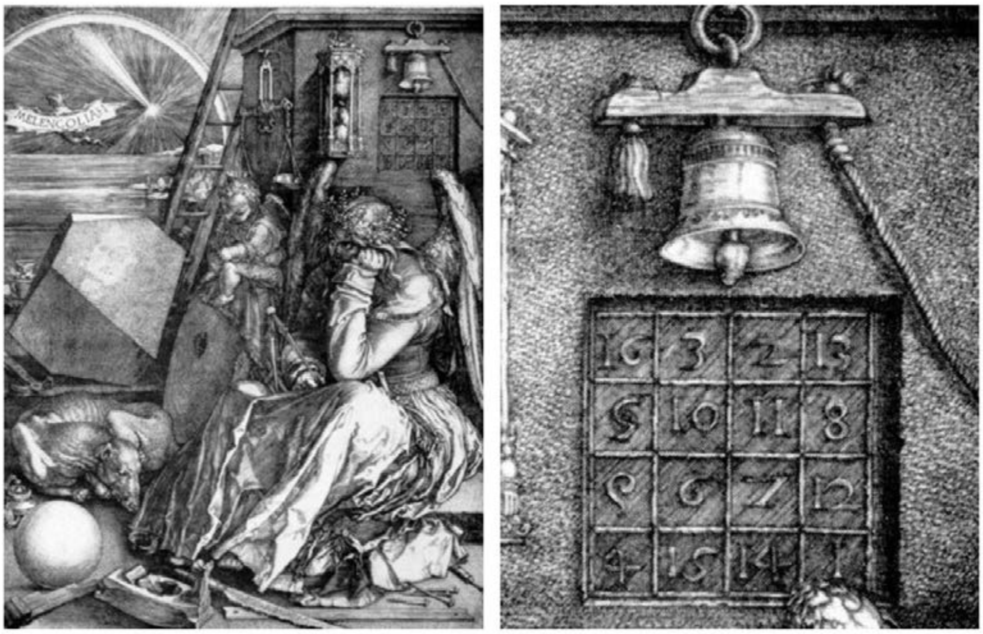
O diagrama de *Lo Shu* está associado às nove salas do palácio mítico de *Ming Thang*. Segundo Vazquez (2011), este quadrado foi uma inovação da época, pois, nela a produção de qualquer aritmética simples era motivo de euforia. Acredita-se que a ideia dos quadrados mágicos chegou até os árabes pelos chineses, e que estes fizeram grandes contribuições e construíram quadrados mágicos de ordem $3, 4, 5$ e 6. Além de criar os quadrados de ordem superior ao *Lo Shu*, os árabes criaram regras para a construção de quadrados de uma determinada ordem. Regras para a construção de quadrados das demais ordens também foram apresentados durante a história.

Os quadrados mágicos não foram admirados apenas pelas suas atribuições místicas e misteriosas. Muitos foram os matemáticos que se admiraram com as combinações numéricas e se empenharam na busca de procedimentos que levassem a construção destes maravilhosos objetos.

Um grande avanço aconteceu no desenvolvimento dos quadrados mágicos nos séculos X e XI, chegando a ter métodos de construção por volta do século XII. Nesse período, os estudiosos usavam técnicas que, entre outras, partiam de um quadrado mágico original para posteriormente criar outros de mesma ordem. Contudo, mais tarde chegaram a métodos para criar quadrados mágicos sem a necessidade do original. (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004)

A Figura 3 trás uma pintura do século XIV feita por *Albrecht Durer*, em sua obra *A MELANCOLIA*. Com atenção, vemos um quadrado mágico de ordem quatro no canto direito superior.

Figura 3 – A MELANCOLIA



Albrecht Dürer's *Melancholia* 4x4 magic square, upper right corner

Fonte: http://galleryhip.com/melancholia-albrecht-durer.html, visita em 29/10/2014.

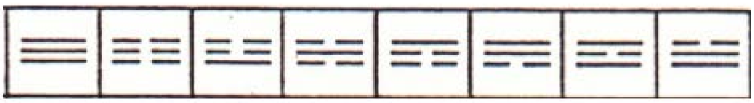
Mas o que tem os quadrados mágicos com a Combinatória? Não é difícil perceber que estes trazem exemplos bem antigos de um importante ramo da Análise Combinatória que é fixar condições para contagem dos arranjos (modos em que se pode colocar os números).

Outra ocorrência da aplicação da Combinatória na China antiga pode ser observada no sistema "I Ching" (Yi Jing)($1182 - 1135$ a.C.), um dos trabalhos mais antigos dos chineses. Este pode ser compreendido e estudado tanto como um oráculo quanto como um livro de sabedoria. Na própria China, é alvo do estudo diferenciado realizado por religiosos, eruditos e praticantes da filosofia de vida taoísta. Este sistema baseia-se em 2 símbolos:

- Yang (linhas inteiras)
- Yin (linhas partidas)

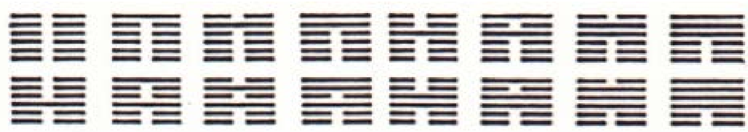
Estes são combinados em Trigramas(conjunto de três símbolos), ou Hexagramas(conjunto de seis símbolos).(Figura 4 e 5)

Figura 4 – Trigrama



Fonte: Elaboração própria

Figura 5 – Hexagrama



Fonte: Elaboração própria

A cada um destes símbolos é atribuído um significado. Os chineses sabiam que existiam 8 trigramas e 64 hexagramas diferentes.

Junto a esses, outros problemas antigos carregavam de forma implícita o raciocínio da contagem. Vejamos:

- O velho problema do lobo, da cabra e do repolho (cerca de 775 d.C) que é atribuído a *Alcuíno de York*[1] e hoje é estudado na teoria dos Grafos. Tal problema diz:

[1] Monge anglo-saxão beneditino, poeta, professor e sacerdote católico.Nasceu no reino de Nortúmbria, atual (Grã-Bretanha), em 735, e estudou na Escola da Catedral de York. Leccionou posteriormente nessa mesma instituição durante quinze anos e ali criou uma das melhores bibliotecas da Europa, tendo transformado a Escola em um dos maiores centros do saber.

> *"Um certo homem tinha que transportar para o outro lado de um rio, um lobo, uma cabra e um repolho. O único barco que encontrou podia carregar somente duas coisas de cada vez. Por esta razão ele procurou por um plano que pudesse levar todos para o outro lado totalmente ilesos. Diga a ele, quem é o competente, como pode ser possível transportá-los seguramente"*((VAZQUEZ; NOGUTI, 2004) apud (EVES, 1997))

- A poesia infantil abaixo de tempos remotos, com autor desconhecido, carrega traços de um problema de Combinatória:

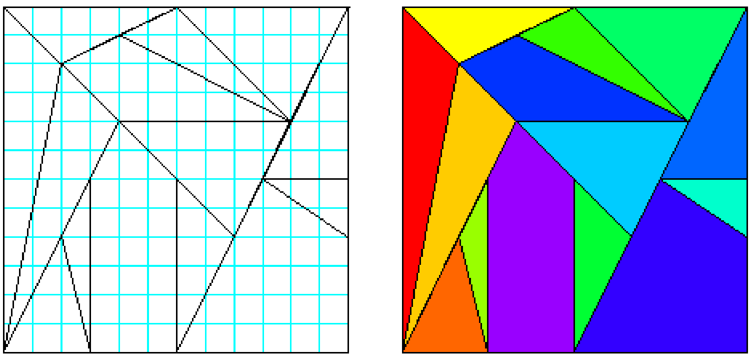
> *"Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tem sete sacos,*
> *Cada saco tem sete gatos,*
> *Cada gato tem sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?"* (BIGGS, 1979)

- O problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C) é semelhante ao proposto com o poema anterior:

> *"Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[2] *de grãos; quantos itens têm ao todo?"*(VAZQUEZ, 2011)

- Mesmo Arquimedes de Siracusa $(287$ a.C. – 212 a.C.$)$, um dos maiores matemáticos de toda a antiguidade, publicou entre todos os trabalhos uma espécie de "quebra-cabeça"que intrigou matemáticos e historiadores. Conhecido como Stomachion (pronuncia-se: sto-mock-yon), aparentemente um jogo, semelhante ao conhecido Tangran, é um arranjo de quatorze peças que formam um quadrado (Figura 6). O objetivo consistia em mover tais peças formando o quadrado. De certo, Arquimedes deveria saber que de várias formas isso poderia ser feito.

Figura 6 – Stomachion



Fonte: http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-19/stomachion/, acesso em 30/10/2014

[2] Antiga unidade de volume egípcia usada para medir grãos, pãos e cerveja. Equivale a 4,8 litros.

Em 14 de dezembro de 2003, o jornal americano *The New York Times* publicou um artigo de título *In Archimedes Puzzle, A New Eureka Moment*, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática *Dr. Reviel Next*, da Universidade de Standford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória. Mais especificamente, a conclusão de *Next* é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado.

Com sua equipe, a resposta recentemente provada dessa questão pode ser 17152 ou, desprezando as soluções simétricas, 268, que nos parece mais plausível, e não se sabe ao certo se o próprio Arquimedes obteve essa resposta. De qualquer forma, o fato fundamental é que a origem da Análise Combinatória talvez não estivesse no estudo do binômio de Newton, como se acreditava, mas bem antes, em problemas desse tipo, como nesse caso que remonta à genialidade de um homem que sempre esteve à frente do seu tempo, Arquimedes.

Em http://www.nytimes.com/2003/12/14/science/14MATH.html (Acesso em 25/09/2015), pode-se encontrar a íntegra do artigo.

A Análise Combinatória se enraizou realmente na matemática por volta do século $XVII$. Novamente, de acordo com Wieleitner (1928, p. 184), o estudo da teoria da Combinatória só apareceu separado da teoria dos números, no final desse século juntamente com o cálculo de probabilidades. Nessa época, surgiu em um curto espaço de tempo, três publicações: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher. Além disso, veio a ser divulgado trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre em seu *Doctrine of chances* (Londres,1718) que tinham um caráter análogo.

Os resultados mais importantes proporcionados pela teoria combinatória foram fórmulas para a transformação de séries e as fórmulas de Lagrange para as funções estudadas por Rothe em 1795 e por Juan Federico Ptaff em 1797.(WIELEITNER, 1928, p. 188)

Segundo Vazquez (2011), em 1666, Leibniz descreveu a Combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, enquanto Nicholson, em 1818, definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”. Segundo Morgado et al. (2006), podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Até os dias atuais, a Análise Combinatória tem ganhado muita importância. Tal fato deve-se ao advento da Matemática Discreta[3] na segunda metade do século XX. Alguns autores defendem que a Matemática Discreta seja a Matemática para o nosso tempo e seu crescimento deve-se principalmente às muitas aplicações de seus princípios em negócios e para seus vínculos próximo à ciência da computação, tais como: algoritmos de computador, linguagens de programação, criptografia e desenvolvimento de softwares.

1.2 O ensino da Análise Combinatória no ensino Médio.

Diante do cenário atual, entre as competências e habilidades que são exigidas de nossos alunos, envolvido nos seus processos de formação, figura o ensino da Análise Combinatória. O conteúdo aparece nos currículos geralmente no $2^{\underline{o}}$ ou $3^{\underline{o}}$ ano do ensino médio e tem como objetivo o desenvolvimento do raciocínio combinatório e recursivo necessário para o exercício da cidadania dentro do mundo em que vivem.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) apud (KAPUR, 1970) descrevem as principais razões à favor ao ensino da Combinatória no ensino básico:

- Uma vez que não depende do Cálculo, permite considerar problemas adequados para diferentes níveis, podendo ser discutidos com alunos problemas ainda não resolvidos, de modo que descubram a necessidade de criar novas matemáticas.
- Pode ser usado para treinar os alunos na enumeração, a realização de conjecturas, a generalização, otimização e sistemas de pensamento.
- Pode ajudar a desenvolver diversos conceitos, tais como a aplicação, a ordem e as relações de equivalência, função, programa, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, ...
- Pode haver muitas aplicações em diferentes campos, tais como Química, Biologia, Física, Comunicação, Probabilidade, Teoria dos números, gráficos, ...

Além de suas varias aplicações, a Análise Combinatória, desenvolve no aluno um espírito crítico e responsável, possibilitando-o a adquirir condições para progredir com segurança no trabalho ou em estudos superiores. Por isso, o estudo da Combinatória merece atenção especial no ensino médio.

[3] Também chamada matemática finita, é o estudo das estruturas algébricas que são fundamentalmente discretas, em vez de contínuas. Formalmente, a Matemática Discreta tem sido caracterizada como o ramo da matemática que lida com conjuntos contáveis (conjuntos que possuem a mesma cardinalidade como subconjuntos dos números naturais, incluindo números racionais, mas nem todos números reais)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), que auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, é justificado um aprofundamento da Análise Combinatória nos seguintes trechos:

> "Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isso, a Contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental desse tema. A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação "(BRASIL, 2000, p. 126)

> "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas."(BRASIL, 2000, p. 44-45)

Percebe-se no segundo trecho do documento apresentado, uma reafirmação do que foi exposto no referencial histórico sobre a dimensão que hoje admite as ideias de Probabilidade e Combinatória. Ainda , expõe-se imprescindível a compreensão dessas ciências para a interdisciplinaridade entre as faces do conhecimento. No final, atenta-se para o cuidado de abordar tais conceitos para o desenvolvimento do aluno.

Para o ensino fundamental, em outro documento, também é possível ver a preocupação com o Ensino da Combinatória ainda nos anos iniciais ($1^{\underline{o}}$ à $4^{\underline{o}}$ séries) incorporado ao item Tratamento de Informação:

> "Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem."(BRASIL, 1997, p. 40)

Se de um lado os parâmetros apresentados dizem o que deve ser feito, por outro, o como ser feito geralmente figura um obstáculo para professores. No estudo dessas competências, alunos do Ensino Médio e também do Superior apresentam muitas dificuldades; tomam a Análise Combinatória um dos temas mais difíceis da Matemática, e mesmo professores evitam a todo custo lecionar o conteúdo. Se o fazem, muitos agem com insegurança e não conseguem com o aluno, uma aprendizagem significativa do assunto.

Em uma matéria recente da revista *Cálculo* (Setembro de 2013) sobre os tópicos de Matemática que não gostam de ensinar, professores experientes montaram uma espécie de ranking onde a Análise Combinatória ficava com a medalha de prata, abaixo do binômio de Newton e acima dos polinômios.

> "...Assim como o estudante não gosta de algumas disciplinas, ou de alguns assuntos de certa disciplina, muitos professores não gostam de ensinar certos tópicos. ...Ao perguntar para três professores experientes quais tópicos não gostam de ensinar, surge uma lista com o binômio de Newton bem no topo, juntinho da análise combinatória."(VIANA, 2013)

Ainda, um dos professores ressalta:

> "...(Eu) não gostava de ensinar análise combinatória, probabilidade e binômio de newton, porque, no ensino médio, os alunos têm dificuldade em acompanhar o conteúdo que vão acabar vendo de novo na faculdade, nas aulas de estatística."

Ao que parece, a aversão em ensinar algum conteúdo, com foco na combinatória, constitui-se em proporção considerável com o despreparo e desconhecimento do professor. Seja esse na forma de transmitir o que sabe ou mesmo na falta de pré-requisitos para lecionar a disciplina.

Nesse sentido, é de se levar em conta que em um curso de licenciatura de matemática, em geral, a Análise Combinatória e a Probabilidade tem um tímido espaço no currículo. Disciplinas que abordam tais tópicos costumam figurar entre uma ou duas que compõe a grade obrigatória em um curso de licenciatura e ainda nessa consistência, não se tem uma abordagem em como o raciocínio discreto deve ser desenvolvido na prática com os alunos. Com isso, professores recorrem a livros de outros autores, cursos de aperfeiçoamento e oficinas específicas na área.

Resultante ou não desse contexto, a metodologia que costuma ser utilizada na maioria das aulas e livros didáticos, acaba resumindo-se na aplicação de fórmulas, tentando "encaixar"os problemas, de modo que os alunos acabam por decorando alguns formatos e, na maioria dos casos, não conseguem entender o uso de tais e nem mesmo o porquê de as estarem utilizando.

De acordo com Schliemann, Carraher e Carraher (2010), ao realizar observações não sistemáticas de aulas sobre análise combinatória, verifica-se que o ensino escolar limita-se quase sempre ao treinamento no uso de fórmulas e algoritmos para encontrar o número de arranjo, combinações ou permutações sem proporcionar que os alunos derivem as referidas fórmulas pelo uso da manipulação dos elementos.

Ainda mais, além dessa importância exagerada ao uso dessas fórmulas, os alunos pouco são apresentados a situações reais que motivem o estudo do assunto. Situações de aplicação na vida real, como exemplo, geração de placas de automóveis, números de telefones (celular e fixo), CPF, número de contas,etc. são algumas ideias que poderiam contextualizar problemas de Combinatória.

A importância da Combinatória, com aplicações crescentes, implica que seja repensado o seu lugar na escola. É neste contexto que se insere o presente estudo, tendo por objetivo avaliar o potencial das estratégias intuitivas de resolução de problemas. Com o quadro apresentado, justifica-se pensar em como amenizá-lo e contribuir para que a formação dos alunos se aproxime do que se espera com os Parâmetros Curriculares. Assim, a seguinte pesquisa sugere trabalhar a combinatória dando ênfase à resolução de problemas, assim como foi motivado a sua origem, com foco no raciocínio recursivo e espera-se que assim tais problemas sejam, no mínimo, atenuados.

Capítulo 2

O Ensino e a Aprendizagem de Análise Combinatória

Objetiva-se neste capítulo, entender um pouco como funciona o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. Neste, são abordados os tipos comuns de problemas, procedimentos básicos de resolução, principais dificuldades encontradas por alunos e alternativas para favorecer um melhor ensino de Combinatória.

2.1 Tipos de problemas

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), problemas combinatórios simples[1] podem ser divididos, sistematicamente, em três tipos:

- de partição,
- de colocação,
- de seleção.

Os problemas de partição envolvem dividir grupos em subgrupos, dentro das condições especificadas, verificando também a existência destes. Em Oliveira e Fernández (2010, p. 172), bom livro com diversos exercícios, encontramos:

Exemplo 2.1 *Em Maceió entraram em cartaz 4 filmes distintos e 2 peças de teatro. Se agora o Pedro Vítor tem dinheiro para assistir exatamente a um filme e uma peça de teatro, diga quantos são os possíveis programas que Pedro Vítor pode fazer.*

[1] Problemas que podem ser resolvidos mediante a aplicação de apenas uma operação combinatória, com ou sem repetição

A divisão dos grupos pode ser pensada da seguinte maneira: Do grupo dado, contendo 4 filmes e 2 peças de teatro, formaremos dois subgrupos. Um deles composto de 1 filme e 1 peça de teatro, que ele possivelmente pode assistir, e outro grupo contendo 3 filmes e 1 peça de teatro que ele não assiste.

Denotando por f_1, f_2, f_3 e f_4 os quatro filmes que estão em cartaz e por t_1 e t_2 as peças de teatro, um aluno inciante no curso de combinatória poderia listar as seguintes possibilidades(Tabela 1):

Poderá assistir	**Não assiste**
f_1 , t_1	f_2, f_3, f_4, t_2
f_1 , t_2	f_2, f_3, f_4, t_1
f_2 , t_1	f_1, f_3, f_4, t_2
f_2 , t_2	f_1, f_3, f_4, t_1
f_3 , t_1	f_1, f_2, f_4, t_2
f_3 , t_2	f_1, f_2, f_4, t_1
f_4 , t_1	f_1, f_2, f_3, t_2
f_4 , t_2	f_1, f_2, f_3, t_1

Tabela 1 – Possibilidades de escolha, exemplo 2.1

Observe que ao escolher o grupo que contém o filme e a peça que ele assiste, automaticamente é determinado o subgrupo contendo as opções que ele não assiste.

Os problemas de colocação trazem situações nas quais n elementos, diferentes ou não, devem ocupar m lugares. Para este tipo, devemos considerar as peculiaridades de cada problema que influenciarão no resultado final, como, por exemplo, se os elementos são iguais ou não, se os lugares possuem ordenação, se existe ordem para que os elementos sejam colocados ou mesmo se algum lugar fica vazio.

Vejamos este outro problema na página seguinte do mesmo livro:

Exemplo 2.2 *De quantas maneiras 2 pessoas podem estacionar seus carros numa garagem de 10 vagas?*

Temos 2 elementos (carros) para 10 vagas (lugares). A primeira pessoa a entrar no estacionamento encontra 10 vagas vazias e estaciona em alguma delas (digamos na mais próxima da entrada), a segunda pessoa entra e se vê diante de 9 vagas. Para em alguma delas. Com o mesmo procedimento anterior, se o aluno pudesse chamar as vagas de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{10}$ e listasse todas as possibilidades, veria que independentemente da vaga que o primeiro carro estaciona, o segundo teria 9 opções de escolha. Com um pouco mais de atenção, veria que é diferente ter o primeiro carro próximo da entrada e o segundo na vaga do fundão e o contrário (primeiro carro na vaga do fundão e o segundo próximo à entrada). Para a ilustração dos casos, pode-se imaginar o par ordenado (v_i, v_j) com $\{i, j\} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, de modo que a primeira coordenada representasse a vaga escolhida pelo primeiro carro e a segunda vaga pelo segundo. Assim, a tabela 2 mostra os possíveis casos:

(v_1, v_2)	(v_2, v_1)	(v_3, v_1)	(v_4, v_1)	(v_5, v_1)	(v_6, v_1)	(v_7, v_1)	(v_8, v_1)	(v_9, v_1)	(v_{10}, v_1)
(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_3, v_2)	(v_4, v_2)	(v_5, v_2)	(v_6, v_2)	(v_7, v_2)	(v_8, v_2)	(v_9, v_2)	(v_{10}, v_2)
(v_1, v_4)	(v_2, v_4)	(v_3, v_4)	(v_4, v_3)	(v_5, v_3)	(v_6, v_3)	(v_7, v_3)	(v_8, v_3)	(v_9, v_3)	(v_{10}, v_3)
(v_1, v_5)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	(v_5, v_4)	(v_6, v_4)	(v_7, v_4)	(v_8, v_4)	(v_9, v_4)	(v_{10}, v_4)
(v_1, v_6)	(v_2, v_6)	(v_3, v_6)	(v_4, v_6)	(v_5, v_6)	(v_6, v_5)	(v_7, v_5)	(v_8, v_5)	(v_9, v_5)	(v_{10}, v_5)
(v_1, v_7)	(v_2, v_7)	(v_3, v_7)	(v_4, v_7)	(v_5, v_7)	(v_6, v_7)	(v_7, v_6)	(v_8, v_6)	(v_9, v_6)	(v_{10}, v_6)
(v_1, v_8)	(v_2, v_8)	(v_3, v_8)	(v_4, v_8)	(v_5, v_8)	(v_6, v_8)	(v_7, v_8)	(v_8, v_7)	(v_9, v_7)	(v_{10}, v_7)
(v_1, v_9)	(v_2, v_9)	(v_3, v_9)	(v_4, v_9)	(v_5, v_9)	(v_6, v_9)	(v_7, v_9)	(v_8, v_9)	(v_9, v_8)	(v_{10}, v_8)
(v_1, v_{10})	(v_2, v_{10})	(v_3, v_{10})	(v_4, v_{10})	(v_5, v_{10})	(v_6, v_{10})	(v_7, v_{10})	(v_8, v_{10})	(v_9, v_{10})	(v_{10}, v_9)

Tabela 2 – Possíveis escolhas das vagas

Concluiria, assim, que há 90 maneiras de se realizar a situação descrita.

Por último, temos os problemas de seleção. Geralmente, no Ensino Médio, são os que mais se abordam.

Os problemas de seleção estão relacionados à ideia de amostras que podem configurar agrupamentos ordenados ou não, com repetição ou não de elementos. Vejamos:

Exemplo 2.3 *Quer se eleger uma comissão formada por três membros: presidente, vice-presidente e secretário entre* 8 *pessoas que compõe o conselho pedagógico de uma escola. Quantos são os possíveis comitês que podem ser formados?*

Listar todos os possíveis casos neste problema pode ser uma alternativa, mas acontece que ao começar a desenvolver tal esquema, os alunos geralmente percebem o padrão que se apresenta. Ao dizer que Sílvio é o presidente, por exemplo, sabe que agora são sete as opções para vice, e escolhido o vice, são seis as opções para secretário. Para cada candidato selecionado como presidente dispomos de sete opções para vice, visto que o mesmo não poderá ocupar dois cargos distintos. Desta forma, temos 56 possibilidades de formação de um agrupamento contendo um presidente e um vice. Seguindo o mesmo raciocínio, para cada um destes agrupamentos, são seis as opções do secretário. Assim, temos 336 maneiras $(8 \cdot 7 \cdot 6)$ diferentes de formar a comissão.

É preciso salientar que apesar de mencionar que os problemas podem ser divididos em tipos, não exatamente para cada tipo há uma forma, e somente uma, de resolução. A intenção de dividir os problemas se configura mais em uma estratégia de análise dos problemas, entendendo sua natureza, do que em uma estratégia de resolução. Inclusive, há problemas que podem ser encaixados em mais de um tipo dos que foram listados, sem prejuízo na estratégia utilizada na sua resolução.

Aos poucos, os próprios alunos, cada um a seu tempo, aprendendo com seus acertos e erros, começam a substituir a construção de tabelas e esquemas, completamente ou parcialmente, por soluções aritméticas. Todavia, esta prática deve partir do aluno. A transição entre essas fases possibilita que ele, em seguida, seja apresentado ao Princípio Multiplicativo de forma natural, compreendendo o sentido que o produto entre as opções representa. Adiante, permite pensar em problemas um pouco mais elaborados, empregando sentido aos métodos que deverá utilizar.

2.2 Estratégias de Resolução

Muitos são os procedimentos sugeridos por diversos autores como estratégia na resolução de problemas de Análise Combinatória. Não cabe aqui, portanto, procedimentos infalíveis que resolveriam qualquer problema. Em pesquisa, foram consultados dois textos que servem de base para discorrer sobre tais estratégias.

Em sua pesquisa, Fernandes e Correia (2007), identificaram quatro tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, em uma amostragem que fizeram, de forma isolada ou concomitantemente, para resolver os problemas de combinatória:

- a enumeração,
- o diagrama de árvore,
- o uso de fórmulas,
- “operação” numérica

A enumeração, como o próprio nome sugere, consiste em enumerar as possibilidades e os casos do que o problema refere, tentando contar todas os diferentes agrupamentos ou mesmo perceber um padrão entre os primeiros listados que ajude a resolver o problema. Penso que é o método ao qual o principiante recorre, sem culpa, tentando organizar o pensamento.

O diagrama de árvore (ou de possibilidades) é a representação dos agrupamentos possíveis através de um esquema, que em geral, lembra galhos de árvore. É uma forma de enumeração com maior ganho pois os “riscos” que ligam os elementos mostram como estes podem se agrupar. Com melhor organização, a contagem é facilitada e também propicia o pensamento recorrente (recursivo) sem que seja preciso completar todo o diagrama.

Cabe nessa hora dizer que as duas estratégias são fundamentais e necessárias no desenvolvimento do raciocínio combinatório e que elas devem ser utilizadas por qualquer aluno que se inicia pelo estudo da Combinatória. A enumeração e o diagrama de possibilidades permite ao aluno "enxergar" o que acontece na formação dos agrupamentos e também perceber algum tipo de regularidade (se for o caso). Porém, sabemos que nem sempre é possível listar todos os casos. Faz se, então, necessário evoluir de um esquema enumerativo à contagem dos casos por um raciocínio combinatório.

O uso de fórmulas é um dos objetos de discussão deste trabalho. Muitos alunos, ao tentar resolver um problema de combinatória, recorrem à estas como ferramenta única e almejam, substituindo alguns valores, encontrar à solução. Não há problema nenhum com o uso de fórmulas pelos alunos, isso constitui-se em uma forma organizada e prática de resolução, mas se estes às usam desconhecendo seu significado, aplicando-as vagamente, a aprendizagem é lesada e o que fica é falsa impressão de que os problemas são resolvidos com uma receita que sempre funciona.

Tal questão poderia ser estendida em outras várias áreas da Matemática, onde o professor mesmo às vezes sem querer, acaba reproduzindo no aluno só a aplicação de fórmulas. Nestes muitos casos, o aluno nem imagina por que as usa e muito menos por que funciona. Acontece, porém, que é preciso maturidade para enxergar o que esconde uma fórmula ou expressão matemática. O professor poderia argumentar então, que seus alunos não entenderiam tal demonstração ou mesmo não ser importante para o que ele objetiva, mas certamente o aluno que compreende o significado de uma fórmula e consegue compreender por que ela têm êxito, se enche de uma aprendizagem muito mais significativa e percebe na Matemática muito mais do que um jogo de fórmulas complicadas.

No âmbito da Combinatória, as tais fórmulas usadas nem seriam tão difíceis de perceber. É possível que consigamos chegar nestas sem esforço algum, partindo da resolução de problemas, e esse é o objetivo central do trabalho. No capítulo seguinte é visto como é possível.

Por último, a estratégia "operação" numérica compreende um raciocínio direto que envolve operações aritméticas básicas, envolvendo os dados fornecidos pelo problema. Penso eu que este seria o passo intermediário entre as estratégias iniciais de enumeração e construção do diagrama de árvore e da aplicação de fórmulas. Eu poderia ilustrar com um exemplo:

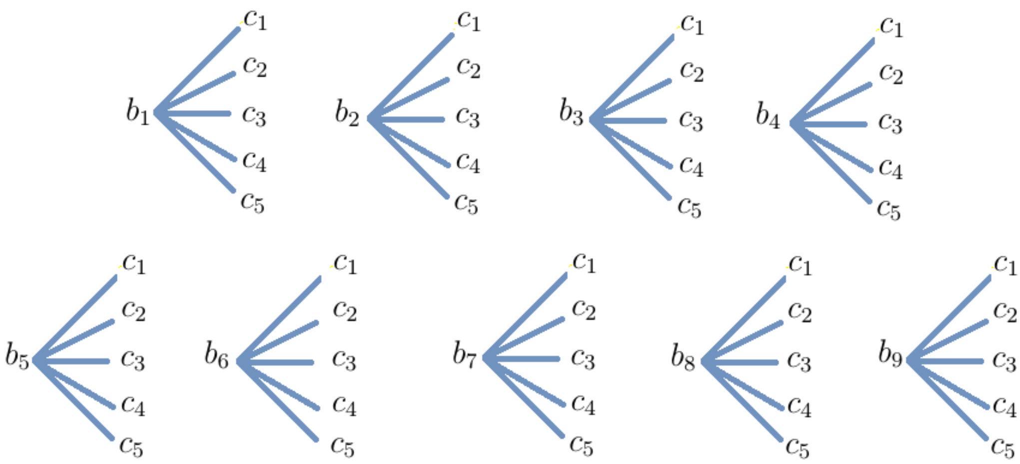
Novamente, em Oliveira e Fernández (2010, p. 172) encontramos o problema:

Exemplo 2.4 *Se numa loja de doces existem 9 tipos distintos de balas e 5 tipos de chiclete, diga quantas escolhas podemos fazer para comprar somente uma bala e um chiclete.*

O aluno iniciante poderia começar organizando seu pensamento enumerando quais escolhas poderia fazer. Denotando por b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 e b_9 os noves tipos distintos de balas e por c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 os cinco tipos distintos de chicletes, o aluno poderia pensar:

A bala b_1 poderia ser escolhida junto o chiclete c_1, ou com o chiclete c_2, ainda com c_3, c_4 ou c_5. Por sua vez a bala b_2 também poderia com cada um dos chicletes. E assim com cada uma das outras balas. A enumeração poderia evoluir para um diagrama de possibilidades (Figura 7):

Figura 7 – Diagrama de possibilidades, Exemplo 2.4



Fonte: Elaboração própria

Não seria preciso completar o diagrama para que o aluno percebesse o que acontece. Talvez só nas primeiras vezes. Com pouco tempo perceberia que se para cada bala tem-se um chiclete como escolha, logo basta fazer $9 \cdot 5$. Em um próximo problema semelhante, esse recorreria à operação numérica da multiplicação e talvez substituísse seu diagrama, uma vez que compreendeu como estes grupos se formam. Aliás, quanto mais problemas os alunos resolvem, cada problema com sua dificuldade, melhor é para que estes façam conexão entre os diferentes tipos de problemas.

O livro Lima et al. (2010, p. 90) traz alguns princípios básicos que servem como estratégia para resolver problemas de Combinatória. Tais recomendações são conhecidas carinhosamente como “axiomas de Morgado[2]”.

1. **Postura**: *Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.*

   A intenção deste comportamento é que a pessoa trate tal problema como se fosse seu e se imagine no lugar de quem resolve o problema. Tal medida ajuda a compreender e tomar os melhores caminhos para atacar o problema.

[2] **Augusto César de Oliveira Morgado** foi professor da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE), onde foi chefe do Departamento de Estatística Teórica e professor adjunto, por concurso em que obteve 1º lugar, da Escola Naval. Foi professor adjunto da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) e foi professor titular da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Foi professor de vários cursos de extensão para professores, organizados pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela VITAE, pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), pelo Sindicato dos Professores de Volta Redonda e Barra Mansa e pelo Sindicato dos Professores do Município do Rio de Janeiro. Foi professor de matemática do Colégio Pedro II 1 e do Colégio Santo Antônio Maria Zaccaria.

2. **Divisão**: *Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.*

   Deste modo, podemos enxergar melhor o problema caminhando em passos. Se a questão é formar um casal, uma boa divisão seria em escolher o homem e depois a mulher. Se o problema é de quantos modos pode se colorir uma bandeira, é razoável pensarmos em como colorir cada listra, e assim em diante.

3. **Não adiar dificuldades**: *Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.*

   É comum em problemas de combinatória haver restrições sobre os grupos ou subgrupos formados. Este princípio nos diz que tais decisões devem ser primeiramente observadas.

2.3 O Raciocínio Combinatório e a Resolução de problemas

O raciocínio combinatório pode ser entendido como um tipo de pensamento ligado à contagem que segue além da enumeração de elementos de um conjunto e se estende à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo o raciocínio multiplicativo como base.

Para distanciarmos da prática do ensino da Combinatória através de fórmulas sem sentido e aplicadas de forma mecânica, é necessária uma abordagem que proporcione ao aluno entender os procedimentos adotados, tendo estes significado, partindo de conhecimentos prévios tantos inerentes à escola ou não.

A pesquisa sugere que através da resolução de problemas, o conhecimento matemático ganha sentido quando os alunos se deparam com situações desafiadoras e são motivados para encontrar diferentes estratégias de resolução, produzindo conhecimentos e desenvolvendo habilidades. O foco dado à resolução de Problemas de contagem, de modo específico, pode levar ao aluno a uma abordagem que priorize o desenvolvimento do pensamento combinatório, ao contrário da ênfase dada nas fórmulas para resolução, proporcionando que os conteúdos sejam aprendidos de forma natural à medida que este resolve exercícios.

Segundo encontrado em Morgado et al. (2006):

> *. . . "a solução de um problema combinatório exige a quase que sempre a engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita, sendo esses um dos encantos dessa parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revela-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade e compreensão para sua solução"*

A resolução de um problema não pode limitar-se ao simples encontro de sua solução. Não há segurança de que o conhecimento envolvido seja absorvido. É necessário desenvolver habilidades que permitam estudar resultados e comparar diferentes soluções. A prática voltada à resolução de problemas, quando de forma investigativa, ajuda a proporcionar que estas habilidades sejam melhor desenvolvidas. Estimular o aluno a questionar e analisar o problema e sua resposta, a formular novos problemas a partir de determinadas informações, propicia o desenvolvimento do ensino-aprendizagem para a construção do conhecimento significativo.

2.4 Os principais obstáculos

Muitos são as dúvidas e os problemas encontrados quando se trabalha a Análise Combinatória com os alunos. É comum vê-los perguntando sobre o tipo de agrupamento envolvido em cada situação ou mesmo com dificuldades de estabelecer padrões e generalizar soluções em problemas onde a contagem direta é muito trabalhosa. Têm se ainda, a dificuldade em estar certo sobre a solução encontrada, ou mesmo de desconfiar se esta está incorreta.

Feito a pesquisa, verifica-se que em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) e Fernandes e Correia (2007) é possível encontrar, de acordo com os autores, os principais deslizes apresentados pelos alunos ao resolver questões envolvendo o raciocínio combinatório:

- **Interpretação incorreta do enunciado**

  A má interpretação do enunciado faz com que o aluno não resolva a questão proposta como deveria, principalmente em questões de Combinatória. Entender o problema, compreender as restrições, conscientizar sobre as decisões que podem ou não ser tomadas, é de fundamental importância para o desenvolvimento da questão. Talvez seja o erro mais frequente cometido pelos alunos.

- **Cálculo aritmético incorreto**

  Entender o enunciado, montar a expressão que calcula o problema e fazer um cálculo arimético errado, seja usando fórmula ou não, é também um deslize que os alunos cometem. Certamente menor do que não compreender o enunciado. Tal questão deve ser observada com cuidado pelo professor e pelo aluno.

- **Utilização incorreta da estratégia escolhida**

  Utilizar-se de estratégias de forma incorreta é um problema. Se o aluno, por exemplo, ignora uma restrição de um problema e a deixa pra depois, certamente esta se tornará um problema mais tarde. Em cima é visto, nas recomendações do Mestre Morgado, para não adiar dificuldades.

Um obstáculo comum em um problema de Combinatória é quando ao contar o número de maneiras de se fazer algo depara-se com um "depende". Esse impasse acontece porque possivelmente o problema é atacado com a estratégia errada. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.5 *Quantos são os números pares de dois dígitos distintos?*

Um aluno poderia pensar: Um número é par quando termina com 0 , 2, 4, 6 ou 8. Sendo assim, há 5 escolhas possíveis para o algarismos das unidades. Para as dezenas, o número de possibilidade de escolha fica em "depende". Observando bem, o número de maneiras de se escolher o algarismos das dezenas está totalmente dependendo de qual número foi escolhido para as unidades, pois o primeiro algarismo não pode ser zero.

Se 2, 4, 6, ou 8, figuram a última casa, uma vez que não pode-se repetir os dígitos, tem-se 8 possibilidades de números para as dezenas (Todos de 1 até 9, menos aquele que será usado nas unidades). contudo, Se 0 figura a última casa, 9 é o número de possibilidades para as dezenas.

Problemas assim, precisam ser divididos em casos ou mesmo serem atacados de outra maneira. Quando percebe-se um bom número de "dependes" nas decisões a serem tomadas, és uma boa hora para tentar trocar a estratégia. Quanto mais problemas o aluno resolver, mais se arma de diferentes ferramentas para solucionar um problema.

- **Escolha de uma estratégia pouco eficaz ou ineficaz**

  Os mesmos comentários anteriores são válidos.

- **Deixar de considerar alguns agrupamentos possíveis**

  Deixar de perceber alguns agrupamentos levará a contagem incompleta de todos os casos.

- **Não ser capaz de observar padrões e generalizar soluções**

  Quase sempre não será possível ao aluno que resolve problemas de Combinatória listar todos os casos para poder contá-los. Se ele não for capaz de observar padrões e generalizar soluções através de um diagrama ou esquema, pouco produzirá com a maioria dos problemas que incorporam essas habilidades.

Faz-se necessário aos professores compreender e estar cientes de como acontecem os erros mais frequentes dos alunos, a fim de buscarem melhores estratégias para tentar minimizá-los ou mesmo evitá-los.

2.5 Alternativas para o ensino da Análise Combinatória

Para que a aprendizagem ocorra de forma significativa, é preciso que o aluno construa sentido entre os objetos de estudo. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) afirmam, que para ensinar Análise Combinatória, deveriam-se levar em conta o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, ao invés de focar em aspectos algorítmicos e em definições combinatórias.

Como alternativas para o ensino da Análise Combinatória, tomando como base os principais obstáculos citados na seção anterior, podem-se citar:

- **Tomar o problema como ponto de partida, único, como objeto de indagação desafiante.**

  O problema deve ser o início. Ler e refletir o questionamento buscando sua solução, faz com que o aluno crie hipóteses, formule conjecturas, e estabeleça resultados de acordo com seu conhecimento prévio. A resolução de problemas motivou o desenvolvimento de quase todas as áreas da Matemática, dentro do seu contexto. O aluno precisa se sentir desafiado a resolver a questão.

- **incentivar a investigação e a estruturação do pensamento**

  Dentro de sua curiosidade e interesse, o professor deve aguçar no aluno o desejo de investigação e de buscar alternativas para a solução de problemas. Ainda, o aluno precisa aprender a organizar este raciocínio. Problemas de combinatória, no geral, são tidos como difíceis, pois requerem do aluno a capacidade de pensar e fazer suposições, ao contrário de reproduzir passos “ensaiados”.

- **Utilização de materiais manipulativos**

  Grande é o ganho que o discente pode ter, se aliado à teoria que estuda, puder ter o contato com um objeto concreto, tocável, onde ele possa fazer uma associação com o modelo estudado. No capítulo seguinte, a utilização de tais materiais para o ensino da Análise Combinatória é melhor discutido.

- **Valorização das diferentes estratégias e formas de registro**

  Com o acerto e o erro, o aluno aprende a melhor forma de resolver os problemas. Assim, é preciso que o professor valorize todo o tipo de estratégia que o aluno utiliza e as pondere de modo a orientar por que uma funcionou e a outra não, dentro do contexto de cada problema. Dizer ao aluno que deste ou outro jeito de resolver está errado e que o modo certo é tal, exclui a possibilidade de discutir o porquê de uma maneira funcionar e a outra não, deixando de lado maior ganho com o debate coletivo.

- **Formação de um ambiente propício à aprendizagem**

A importância da formação de um ambiente propício à aprendizagem é uma das peças fundamentais para uma aprendizagem significativa. Os alunos precisam estar motivados e comprometidos com a atividade, para que esta alcance seu objetivo. Para isso, o professor precisa se certificar que o ambiente colabora, não apresentando distrações ou empecilhos para a aplicação do plano de aula

- **Atividades que tragam questões envolvendo situações com as quais o aluno está familiarizado.**

  Trazer questões com os quais o aluno está familiarizado ajuda a despertar o interesse pela resolução do problema. A contextualização de um problema que usa situações que o aluno vivencia, permite mostrá-lo a relação estreita que há entre o que se estuda e o que se vive, e isso ajuda no despertar do seu interesse. O profesoor pode utilizar-se de situações de aplicação na vida real, como exemplo, geração de placas de automóveis, números de telefones (celular e fixo), CPF, número de contas,etc.

Capítulo 3

O Princípio Fundamental da Contagem

Este é o momento onde a discussão mais se aprofunda. Neste, é dada a formalização do Princípio Fundamental da Contagem como base para a teoria da aprendizagem de Combinatória através da Resolução de Problemas.

3.1 A importância do significado da Multiplicação e divisão com Naturais

Talvez muitos não se tenham parado para pensar no significado de multiplicação e divisão com números naturais. Ou melhor, não como usados nos problemas de Combinatória.

Desde muito cedo, após reconhecerem os números e a importância de contar, os alunos começam a desenvolver as operações básicas entre estes. Tais números, conhecidos como Naturais, compreendem o primeiro conjunto numérico que esses têm contato, e mesmo antes da escola, percebem sua existência em diversas situações cotidianas.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Referindo-se às operações entre estes, geralmente a ordem adotada é a seguinte: Adição, subtração, multiplicação e divisão[1]. Para cada uma destas, mais do que ensinar o algoritmo, procura-se atribuir ao aluno a capacidade de incorporar significados para estas operações. Porém, não só no ensino fundamental, mas também no ensino médio, são encontrados alunos que ainda não reconhecem as várias ideias ligadas às operações com números naturais e, por isso, não as identificam em situações-problema. É frequente a pergunta feita pelo aluno: “É de somar ou de diminuir?”, “Multiplicar ou dividir?”. Também há

[1] Cabe dizer, de passagem, que as operações de subtração e divisão não são fechadas dentro do conjunto dos números Naturais. Isto equivale a dizer que nem toda subtração ou divisão com Naturais resulta em um número Natural.

casos de alunos que apresentam dificuldades em utilizar estratégias pessoais ou algoritmos usuais das operações.

Tais dificuldades confrontam diretamente com o método proposto neste trabalho. Se o aluno não é capaz de interpretar um problema identificando quais operações utilizar entre os números encontrados, o aluno não terá sucesso em resolver problemas maiores do que os quais ele consegue listar todos os casos e contá-los. Neste sentido, o raciocínio recursivo e o processo sistemático de enumeração dos casos falham, pois não se sabe o que fazer com os números que representam as quantidades de cada escolha tomada. Ainda, nesse contexto, o aluno não evolui para as etapas seguintes de resolver o problema utilizando uma operação numérica simples e nem mesmo cria sentido com as fórmulas que usa.

No que cabe à Multiplicação entre Naturais dentro do contexto de resolver problemas de Combinatória, voltemos à alguns exemplos já mencionados nesse texto.

No **exemplo 2.4**, concluiu-se que o número de escolhas para comprar somente uma bala e um chiclete é $9 \cdot 5$. Foi visto que se para cada bala tem-se um chiclete como escolha, logo tendo 9 balas e 5 chicletes, o número de escolhas é dado pela multiplicação entre 9 e 5. Mais a fundo, existem 5 possibilidades para escolha do chiclete tomando b_1, 5 possibilidades de escolhas tomando b_2, 5 possibilidades de escolha tomando b_3, e assim sucessivamente até b_9.

Além de perceber a estrutura dos grupos formados, o aluno também deve perceber a regularidade que este pode apresentar, isso em cada caso. Isso permitirá utilizar-se das operações de multiplicação e divisão entre os números de subgrupos de soluções que ele eventualmente pode encontrar. É fácil para o aluno encontrar que a resposta deste exemplo é 45, talvez não tanto enxergar que dentre as soluções 5 têm a bala b_1, 5 têm a bala b_1, 5 têm a bala b_3, e assim até b_9.

Um exemplo que envolve uma divisão pode ser encontrado em problemas de Anagrama com palavras com letras repetidas. Anagrama é uma espécie de jogo de palavras, resultando do rearranjo das letras de uma palavra ou frase para produzir outras palavras, (não necessariamente fazendo sentido), utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1 *Quantos são os anagramas da palavra JOGO?*

Para tal, supõe-se diferentes as duas letras "O" da palavra. Para isso, tem-se cores diferentes para cada. O objetivo, então, é saber quantos são os anagramas da palavra JOGO.

Na estrutura desses anagramas, se o aluno tentar listar todos os possíveis, é possível observar uma regularidade.

JOGO	OJGO	GJOO	OJGO
JOOG	OJOG	GJOO	OJOG
JGOO	OGJO	GOJO	OGJO
JGOO	OGOJ	GOOJ	OGOJ
JOOG	OOJG	GOJO	OOJG
JOGO	OOGJ	GOOJ	OOGJ

Tabela 3 – Anagramas possíveis, exemplo 3.1

Observando a tabela 3, há 6 anagramas que começam com cada letra (Considerando que as letras "O" são diferentes). Tendo 4 letras, 24 são os anagramas totais.

Agora, tomando as letras "O" iguais, como assim espera o enunciado, tem-se que, por exemplo JOGO é igual a JOGO, assim como OJGO e OJGO. Há um par para cada anagrama. Apesar de serem anagramas idênticos, contamos como distintos. A solução então pode ser "arrumada" dividindo nossa solução inicial por dois. $24 \div 2 = 12$. O sentido da divisão foi empregado corretamente na ideia de estabelecer quantos pares posso fazer tendo 24 como total.

Mais a frente é possível entender como as multiplicações e divisões fazem sentido às fórmulas que calculam certos agrupamentos. Isso acontece na última seção do capítulo.

3.2 Resolvendo problemas de forma descritiva.

Essa seção é dedicada à vários problemas e suas soluções. Tais questões serviriam de objeto motivador onde o aluno começaria a desenvolver a habilidade de resolver problemas. Pode-se definir estes como Exercícios Preliminares. Neste ponto, cada problema é resolvido enumerando os casos possíveis, ou mesmo, utilizando-se de esquemas e modelos[2], no máximo utilizando uma operação numérica simples. Assim, neste terreno, espera-se que o aluno comece a desenvolver a habilidade de resolver um problema apenas descrevendo possíveis soluções, juntando-as, construindo assim, com a prática, o pensamento recursivo necessário para a solução de problemas mais complexos e generalizações de modelos.

Problema 3.1 *Henrique possui 3 calças e 7 camisas diferentes. De quantas maneiras ele poderá escolher uma camisa e uma calça para se vestir?*

A solução deste se assemelha em muito à solução do **Problema 2.1** e do **Problema 2.4**. Colocando-se no lugar de Henrique, para cada calça escolhida, há 7 opções de camisas.

[2] Neste contexto, define-se esquema ou modelo uma figura que dá uma representação simplificada e funcional à solução de um exercício. Nesse sentido, um diagrama de possibilidades, uma prévia listagem de alguns casos particulares, ou mesmo um rascunho de solução, podem ser considerados como esquema.

Como temos 3 calças, o número de maneiras é $3 \cdot 7 = 21$. (Figura 8)

Figura 8 – Diagrama de possibilidades, Problema 3.1

Fonte: Elaboração própria

Problema 3.2 *Quantos números de dois algarismos podem ser formados utilizando elementos do conjunto* $\{2, 5, 8\}$*?*

Para o algarismos das dezenas dispõe-se de 3 opções. Para o algarismos das unidades mais 3 opções. Listando todas as possibilidades tem-se 9 algarismos. (Tabela 4)

22	25	28
52	55	58
82	85	88

Tabela 4 – Possíveis algarismos, Problema 3.2

Problema 3.3 *Quantos números de dois algarismos diferentes (distintos) podem ser formados utilizando elementos do conjunto* $\{2, 5, 8\}$*?*

A Restrição do problema de os algarismos seres distintos elimina os números 22, 55 e 88 da solução anterior. Assim tem-se $9 - 3 = 6$ algarismos.

Problema 3.4 *Um salão possui* 4 *portões. Quantas são as maneiras diferentes de uma pessoa entrar e sair desse salão?*

Para a entrada, dispõem-se de qualquer uma das 4 portas. Estando dentro por uma delas, para sair estão dispostas 4 portas. Para cada porta de entrada, há 4 portas de saída. $4 \cdot 4 = 16$

Problema 3.5 *Um salão possui 4 portões. Quantas são as maneiras diferentes de uma pessoa entrar e sair desse salão, usando uma porta diferente da que entrou?*

Novamente tem-se um problema semelhante a não ser por uma pequena alteração no enunciado. Uma vez que ele não pode sair pela porta que entrou, independentemente da porta de entrada, para cada uma destas, há 3 opções de saída. Assim, $4 \cdot 3 = 12$

Problema 3.6 *O código Morse usa dois sinais, ponto e traço, e as letras têm de 1 a 4 sinais. Quantas são as letras do código Morse?*

Divide-se a solução em casos:

▷ Letras de um sinal: 2 letras.

$$\cdot\ ,\ —$$

▷Letras de dois sinais: 4 letras.

$$\cdot\cdot\ ,\ \cdot—,—\cdot,——$$

▷Letras de três sinais: 8 letras.

$$\cdot\cdot\cdot\ ,\ \cdot\cdot—,\cdot—\cdot,\cdot——,—\cdot\cdot,—\cdot—,——\cdot,———$$

▷Letras de quatro sinais: 16 letras.

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\ ,\ \cdot\cdot\cdot—,\cdot\cdot—\cdot,\cdot\cdot——,\cdot—\cdot\cdot,\cdot—\cdot—,\cdot——\cdot,\cdot———,—\cdot\cdot\cdot\ ,\ —\cdot\cdot—,—\cdot—\cdot,—\cdot——,——\cdot\cdot,——\cdot—,———\cdot,————$$

Após listar todos os casos possíveis, o iniciante percebe que precisa evoluir para uma técnica diferente, menos trabalhosa. Talvez este perceba o padrão que existe nessa contagem e que para cada letra de um sinal a mais que quiser, esta terá o dobro da quantidade anterior. Isto se justifica pois para cada letra de n sinais, basta adicionar na frente um ponto ou um traço para ter uma letra de $n+1$ sinais.

Somando-se todos as contagens obtidas em cada passo: $2+4+8+16=30$

O problema seguinte se encontra no livro Julianelli et al. (2009), convenientemente adaptado.

Problema 3.7 *Um painel luminoso retangular é composto por 4 lâmpadas. De quantas maneiras diferentes esse painel pode ser iluminado? (Considera-se o painel iluminado se, pelo menos, uma de suas lampadas estiver acesa)*

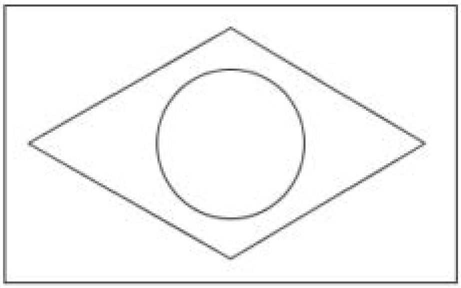
Esse problema é semelhante ao anterior. Se considerar a lâmpada acesa como um ponto e a apagada como um traço, tem-se uma bijeção entre o número de maneiras diferentes desse painel se encontrar iluminado e o número de letras das letras de 4 sinais do código Morse.

Assim, — — ·· representaria, por exemplo: apagada, apagada, acesa, acesa.

Tem-se, então, 16 maneiras diferentes na configuração desse painel. Excluindo o caso que todas ficam apagadas, o número de maneiras diferentes desse painel ser iluminado é 15.

Problema 3.8 *Abaixo encontra-se uma bandeira que lembra a bandeira Brasileira (Figura 9) . Quantas são as maneiras de colorir esta utilizando-se somente das cores verde, amarelo e azul sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor?*

Figura 9 – Bandeira, Problema 3.8

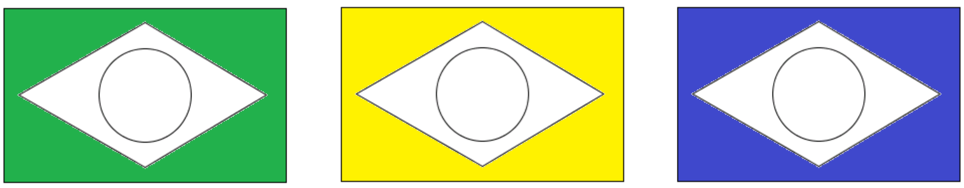


Fonte: Elaboração própria

Problemas de pintar mapas com cores sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor têm um famoso episódio na História.

Pode-se colorir a região retangular de 3 cores: (Figura 10)

Figura 10 – Cores nas regiões retangulares, Problema 3.8



Fonte: Elaboração própria

Escolhida a cor da região retangular, duas são as opções para pintar o losango. Essas duas opções independem da escolha da primeira cor. Para a região circular também temos duas opções de cores: utilizar-se da cor que pintamos a região retangular ou utilizar a cor que ainda não foi pintada. É necessário que o aluno inciante de fato pinte tais regiões para compreender o padrão que se apresenta, pelo menos na primeira vez.

Figura 11 – Todas as possíveis bandeiras do problema, Problema 3.8

Fonte: Elaboração própria

De acordo com a Figura 11, há 12 maneiras de colorir a bandeira.

Problema 3.9 *Em um jogo de Dominó, cada face retangular é divida em duas partes quadradas, ou "ponta", que são marcadas por um número de pontos de 0 a 6, ou deixadas em branco. Sendo assim, quantas são as peças do Dominó?*

Na solução deste problema, é preciso perceber que as peças são consideradas diferentes apenas quando o número de pontos dos dominós é diferente. Isso equivale a dizer que a peça que contém 1 e 3, por exemplo, é a mesma que uma outra que tenha 3 e 1. O aluno tendo isso em mente, pode construir a seguinte tabela:

00	11	22	33	44	55	66
01	12	23	34	45	56	
02	13	24	35	46		
03	14	25	36			
04	15	26				
05	16					
06						

Tabela 5 – Possíveis Dominós, Problema 3.9

Contando todos os possíveis Dominós na tabela 5, o total é 28.

Problema 3.10 *Quantas são as filas diferentes que podemos fazer com 4 pessoas? 5 pessoas? 6 pessoas? n pessoas?*

Faz-se primeiro o problema para o caso com 4 pessoas. Sejam estas: Amanda, Bianca, Carlos e Daniel. Uma possível fila, usando as iniciais dos nomes, seria ABCD, onde Amanda é a primeira e Daniel o último da fila.

O problema então agora, é saber o número de anagramas com a "palavra" ABCD.

Como foi visto no **exemplo 3.1**, o número de anagramas de uma palavra de 4 letras, se estas são diferentes, é 24. A tabela 6 mostra os anagramas da "palavra" ABCD.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Tabela 6 – Anagramas possíveis, exemplo 3.10

Assim, são 24 o número de maneiras de se formar a fila com 4 pessoas.

Observação 3.1 *É necessário que se tenha a certeza que a bijeção entre o conjunto solução de um problema e o conjunto solução de outro realmente exista. Em vários problemas de Combinatória, se tomado por outro ângulo, o problema fica mais simples.*

Com 5 pessoas, imagina-se a entrada de Eduardo. Com cada fila formada com 4 pessoas foi acabado de listar, esta quinta pessoa poderia se encaixar em 5 lugares: Na frente do primeiro, entre o primeiro e o segundo, segundo e terceiro, terceiro e quarto ou atrás do quarto (último da fila). Teria de se usar, então, para cada fila formada com 4 pessoas, 5 novas filas. É possível concluir que, com 5 pessoas, o número de filas possíveis é $24 \cdot 5 = 120$.

O leitor pode achar enfadonho os processos pelo qual é solucionado cada problema anterior, mas a proposta aqui é discutir que essas soluções, com esquemas, modelos e deduções, são necessárias para que o aluno compreenda os sentidos do princípio multiplicativo e mais tarde das fórmulas que utilizará. Tal fase contribui para que o aluno evolua do simples fato de contar elementos para a utilização de um raciocínio recursivo combinatório onde este observa padrões, faz conjecturas, e analisa criticamente seus resultados.

Com 6 pessoas o pensamento é análogo. Para cada fila com 5 pessoas, a sexta poderia se encaixar em 6 lugares. Assim, o número de filas é $120 \cdot 6 = 720$.

Tal pensamento leva a pensar que para cada pessoa nova adicionada à fila, basta multiplicar as soluções anteriores por 7, por 8, por 9, e assim por diante...

Veja: (7)

Número de pessoas na fila	**Número de diferentes filas que podem ser formadas**
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
$\ldots$	$\ldots$
n	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1))$

Tabela 7 – Número de filas possíveis, exemplo 3.10

Para n pessoas, o número de filas diferentes formadas é dada pelo produtório: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1))$.

3.3 Materiais manipuláveis e o pensamento recursivo

Não é recente a preocupação de professores para que as aulas de Matemática tornem-se ambientes que propiciem uma aprendizagem com significado ao aluno. Por outro lado, sempre se buscou metodologias para facilitar seu ensino e consequentemente, sua aprendizagem. Quando referem-se à utilização de materiais manipulativos para auxiliar a aprendizagem, alunos e professores são unânimes em afirmar o ganho que se pode alcançar quanto se utiliza-se dessa metodologia. Mas o que de fato é um material manipulativo? Como estes podem ajudar no ensino da Matemática? Até que ponto estes materiais tornam as aulas mais atrativas e significativas comparadas à aula tradicional?

Tais questionamentos são profundos e a pesquisa em busca dessas respostas serviria como tema para escrever um novo trabalho. Analisar o uso de Materiais manipuláveis no processo de ensino aprendizagem, com foco em “para que”, “por que” e “de que forma”, em sua totalidade, fogem dos objetivos do trabalho. A finalidade da seção fica então limitada em mostrar como alguns materiais concretos podem contribuir para o ensino da Análise Combinatória.

Defini-se aqui como material manipulativo, qualquer objeto concreto que pode ser usado na mediação da aprendizagem com finalidade estabelecida para auxiliar o processo de desenvolvimento do aluno.

Tratando-se da Análise Combinatória, tais recursos não são assim tão “abundantes”. É preciso criatividade para a criação de um material que, potencialmente, possa fazer diferença nas aulas.

Feito a pesquisa, um trabalho chamou muita atenção: Trata-se de materiais simples e de baixo custo confeccionados com E.V.A[3] para auxiliar o professor e o aluno na confecção e visualização dos agrupamentos. De acordo com Gerdenits (2014, p. 110-111), dissertação aonde é encontrada os trabalhos, os materiais tem o intuito de auxiliar o professor em sua prática docente visando contribuir para a aprendizagem do raciocínio combinatório, partindo de problemas convencionais e conceitos básicos.

As imagens a seguir (Figuras 12,13 e 14) mostram materiais construídos por essa educadora em seu trabalho para a manipulação de problemas diversos que ela também propõe.

Figura 12 – Boneco de E.V.A

Fonte:(GERDENITS, 2014)

[3] Etil Vinil Acetato (E.V.A.) é uma resina termoplástica derivada do petróleo, conhecida popularmente como borracha E.V.A. no Brasil ou “espumoso” em alguns países estrangeiros. Para o uso em artesanato, é um material emborrachado de densidade macia e geralmente lisa. Muito leve e resistente a muitos produtos químicos, podendo ser empregados em diferentes processos utilitários.

Figura 13 – Boneco de E.V.A

Fonte:(GERDENITS, 2014)

Estes materiais sugeridos ajudariam o aluno a montar as possíveis combinações em problemas clássicos onde é preciso determinar as opções de roupas, assim como no **Problema 3.1**.

Ao manipular as peças de roupas combinado-as, o problema ganha forma, as limitações físicas do material reproduzem as restrições do problema. O desafio se torna manipulável e a atividade se torna lúdica.

Ainda, outros materiais são sugeridos: trabalhar as possibilidades de montagem de pratos, de lanches, de bolas de sorvete de casquinha, de escolha de subgrupos de crianças de um grupo maior, de anagramas e de formação de números utilizando certo número de algarismos. Estes poderiam amplamente ilustrar as resoluções dos problemas da seção anterior.

Figura 14 – Materiais diversos em E.V.A

Fonte:(GERDENITS, 2014)

O uso destes materiais ajuda em muito a favorecer o desenvolvimento que os alunos devem atingir, no início, na conscientização da formação dos agrupamentos. Novamente, de acordo com Gerdenits (2014, p. 124), os alunos encontram no material manipulável construído, uma forma de facilitar e organizar as estratégias de resolução dos problemas de contagem.

A evolução do concreto para a abstração necessária no pensamento recursivo deve acontecer depois que há o entendimento de como os grupos se formam, segundo as limitações de cada problema envolvido. Por isso são muito importantes os modelos, esquemas e diagramas que auxiliam na resolução dos problemas.

Outro exemplo de atividade lúdica no ensino da Combinatória podem ser os problemas que envolvem colorir com cores distintas regiões adjacentes. O professor pode fazer com que esta atividade de fato se torne real à medida que disponibiliza lápis de cor e bandeiras ou mapas diversos para pintar. Um exemplo do uso desse material é utilizado no plano de aula 2 no capítulo seguinte.

Quando o aluno é colocado como protagonista do problema que resolve, assim como menciona Morgado na primeira de suas recomendações, há uma incorporação quanto ao questionamento que o problema oferece. É possível que ele se permita ficar diante de todas as decisões que deve tomar, e ainda assim, que estas se tornem suas.

3.4 O Princípio Multiplicativo como arma fundamental na resolução de problemas

Nesta seção, é apresentado o importante conceito do princípio multiplicativo e algumas de suas diversas aplicações nos diversos problemas de Combinatória. O estudo e compreensão deste tema, facilita e reduz consideravelmente o número de fórmulas necessárias ao bom entendimento da Matemática Combinatória e do cálculo de Probabilidades.

Teorema 3.1 *Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.*

O chamado princípio multiplicativo é enganosamente simples e muito importante. Livros diversos trazem esta definição com palavras diferentes, mas com o mesmo rigor matemático, e objetividade que o teorema precisa. É necessário observar que este princípio pode ser estendido quando forem realizadas d_n decisões sucessivas.

Se o aluno iniciante resolveu diversos problemas introdutórios usando esquemas, modelos e deduções, como os sugeridos na seção 2 deste capítulo, provavelmente não tenha nenhuma surpresa ao se deparar com o teorema. Este explicita exatamente o que é feito quando usa-se a propriedade distributiva da multiplicação no esboço de um diagrama de possibilidades. Porém, não é aconselhável utilizar-se deste como ponto de partida sem que o aluno antes, tenha por meios próprios, analisado como os diversos grupos se formam. O princípio multiplicativo seria um resultado formal de um pensamento construído através de um processo de investigação de aprendizagem.

Observe a resolução do **Exemplo 3.1** sobre outra perspectiva:

Quantos são os anagramas da palavra JOGO?

Novamente, supõe-se diferentes as duas letras “O” da palavra.

Nos possíveis anagramas, a letra “J” pode aparecer em quatro posições: $1^{\underline{o}}$, $2^{\underline{o}}$, $3^{\underline{o}}$ ou $4^{\underline{o}}$ letra. Tem-se 4 lugares possíveis para “colocar” o “J”. Colocada, a letra “O” tem 3 lugares possíveis para ser colocada independentemente de onde o “J” está. Colocada, a letra “G” por sua vez, 2 lugares e a outra letra “O” cabe onde restar.

O princípio multiplicativo diz que basta multiplicar esses números que representam a quantidade de decisões em cada passo: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Novamente, basta dividir a solução por dois: $24 \div 2 = 12$

Problema 3.11 *Se A é um conjunto de n elementos, quantas são as funções $f : A \longrightarrow A$ bijetoras?*

Uma função é dita bijetora quando admite inversa. Assim, é preciso que tal função seja Injetora e Sobrejetora ao mesmo tempo. Para cada elemento de A no domínio é preciso que se tenha um único elemento de A no contradomínio o que implica que este, por sua vez, não seja a imagem de mais nenhum elemento. O problema consiste então a estabelecer pares entre os elementos dos conjuntos.

O primeiro elemento de A pode corresponder a qualquer um dos n elementos do contradomínio. O segundo, a qualquer um dos $n - 1$ elementos restantes. O terceiro a qualquer um dos $n - 2$ elementos que sobram, e assim segue. Temos n escolhas para a primeira decisão, $n - 1$ escolhas para a segunda, $n - 2$ escolhas para a terceira, e seguindo, uma escolha para a enésima decisão. Usando o princípio multiplicativo, o número de funções pode ser dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1))$$

Novamente esta expressão aparece. Conhecida como Fatorial, é representada por $n!$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1)) = n!$$

Os fatoriais são importantes em Análise Combinatória. Frequentemente são usados nas fórmulas como modo de simplificação. Ao produto dos números naturais começando em n e decrescendo até 1 é denominado fatorial de n e representado por $n!$. Esta situação aparece inúmeras vezes nas soluções de problemas.

Acredita-se que assim devem ser apresentado ao aluno. Em muitos casos o Professor começa logo cedo dando a definição de Fatorial, assim como em alguns livros. Não há primeiro uma situação onde é mostrado a necessidade. A prática não colabora para que o discente entenda o significado de fatorial, ou se entende, não vê o porquê de se utilizar. Para fim de dar uma definição formal do conceito, segue abaixo.

Dado um número natural $n \geq 2$ chama-se fatorial de n, ao número indicado por $n!$ tal que:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Assim sendo, é o produto de todos os números naturais, de n até 1.

Ainda, decorre da definição que $0! = 1$. Vejamos o motivo.

Pode-se definir $n! = n \cdot (n-1)!$

Se $n = 2$, $2! = 2 \cdot (2-1)! \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \Rightarrow 1! = 1$

Agora:

$1! = 1 \cdot (1-1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot (0)! \Rightarrow 1 = 0!$

O princípio multiplicativo é utilizado em praticamente qualquer resolução de um problema de Combinatória. Uma vez escolhida a tomada das decisões, em cada situação, pode-se facilmente calcular de quantas maneiras isso pode ser feito fazendo o produto entre o número de decisões possíveis em cada etapa. Para o aluno, dominar este princípio vai lhe poupar dos esquemas e modelos de representação que utilizava inicialmente. Porém, tal segurança é conquistada em todo caso quando assimilar bem como os grupos e subconjuntos são formados.

3.5 Outros problemas e a generalização dos modelos

Nesta fase, em cada problema que resolve, o aluno aprende com suas soluções, reinventa, cria esquemas, modelos e busca juntar conexões com o princípio multiplicativo. Em alguma hora destas, vai ser primordial que ele se depare com um problema onde os grupos ou subconjuntos formados deixem de se diferenciar pela natureza e ordem de seus elementos para apenas serem distintos pela natureza destes. Problemas deste tipo não levam em conta a ordem dos elementos no grupo formado. Ao trocar a ordem dos elementos de um mesmo conjunto, não temos um novo conjunto, ao contrário dos exercícios anteriores. Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.2 *De quantas maneiras pode-se escolher dois alunos de um grupo de* 5*, para representá-los em uma gincana?*

Sejam os alunos Ana, Beto, Carlos, Daniel e Érica. Com as iniciais de cada nome, pode-se construir uma tabela onde é listada as possíveis duplas que podem ser formadas: (Tabela 8)

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Tabela 8 – Possíveis duplas, exemplo 3.10

Nesta, observada as condições do enunciado, tem-se, por exemplo, que as duplas Ana e Beto; e Beto e Ana, (AB e BA) tratam-se da mesma dupla. Não é difícil observar que para cada dupla listada, existe a mesma supondo ser diferente apenas pela ordem em que os alunos se encontram. Sabendo disso, basta dividir o número de duplas listadas por 2. Temos $20 \div 2 = 10$ duplas possíveis.

Suponha que a situação fosse outra:

Exemplo 3.3 *De quantas maneiras pode-se escolher dois alunos de um grupo de 5, para representá-los em uma gincana, um como atleta e outro como chefe de torcida?*

A diferença agora é que AB e BA, por exemplo, não mais são o mesmo agrupamento. AB representaria por exemplo, o caso em que Ana e Beto foram escolhidos, Ana como atleta e Beto como chefe de torcida. BA seria o contrário. Temos 20 duplas possíveis nesse caso.

Para o aluno, saber se entre cada problema os agrupamentos se diferenciam pela ordem ou não de seus elementos não é sempre fácil. Esta dúvida aparece com frequência. Contudo, este impasse pode ser contornado à medida que o professor apresenta diversas questões, explorando seus enunciados e restrições, trabalhando a resolução de cada problema de forma peculiar, a fim de desenvolver no aluno maior confiança.

Quando novamente em Morgado et al. (2006), Morgado diz que: "*. . . "a solução de um problema combinatório exige a quase que sempre a engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita,. . . "*, ele alerta sobre a interpretação correta do enunciado ser talvez a parte mais importante na resolução de um problema. Também é encontrado referência no seu primeiro axioma. Não mais, após observar as restrições e característica de um problema em questão, o que resta é uma operação numérica simples.

Outras duas situações:

Mega Sena e os Professores de Matemática

A Mega-Sena é um jogo da loteria federal existente em nosso país. Esta paga milhões para o acertador dos 6 números sorteados. Ainda é possível ganhar prêmios ao acertar 4 ou 5 números dentre os 60 disponíveis no volante de apostas. Quer-se determinar quantos são os possíveis cartões diferentes que podem ser marcados, ou da mesma forma, quantas são os possíveis resultados existentes para o sorteio. A tarefa, então, consiste em saber de quantas formas podemos escolher 6 números de 60 disponíveis.

Figura 15 – Volante de apostas da Mega Sena

Fonte:
http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/noticias/como-fazer-um-bolao-oficial-para-a-mega-sena-da-virada, acesso em 30/10/2015

Imagine-se no lugar da pessoa que marca o cartão. Com a caneta na mão, pode-se olhar para o dito e ver 60 possibilidades de escolha. Essa é sua primeira decisão. Marca-se, por exemplo, o número **29**. Para o segundo número, com 59 possibilidades de escolha, em sua segunda decisão, supõe-se marcar o **8**. Como terceira, diante de 58 possíveis, é marcado o **51**. Depois o **20**, o **12** e o **18**.

Caso a ordem de escolhas dos números fosse importante na escolha do apostador, o total de jogos distintos, com seis dezenas, de acordo com o Princípio Multiplicativo seria: $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$.

É sabido porém, que a ordem de escolhas desses números não é importante, pois qualquer que fosse a ordem escolhida desses mesmos números, o jogo é o mesmo: **8**, **12**, **18**, **20**, **29**, **51**. Com isso, tem-se que dividir esse resultado pelo número de vezes que ele pode ser permutado. Imagine que estes formarão uma fila. Quantas são as possíveis filas que podem ser formadas com estes números? Novamente, do princípio multiplicativo: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou simplesmente, $6!$

A resposta da questão então seria:

$$\frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50.063.860$$

O apostador que fez apenas um jogo simples, por curiosidade, teria a chance de 1 em $50.063.860$ de ganhar o prêmio principal.

Problema 3.12 *(ENA - Profmat 2015) Uma escola de educação básica possui 12 professores de matemática, sendo que 8 atuam exclusivamente no Ensino Fundamental e 4 atuam exclusivamente no ensino Médio. Para a organização da 1^a Olimpíada de Matemática da* *escola, será formada uma comissão de 5 professores de matemática, de modo que pelo menos um deles seja professor do Ensino Médio. De quantas maneiras essa comissão pode ser formada?*

Nesta questão, é preciso chamar a atenção para alguns itens do enunciado. Primeiramente a ordem dos professores na comissão não altera a comissão. Escolheremos um grupo de 5 de um grupo de 12 elementos. Este por sua vez, é formado de dois subgrupos contendo 8 e 4 elementos. Dos 12 professores, 4 trabalham exclusivamente no ensino Médio e 8 exclusivamente no ensino Fundamental. A comissão formada precisa ter PELO MENOS um professor do ensino Médio.

Duas soluções são apresentadas:

- **A divisão em casos**:

  Na formação do grupo, de acordo com o proposto, tem-se as seguintes situações: 1 professor do ensino Médio e 4 do Fundamental, 2 professores do Médio e 3 do Fundamental, 3 do Médio e 2 do Fundamental ou 4 do Médio e 1 do Fundamental. São 4 casos para contar:

  $\triangleright$ 1 professor do ensino Médio e 4 do Fundamental:

  Pode-se escolher o professor do Médio de 4 maneiras, e os professores do Fundamental de $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}$ maneiras. Logo, tem-se $4\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}$ maneiras de escolher os professores nessa configuração. Fazendo as contas, um total de 280 maneiras

  $\triangleright$ 2 professores do ensino Médio e 3 do Fundamental:

  Pode-se escolher os professores do Médio de $\frac{4\cdot3}{2!}$ maneiras, e os professores do Fundamental de $\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}$ maneiras. Logo, tem-se $\frac{4\cdot3}{2!}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}$ maneiras de escolher os professores nessa configuração. Fazendo as contas, um total de 336 maneiras

  $\triangleright$ 3 professores do ensino Médio e 2 do Fundamental:

  Pode-se escolher os professores do Médio de $\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}$ maneiras, e os professores do Fundamental de $\frac{8\cdot7}{2!}$ maneiras. Logo, são $\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}\cdot\frac{8\cdot7}{2!}$ maneiras de escolher os professores nessa configuração. Fazendo as contas, um total de 112 maneiras

  $\triangleright$ 4 professores do ensino Médio e 1 do Fundamental:

  Pode-se escolher os professores do Médio de 1 maneira, e os professores do Fundamental de 8 maneiras. Logo, são $1\cdot8$ maneiras de escolher os professores nessa configuração. Fazendo as contas, um total de 8 maneiras

  Somando o número de maneiras de todos os casos possíveis:

  $$280+336+112+8=736 \text{ maneiras.}$$

- **Contar o que não queremos**.

  Esta solução é mais elegante. Em vez de contar quantos são os grupos que interessam ao enunciado, basta contar o que não se quer e subtrair este do número de maneiras de formar um grupo de 5 professores de um total de 12.

  Por vezes, esta estratégia é largamente utilizada. Ela diminui significativamente o número de cálculos a fazer, e em outras situações, resolve o impasse quando a divisão em casos não é sempre possível.

  Sem restrições, quantas são as maneiras de se formar um grupo de 5 professores escolhendo entre 12? Basta fazer $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$, e como a ordem entre estes não importa, divide-se pelo número de maneiras de permutá-los(que é $5!$). Logo:

  $$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792 \text{ maneiras}$$

  Não se quer os grupos formados apenas por professores do ensino Fundamental. Quantos são estes? Basta calcular o número de maneiras de se escolher 5 professores de um total de 8.

  Da mesma forma:

  $$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} = 56 \text{ maneiras}$$

  Como solução: $792 - 56 = 736$ maneiras

Sem perceber, as simples aplicações do Princípio Multiplicativo resolveram diversos tipos de problema aliado com uma boa dose de interpretação. Não houve a necessidade ainda de mencionar sobre Arranjos, Permutações ou Combinações e nem acredita-se que no início isso se faça necessário. O aluno ganha segurança com o princípio multiplicativo ao decorrer dos exercícios que resolve seguindo as características de cada um. Aprende com a resolução de problemas e cria conexão entre estas.

3.5.1 Tipos de agrupamentos

Como visto, é muito comum separarmos os problemas de contagem em dois tipos: aqueles cuja solução muda quando mudamos a ordem dos seus elementos e os que não sofrem alteração quando essa ordem é mudada. Essa característica é peculiar de cada problema, de acordo com a situação descrita.

No início de um problema de Combinatória, a pergunta que deve-se fazer sempre é se a ordem dos elementos dentro do mesmo grupo (mesma natureza) altera o problema proposto. Tal medida é indispensável para que possamos contar cada subgrupo, e analisar assim, se não estamos tratando cada grupo igual como se fosse diferente.

Em problemas que a ordem importa, basta usar o princípio multiplicativo ao número de decisões tomadas diretamente. Em problemas que a ordem não importa, usa-se o princípio multiplicativo ao número de decisões tomadas, porém sabendo que assim grupos iguais serão tratados como diferentes. Cabe depois conferir quantas vezes cada grupo foi contado e dividir.

Definição 3.1 *Seja A um conjunto de n elementos. Seja B um subconjunto de A com p elementos, com $n \geq p$. O número de subconjuntos B diferentes entre si pela natureza de seus elementos é dado por:*

$$\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

De acordo com (JULIANELLI et al., 2009, p. 15), números obtidos dessa forma são chamados coeficientes combinatórios ou combinações. Estes surgem quando se está interessado no número de maneiras de escolher p elementos a partir de n elementos, mas não na ordem em que os p elementos são escolhidos.

Não é difícil ver por que eles tem essa forma. Veja:

Pode-se escolher o primeiro elemento de B de n formas, o segundo de $n-1$ formas, o terceiro de $n-2$ formas, e seguindo, o p-ésimo de $n-(p-1)$ formas, ou equivalentemente, $n-p+1$ formas. Note que p representa o número de escolhas.

Aplicando o princípio multiplcativo:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Como para estes casos, não se está interessado na ordem em que os p elementos são escolhidos, então divide-se este número pelo número de maneiras que este pode ser permutado. Dividimos, então, por $p!$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!}$$

Esta expressão, por sua vez, pode ser manipulada multiplicando-se o numerador por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

Finalmente, essa última expressão pode ser vista como:

$$\frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma combinação simples de classe p dos n objetos. Este número de combinação simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p.

Assim:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Problema 3.13 *Provar que o número de diagonais de um polígono qualquer de n lados é dado por $\frac{n(n-3)}{2}$.*

Em polígono convexos, define-se diagonal do polígono como um segmento de reta que une dois vértices quaisquer sem que esta seja um dos seus lados. Tendo um polígono de n lados, este têm n vértices. Sejam estes $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Dois vértices determinam uma diagonal ou um lado. O segmento de reta determinado por v_1 e v_2 é o mesmo determinado por v_2 e v_1. (a ordem não importa)

Quer-se então saber quantos são as combinações simples de classe 2 de n objetos, ou de forma equivalente, quantas são os pares que podemos fazer com n vértices. Aplicando a expressão vista:

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!}$$

Destes, n são lados. Enfim, o número de diagonais pode ser dado:

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} - n = \frac{n! - n(n-2)!2!}{(n-2)!2!} = \frac{(n-2)![n(n-1)-2n]}{(n-2)!2!} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

3.5.2 Permutações, Arranjos e Combinações

Cabe finalmente à esta subseção, mencionar os tipos de agrupamentos usuais e suas definições que em vários livros estão presentes. Intencionalmente foi evitado a todo custo que isso fosse colocado antes por motivos claros do objetivo do trabalho: Fugir da proposta de ensino da análise Combinatória sobre fórmulas e definições de pouco sentido.

No estágio em que se está, as definições e suas fórmulas tais como o conceito de Permutação e Arranjo vêm então complementar o que foi proposto e sugere-se que assim seja feito, não o contrário.

De acordo com (CARNEIRO, 1996):

> *. . . As definições e fórmulas de arranjo, permutação e combinação podem ser apresentadas e deduzidas entre as questões propostas e até podem ser usadas para resolver outras questões mais rapidamente; no entanto, a memorização dessas fórmulas, além de em nenhum momento conseguir substituir o raciocínio, prejudica a aprendizagem quando, de tão destacadas, deixam de ser parte e são confundidas com o todo.*

ARRANJOS SIMPLES

Definição 3.2 *Dado um conjunto de n elementos, e sendo p um inteiro e positivo tal que $p \leq n$, chama-se arranjo simples dos n elementos dados, agrupados p a p, qualquer sequência de p elementos distintos formada com elementos do conjunto. O número de arranjos é dado por:*

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Tal expressão foi encontrada anteriormente utilizando o princípio multiplicativo. A desnecessidade de utilizar o conceito de Arranjo é justificado no uso do Princípio Fundamental da Contagem.

A mudança de ordem dos p elementos altera o agrupamento. Em arranjo a sequência dos elementos é levada em conta.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Definição 3.3 *Dado um conjunto qualquer com n elementos, chama-se permutação simples dos n elementos dados a qualquer arranjo simples dos n elementos dados, agrupados n a n, ou seja,*

$$P_n = A_n^n = n!$$

Pode-se dizer que a permutação é um caso particular do arranjo, quando $p = n$.

COMBINAÇÕES SIMPLES

Definição 3.4 *Dado um conjunto qualquer com n elementos e sendo p um número inteiro e positivo tal que $p \leq n$, chama-se combinação simples dos n elementos dados, agrupados p a p, a qualquer subconjunto de p elementos distintos, formados com elementos do conjunto.*

O número de combinações simples é dado por:

$$C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

A notação $\binom{n}{p}$ também é utilizada para representar C_n^p:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

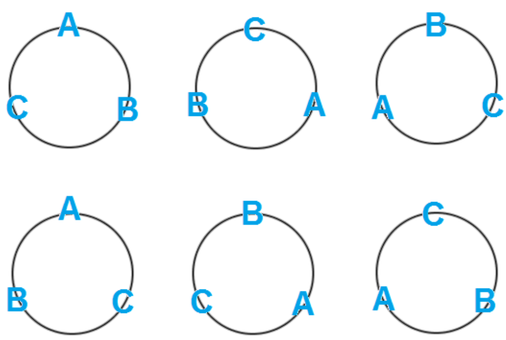
PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Os problemas de permutação circular consistem em determinar o número de modos que n objetos distintos podem ser colocados em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, considerando-se equivalente as disposições que coincidam por uma rotação.

Por exemplo, é sabido que o número de maneiras de arrumar 3 pessoas em uma fila acontece de 6 maneiras diferentes. Agora, considere a situação onde deseja-se determinar o número de maneiras destas pessoas sentarem-se em volta a uma mesa. Chamemos estas de A, B e C.

As possíveis configurações seriam:

Figura 16 – Mesa com três pessoas



Fonte: Elaboração própria

No entanto, a figura 16 mostra que as três primeiras disposições coincidem entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas (basta que gire no sentido horário). São apenas 2 maneiras.

Enquanto que nas permutações simples os lugares que os objetos ocupam é levado em conta, nas permutações circulares o que vale é somente a posição relativa entre estes.

Se não forem considerados equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teriam-se $n!$ disposições (permutação simples). Considerando a equivalência, cada permutação é contada como diferente por n disposições.

Logo:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Além destes, outro tipo de agrupamento merece destaque. Observe mais dois outros problemas clássicos:

Problema 3.14 *Uma sorveteria dispõe de 10 sabores distintos para montar um sorvete. Um cliente deseja comprar um sorvete de 3 bolas. Quantas são suas opções de escolha?*

Inicialmente, pense que a ordem de escolha dos sabores não importa, ou seja, temos um sorvete diferente quando temos este com sabores diferentes. Isto para cada bola.

Ainda, pela situação, pode-se ter, por exemplo, duas bolas de um mesmo sabor e uma outra bola de outro. O problema se resume, então, em contar de quantas maneiras pode-se tomar 3 elementos de 10, sendo que estes podem se repetir.

Como solução, o problema pode ser dividido em casos:

- O sorvete é escolhido com as três bolas de mesmo sabor;

  Nessas condições, tendo 10 sabores, pode-se escolher de 10 maneiras diferentes

- O sorvete é escolhido com duas bolas de mesmo sabor e a terceira de outro;

  São 10 as opções para escolher o sabor das duas bolas. Escolhido, são 9 as opções de sabor para a terceira bola. Aplicando o princípio multiplicativo: $10 \cdot 9 = 90$ maneiras.

- O sorvete é escolhido com uma bola de cada sabor;

  Deseja-se calcular de quantas maneiras pode-se tomar 3 de um total de 10, sem que a ordem importe. Como visto, isto é $C_{10}^{3} = 120$ maneiras.

Somando o número de maneiras em cada caso: $10 + 90 + 120 = 220$ opções de escolhas.

Estes tipos de agrupamento configuram combinações completas ou combinações com repetição. Diferentemente dos problemas que envolvem combinação simples, este tipo de agrupamento permite que elementos se repitam na formação dos grupos, tendo assim, claro, mais grupos do que que os casos onde isso não é possível.

A combinação completa, então, é o número de modos distintos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados.

Problema 3.15 *Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação* $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$*?*

Deve-se escolher valores para as variáveis de modo que a soma entre elas seja 3. Uma delas pode valer 3, por exemplo, e as outras zero. Bem como pode-se ter uma delas valendo 2 e uma outra valendo 1. Também pode ser que se tenha três delas valendo 1 cada.

Alguma semelhança com o problema anterior não é mera coincidência. Há um bijeção entre o número de soluções inteiras não negativas dessa equação e o número de opções de escolha para as bolas de sorvete do item anterior.

Pode-se pensar que x_1 é a quantidade que será comprada de bolas de sorvete do $1^{\underline{o}}$ sabor, x_2 a quantidade que vamos comprar do $2^{\underline{o}}$ sabor, ... x_{10} a quantidade que será comprada do $10^{\underline{o}}$ sabor. É claro que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ devem ser maiores ou iguais a zero.

Comprar 3 bolas de sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 10 sabores diferentes é equivalente a tomar uma solução de inteiros não negativos da equação:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$$

Pode-se concluir, então, que são 220 soluções.

De modo geral, o número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$ em inteiros não negativos, e vice-versa.

O Esquema bola-traço

Um esquema é bastante útil na resolução de combinações completas. Trata-se do chamado “esquema bola-traço”. Nesta representação, cada bola representa uma unidade no valor da incógnita na equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$, e cada traço é usado para separar duas incógnitas.

No problema anterior, o máximo valor assumido por uma incógnita é 3. Assim, tem-se três bolas. Ainda, tendo 10 incógnitas, será preciso 9 traços. Um exemplo de esquema para uma solução seria:

$$\bullet\bullet\bullet\,|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|$$

O esquema funciona da seguinte maneira: No intervalo entre os traços existem espaços que podem ser preenchidos com as bolas. Tendo 9 traços, há 10 lugares para colocá-las.(Considera-se também espaço antes do primeiro e depois do último traço). Cada um destes espaços, representa uma incógnita da equação.

Neste esquema acima, $x_1 = 3$ e $x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = x_{10} = 0$.

Outra solução:

$$\bullet\bullet\,|\quad|\quad|\,\bullet\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|$$

Neste esquema acima, $x_1 = 2$, $x_4 = 1$ e $x_2 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{10} = 0$.

Cada esquema destes é formado arrumando em fila 3 bolas e 9 traços. Para cada nova fila, tem-se um novo esquema, que representa uma solução da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$.

O número de maneiras de formar tais filas com estes 12 sinais equivale a $C_{12}^3 = 220$.

De modo geral, para calcular o número de combinações completas (ou com repetições), isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p$, há de se ter p bolas e $n - 1$ traços. Logo:

$$CR_n^p = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!} = C_{p+n-1}^p$$

CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos *distintos ou não* entre n objetos distintos dados.

Finaliza-se o capítulo de “O Princípio Fundamental da Contagem” e apresentam-se no próximo capítulo, sugestões para planos de aula sobre os conceitos abordados.

Capítulo 4

Sugestões de Plano de Aula

Cabe a este capítulo sugerir para os professores planos de aula a fim de auxiliar na execução dos seus trabalhos. Estes representam o produto final da pesquisa, que convenientemente elaborados, procuram ter alguma serventia e contribuição para o docente. Neste, são descritos as primeiras atividades no contato do aluno com a Análise Combinatória, mencionando quais passos poderiam ser seguidos, bem como o que esperar de cada um deles.

É importante salientar que estes planos não foram aplicados em sala de aula. Não há aqui registros de alunos sobre como suas aulas tiveram uma melhoria utilizando a metodologia apresentada. Todas as considerações apresentadas retratam a opinião do autor, que baseada nas referências descritas, o apoiam para dizer o que sua experiência profissional e o quadro mostrado confirmam sobre a necessidade de um aprendizado mais significativo da Análise Combinatória.

Sugestões de planos de aula estão longe de serem receitas milagrosas que funcionariam em toda ocasião. A intenção das mesmas é auxiliar e servir como material de apoio. O professor pode sentir-se livre para fazer as adaptações necessárias.

Estes planos, no total de cinco, estão divididos em dois grupos: Dois para o Ensino Fundamental, que também pode ser utilizado na Introdução no Ensino Médio e Três para o Ensino Médio.

4.1 Plano de Aula 1 - Introduzindo a Análise Combinatória

Dados da Aula

MODALIDADE / NÍVEL DE ENSINO

Ensino Fundamental/ Médio

COMPONENTE CURRICULAR

Matemática

TEMA

Análise Combinatória

Duração das atividades

2 horas/aula de 50 minutos.

O que o aluno poderá aprender com essa aula?

Cabe a esta primeira aula um encontro introdutório para atender aos seguintes objetivos específicos:

- Mostrar ao aluno à importância dos processos de Contagem em um problema clássico da história da Combinatória.
- Levar o aluno a analisar criticamente um problema questionando-se sobre as condições de resolução.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Para a introdução das ideias de Combinatória, tendo os objetivos anteriormente citados em mente, fazem-se necessários poucos pré-requisitos. Como citado na primeira seção do Capítulo 3, as ideias ligadas ao significado da Multiplicação e divisão com Naturais são fundamentais na compreensão da formação dos grupos que envolvem tais problemas. Acredita-se, porém que nesta etapa de ensino, o aluno já se encontre em tais condições.

Material utilizado

Atividade em folha contida no anexo (ANEXO A), lápis, borracha, quadro e canetas de quadro.

Estratégias e recursos da aula

Neste primeiro momento, a Combinatória pode ser motivada e introduzida através da apresentação de seu contexto histórico, assim como sua motivação foi concebida.

Para tal, sugere-se usar os quadrados mágicos. De acordo com o texto apresentado, tais objetos participaram ativamente da história da Combinatória e talvez, o problema mais antigo relacionado à teoria dos números e a Análise Combinatória, seja o da formação dos quadrados mágicos. São dados os passos:

1. Vamos trabalhar com o aluno o preenchimento do quadrado mágico de ordem 3. Estabeleça primeiramente as regras para o preenchimento. Deixe que estes façam por si só a tarefa de completar o quadrado utilizando dos números de 1 à 9. Reserve aproximadamente 15 minutos para tal. O Modelo da atividade encontra-se na área destinada aos anexos (ANEXO A).

2. Após, peça aos alunos que comparem suas soluções e veja se entre eles há respostas distintas. Questione-os sobre a possibilidade de haver outras soluções diferentes das encontradas pelo grupo. Peça-os para responder às três questões sugeridas após a atividade(ANEXO A). Deixe-os que discutam em grupo as respostas para tais.

Espera-se que com a atividade e os questionamentos propostos, o aluno reflita sobre a construção do quadrado mágico, em suas restrições, ao mesmo tempo que observa neste a possibilidade de poder ser feito de várias maneiras, mesmo sendo em um caso específico. O diálogo e a comunicação devem favorecer à aprendizagem.

Para a segunda questão, sobre a soma encontrada nas linhas, colunas e diagonais, espera-se que o aluno se convença de que **não** se pode encontrar a soma diferente de 15, nas condições do enunciado. Peça ao aluno que tente demonstrar o fato, mesmo que de forma informal, mas que apresente argumentos que justifique o fato.

Se os alunos não conseguirem responder à pergunta, não há problema. Sugira a eles que preencham novamente o quadrado tentando obter uma soma para linhas, colunas e diagonais diferente de 15. Deixe que vejam que não é possível. Apesar de isso não ser uma prova para tal, é suficiente para a atividade.

Após, se precisar, exiba uma prova convincente:

Sejam a, b, c, d, e, f, g, h e i os números dispostos no quadrado:

Figura 17 – Quadrado mágico - prova

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Fonte: Elaboração própria

Tem-se do enunciado referente às linhas que:

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ d+e+f=S \\ g+h+i=S \end{cases}$$

Onde S é a soma procurada. Somando as equações:

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=3S$$

Como $a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, então $3S=45 \Rightarrow S=15$

Para a terceira questão, sobre o número 5 figurar a casa central, os alunos podem ter ainda mais dificuldades para encontrar uma resposta para o problema. Pergunte a eles se entre os que encontraram a solução para o quadrado mágico, se alguém completou com um número diferente de 5. Certamente não.

O professor pode utilizar a prova:

$$\begin{cases} a+e+i=S \\ g+e+c=S \\ b+e+h=S \\ d+e+f=S \end{cases}$$

Somando as equações:

$$\begin{aligned}
a+b+c+d+4e+f+g+h+i &= 4S\\
(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e &= 4\cdot(15)\\
45+3e &= 60\\
3e &= 15\\
e &= 5
\end{aligned}$$

Avaliação

Observe o envolvimento dos alunos, individual e coletivamente, na realização dos processos solicitados, sua motivação e empenho na execução das atividades e no desenvolvimento de atitudes na interação, cooperação e organização do trabalho. Este pode ser considerado um procedimento padrão para apontar os pontos positivos e negativos da atividade. Sugere-se, ainda, que o professor avalie os registros das atividades propostas e apresente outras que tenham relação com esta, na forma de avaliação do que foi visto. Permita que os alunos apresentem para os demais colegas suas soluções e avalie oralmente cada momento proposto.

4.2 Plano de Aula 2 - O Novo uniforme e a nova bandeira do Jubarte Futebol Clube

Dados da Aula

MODALIDADE / NÍVEL DE ENSINO

Ensino Fundamental/ Médio

COMPONENTE CURRICULAR

Matemática

TEMA

Análise Combinatória

Duração das atividades

2 horas/aula de 50 minutos.

O que o aluno poderá aprender com essa aula?

Nesta aula é proposto utilizar-se de material concreto para que o aluno possa resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo não diretamente.

Como objetivos específicos, espera-se:

- Utilizar-se da dinâmica do trabalho em grupo para o desenvolvimento de um trabalho consensual e conjunto.
- Proporcionar situações onde a utilização de materiais manipulativos promova uma aprendizagem significativa acerca da ideia do Princípio Multiplicativo.
- Exercitar a prática de construção de esquemas e modelos que ajudem na resolução de um problema.
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas e suas possíveis soluções, juntando-as, analisando-as, construindo assim, com a prática, o pensamento recursivo necessário para a solução de problemas mais complexos e generalizações de modelos.

- Possibilitar a interação entre os alunos para favorecer a comunicação matemática na discussão de métodos de resolução de problemas.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Algum conhecimento prévio de Análise Combinatória, apresentado no Ensino Fundamental. Acredita-se, porém que nesta etapa de ensino, o aluno já se encontre em tais condições.

Material utilizado

Atividade em folha contida no anexo (ANEXO B), folhas brancas A3 ou A4, lápis, borracha, tesoura, cola, lápis de cor nas cores amarelo e azul, recortes de cartolina colorida, quadro e canetas de quadro.

Estratégias e recursos da aula

A atividade será dividida em dois momentos. Organize os alunos em grupos de no mínimo 3 e no máximo 5 alunos, de acordo com a quantidade. Inicialmente, será proposta aos alunos a resolução de dois problemas, utilizando-se de material concreto.

Comece por distribuir a folha contendo os problemas que os alunos terão que resolver. Peça-os que leiam atentamente o primeiro problema. Em seguida, distribua também uma folha em branco A3 ou duas folhas A4, para que cada grupo faça as colagens dos possíveis uniformes.

Em anexo, também está disponível o recorte com os modelos das camisas e shorts que os alunos terão que recortar e colar nas folhas montando cada um dos possíveis uniformes. Os recortes podem ser colocados em uma caixa no meio da sala de aula de modo que cada aluno utilize a quantidade que julgar necessária para realizar sua atividade.

Depois de entregar o material necessário para a execução da atividade, o professor deverá orientar os discentes de que a tarefa de cada grupo será montar todas as combinações de calças e blusas possíveis, usando para isso, os recortes disponibilizados, a folha branca, tesoura e cola.

Os grupos, certamente, precisarão de mais de uma folha contendo os recortes com os uniformes. Certifique-se que há em quantidades suficientes para a atividade.

Assim que todos os trabalhos estiverem concluídos, peça os grupos que comparem suas atividades com a de outros grupos e troquem ideias sobre o resultado. Certamente eles opinarão sobre aquele de sua preferência e discutirão com os colegas o visual dos uniformes. Espera-se que com uma quantidade relativamente pequena de maneiras de se montar os uniformes, todos os grupos consigam realizar a atividade.

Antes de fazer qualquer comentário sobre a resolução do primeiro problema, oriente os alunos que passem à segunda atividade e que agora se concentrem nas possibilidades de cores para a bandeira do clube Jubarte. Em anexo, encontra-se as bandeiras em branco e os alunos terão de pintá-las utilizando lápis de cor para verificarem todas as possibilidades de coloração.

Novamente, entregue a cada grupo uma folha de atividade contida no ANEXO B e peça para que listem as possibilidades de acordo com o proposto pelo segundo problema. Disponha de uma caixa com vários lápis de colorir, contendo apenas as cores azul e amarelo (branco, obviamente, não precisa). Pode-se novamente colocá-la no centro da sala para facilitar o acesso de todos.

Novamente, como a quantidade de maneiras de se pintar a bandeira com as cores dadas é relativamente pequena, espera-se que todas as possibilidades apareçam. É importante observar que são dadas 8 bandeiras em branco, mas de acordo com o proposto, só são possíveis 6 bandeiras. Espera-se que o grupo perceba esse propósito.

Os alunos devem ser orientados a fazer cada uma das atividades com paciência. De maneira análoga, peça que cada grupo compartilhe o resultado da segunda atividade com os outros grupos. Acaba aqui a primeiro momento da aula.

Terminada a parte prática da atividade, é a hora de o professor chamar a atenção para si e comentar sobre as atividades apresentadas. É legal que o professor tenha feito em casa tais atividades para que nessa hora apresente para os alunos. Questione aos grupos as respostas encontradas em cada atividade. Por quê o resultado foi 12 na primeira atividade? Por que na segunda só encontramos 6 opções de bandeiras? Se tivéssemos mais camisas e mais shorts disponíveis teríamos outras possibilidades? E se pudéssemos utilizar somente duas cores na bandeira, teríamos também mais possibilidades? O professor deve conduzir uma discussão, incentivando a participação dos grupos e de todos os alunos. Esta seria a hora do professor explicar as possíveis dúvidas surgidas durante a atividade.

Em seguida, é um bom momento para iniciar com a definição formal do princípio Multiplicativo como ferramenta principal da Análise Combinatória. Motive os alunos dando exemplos da utilização deste princípio como para calcular a quantidades de número de telefones possíveis, de placa de automóveis, de maneiras de se vestir, de possibilidades de montar um lanche, etc. Comente sobre as suas principais aplicações no cotidiano. Mostre aos alunos, em cada problema, quais eram as decisões que ele tinha, e que o resultado encontrado em cada uma, nada mais é, do que o produto do número de decisões em cada etapa.

Com isso, a compreensão do Princípio Multiplicativo e do cenário em que este se aplica, deve tornar-se o ponto central da realização das duas atividades práticas e fazer com que o resultado alcançado apenas sintetize o raciocínio desenvolvido com as mesmas.

Os processos de enumeração devem contribuir para o raciocínio recursivo.

Avaliação

A avaliação desta aula deve levar em conta vários aspectos nas duas partes em que ela foi concebida. O professor deve estar atento nas relações de interação entre os participantes do grupo enquanto estes discutem sobre as atividades. Analisar sobre a importância do material concreto utilizado no desenvolvimento da aula pode levar o professor a buscar e criar outros materiais diversos, que possivelmente ajudarão nas aulas seguintes.

Procure utilizar-se de outras atividades que explorem o princípio multiplicativo, tais como foram apresentadas no Capítulo 3, como forma de avaliar o desenvolvimento da habilidade sugerida. O professor pode usar-se de outro método qualquer de avaliação que julgar necessário.

4.3 Plano de Aula 3 - Problemas introdutórios

Dados da Aula

MODALIDADE / NÍVEL DE ENSINO

Ensino Médio

COMPONENTE CURRICULAR

Matemática

TEMA

Análise Combinatória

Duração das atividades

4 horas/aula de 50 minutos.

O que o aluno poderá aprender com essa aula?

Este plano de aula é composto de várias questões selecionadas para introduzir a Análise Combinatória. Tais questões serviriam de objeto motivador onde o aluno começaria a desenvolver a habilidade de resolver problemas de Análise Combinatória. Chamemos estes de Exercícios Preliminares.

Nesta aula, propõe-se que cada problema seja resolvido enumerando os casos possíveis, ou mesmo, utilizando-se de esquemas e modelos, no máximo utilizando uma operação numérica simples. Como objetivos específicos, espera-se:

- Mostrar ao aluno à importância dos processos de Contagem em problema diversos.
- Exercitar a prática de construção de esquemas e modelos que ajudem na resolução de um problema.
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas e suas possíveis soluções, juntando-as, analisando-as, construindo assim, com a prática, o pensamento recursivo necessário para a solução de problemas mais complexos e generalizações de modelos.

- Possibilitar a interação entre os alunos para favorecer a comunicação matemática na discussão de métodos de resolução de problemas.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Para a introdução das ideias de Combinatória, tendo os objetivos anteriormente citados em mente, fazem-se necessários poucos pré-requisitos. Como citado na primeira seção do Capítulo 3, as ideias ligadas ao significado da Multiplicação e divisão com Naturais são fundamentais na compreensão da formação dos grupos que envolvem tais problemas. Acredita-se, porém que nesta etapa de ensino, o aluno já se encontre em tais condições.

Material utilizado

Atividade em folha contida no anexo (ANEXO C), lápis, borracha, quadro e canetas de quadro.

Estratégias e recursos da aula

Antes de começar com os exercícios, aconselha-se organizar os alunos em duplas para o início das atividades. O modelo de atividade a ser entregue aos alunos encontra-se em Anexo (ANEXO C). Entregue uma lista de questões para cada dupla. Esta lista contém 25 questões. Disponha de 20 minutos para que os alunos resolvam um ou dois problemas apresentados. Vai depender no número de alunos da turma. Estes deverão ser resolvidos, quando possível, de forma descritiva, com esquemas e modelos.

Em seguida, é sugerido que os alunos apresentem suas soluções. Para isso, cada dupla será incumbida de apresentar o problema resolvido mostrando a solução encontrada. O importante é que cada dupla apresente a solução de pelo menos um dos problemas resolvidos.

Peça à cada dupla que se levante perante os demais, à frente do quadro, e mostre sua resolução com o auxílio do mesmo. Cada dupla deve levar em média 6 minutos para apresentar o desenvolvimento de sua questão. A participação coletiva nas discussões deve ser incentivada e a comunicação deve favorecer a aprendizagem.

Espera-se que a dinâmica da atividade contribua para a discussão dos problemas pelo grupo, na exposição das soluções encontradas, e ainda na requisição mais ativa do aluno na postura de resolver um problema e mostrar seu posicionamento. Ainda, que mais importante do que os alunos apresentarem uma solução correta, valorize o produto da discussão e da comunicação que fazem ao expor seus resultados.

Para finalizar, são dadas as respostas:

1) 15 possibilidade.

2) 500 formas.

3) 30 opções.

4) 180 caminhos.

5) 25 formas.

6) 20 formas.

7) 24 maneiras.

8) 10000 números.

9) 60 números.

10) 24 possibilidades.

11) 24 possibilidades.

12) 336 maneiras.

13) 56 maneiras.

14) 25 maneiras.

15) 20 maneiras.

16) $(26^3 \cdot 10^4) - 1$ combinações.

17) a) 26^6 senhas somente com letras e 10^6 senhas com números.

   b) 224640000 senhas.

   c) 36^6 senhas.

18) a) $2 \cdot 10^7$ números de telefones.

   b) Não. Se obrigatoriamente a todos os números deste estado foi acrescido o 9, a disponibilidade de números de telefones continua o mesmo.

19) a) 2 jogadas.

   b) 8 movimentos.

   c) 70 movimentos.

20) $3 \cdot 2^6$ formas.

21) 12 anagramas

22) a) 230400 opções.

b) $5 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 8 \cdot C_5^3 = 51200$ opções

23) a) 6 maneiras.

b) 12 maneiras.

c) 24 maneiras.

d) 6 maneiras

24) $C_5^3 \cdot 3 \cdot 2^4 = 320$ maneiras

25) 2^8 bits

Avaliação

A avaliação dos objetivos propostos nessa aula acontece à medida que o professor observa o andamento das atividades e observa seu significado para os alunos. Procure observar o envolvimento dos alunos, individual e coletivamente, na realização dos processos solicitados, sua motivação e empenho na execução das atividades e no desenvolvimento de atitudes na interação, cooperação e organização do trabalho. Avalie os registros das atividades propostas.

4.4 Plano de Aula 4 - A ordem importa ou não importa?

Dados da Aula

MODALIDADE / NÍVEL DE ENSINO

Ensino Médio

COMPONENTE CURRICULAR

Matemática

TEMA

Análise Combinatória

Duração das atividades

2 horas/aula de 50 minutos.

O que o aluno poderá aprender com essa aula?

Para esta aula, são propostas atividades que visem capacitar o aluno quanto a decisão de agrupar elementos se importando ou não com a ordem que eles se dispõe. Tal questionamento em problemas de combinatória é recorrente, e provém, se não em todos os casos, da falta de entendimento do enunciado e do questionamento proposto.

Como objetivos específicos, espera-se:

- Mostrar ao aluno à importância dos processos de Contagem em problema diversos.
- Exercitar a prática de construção de esquemas e modelos que ajudem na resolução de um problema.
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas, diferenciando-os, quanto aos tipos de agrupamento.
- Possibilitar que o aluno desenvolva à percepção quanto à formação dos grupos que se diferenciam somente pela natureza de seus elementos ou não, de acordo com o desafio proposto.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Noções de formação de grupos utilizando-se de esquemas e modelos como diagrama de árvore e de possibilidades. Princípio Fundamental da Contagem.

Material utilizado

Atividade em folha contida no anexo, lápis, borracha, quadro e canetas de quadro.

Estratégias e recursos da aula

Para o desenvolvimento dessa aula, sugere-se dividir a turma em dois grupos. Cada um destes receberá uma lista diferente de exercícios contendo 2 problemas cada. Estas duas listas se encontram no anexo. (ANEXO D e E)

A ideia principal desta atividade é trabalhar basicamente o mesmo tipo de problemas, com enunciados parecidos, mas que, em uma delas, os agrupamentos formados não se diferenciem apenas pela natureza dos elementos, mas também pela ordem que estes se retratam. Reserve de 20 a 30 minutos para que cada grupo desenvolva as questões. Sugira aos alunos fazer esboços, esquemas ou modelos que lhes ajudem na formação dos agrupamentos.

Após cada grupo encontrar suas soluções, peçam a estes que troquem a lista e novamente tentem resolver os problemas propostos. Espere que, talvez, eles pensem se tratar dos mesmos problemas. Insista e argumente para que leiam com atenção o enunciado e o desafio proposto. Esta parte deve durar mais uns 20 ou 30 minutos.

Encerrada essa parte, é a hora de o professor mediar as discussões envolvidas. Caberiam as seguintes perguntas:

- Os problemas, de uma lista para outra, eram diferentes?
- Em que os problemas se diferenciavam?
- Vocês encontraram soluções diferentes para cada uma das listas?

Espera-se que os alunos, tendo noção prévia de formação de grupos, percebam que a diferença principal entre as duas atividades está ligada à importância quanto à ordem dos elementos. O professor deve orientar sobre as dúvidas percebidas em cada, e se possível, deixar que os alunos exponham suas soluções de um grupo para o outro.

Não recomenda-se rotular os problemas em “problemas de Arranjo” ou “problemas de Combinação”. Estas definições contribuem para a desarticulação entre a formação dos agrupamentos e o princípio Fundamental de Contagem, podendo ao invés de libertar, restringir o aluno quanto sua visão à cerca da Combinatória.

Espera-se que a dinâmica da atividade contribua para a discussão dos problemas pelo grupo, na exposição das soluções encontradas, e ainda na requisição mais ativa do aluno na postura de resolver um problema e mostrar seu posicionamento. Não como reprodutor de fórmulas.

Para finalizar, são dadas as respostas:

Lista 1

1) i) 1540 comitês

ii) 220 escolhas

2) i) 380 partidas

ii) 4845 maneiras

Lista 2

1) i) 9240 comitês

ii) 1320 escolhas

2) i) 380 partidas

ii) 116280 maneiras

Avaliação

O processo de verificação da validade da proposta oferecida com essa aula pode acontecer de diversas formas. O professor pode elaborar outras questões que, com enunciados parecidos, busquem diferenciar os tipos de agrupamento onde a ordem importa ou não importa. É fundamental que esta habilidade seja bem trabalhada aliada à interpretação da questão proposta.

A avaliação pode ser feita através de questionamentos orais e observação do desenvolvimento e participação das atividades sugeridas.

4.5 Plano de Aula 5 - Brincando de roda

Dados da Aula

MODALIDADE / NÍVEL DE ENSINO

Ensino Médio

COMPONENTE CURRICULAR

Matemática

TEMA

Análise Combinatória

Duração das atividades

2 horas/aula de 50 minutos.

O que o aluno poderá aprender com essa aula?

Para esta aula, são propostas atividades que trabalhem a permutação circular e os padrões que nesta se observam.

Como objetivos específicos, espera-se:

- Mostrar ao aluno à importância dos processos de Contagem em problema diversos.
- Exercitar a prática de construção de esquemas e modelos que ajudem na resolução de um problema.
- Desenvolver habilidades na resolução de problemas, diferenciando-os, quanto aos tipos de agrupamento.
- Possibilitar que o aluno desenvolva o raciocínio combinatório em problemas que envolvam permutações circulares.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Noções de formação de grupos utilizando-se de esquemas e modelos como diagrama de árvore e de possibilidades. Princípio Fundamental da Contagem.

Material utilizado

Espaço da sala de aula, atividade em folha contida no anexo F, lápis, borracha, quadro e canetas de quadro.

Estratégias e recursos da aula

Esta atividade é composta de duas partes. A primeira busca propiciar uma situação problema onde os alunos possam identificar o questionamento e propor soluções. A segunda parte procura consolidar o que foi inicialmente desenvolvido na primeira parte e reforçar os conhecimentos.

Para a primeira parte da aula, lance a seguinte questão: **Quantas são as possíveis configurações com 4 pessoas para formarem uma roda?**

Antes de qualquer palpite dos alunos, peça a ajuda deles para abrir um espaço entre as carteiras no meio da sala de aula. Escolha 4 alunos voluntários e peça-os para fazer uma roda no meio da sala do jeito que quiserem.

Para os outros alunos, dê-lhes a missão de observar e anotar os resultados examinados. Estes devem fazer os registros de cada agrupamento(roda) formado. Quando todos estiverem prontos, peça os alunos na roda que troquem de lugar. Certifique que os outros estejam anotando cada nova configuração. A atividade deve seguir até que os alunos percebam que listaram todos as possíveis configurações de roda.

Quando eles já tiverem uma resposta para a questão inicialmente proposta, solicite mais um voluntário, e recomece a brincadeira. Eles devem ter mais dificuldade para organizar a nova roda e os demais para registrar. Deixe que eles criem um modo sistêmico para a contagem.

Com 5 pessoas na roda, são 24 combinações possíveis. Se os alunos conseguirem encontrar a solução, entenderam o recado. Se não, o professor pode ajudar na organização dos registros e da formação da roda. Quando conseguirem resolver, sugira mais um aluno na roda! Mas calma! Não espere que encontrem a solução, afinal são 120 possibilidades.

Interrompa a brincadeira e peça aos voluntários para se sentarem. Esta hora o professor pode chamar a atenção e mostrar que a atividade tem a finalidade de ilustrar que para quantidades maiores de pessoas, seria inviável a listagem de todas as rodas.

Sugira os alunos que pensem em um esquema que possa auxiliá-los à encontrar a resposta para a situação onde a roda tem 6 pessoas. Se notar muita dificuldade, dê-lhes a dica para pensar nas possíveis filas que podem formar com 6 pessoas e veja se assim conseguem solucionar o problema.

Com a situação problema e o aluno desafiado a encontrar sua solução, espera-se que este desenvolva o raciocínio combinatório para o caso das permutações circulares e consiga perceber a relação que há estre este e as permutações simples.

Após as discussões,o professor deve aproveitar a oportunidade e formalizar o conceito para uma roda com qualquer número de pessoas. Procure tirar todas as possíveis dúvidas surgidas dentro do experimento e principalmente salientar a diferença entre formar uma fila e formar uma roda.

A segunda parte da aula se faz com a aplicação de alguns outros problemas que carecem deste raciocínio. Agrupe-os todos em pequenos grupos de 3 a 4 alunos. Aplique a lista encontrada em anexo (ANEXO F). Discuta as soluções e corrija-os ao final da aula.

Para finalizar, são dadas as respostas:

1) 720 modos

2) 48 modos

3) $3!4!$ modos

4) $5! - 2 \cdot 4!$ modos

Avaliação

Essa atividade é muito participativa. Ao contribuir ativamente na formação da roda, o aluno pode ser avaliado pelo seu envolvimento nos processos solicitados, individual e coletivamente, pela sua motivação e empenho na execução das atividades e no desenvolvimento de atitudes na interação, cooperação e organização do trabalho.

A segunda parte da avaliação, que trata de resolver os exercícios propostos, serve como avaliação da primeira parte da atividade, onde se procura desenvolver a descoberta do número de permutações circulares dada uma roda com n pessoas. Avalie os registros das atividades propostas.

Considerações Finais

A análise combinatória é um dos conteúdos da Matemática que mais vem sofrendo alterações em seu ensino e aprendizagem ao longo dos anos. Desde a antiguidade, problemas de contagem estão presentes como desafios e passatempos, e neste contexto, serviram como estímulo ao estudo de como contar os objetos satisfazendo critérios específicos determinados. Este conteúdo é utilizado em vários campos da ciência.

Nas escolas, porém, o aprendizado do chamado raciocínio combinatório é geralmente lesado pela mecanização excessiva na utilização de fórmulas de pouco sentido e enganosamente fazem do estudo da combinatória um jogo de receitas complicadas que não favorecem esse ensino.

Para a maioria dos problemas da Combinatória não há algoritmos preestabelecidos. Cabe ao professor criar oportunidades para que seus alunos possam analisar, discutir em grupos, escrever, expor e, finalmente, resolver de diferentes maneiras muitas e variadas questões, comparando-as e identificando semelhanças e diferenças, até criar a sua forma própria de pensar. Nesse sentido, os objetivos do trabalho são alcançados, uma vez que este mostra que é possível utilizar-se da resolução de problemas e de situações do cotidiano, incentivada pelas discussões e resoluções em grupo, para ter um ensino de Combinatória com mais significado.

Com os planos de aula, espera-se que os professores e alunos explorem o potencial que tem a resolução de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório e que entendam a importância deste como requisito para a formalização posterior de cada agrupamento. Ainda, espera-se que a interação e o diálogo, entre erros e acertos, proporcionem aos alunos uma experiência mais prazerosa, no sentido que encontrem nas atividades interesse pela busca de soluções e discutam as mais variáveis formas de resolver um exercício.

A utilização de modelos, esquemas e diagramas de possibilidades, assim como a utilização de materiais manipulativos, deve estruturar o raciocínio recursivo e permitir que os alunos criem conexões para entender o sentido de suas resoluções e o sentido de cada operação numérica ou fórmula que utiliza. Nesse contexto, o professor precisa comprometer-se a encontrar caminhos que proporcionem uma abordagem dentro da realidade que o aluno se encontra buscando sentido entre o que se aprende e o que se vive. Só assim, o professor pode garantir uma aprendizagem mais significativa.

Referências

BATANERO, M. del C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Virgínia: Educación Matemática, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 25, 29, 36 e 38.

BERGE, C. *Principles of combinatorics*. [S.l.]: New York: Academic Press, 1971. Citado na página 20.

BIGGS, N. L. *The roots of combinatorics*. [S.l.]: Revista Historia Mathemática, 1979. Citado na página 23.

BRASIL, S. d. E. F. S. *Ministério da Educação Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*. Brasília, 1997. Citado na página 26.

BRASIL, S. d. E. M. e. T. *Ministério da Educação Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília, 2000. Citado na página 26.

CARNEIRO, V. C. Colorindo mapas. *Revista do Professor de Matemática*, n. 29, 1996. Citado na página 62.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. 2. ed. [S.l.]: Ed: Unicamp, 1997. Tradução de Hygino H. Domingues. Citado na página 23.

FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F. Estratégias intuitivas de alunos do 9° ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In: *BARCA, A. [et al.], ed. lit. - "Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía : libro de actas".* A Coruña : Universidade: [s.n.], 2007. p. 1256–1267. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.

GERDENITS, G. A. M. *Raciocínio Combinatório: Uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental - Anos finais*. Tese (Mestrado em ciências exatas) — UFSCAR, Sorocaba, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 50, 51 e 52.

JULIANELLI, J. R. et al. *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 60.

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Volume 3, p. 111–117, September 1970. Citado na página 25.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado na página 34.

MORGADO, A. C. de O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 19, 24, 35 e 56.

NEEDHAM, J. *Science and Civilisation in China*. [S.l.]: London: Cambridge University Press, 1959. Citado na página 20.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 33.

SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. *Na vida dez, na escola zero*. 15. ed. Brasil: CORTEZ, 2010. Citado na página 27.

VAZQUEZ, C. M. R. *O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista*. Tese (Mestrado em ciências exatas) — Ufscar, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 24.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. *Análise Combinatória: Alguns Aspéctos históricos e uma Abordagem Pedagógica*. Tese (VIII Encontro Nacional de Educação Matemática) — UFPE, Recife, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

VIANA, A. Eu não gosto de ensinar esse tópico. *Cálculo - Matemática para todos*, n. 32, Setembro 2013. Citado na página 27.

WIELEITNER, H. *História de La Matemática*. [S.I.]: Editorial Labor, 1928. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.

Anexos

ANEXO A

Atividade - Quadrado Mágico

Chama-se de quadrado mágico um arranjo, na forma de um quadrado, de $n \times n$ números inteiros tal que todas as linhas, colunas e diagonais têm a mesma soma.

Nesta atividade, você se encontra diante de um quadrado de ordem 3. Complete-o utilizando os números de 1 à 9 de modo que o quadrado seja mágico.

Se conseguiu, Parabéns!! Responda, agora aos seguintes questionamentos:

1. Existe outra maneira de preencher tal quadrado seguindo as mesmas condições? Mostre.
2. A soma encontrada nas linhas, colunas e diagonais poderia ser diferente do número encontrado?
3. Tente justificar o motivo pelo qual o número 5 deve configurar a casa central do quadrado.

ANEXO B

Atividade - O Novo uniforme e a nova bandeira do Jubarte Futebol Clube

PROBLEMA 1

Inaugurado em 1950, o Jubarte Futebol Clube é um time de futebol do interior dos interiores. Fundado por operários amantes do esporte de um pequeno grupo de pesca , o clube de conhecidos uniformes azul, branco e amarelo, coleciona fotos, troféus, camisas e outros objetos relacionados à história do clube e das diversas partidas realizadas ao longo dos anos. Acontece que este ano, o Jubarte Futebol Clube está interessado na renovação do seu uniforme de jogo, que já está bem antigo, e para isso precisa repensar nas possibilidade de escolha. O diretor do clube resolveu contar com a participação dos torcedores, e determinou que montaria um espécie de cartaz com todas as possibilidades de escolha do novo uniforme para que os torcedores, através de uma votação, pudessem decidir. Quais serão as possibilidades, uma vez que o diretor informou aos torcedores que a fábrica disponibilizou 4 modelos de camisas e 3 modelos de short?

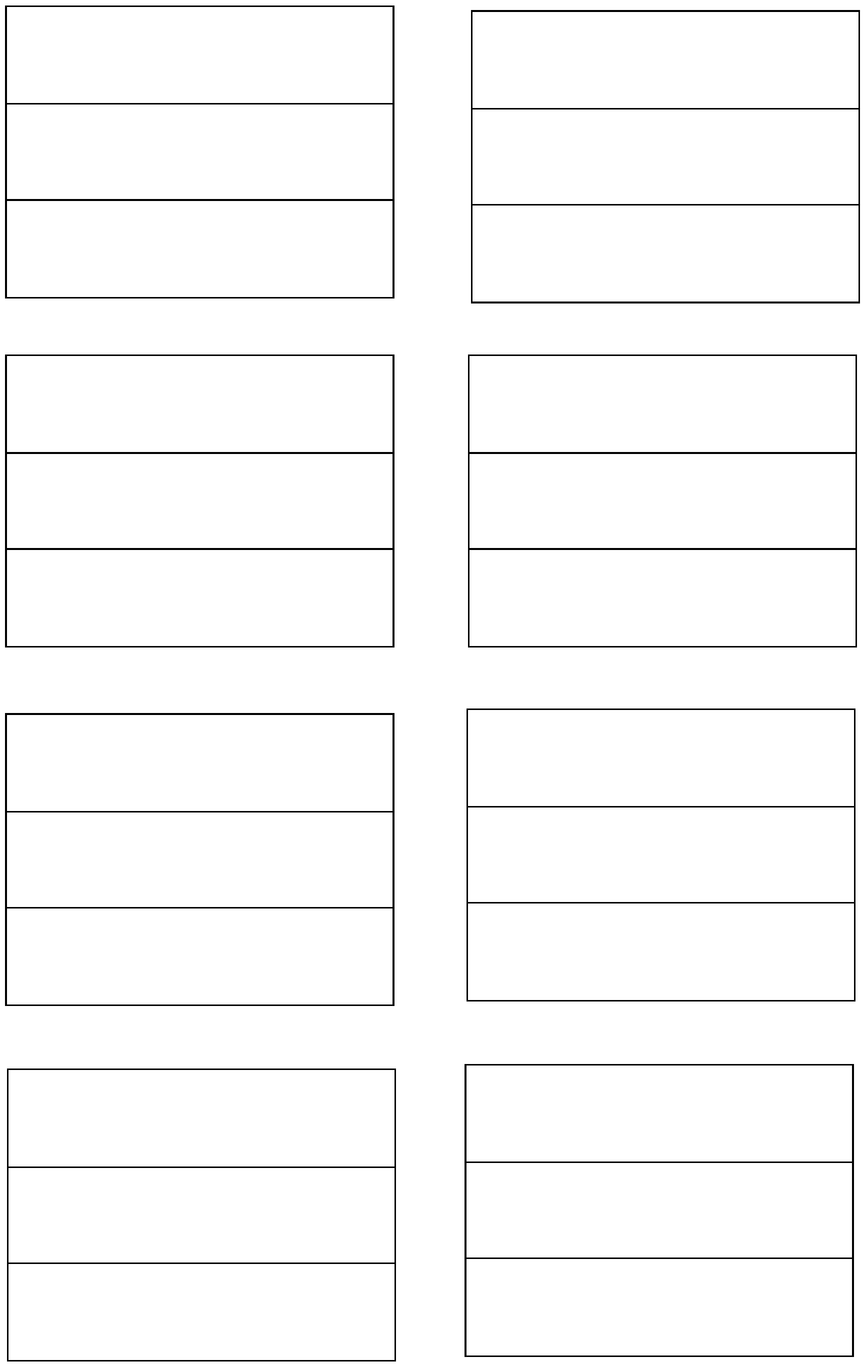
PROBLEMA 2

Aproveitando que o uniforme do time será renovado, o diretor do clube também resolveu inovar e criar uma nova bandeira. Esta será composta por 3 faixas horizontais nas cores azul, branco e amarelo, e no centro será bordado a baleia Jubarte, que é o emblema do clube. Quantas bandeiras são possíveis de se obter, de modo que sejam necessariamente utilizadas as três cores e de modo que faixas vizinhas tenham cores diferentes?

Figura 18 – Recortes para a montagem dos uniformes

Fonte: Elaboração própria

Figura 19 – Bandeiras para colorir



Fonte: Elaboração própria

ANEXO C

Atividade - Problemas introdutórios

1. Para a compra do material escolar, Juca estava confuso entre 5 modelos diferentes de lápis e 3 modelos de borracha. Quantas são suas possíveis possibilidades de escolha?

2. Na organização para a quadrilha da festa junina de uma escola, precisa-se escolher um noivo e uma noiva entre os 25 meninos e 20 meninas que participarão da cerimônia. De quantas formas pode-se escolher tal casal?

3. Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberta com calda de chocolate, ou de morango ou de caramelo. O sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes. Quantas são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura?

4. De um ponto **A** a um ponto **B** há 5 caminhos; de **B** a um terceiro ponto **C**, 6 caminhos; e de **C** a um pondo **D**, também 6 caminhos. Quantos caminhos distintos existem para ir do ponto **A** ao ponto **D**?

5. Um edifício tem 5 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar e sair desse edifício?

6. Um edifício tem 5 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

7. Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu-e-julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

8. Em certa cidade, os números de telefone fixo são acompanhados do prefixo 3811 e em seguida, quatro algarismos que identificam o telefone de uma residência. Como exemplos de números, podemos ter $3811\ 1022$ ou mesmo $3811\ 0020$. No máximo, quantas são os possíveis números de telefone que esta cidade pode ter?

9. Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2, 6, 8 e 9?

10. A bandeira seguinte deve ser colorida utilizando-se das cores amarelo, verde e azul, de modo que listras adjacentes não tenham a mesma cor. Quantas são as possibilidades diferentes de pintá-la?

11. De quantas formas podemos colocar 4 pessoas em fila?

12. Oito corredores disputam as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas maneiras pode ocorrer a premiação entre eles?

13. Oito corredores fazem parte da equipe de um certo país. No entanto, apenas 3 serão escolhidos para disputarem uma certa competição. De quantas formas diferentes esse país poderá ser representado nessa competição?

14. De quantas formas podemos escolher dois números de 1 a 10 de modo que a soma seja um número ímpar?

15. De quantas formas podemos escolher dois números de 1 a 10 de modo que a soma seja um número par?

16. No Brasil, as placas de identificação de veículos são emitidas pelos Departamentos Estaduais de Trânsito (DETRAN) de cada unidade da Federação e seguem uma sequência única para todo país. O sistema adotado nos dias de hoje utiliza três letras e 4 números que podem ser distintos ou não. Determine a quantidade máxima de combinações possíveis para as placas de identificação de veículos sabendo que a sequência ABC$\cdot 0000$ não é utilizada.

17. Nos dias atuais, navegando na internet, é muito comum a realização de cadastros em páginas diversas. Para o cadastro, geralmente, é necessário inserir diversas informações pessoais, além de um nome para login e uma senha. A senha, como parte importante do cadastro, garante a segurança do membro confiando somente a este o acesso autorizado. Quanto mais forte a senha, mais protegido estará o computador contra o acesso indevido.

Suponha que certo site requeira a criação de uma senha que tenha 6 caracteres, onde estes são números ou letras do alfabeto, não fazendo distinção de minúscula e maiúscula. Nenhum outro caractere como ponto, vírgula, ou mesmo acentos são permitidos.

a) Quantas são as possíveis senhas que tenham somente letras? E somente números? (distintos ou não)

b) Quantas são as possíveis senhas que tenham exatamente 3 letras e 3 números todos distintos?

c) Quantas são as possíveis senhas?

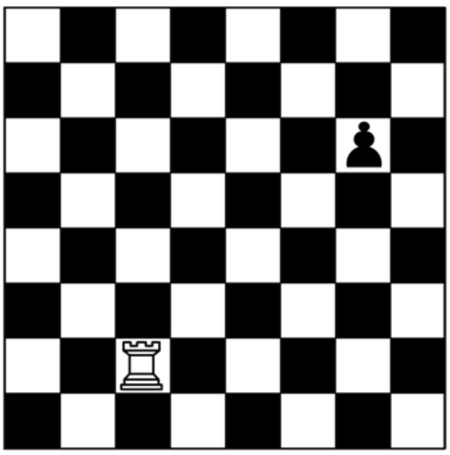
18. Aos números de celulares, a algum tempo, foram acrescentados o nono dígito. De acordo com a Anatel, a medida permite um aumento de disponibilidade de números de telefones móveis (celulares) no Brasil e assim possibilita a crescente demanda de novos usuários padronizando a numeração da telefonia móvel em todo o país.

    Para fazer uma ligação local, por exemplo, basta que o usuário do serviço digite 9XXXX-XXXX, onde cada X representa um algarismo.

    a) Suponha que em certo estado o segundo dígito (depois do 9) seja 8 ou 9, não tendo restrições para os demais. Quantas são os possíveis números de telefones diferentes neste estado?

    b) O acréscimo do nono dígito obrigatório para todos os números de telefone deste estado aumenta a disponibilidade de números de telefones? Explique.

19. O xadrez é um dos jogos mais populares do mundo, sendo praticados por milhões de pessoas em torneios, clubes, escolas, pela internet, por correspondência ou informalmente. Neste, cada peça possui um movimento específico, e uma delas, a torre, é mostrada abaixo:



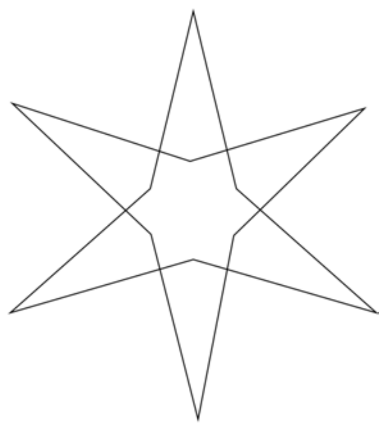
A torre pode movimentar-se na horizontal ou vertical, podendo em cada jogada, seguir por quantas casas for necessário. Considere para as questões a seguir que o peão não se move.

a) Com quantas jogadas, no mínimo, a torre mostrada no tabuleiro captura o peão inimigo?

b) Com movimentos apenas para direita ou para cima, com quantos movimentos, no máximo, a torre captura o peão?

c) Com movimentos apenas para direita ou para cima, quantos são os possíveis caminhos para que a torre capure o peão?

20. Utilizando-se de três cores distintas, de quantas formas podemos colorir a figura abaixo?



21. Qual é o número de Anagramas da palavra BOLA de modo que a letra B não apareça antes da letra A?

22. Os restaurantes Subway® fazem parte de uma rede norte-americana de restaurantes, do tipo franquia, que tem como especialidade a venda de sanduíches e saladas. Para montar um sanduíche, o cliente dispões de várias opções de pães, recheios, queijos, adicionais, vegetais, molhos e temperos.

    - Primeiramente, escolhe-se entre os pães. Tem-se: Italiano branco, 9 grãos, Parmesão e Orégano, Três Queijos e 9 Grãos com aveia e mel.
    - Para os recheios, são muitas as opções: O cliente dispõe de 16 tipos, entre estes, os mais apreciados Steak de Carne Sabor Churrasco, Frango Teriyaki e Peito de Peru.
    - Com os queijos são 3 as opções: Suíço, Prato e Cheddar.
    - O adicional escolhe-se entre Bacon, Tomate seco e Cream Cheese.
    - Os vegetais e os molhos escolhe-se entre 8 disponíveis de cada.

- Para finalizar, o tempero fica por conta de sal, vinagre, azeite de oliva, pimenta calabresa e pimenta do reino.

a) Suponha que um cliente queira montar um sanduíche e, para isso, deseja escolher um de cada ingrediente para montá-lo. Quantas são as opções de sanduíches disponíveis?

b) Outro cliente, por sua vez, faz sua escolha diferente: Este prefere não colocar nenhum tipo de queijo, nenhum adicional, decidiu escolher um vegetal e um molho, e ainda deseja temperar seu sanduíche utilizando três tipos de tempero. Quantas são as opções de sanduíche que ele possui?

23. No Brasil, o Código de Trânsito Brasileiro (CTB) dispões sobre as normas que regulamentam o trânsito em território nacional. Neste, o artigo 64 decreta que as crianças com idade inferior a dez anos devem ser transportadas nos bancos traseiros, salvo com algumas exceções. Normalmente, um automóvel de passeio transporta 5 pessoas. Considere a situação que temos exatamente 5 pessoas para viajar em um destes automóveis e que não há exceções para este caso. Calcule o número de maneiras destas pessoas se sentarem no automóvel para cada caso: (Obs: Considere criança como aquela com idade inferior a dez anos)

    a) Tendo dois adultos e três crianças. Apenas um dos adultos dirige.

    b) Tendo dois adultos e três crianças. Os dois adultos dirigem.

    c) Tendo três adultos e duas crianças. Dois dos adultos dirigem.

    d) Tendo três adultos e duas crianças. Os três adultos dirigem. As duas crianças não podem ficar juntas. (Elas brigam o tempo todo!)

24. Deseja-se pintar as letras da palavra “color” utilizando-se de três cores entre 5 cores disponíveis. Acontece, porém que letras vizinhas não devem ter a mesma cor. Quantas são as maneiras de se colorir?

25. Em informática, um *byte* é um dos tipos de dados integrais em computação. É usado com frequência para especificar o tamanho ou quantidade da memória ou da capacidade de armazenamento de um certo dispositivo, independentemente do tipo de dados. A codificação padronizada do *byte* foi definida como sendo de 8 bits, ou

seja, este simplesmente é um número binário de 8 dígitos. Isso quer dizer que cada byte representa um código de 8 bits, ou seja, uma sequência de 8 zeros ou uns.

Como exemplo de bytes, temos: 10010110, 00010110 ou 01101000.

Com base nas informações dadas, quantos são os números binários de oito dígitos (bytes) que os computadores podem representar?

ANEXO D

Atividade - Problemas (Lista 1)

1. Uma turma do $3^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio possui 22 alunos.

   (i) Aproximando-se da formatura, esta turma precisa organizar-se com os preparativos e decidiram escolher entre estes, 3 alunos para formar um comitê de formatura. Quantas são os possíveis comitês que podem ser formados?

   (ii) Ainda na organização desta formatura, é necessário escolher entre os 12 professores, três para compor a mesa de recepção dos formandos. Quantos são as diferentes possíveis escolhas?

2. A Série A do Campeonato Brasileiro, desde 2007, é disputado por 20 clubes. Cada clube enfrenta outro clube duas vezes durante todo o campeonato que dura de Maio à Dezembro (Um jogo como mandante e outro como visitante). Ao final de todas as partidas, seguindo o sistema de pontos corridos, é campeão o clube que totalizar mais pontos. Os quatro últimos colocados são rebaixados para a Série B do Campeonato Brasileiro. Sabendo disso, responda:

   (i) Ao todo, quantas são as partidas no Campeonato brasileiro?

   (ii) De quantas maneiras podemos ter os quatro clubes rebaixados entre todos os participantes?(Ignore a classificação entre os rebaixados)

ANEXO E

Atividade - Problemas (Lista 2)

1. Uma turma do $3^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio possui 22 alunos.

   (i) Aproximando-se da formatura, esta turma precisa organizar-se com os preparativos e decidiram escolher entre estes, 3 alunos para formar um comitê de formatura. Estes três membros do comitê terão funções específicas. Um deles deve cuidar de definir e contratar o local da festa. Outro será responsável por arrecadar e juntar as verbas entre os formandos. O terceiro pela definição e contratação do bufê. Quantas são os possíveis comitês que podem ser formados?

   (ii) Ainda na organização desta formatura, é necessário escolher entre os 12 professores, três para compor os cargos de patrono, paraninfo e amigo da turma. Quantos são as diferentes possíveis escolhas?

2. A Série A do Campeonato Brasileiro, desde 2007, é disputado por 20 clubes. Cada clube enfrenta outro clube duas vezes durante todo o campeonato que dura de Maio à Dezembro (Um jogo como mandante e outro como visitante). Ao final de todas as partidas, seguindo o sistema de pontos corridos, é campeão o clube que totalizar mais pontos. Os quatro últimos colocados são rebaixados para a Série B do Campeonato Brasileiro. Sabendo disso, responda:

   (i) Ao todo, quantas são as partidas no Campeonato brasileiro?

   (ii) De quantas maneiras podemos ter os quatro clubes rebaixados entre todos os participantes? (Considere relevante a classificação entre os rebaixados)

ANEXO F

Atividade - Exercícios

1. De quantos modos 7 crianças podem brincar em torno de uma roda?
2. De quantos modos 6 crianças podem brincar de roda, de modo que duas delas sempre fiquem juntas?
3. De quantos modos 4 meninos e 4 meninas podem brincar de roda, de modo que crianças do mesmo sexo não fiquem juntas?
4. De quantos modos 6 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, **não** ficando duas determinadas pessoas juntas?