Fernanda de Araujo Monteiro

A aprendizagem algébrica no Ensino Fundamental: uma abordagem a partir dos recursos lúdicos e digitais

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
OUTUBRO DE 2016

Fernanda de Araujo Monteiro

A aprendizagem algébrica no Ensino Fundamental: uma abordagem a partir dos recursos lúdicos e digitais

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Rigoberto Gregório Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
OUTUBRO DE 2016

Fernanda de Araujo Monteiro

A aprendizagem algébrica no Ensino Fundamental: uma abordagem a partir dos recursos lúdicos e digitais

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 20 de outubro de 2016.

Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IF Fluminense Campus
Campos - Centro

Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF

Paulo Sérgio Dias da Silva
D.Sc. - UENF

Rigoberto Gregório Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho ao meu filho, João Gabriel, anjo enviado por Deus para a minha vida, que desde antes da sua chegada a este mundo aprendeu a dividir minha atenção com os estudos e pesquisas deste Mestrado.

Agradecimentos

Agradeço a Deus esta etapa concluída. “Tudo é do Pai...toda honra e toda glória. É dele a vitória alcançada em minha vida".

Agradeço à Minha Mãe do Céu, companheira em todos os instantes desta dura jornada; que me ampara em seu colo nos momentos mais difíceis e se rejubila com minhas conquistas.

Aos meus pais Romelia e Fernando pelos seus cuidados, a esperança e a força para seguir; exemplos de dignidade e perseverança que estarão sempre gravados em minha existência. A presença de vocês em minha vida me traz segurança e certeza de que tudo dará certo, obrigada pelo apoio e amor incondicional.

Agradeço ao meu esposo, Guilherme, pelo incentivo em todas as horas.

A todos os meus familiares, em especial às minhas irmãs Rosiléa e Rosimary, que se dedicaram como mães para o meu filho, para que eu pudesse me ausentar nas horas e horas de estudos e pesquisa.

Ao meu orientador, Prof^{o} Dr^{o} Rigoberto, pela competência, dedicação, apoio e inúmeros ensinamentos; sobretudo pelo olhar de educador, paciente, compreensivo e atento às diversas situações vivencias por mim durante este curso.

Aos meus colegas da turma de mestrado, pela oportunidade de dividirmos durante esse período nossos conhecimentos, alegrias, angústias e desabafos. Em especial aos amigos Bruna, Eduardo, Mariana e Marcelo que compartilharam comigo horas e horas de estudo.

À minha amiga e cunhada Mônica pelas contribuições ao longo desta pesquisa.

Enfim, a todos que, de alguma forma, compartilharam comigo este tempo, me apoiando e auxiliando na realização desse trabalho.

‘‘Educar é possibilitar ao outro as condições necessárias à transcendência, à superação de suas limitações ... Educar é criar, impulsionar e capacitar para a vida. É conceder ao outro a aquisição de saberes essenciais a uma existência digna e promissora’’.

(Gabriel Chalita)

Resumo

Considerando as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Álgebra no Ensino Fundamental, esta pesquisa objetiva analisar se as atividades lúdicas, incluindo os recursos tecnológicos, podem contribuir para o estabelecimento de um elo entre a língua materna e a linguagem algébrica; oportunizando uma aprendizagem rica em significados. Para alcançar este objetivo, foram utilizados como instrumentos de coletas de dados, a entrevista feita com os professores, o questionário, os pré-testes respondidos pelos alunos e as atividades da sequência didática, implementada no período de novembro e dezembro de 2015, em uma escola pública, na cidade de Campos dos Goytacazes, RJ. Os dados coletados foram analisados a partir do referencial teórico consultado, sobre a aprendizagem algébrica, as representações semióticas e a importância das diversas formas de comunicação em matemática. Os resultados constataram que a utilização dos recursos lúdicos e tecnológicos podem, realmente, contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra no Ensino Fundamental. Pode-se citar como contribuições o desenvolvimento da capacidade argumentativa, o desenvolvimento da linguagem algébrica e o avanço nos registros matemáticos feitos a partir de conexões entre linguagens distintas.

Palavras-chaves: Álgebra, linguagens, lúdico, recursos digitais.

Abstract

Considering the difficulties in teaching and learning of algebra in elementary school, this research purpose of examine if the recreational activities including technological resources, can contribute to establish a link between the mother language and the algebraic language; providing opportunities for a rich learning in meanings. To accomplish this aim, interview with the teachers, questionnaires, pretests answered by students and activities of the didactic sequence were used as instruments for data collection between November and December 2015, in a public school in the city of Campos dos Goytacazes, RJ. Collected data were analyzed from the consulted theoretical framework, where there are the considerations about algebraic learning, semiotic representations and the importance of various forms of mathematics communication. The results found that the use of recreational resources and technology can indeed contribute to the process of teaching and learning of algebra in elementary school. It can quote as contributions the development of argumentative skills, the development of algebraic language and advances in mathematical records made from connections between different languages.

Key-words: algebra, languages, playful, digital resources

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PET	PoliTereftalato de Etileno
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
RIVED	Rede Interativa Virtual de Educação
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
TICs	Tecnologias da Informação e Comunicação
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

Sumário

Introdução

Nos últimos anos o processo ensino e aprendizagem da Matemática sofreu mudanças significativas. Desde a valorização exclusiva da memorização e da mecanização, vista nas práticas pedagógicas das décadas de 40 e 50; passando pela Matemática Moderna nos anos 60, até chegar ao "ensino renovado" da década de 90; quando se verificou que "não era nas tarefas de cálculo que os alunos tinham os piores resultados, mas sim nas tarefas de ordem mais complexa, que exigiam algum raciocínio, o uso da linguagem algébrica, a flexibilidade e espírito crítico" (PONTE, 2004); muitos esforços foram dispensados.

A preocupação com a aprendizagem matemática não é fato exclusivo da educação brasileira. Onuchic e Allevato (2004) afirmam que há um trabalho mundial para a reestruturação da Educação Matemática. Ensinar Matemática de forma eficaz é um empenho complexo e não há receitas prontas para isso. Não há um caminho único para ensinar e aprender Matemática.

É fato que, apesar de algumas mudanças já ocorridas, a Matemática continua sendo considerada a grande vilã da vida escolar dos alunos, responsável pelos altos índices de retenção. Verifica-se este fato ao analisar Programas de Avaliação , tais como: PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) (BRASIL, 2013a) e SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) (MEC, 2011).

O PISA objetiva avaliar estudantes matriculados a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental em 65 países e, produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação ministrada nestes países. Assim sendo, os estudantes avaliados estão perto de concluir sua Educação Básica e já devem possuir os requisitos educacionais básicos para prosseguir na vida escolar. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas, de cada país participante, estão preparando seus jovens para exercerem o papel de cidadãos na sociedade contemporânea. Seus resultados devem ser utilizados, pelos gestores, como instrumento para a definição e/ou refinamento de políticas educacionais.

Os conhecimentos em leitura, matemática e ciências são avaliados trienalmente, segundo (BRASIL, 2013a), sendo que a cada edição o foco é centrado em uma área principal a ser avaliada; em 2012, o foco foi em Matemática. Esta edição destaca que o Brasil teve um avanço absoluto na proficiência em Matemática quando feita a comparação entre os dois últimos exames nessa área do conhecimento. Contudo, a melhora não foi suficiente para que o país avançasse no ranking e o Brasil caiu para a 58ª posição em Matemática.

O PISA, (BRASIL, 2013a), destaca que no caso brasileiro, passa de 60% a proporção dos estudantes que não atingiram o nível 2 de proficiência, numa escala que vai até o nível 6. Este resultado mostra que os estudantes ainda não são capazes de utilizar a linguagem matemática para resolver situações-problema elementares. Desta forma, o conceito chave utilizado nos testes do PISA, “o letramento” ainda não foi alcançado por muitos deles. O letramento em Matemática no PISA 2012 é definido da seguinte maneira:

> Letramento em matemática é a capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2013a, p. 18).

Os testes aplicados no PISA requerem as capacidades fundamentais do educando em Matemática, simultaneamente e sucessivamente. Nesse caso, o mesmo deve utilizar: comunicação; “matematização”; representação; razão e argumentação; delineamento de estratégias para resolver problemas; utilização de linguagem e operações simbólicas, formal e técnica; e utilização de ferramentas matemáticas. Portanto, o aluno precisa ser inserido numa formação que não valorize apenas o armazenamento de dados, a memorização e a repetição de procedimentos técnicos.

Os resultados obtidos pelo SAEB, (MEC, 2011), também são preocupantes em relação à Matemática. Este sistema é composto por processos de avaliação, e um deles tem seu foco em cada Unidade Escolar; por seu caráter universal, recebe o nome de Prova Brasil. Ela tem como objetivo avaliar a qualidade do ensino nas escolas das redes públicas, produzindo informações sobre os níveis de aprendizagem em Língua Portuguesa (Leitura) e em Matemática. Os dados apresentados visam servir de subsídio para o planejamento do trabalho pedagógico da escola, bem como para a formulação de ações e políticas públicas com vistas à melhoria da qualidade da educação básica.

Dados da Prova Brasil 2013, (BRASIL, 2013b), mostram que o índice de alunos de escolas públicas que concluem o Ensino Fundamental com nível de aprendizado considerado adequado em Matemática foi de 11,2% para os estudantes do 9º ano, índice inferior ao registrado na prova anterior, de 2011, quando a média foi de quase 12% . A média nacional em Matemática foi de 242,35 pontos, o que corresponde ao nível 2 (insuficiente), num total de 9 da escala da Prova Brasil. Os alunos neste estágio ainda não conseguem responder comandos operacionais compatíveis com o 9º ano do Ensino Fundamental, como por exemplo : resolver problemas que envolvem equações do 1^o e 2^o graus e transpor o que está sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática específica. Enfim, os itens referentes à Álgebra, raramente atingem 40% de acertos em muitas regiões do país.

A Prova Brasil, BRASIL (2013b), é elaborada a partir de descritores, e aqueles relacionados à aprendizagem algébrica são:

D30 Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica;

D31 Resolver problema que envolva equação de segundo grau;

D32 Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões);

D33 Identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema;

D34 Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema;

D35 Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau;

Analisar se realmente esses processos avaliam de fato a educação no Brasil é outra discussão que não reflete o objetivo deste trabalho. Contudo, os resultados dessas avaliações possibilitam uma reflexão sobre a necessidade de repensarmos o processo de aprendizagem e ensino da Matemática, em especial, a educação algébrica. Visto os resultados, insuficientes, dos estudantes nas questões de Álgebra.

Os resultados divulgados mostram que faz-se necessário inovar ações pedagógicas que promovam a formação de um aluno autônomo e motivado a compreender a construção dos conceitos e a linguagem próprios da Matemática. Educandos capazes de não apenas manipular símbolos ou resolver inúmeros exercícios do mesmo tipo, mesmo que não os compreendam; mas sujeitos capazes de pensar e se comunicar matematicamente.

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizam o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados (BRASIL, 2006, p. 70).

Este trabalho é, então, motivado por um questionamento da pesquisadora, enquanto professora da Educação Básica: ”Qual o motivo da grande dificuldade na resolução de situações-problema nas quais os dados são oferecidos na linguagem materna e a resolução precisa de registros algébricos e vice-versa?”

Essa inquietação fundamenta a seguinte questão investigativa: A utilização da linguagem algébrica, abstrata e sem significado para a maioria dos alunos, e sua conexão com a língua materna é dificultada pelos recursos pedagógicos utilizados pelo professor?

Nesta perspectiva encontramos também outros estudos. Dentre eles destacam-se as dissertações de Freitas (2014) intitulada “Atividades Algébricas no 6^o ano do Ensino Fundamental com materiais manipuláveis", Marcussi (2013) "Álgebra no Ensino Fundamental" e Silva (2016) "Introdução à Álgebra no Ensino Fundamental - o "X" da questão".

Freitas (2014) utiliza as sequências e os padrões para introduzir o estudo de conceitos algébricos no 6^oano do Ensino Fundamental. A proposta didática elaborada pela autora, utiliza materiais manipuláveis e serve de inspiração para professores interessados em trabalhar o desenvolvimento do raciocínio algébrico desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

A proposta de Marcussi (2013) identifica as eventuais dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra e apresenta contribuições para que o professor possa refletir sobre o ensino e aprendizagem da mesma e assim, melhorar sua prática. Ela contempla atividades aplicadas apenas no 8^o ano do Ensino Fundamental.

Silva (2016) investigou como introduzir a Álgebra no Ensino Fundamental de forma expressiva, clara e significativa para o aluno, colaborando para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. Explora as possibilidades e os benefícios da introdução da Álgebra por meio dos padrões e regularidades e organiza uma sugestão de sequência didática aplicada numa turma de 7^o ano do Ensino Fundamental.

Como nos trabalhos citados anteriormente, a proposta desta pesquisa também enfatiza a aprendizagem da Álgebra no Ensino Fundamental; este estudo é desenvolvido com o objetivo de analisar se as atividades lúdicas, incluindo os recursos tecnológicos, podem contribuir para o estabelecimento de um elo entre a língua materna e a linguagem algébrica; oportunizando uma aprendizagem rica em significados.

Para alcançar o objetivo geral desta pesquisa, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar os conhecimentos dos alunos, participantes deste estudo, sobre as habilidades algébricas próprias para o ano de escolaridade em curso.
- Identificar como os professores, de uma escola municipal de Campos dos Goytacazes, abordam a Álgebra no Ensino Fundamental.
- Proporcionar aos alunos participantes, situações evidenciadas pela argumentação e pelo compartilhamento de informações.
- Analisar os resultados diagnosticados na aplicação da sequência didática, quanto a utilização dos recursos lúdicos e digitais.

Previamente, foi realizada uma entrevista, com professores, e aplicado um questionário, aos alunos destes professores, a fim de verificar se os referidos recursos são utilizados em suas aulas de Matemática. Em uma outra etapa, foram elaboradas, aplicadas e analisadas as atividades da sequência didática, que foram propostas a partir da análise dos resultados do pré-teste, respondido pelo alunos.

Para descrever o desenvolvimento deste trabalho a estruturação dos capítulos é feita da seguinte forma:

No capítulo 1 são apresentados algumas perspectivas sobre o ensino da Álgebra: aspectos históricos; educação algébrica; a influência da Aritmética e o currículo algébrico, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (1998).

O capítulo 2 faz uma exposição sobre a linguagem e a construção do conhecimento. Neste são abordados as diversas linguagens utilizadas pelos educandos entre elas a linguagem algébrica, tecnológica e lúdica.

No capítulo 3 estão descritos os aspectos metodológicos da pesquisa; são expostos os dados obtidos a partir da análise das entrevistas, feitas com professores do Ensino Fundamental, e das respostas do questionário aplicado aos alunos. Neste capítulo também estão apresentadas as etapas da sequência didática a ser aplicada em cada ano do Ensino Fundamental.

A descrição da proposta didática é apresentada no capítulo 4. Neste, estão apresentados os resultados, por meio da análise das atividades que compõem a sequência didática e das observações feitas pela pesquisadora.

O capítulo 5 apresenta as considerações finais relacionadas à proposta do trabalho e avalia as conclusões obtidas. Faz-se uma breve retrospectiva focalizando os principais resultados obtidos, as dificuldades encontradas e sugestões para possíveis aplicações posteriores.

Finalmente, são apresentados a lista de referência bibliográficas, os anexos e os apêndices.

Capítulo 1

O Ensino da Álgebra

Baugart (1992) apresenta a palavra Álgebra como uma variante latina da palavra árabe al-jabr, usada no título de um livro Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa alKhowarizmi. Uma tradução, que segue palavra por palavra o texto original, a Álgebra é "ciência da restauração (ou reunião) e redução", mas matematicamente seria melhor "ciência da transposição e cancelamento", ou ainda talvez a melhor tradução fosse "a ciência das equações".

A Álgebra, como ciência das equações, é a forma como muitos professores e alunos a definem até os dias de hoje; contudo, não podemos limitá-la a esta definição. Para Lins e Gimenes (2006), a Álgebra pode contribuir, de forma eficaz, para que o aluno pense abstratamente, se forem proporcionadas aos mesmos, experiências variadas envolvendo as noções algébricas e se o currículo for organizado para uma "Educação Algébrica".

Neste capítulo serão apresentados aspectos relacionados a esta Educação Algébrica em perspectivas histórica, curricular e aritmética. Visto que, estas abordagens serão de fundamental importância para consolidar a proposta pedagógica que será apresentada neste trabalho.

1.1 Aspectos históricos do ensino da Álgebra no Brasil

É provável que as dificuldades encontradas hoje no ensino da Álgebra no Brasil, podem estar relacionadas à sua inserção no currículo, e evolução até os dias atuais. Portanto, faz-se necessário uma breve abordagem histórica, sobre a forma com que ela é apresentada no currículo brasileiro ao longo do tempo. Para isto, se utilizará como base uma leitura crítica da obra Contribuições para um repensar...a Educação algébrica elementar, dos autores Fiorentini, Miguel e Miorim (1993).

Legalmente, a Álgebra foi introduzida no currículo educacional brasileiro com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799. A Álgebra seria trabalhada como disciplina isolada, ao lado da Aritmética, da Geometria e da Trigonometria, que já compunham a grade curricular;

contudo, cada uma com seus programas, livros e professores distintos.Estas áreas do conhecimento eram trabalhadas em compartimentos estanques.

Em 1931 foi elaborada a "Reforma Francisco Campos", um conjunto de decretos, que organizou a educação do Brasil. Naquele momento, a Matemática passou a ser trabalhada uma única disciplina e, gradativamente, foram deixando de ser editados livros didáticos separados de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.Tanto antes quanto depois da Reforma Francisco Campos, os tópicos algébricos que eram abordados no currículo brasileiro, são os seguintes: cálculo algébrico (inclusive operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações do 1º grau, sistemas de equações, radicais (operações e propriedades), equações do 2º grau, trinômio do 2º grau, equações redutíveis ao 2º grau, problemas do 2º grau, sistemas de equações do 2º grau.

É importante destacar que só no início do século XIX que a Álgebra passou a ser estudada no ensino secundário brasileiro. Desde aquela época até o início da década de 60, a aprendizagem algébrica acontecia mecanicamente; a reprodução de estruturas e a memorização de regras eram os aspectos valorizados. Acreditavam-se que obtendo-se desta forma, expressões equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades, seria suficiente para que o aluno fosse capaz de resolver problemas, ainda que estes fossem quase sempre artificiais. Essa concepção algébrica foi denominada, pelos autores, como **linguístico-pragmática**.

Com o Movimento da Matemática Moderna,que predominou no país nas décadas de 1970 e 1980, que apostava na introdução de elementos unificadores dos campos da Matemática, a Álgebra ganha lugar de destaque; passa a fundamentar os vários campos da matemática escolar. Este Movimento também objetivava superar a forma mecânica e reprodutiva do ensino da Álgebra e foi denominado como **fundamentalista estrutural**.

> A ideia que a norteava era de que a introdução de propriedades estruturais dos números que justificassem logicamente cada passagem do transformismo algébrico capacitaria o estudante a aplicar essas estruturas nos diferentes contextos a que estivessem subjacentes (GOMES, 2013, p. 36).

Com o decorrer dos anos e declínio da Matemática Moderna , no final da década de 1970, os educadores focaram seus esforços para dinamizar o ensino da Geometria, e a Álgebra acaba perdendo o seu lugar de destaque; aparece apenas como instrumento para resolver problemas. Esta proposta que recupera o valor instrumental da Álgebra, foi identificada, pelos autores, como **fundamentalista-analógica**. Para os mesmos, esta concepção algébrica pretende manter o caráter de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico. Entretanto, para se justificar as passagens, não mais se faz apelo às propriedades estruturais dos números, como na concepção fundamentalista-estrutural, mas as justificativas passam a ser baseadas em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Com ela, o ensino da Álgebra parece retroceder, conforme o citado abaixo:

> Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática Moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo - o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário a resolução de problemas e equações (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 51).

.

Para os autores, o problema das três abordagens algébricas, identificadas anteriormente é que a partir das mesmas, o ensino e a aprendizagem ficam reduzidos às habilidades manipulativas. A prioridade está na linguagem algébrica já construída; em detrimento da construção do pensamento algébrico e da ressignificação de sua linguagem própria. A Álgebra fica reduza à manipulação das regras de sua linguagem

Ponte (2004), afirma que há duzentos anos poderíamos dizer que os objetos fundamentais da Álgebra seriam certamente as equações, mas hoje esta resposta não é suficiente. A forma ideal de indicar o objetivo fundamental da Álgebra, ao nível da Educação Básica, é dizer que esta visa o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Este princípio pedagógico, que destaca o pensamento algébrico como algo independente do domínio das regras da linguagem algébrica, vem sendo manifestado entre os pesquisadores em Educação Matemática desde os anos 80. Por exemplo, os autores (LINS; KAPUT, 2004, p. 10) referiram-se ao pensamento algébrico como “algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais”. Essa generalização, indicada pelo autor, pode acontecer em diversos contextos matemáticos: aritméticos ou geométricos, por exemplo e também em outras áreas do conhecimento.

De acordo com o contexto apresentado até aqui, faz-se necessário uma discussão sobre as tendências atuais da educação algébrica para fundamentar esta pesquisa. O que será feito na sequência deste capítulo.

1.2 A Educação Algébrica

Nesta seção e na seguinte, são enumeradas algumas concepções relacionadas ao ensino e aprendizagem da Álgebra baseadas na compreensão de Lins e Gimenes (2006), retratada na obra Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI e no artigo de

Usiskin (1995) intitulado Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.

Lins e Gimenes (2006) afirmam que não há um consenso sobre o que seja pensar algebricamente. Eles destacam que, as diferentes ideias a respeito da atividade algébrica são responsáveis pelas variadas concepções existentes de educação algébrica. Assim, apresentam quatro possíveis linhas que caracterizam a atividade algébrica.

Para muitos educadores, a atividade algébrica é resumida ao cálculo com letras e algoritmos; caracterizada pelas notações. Esta tendência, denominada **"letrista"** é encontrada, de forma predominante, nos livros didáticos brasileiros; por isso, se faz tão conhecida em nossas escolas. Nesta concepção, a Álgebra é vista puramente como atividade de cálculo literal.

Outra concepção de educação algébrica é a **"facilitadora"**; baseada em situações criadas com finalidade didática, partindo do que é conhecido pelo aluno. Por exemplo, o uso do conceito de áreas para trabalhar os produtos notáveis.

Lins e Gimenes (2006) consideram como equivocadas as duas concepções de Educação Algébrica apresentadas anteriormente. A "letrista" por não estar baseada em qualquer investigação ou reflexão. E a "facilitadora", pelo fato dos educandos não estabelecem a ligação entre o trabalho com o "concreto"e o "formal"; ou seja, ainda não realizam a abstração necessária. Segundo Piaget (1976), o pensamento formal é o ápice do desenvolvimento da inteligência e corresponde ao nível de pensamento hipotético-dedutivo ou lógico-matemático. É quando o indivíduo está apto para realizar cálculos, libertando-se do concreto em proveito de interesses orientados para o futuro.

A terceira concepção de educação algébrica apresentada pelos autores é aquela em que a **atividade com o "concreto"** se torna disparadora da aprendizagem. Nessa proposta, as atividades têm caráter investigativo a partir de situações reais ou "realistas", criadas com finalidade didática, a partir do próprio cotidiano dos alunos. O conhecimento algébrico é tratado como uma ferramenta de leitura do mundo.

Uma quarta concepção seria a **"Álgebra como Aritmética generalizada"**; que enfatiza a atividade algébrica como expressão da generalidade. Vale ressaltar como os autores distinguem generalidade e generalização. Generalidade refere-se diretamente ao que é geral em uma situação, sem intermediação de casos particulares, enquanto generalização refere-se ao falar do que é comum a um conjunto de casos particulares. Nesta abordagem, o objetivo principal é o envolvimento do aluno na organização dos dados oferecidos e no estabelecimento de relações entre eles; o pensamento algébrico opera sobre as operações (concretas) aritméticas.

Para Lins e Gimenes (2006) , só acontece uma atividade algébrica quando há um processo de produção de significados para a Álgebra. Os autores definem Álgebra como um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade. Para os mesmos, a atividade algébrica e a aritmética ocorrem de forma concomitante, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra.

Desta forma, para os autores, a educação algébrica deve estar estruturada numa proposta de trabalho que se baseie na produção de significados, não em conteúdo; que priorize a capacidade de pensar algebricamente. Trabalhar com significados possibilita ao professor um olhar atento a todo o processo de aprendizagem do aluno. O significado é o conjunto de informações dadas a respeito de um objeto, por quem o interpreta; não na notação. Produzir significados é expressar-se a respeito do dado objeto . Muitos significados foram produzidos de tal forma que se tornaram "padrões"como no caso, por exemplo, de considerarmos que ”x sempre é a incógnita“. Os autores afirmam, que:

> Se a análise da atividade algébrica e aritmética não é feita do ponto de vista dos significados, fica difícil entender a questão da adequação, e ficamos em grande parte restritos a pensar que o ”poder“ da “notação algébrica“, é absoluto. (...) Ao pensar a educação matemática em termos de significados, é possível um tratamento mais correto desse processo (LINS; GIMENES, 2006, p. 165).

Usiskin (1995) identifica quatro diferentes concepções de Álgebra, associadas aos variados papéis que a ”variável“ pode assumir. Na base do processo de educação algébrica está o conceito de variável. A variável é uma representante de um conjunto, sem ser especificadamente nenhum de seus elementos; pode desempenhar papéis distintos (elemento genérico de certo conjunto numérico, variável dependente ou independente, parâmetro, incógnita, símbolo qualquer de uma estrutura...) O processo de construção deste conceito está diretamente ligado à variedade de papéis que a Álgebra pode assumir:

- A Álgebra como Aritmética generalizada, que coincide com a concepção de Lins e Gimenes (2006), trata as variáveis como generalizadoras de modelos;
- A Álgebra como estudo de meios para resolver problemas. Nesta concepção, a equação é vista como o resultado da tradução de um desafio, que precisa ser resolvido, para a linguagem algébrica. A letra aparece não como algo que varia, mas como uma incógnita, isto é, um valor a ser encontrado.
- A Álgebra como o estudo da relação entre grandezas. A diferença entre esta concepção e a anterior é que, nela, as letras se apresentam como “variáveis” e não como incógnitas. “Dentro desta terceira concepção, a Álgebra se ocupa de modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. Uma variável é um argumento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, um número do qual dependem outros números)“ (GOMES, 2013, p. 15).

- A Álgebra como estudo das estruturas:

> No curso superior de Matemática, o estudo de Álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a Álgebra da escola básica, embora sejam essas estruturas que fundamentam a resolução de equações nesse nível de ensino. Contudo, podemos reconhecer a Álgebra como estudo das estruturas na escola básica pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios (GOMES, 2013, p. 16).

.

1.3 O ensino e aprendizagem de Álgebra e Aritmética

Lins e Gimenes (2006) destacam que a comunidade de “ Educação Matemática” propõe a ideia de que a aprendizagem da Aritmética deve preceder a da Álgebra; visto que esta última depende do pensamento operatório formal. Essa questão se relaciona aos níveis de desenvolvimento da aprendizagem indicados por Piaget (1976) e fundamenta a ideia de que o ensino e aprendizagem da Álgebra na escola deveriam ser inicializados, por volta dos 14-15 anos de idade. Ainda sobre esta abordagem, os autores afirmam :

> Nossa leitura da produção de significados para a Álgebra e para a Aritmética sugere exatamente o contrário: é preciso começar mais cedo o trabalho com Álgebra, e de modo que esta e a Aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra (LINS; GIMENES, 2006, p. 113).

Esta concepção de que o pensamento algébrico deve ser desenvolvido desde os primeiros anos da Educação Básica, é fundamentada pelos pesquisadores Lins e Kaput (2004), Carpenter (2001), Usiskin (1995), Booth (1995).

Butto e Rojano (2004) também destacam que deve-se aproveitar as diversas fontes de significados, oportunizadas pelos conteúdos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, para desenvolver o pensamento algébrico ; já que os tempos didáticos para a aprendizagem algébrica são demorados. Assim, justificam que parte das dificuldades dos educandos ao trabalhar com Álgebra nos últimos anos do Ensino Fundamental se deve à introdução tardia desta linguagem.

Para Lins e Gimenes (2006), o grande objetivo da educação aritmética e algébrica deve ser estabelecer o equilíbrio entre três frentes:

> i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de integrar e explorar situações; ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização; e, iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade (LINS; GIMENES, 2006, p. 165).

Sobre este equilíbrio proposto pelos autores e a conexão entre Álgebra e Aritmética, Booth (1995) destaca que os educandos trazem para a aprendizagem algébrica, muitas dificuldades encontradas no estudo da Aritmética, ou não compreendem o porquê de alguns procedimentos operatórios próprios da Aritmética não se estenderem à Álgebra. Vale enfatizar:

- A sequência que determina a ordem de resolução de uma expressão : Sobre esta situação o autor exemplifica com uma questão na qual é necessário o cálculo da área de um retângulo de dimensões $a + m$ e p. O aluno dá como resposta $p.a + m$, ignorando a necessidade dos parênteses. Neste caso, a visão incorreta da representação aritmética ocasiona o erro do aluno.

- Uma parte da simbologia algébrica é usada no estudo aritmético com significados diferentes: Como exemplo temos a multiplicação a partir da justaposição. Em Álgebra, usamos ab para indicar a multiplicação de a por b, $a.b$. O mesmo não se aplica no contexto aritmético; 56 não é o mesmo de 5 x 6.

- A interpretação dos símbolos operatórios: Em Aritmética, estes símbolos indicam ações a serem realizadas objetivando um único resultado; e em Álgebra, nem sempre, este fato ocorre. Neste contexto, um erro frequente dos alunos é apresentar $5xy$ como resposta da soma dos monômios $2x$ e $3y$. Segundo referido autor, podemos considerar que estes alunos ainda não compreenderam a “ausência do fechamento”.

  Sobre a ausência desta mesma propriedade, observa-se questões como esta: “Se $a + b = 10$, então $a + b + c = ...?$ ”Muitos alunos não aceitam $10 + c$; como não corresponde a um único resultado, os alunos acreditam “ ter mais coisas a fazer”.

- O uso das letras para indicar valores é outro ponto de divergência entre Álgebra e Aritmética. “A letra m, por exemplo, pode ser usada em Aritmética para representar $metros$, mas nunca para representar o número de metros, como em Álgebra” (BOOTH, 1995). Essa mudança ocasiona uma confusão por parte dos alunos, que inicialmente uma letra representava algo conhecido, no caso uma unidade de medida, o metro; e agora, um valor desconhecido que pode variar.

- Booth (1995) destaca também a necessidade de se trabalhar o valor bidirecional do sinal de igualdade. O aluno com experiência apenas em Aritmética, muitas vezes, considera o símbolo de igualdade como unidirecional. Por este motivo importante que desde os primeiros anos escolares o professor trabalhe paralelamente relações do tipo $a + b = c$ e $c = a + b$.

Apesar das dificuldades dos alunos no contexto algébrico, pode ser observado que Álgebra ocupa um lugar de destaque no currículo escolar brasileiro, conforme o que pode ser observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (1998).[1].

[1] A partir deste parágrafo, não será indicada a referência indireta dos PCNs, Parâmetros Curriculares Nacionais, para favorecer a fluidez do texto

1.4 A Álgebra e os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, instrumento oficial de apoio às discussões pedagógicas e que fundamentam os currículos escolares em nosso país, enfatizam que a aprendizagem algébrica significativa deve acontecer a partir de situações-problema, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas:

> Pela exploração de situações-problemas o aluno deve reconhecer diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representar problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreender a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50-51).

Segundo os PCNs, pode ser introduzida nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma pré-álgebra; que possibilita o contato dos educandos como os diversos aspectos da algébricos a partir da ampliação do pensamento abstrato. É indicado um trabalho informal, vinculado com a aritmética e que deve ser retomado no 3º ciclo (6º e 7º anos do Ensino Fundamental) para que as concepções sejam consolidadas e os conceitos algébricos ampliados.

Para o 3º ciclo, os PCNs afirmam que não é fundamental que seja trabalhado as expressões algébricas e equações de forma muito aprofundada, pois revelam ser suficiente que o educando nessa fase conheça a noção de variável e possa reconhecer a expressão algébrica como instrumento que traduz relações existentes entre a variação de grandezas, deixando as técnicas convencionais para o 4º ciclo (8^o e 9^o anos do Ensino Fundamental).

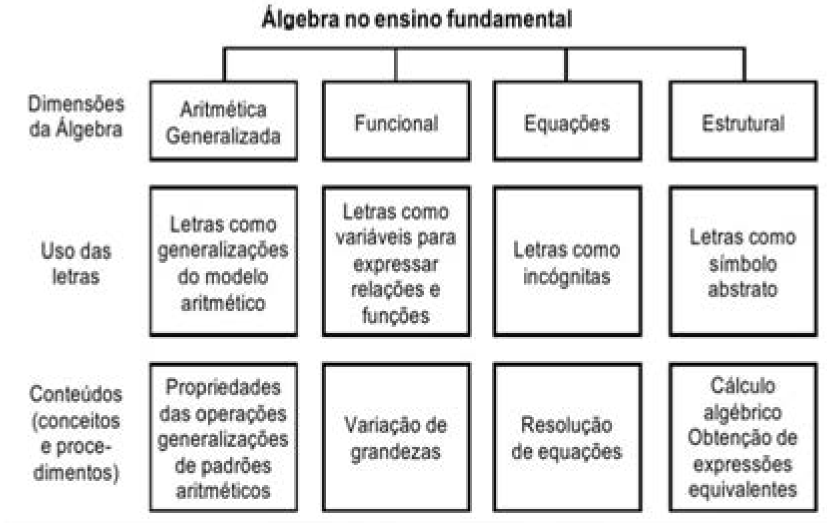
De forma sintética, para o 4^o ciclo, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 81) apresentam como habilidades básicas para os alunos:

- produzir e interpretar diferentes escritas algébricas expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações e sistemas;
- resolver situações-problema por meio de equações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática trazem as diferentes interpretações da Álgebra: Aritmética Generalizada, Funcional, Equações e Estrutural. Como mostra a Figura 1.

Silva (1997) destaca que os PCNs trazem todas as concepções da Álgebra com o objetivo da produção da linguagem simbólica das letras. E, para a compreensão de

Figura 1 – Álgebra no PCN



Fonte: PCN 1998, p. 116

conceitos e procedimentos algébricos, se faz necessário um trabalho articulado com essas quatro dimensões ao longo dos terceiro e quarto ciclos.

A partir das informações apresentadas na Figura 1, identifica-se a importância, ressaltada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, da necessidade de propor situações de aprendizagem que oportunizem aos alunos a elaboração dos conceitos algébricos a partir da compreensão de registros distintos. No **Registro Aritmético** a linguagem algébrica é usada para expressar ou traduzir padrões numéricos e geométricos. No **Registro Funcional** são expressas relações e variáveis. No **Registro de Equações** as letras são entendidas como incógnitas. No **Registro Estrutural**, a letra assume a dimensão de símbolo abstrato. Este documento destaca ainda que, o trabalho com a Álgebra no Ensino Fundamental também deve envolver os **Registros na Língua Materna**, aqueles apresentados na língua natural e, finalmente, o **Registro Figural**, que se refere às figuras geométricas e gráficos.

Capítulo 2

As linguagens e a construção do conhecimento

Neste capítulo será destacada a importância da linguagem no processo de construção do conhecimento, apoiada na teoria de Lev Seminovitch Vygotsky (1896-1934); visto que é a partir de variadas formas de comunicação que a aprendizagem matemática acontece.

Vygotsky (1991) considera que a aprendizagem é um processo social, que ocorre por meio de possibilidades criadas pelas mediações do indivíduo em um dado contexto sócio-histórico.

O autor afirma que o processo de construção do conhecimento é uma experiência social, mediada pela utilização de instrumentos e signos, algo significativo para o indivíduo; como, por exemplo, a linguagem falada e a escrita. E para que esta ocorra, a interação entre a linguagem e a ação deve acontecer dentro da zona de desenvolvimento proximal (ZDP), que seria a distância existente entre o que o indivíduo já conhece, seu conhecimento real, e aquilo que o sujeito possui potencialidade para aprender, seu conhecimento potencial.

> Dessa forma, a aprendizagem ocorre no intervalo da ZDP, onde o conhecimento real é aquele que o sujeito é capaz de aplicar sozinho, e o potencial é aquele que ele necessita do auxílio de outros para aplicar.(...) O professor deve mediar a aprendizagem utilizando estratégias que levem o aluno a tornar-se independente e estimule o conhecimento potencial, de modo a criar uma nova ZDP a todo momento; mas também deve permitir que este aluno construa seu conhecimento em grupo com participação ativa e a cooperação de todos os envolvidos (MOREIRA, 1995, p. 50-51).

Para Vygotsky (1991) os fenômenos psicológicos têm uma componente social que não pode ser desprezada: estes dependem das experiências sociais e estão incorporados nos artefatos culturais (incluindo os tecnológicos); objetos manipuláveis, linguagens e símbolos; além das ferramentas digitais.

O autor destaca que o homem se produz nas e pelas linguagens, isto é, na interação com as diversas formas de expressão. Assim, seguem, identificadas, algumas formas de linguagem que serão abordadas nesta proposta de trabalho.

2.1 A linguagem matemática

A linguagem matemática, para Ambrósio (1986), apresenta-se de forma mais fina e precisa que a linguagem natural, permitindo ao homem utilizá-la ao comunicar-se sobre fenômenos variados. Consequentemente, ela se desenvolve no curso da história e, portanto, intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve.

Pode-se afirmar que a Matemática é uma linguagem universal; é como se tivéssemos uma maneira própria de falar, de ler e de se comunicar em outra língua; que foi desenvolvida para facilitar a comunicação entre as pessoas. Mas, na prática, nem sempre este fato ocorre:

> O excesso de simbologia gera, muitas vezes, dificuldades desnecessárias para o aluno, chegando inclusive a impedir que ele compreenda a idéia representada pelo símbolo.(....) A linguagem matemática desenvolveu-se para facilitar a comunicação (ZUCHI, 2004, p.51).

Estes símbolos, que a autora destaca, próprios da linguagem matemática, possuem formalismos próprios que acabam dificultando a sua compreensão. Além deste fato, muitas vezes as dificuldades na aprendizagem desta disciplina são acentuadas quando a escola não se preocupa em trabalhar a compreensão dos mesmos e seus respectivos significados.

Machado (apud Smole, 2000) destaca que a primeira característica da linguagem matemática é o fato de que ela, como linguagem científica, não possui oralidade própria: está totalmente voltada para a escrita. A segunda característica, é que ela ocorre a partir do estabelecimento de relações entre sinais.

> A escrita em geral, os diversos sistemas de representação e notação inventados pelo homem ao longo do século têm por função semiotizar, reduzir a uns poucos símbolos ou a alguns poucos traços os grandes novelos confusos da linguagem, sensações e memória que formam o nosso real. (SMOLE, 2000, p.65).

Elaborar registros e se comunicar utilizando a linguagem matemática é mostrar-se portador de habilidades próprias. Pode-se dizer que esta comunicação acontece a partir de uma forma de linguagem diferente da materna, que é uma linguagem natural. A linguagem matemática é uma linguagem construída e a partir dela, o indivíduo pode analisar e compreender situações-problema diferenciadas , decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, expressar-se e fazer registros; relacionando desta forma, seus elementos com a linguagem materna.

> Aprender matemática é, em grande parte, aprender e utilizar suas diferentes linguagens – aritmética, geometria, álgebra, gráfica, entre outras. Na atualidade, as linguagens matemáticas estão presentes em quase todas as

> áreas do conhecimento. Por isso o fato de dominá-las passa a constituir-se um saber necessário considerando o contexto do dia-a-dia (KLUSENER, 2001, p.177).

Os PCNs destacam que ao concluir a Educação Básica os alunos devem ser capazes de utilizar variadas linguagens como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias. Este documento ressalta que, ao se comunicar matematicamente o aluno deve descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (BRASIL, 1998, p. 48).

2.1.1 A linguagem algébrica

É fato que o aprendizado da linguagem natural não ocorre de imediato, e com a linguagem algébrica não é diferente. Esta última possui características específicas, muitas vezes afastadas da realidade dos alunos. Alguns deles mostram-se habilidosos ao resolver expressões algébricas mecanicamente, mas, em geral, não sabem o significado dos resultados encontrados e não os associam com conhecimentos adquiridos previamente.

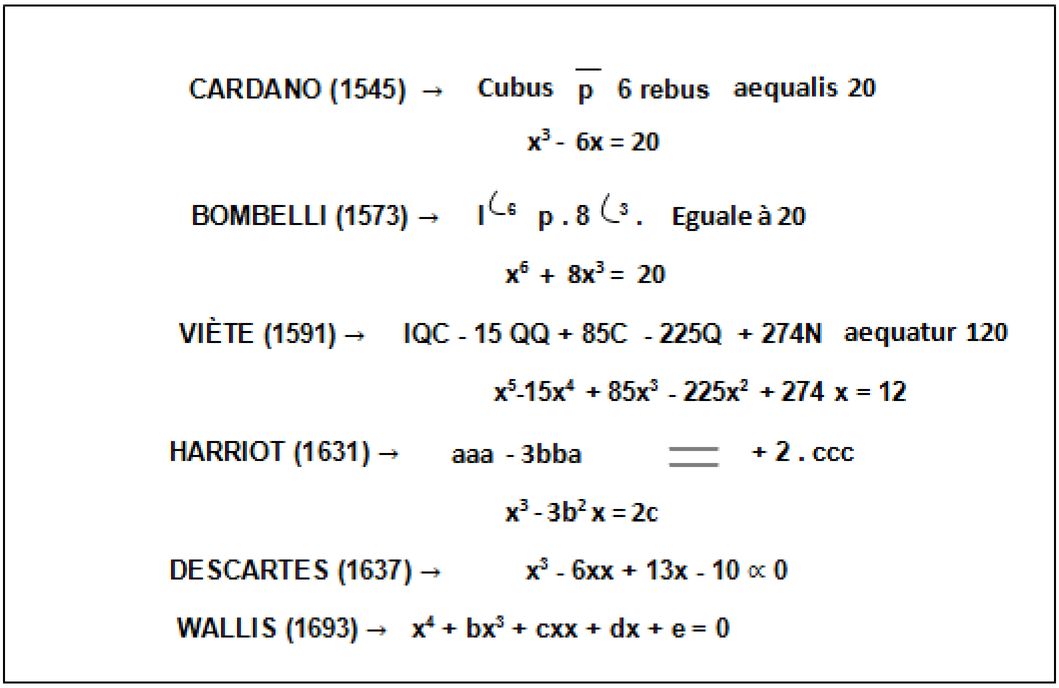
Marcussi (2013) afirma que não se pode utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização. Desta forma, a autora justifica que o pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem e por este motivo Álgebra perde seu valor de instrumento que desenvolve um raciocínio mais abrangente e dinâmico.

Ainda nesta discussão, Carmo (2001) enfatiza que a dificuldade na utilização da linguagem algébrica é um dos fatores responsáveis por reprovação em Matemática. Para o autor, dominar este tipo de linguagem significa conhecer seus códigos verbais e suas notações próprias a fim de que a leitura de expressões matemáticas apresente algum sentido lógico para quem as lê.

Baugart (1992) destaca que o desenvolvimento da notação algébrica ocorreu em três estágios: o retórico ou verbal (tudo escrito com palavras), o sincopado (eram usadas abreviações) e por último o simbólico (uso de símbolos). O simbolismo moderno passou a ser utilizado a partir de 1500. Na Figura 2, há exemplos que mostram este processo de desenvolvimento, os aperfeiçoamentos e a padronização das notações.

Ao analisar os padrões observados por Baugart (1992), **??**) reflete que a Álgebra no início do século XVI se restringia a encontrar os valores desconhecidos numa dada equação; sem ainda utilizar a ideia de generalização. A utilização de consoantes para representar parâmetros e vogais para representar variáveis, surgiu com Viète(1540-1603). Já a passagem para uma notação algébrica totalmente simbólica só ocorreu durante o intervalo de tempo entre Viète e Descartes(1596-1650).

Figura 2 – Simbolismo Algébrico



Fonte: Baumgart (1992, p. 12 e p.13)

Sendo a Matemática uma ciência repleta de símbolos, o indivíduo que pretende compreendê-la deve se apropriar dos mesmos, sobre esta afirmativa, Danyluk (1993) acrescenta:

> Se a Ciência Matemática tem a peculiaridade de ser expressa em uma linguagem simbólica, pode-se afirmar que, ao ler um texto de Matemática, o homem envolve-se com simbolismos; o leitor deve familiarizar-se com os símbolos mostrados no discurso. Por outro lado, é preciso considerar, também, que o leitor deve encontrar significado nesses registros [...](DANYLUK, 1993, p. 39).

Um aporte teórico que objetiva conectar o pensamento do indivíduo com os registros matemáticos é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Este estudo destaca que para que a aprendizagem matemática ocorra, um objeto deve passar, necessariamente, por variadas representações que irão facilitar sua compreensão e significado. Dessa forma, a utilização dos registros de representação semiótica pode oferecer significado aos conhecimentos algébricos.

Para Duval (2003), a conexão da Álgebra com a linguagem de símbolos reside no fato de que para pensar sobre fatos e conceitos matemáticos é fundamental uma representação interna realizada pelo cérebro, que é capaz de operar e comunicar estes fatos e conceitos. Da mesma forma, faz-se necessário uma representação externa que nos permite realizar a comunicação. Desta maneira, os signos externos de representação têm um equivalente mental.

O autor afirma que as representações mentais e as representações externas não podem ser tratadas separadamente, pois o desenvolvimento das representações mentais se dá a partir da interiorização das representações externas e a diversificação das representações de um objeto, aumenta a capacidade cognitiva do sujeito e, consequentemente, suas representações mentais. Assim, as representações externas, como enunciados de desafios apresentados na língua materna, fórmulas algébricas, gráficos, entre outras, são os meios através dos quais os indivíduos se apropriam para tornar suas representações mentais exteriorizadas.

Representações semióticas, segundo o referido autor, são produções realizadas a partir de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. Para o autor, estas representações utilizadas em Matemática podem ocorrer a partir de quatro tipos de registros: língua materna, figuras geométricas, sistemas de escrita (numéricas, algébricas e simbólicas) e gráficos cartesianos. Assim, a aprendizagem torna-se significativa quando o aluno utiliza diferentes registros de representação, e consegue mudar naturalmente de uma forma de registro para outra. Ou seja, a compreensão em Matemática se dá a partir da coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas:

- o tratamento consiste em transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, a resolução de uma equação (x-2 = 7, então x = 9).
- a conversão, em que há uma troca de registro dentro de um mesmo objeto matemático: por exemplo, passar do registro da escrita algébrica de uma equação para o registro gráfico cartesiano.

Considerando a proposta do autor, pode-se afirmar que quanto maior for a facilidade do educando em utilizar registros distintos de um mesmo objeto algébrico, maior será a possibilidade de compreensão do mesmo. Isso quer dizer que o aprendizado da linguagem algébrica ocorre, de forma efetiva, se o aluno se dispuser de um alicerce ainda mais importante : a conversão entre registros semióticos, e entre eles está a língua materna.

2.2 A língua materna

A Matemática tem como seu recurso básico de comunicação a escrita. Por isso, “ela se apropria da língua materna a oralidade e a significação das palavras” (MACHADO, 1995). Assim pode-se atribuir à linguagem materna dois papéis em relação à Matemática:

> i) a língua materna é aquela na qual são lidos os enunciados, na qual se fazem comentários e que permite interpretar o que se lê de modo preciso ou

> aproximado. Nesse caso, a linguagem usual serviria para estabelecer relações entre o pensamento e a palavra, entre a escrita e a sua interiorização, entre a escrita e a sua interpretação. ii) a língua materna é parcialmente aplicada no trabalho matemático, já que os elos de raciocínio matemático se apóiam na língua, em sua organização sintática e em seu poder dedutivo. Mas as transformações, as operações que podem ser realizadas sobre as escritas matemáticas não têm equivalente na língua materna [...](SMOLE, 2001, p.17).

Markarian (2004) afirma que a linguagem, em geral, na Matemática, ajuda a enriquecer a capacidade de transmissão, simplifica os modos de pensar e permite chegar diretamente ao cerne dos problemas. Acrescenta ainda que um bom manejo na linguagem oral clarifica a apresentação de ideias complicadas e evita rodeios na descrição de situações.

Para Smole (2000), conectar a linguagem matemática com língua materna possibilita emprestar a primeira a oralidade da segunda. Desta forma, a oralidade pode refletir um meio de comunicação eficiente e acessível, que todos os alunos podem utilizar, também, em qualquer outra área de conhecimento.

A comunicação é um meio pelo qual se ensina e se aprende. Os PCNs destacam que na Educação Básica espera-se que os alunos adquiram competências comunicativas e, no caso da Matemática, se aliem a outras competências como a resolução de problemas ou o raciocínio.

2.2.1 Situações-problema e a linguagem matemática

A leitura e a escrita na resolução de problemas serão produtivas à medida que os alunos compreendem o significado do que lêem e escrevem. Vieira (1997) destaca que muitos alunos ao lerem um problema, não conseguem detalhar as informações contidas no texto, pois não conseguem decodificar o que leram e , portanto, não transformam a linguagem do texto em linguagem matemática. English (1997) acrescenta que a habilidade dos alunos para resolver problemas depende fortemente da possibilidade de eles poderem construir representações mentais ou modelos apropriados das situações apresentadas

De acordo com Duval (2003), analisar a distância existente entre a proposta do conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional torna-se essencial no processo de compreensão de textos. O conteúdo cognitivo do texto é o conceito que o problema considera; necessita do uso de uma representação própria e não dependente do que o texto apresenta. A organização redacional considera as variáveis redacionais; estas são as que revelam um problema congruente ou não. Os problemas de não-congruência são aqueles que apresentam maior dificuldade de compreensão. Vale destacar que a definição de situações-problema congruentes e não-congruentes somente pode ser aplicada quando há mudança de registro de representação.

O autor retrata que a compreensão do texto depende de dois parâmetros, subordinados um ao outro:

- relação entre o conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional.
- relação entre o conteúdo cognitivo do texto e a base do conhecimento do leitor: a familiaridade com o conteúdo cognitivo do texto ou a novidade deste conteúdo constituem os dois valores principais deste parâmetro.

A relação entre estes dois parâmetros possibilita a distinção e a classificação das diferentes situações possíveis de leitura que um leitor pode verificar. Estas situações distintas estão definidas no Quadro 1 a seguir: .

Quadro 1 – A congruência e a não-congruência nas diferentes situações de leitura

Texto/Leitor	Congruência	Não Congruência
Conteúdo cognitivo/ FAMILIAR	Situação I	Situação II
Conteúdo cognitivo /NOVO	Situação III	Situações IV

Fonte:Duval (1986)

Fazendo uma análise das situações apresentadas no quadro, vale destacar:

- **Situação I** (trivial, sem riscos de erros) : existe único e direto caminho para sua resolução; não é preciso ler o texto todo e nem dominar todos os aspectos gramaticais para compreendê-lo. Exemplo: Qual a medida da diagonal de um retângulo cujos os lados medem, respectivamente, 3m e 4 m?
- **Situação II** (trivial com riscos de erros): as dúvidas ocorrem na hora do percurso visual, algumas incompreensões locais aparecem. O aluno precisa reler o texto, mas a familiaridade com o conteúdo leva o leitor a compreender o texto, após a releitura. Ex.: Um retângulo possui 12 cm^2. Sabendo-se que seus lados medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm, qual é a medida da sua diagonal?
- **Situação III** (normativa para uma aprendizagem exigindo tratamentos paralelos ao texto): o aluno não compreende o conteúdo cognitivo do texto, mas já compreende o seu conteúdo redacional. O leitor deve seguir atentamente o desenvolvimento dos registros, revendo todos os detalhes. A utilização de outros recursos, tais como gráficos e esquemas, são necessários.

  Exemplo 2.1 *Um produto sofreu, ao longo do último ano, dois aumentos sucessivos um de 10% e o outro de 20% .Qual foi a porcentagem de aumento acumulado que este produto teve no último ano? Represente, com um gráfico de segmentos, a situação* *apresentada. Neste desafio, o aluno pode não saber calcular o aumento acumulado, apesar de saber o que ele significa na prática; e, portanto, utilizar cálculos simples de porcentagem utilizando um valor fictício do produto e conseguir o resultado do desafio.*

- **Situação IV** (exigindo uma pesquisa ou uma aprendizagem independente do texto): Nesta situação faz-se necessário trabalhar o conteúdo cognitivo do texto, independente do texto a compreender.

  Ex.: Represente, graficamente, no plano cartesiano, a função $f(x) = x + 4$. Se o aluno não conhece a definição de função e representação de pontos no eixo cartesiano, não consegue resolver o problema. Portanto, torna-se fundamental a construção destes conceitos previamente.

Como ficou destacada nas situações apresentadas anteriormente, a compreensão de um texto matemático acontece a partir do conteúdo cognitivo que ele deve utilizar e do registro escrito que ele deve fazer uso. Pode-se afirmar, então que no caso dos problemas que envolvem a linguagem algébrica, a compreensão do conteúdo cognitivo requer a utilização de símbolos próprios que só podem ser interpretados quando se compreende o significado; como destaca Machado (1995).

2.3 A linguagem tecnológica

As novas tecnologias podem adentrar as escolas como instrumentos pedagógicos, já que estes recursos fazem parte do cotidiano dos educandos e suas potencialidades podem ser canalizadas para o processo ensino e aprendizagem. Segundo Curto (2009) a utilização do computador como recurso pedagógico revela-se como um recurso valioso para o tratamento da realidade em que vivemos e para o trabalho com vários letramentos de forma crítica e ativa.

Para Alcântara e Corrêa (2012) a utilização dos recursos digitais é caracterizado como uma forma de comunicação que propicia a formação de um contexto coletivizado, resultado da interação entre participantes. Conectar-se é sinônimo de interagir e compartilhar no coletivo.

As tecnologias e linguagens implicam uma profunda transformação dos processos sociais, culturais e educacionais; demandando da escola não só a incorporação dos mesmos, mas uma transformação interna nas formas de ação educativa. Pede-se uma educação centrada em competências, em modelos mais baseados na “aprendizagem” do que no “ensino”, que proporcionam a aplicação do aprendido em situações variadas.

Martins (2009) considera que, nos dias atuais, em Matemática, não é suficiente desenvolver nos educandos competências de cálculo e de resolução de problemas. Torna-se essencial estimular a curiosidade e a necessidade de aprofundar a compreensão . Os alunos devem construir competências adicionais que lhes permitam investigar e interpretar situações-problema variadas; a Matemática não deve se prender ao domínio de técnicas, de regras e a uma simbologia sem significado

Abrantes (2001) sublinha que o educando só desenvolve a Competência Matemática a partir de experiências ricas e diversificadas; e também da reflexão sobre essas situações vivenciadas. A autora afirma que trabalhar a linguagem matemática a partir da linguagem tecnológica, oferecida pelos recursos digitais, propicia aos alunos uma experiência rica em significados e pode oportunizar aos mesmos o desenvolvimento de competências, motivação e o gosto pela disciplina.

O conhecimento matemático deverá ser o resultado da construção humana na interação constante com os contextos social, cultural e tecnológico. Um currículo de Matemática que valoriza as diversas formas de comunicação que o ambiente virtual oferece, cria condições para que o aluno transcenda experiências particulares de aprendizagem a um ambiente coletivo de troca de saberes.

2.4 A linguagem lúdica

Uma das competências matemáticas que deve ser priorizada pelo professor em sua prática é o desenvolvimento do raciocínio lógico, estimulado pelo pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas; afirma Oliveira (2007). Para tanto, os educadores devem buscar alternativas para aumentar a motivação pela aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização e estimular a socialização. Segundo a autora, as atividades lúdicas revelam um ingrediente indispensável neste processo, viabilizam a afetividade, autoconhecimento, cooperação, autonomia, imaginação; oportunizando que o outro construa novos saberes por meio da alegria e do prazer de querer fazer e construir:

> Atividades lúdicas são atividades que geram prazer, equilíbrio emocional,levam o indivíduo a autonomia sobre seus atos e pensamentos, e contribuem para o desenvolvimento social. O conceito de atividades lúdicas está relacionado com o ludismo, ou seja, atividade relacionadas com jogos e com o ato de brincar, utilizando variados recursos; tais como livros, jogos com materiais manipuláveis e digitais. [...](ARAUJO, 2000, p.60).

Santos (2010) destaca que qualquer indivíduo, independente da sua idade, pode brincar a sua maneira. Oliveira (2007) enriquece esta discussão, afirmando que quando crianças ou jovens brincam, mostram prazer e alegria em aprender. Eles têm oportunidade de lidar com a curiosidade que os move para participar da atividade; é, em certo sentido, a mesma que move os cientistas em suas pesquisas. Assim, é notável que o educador deve buscar conciliar a alegria da brincadeira com a aprendizagem escolar. Nesta perspectiva, o ensino deve voltar-se para uma Matemática que favorece a experimentação, a construção dos significados e o levantamento de hipóteses com base na observação e, posteriormente, na resolução de desafios.

A utilização de recursos lúdicos em Matemática não é uma inovação do nosso tempo. Há uma citação de Arquimedes Ephodos (287/212 a.C.) que mostra sua preocupação em não usar apenas a abstração em suas demonstrações, diferente dos demais gregos de sua época. Em suas pesquisas ele utilizava instrumentos, aparelhos, materiais manipuláveis que estavam ao seu alcance, tais como argila, madeira.[1]

> Para mim algumas coisas ficaram claras através do método concreto, para, em seguida, serem demonstradas geometricamente, porque aquele método não fornece verdadeira demonstração. É mais fácil chegar a demonstração quando se tem algum conhecimento prévio concreto, do que a partir do desconhecido (SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇcãO DE MINAS GERAIS, 1994, p.17).

Freitas (2014) propõe a adoção de materiais manipuláveis para trabalhar com os anos iniciais do Ensino Fundamental. A autora utiliza, em seu trabalho, o Material Dourado[2] e as Barras de Cuisenaire[3], por exemplo, para trabalhar com a pré-álgebra no 6^o ano do Ensino Fundamental.

Para Olival (2007) as situações lúdicas mobilizam esquemas mentais. Sendo, portanto, uma atividade física e mental; a ludicidade aciona e ativa as operações mentais, estimulando o pensamento. Nesta perspectiva, a linguagem lúdica pode se tornar facilitadora da aprendizagem matemática. Este trabalho, propõe a utilização dos recursos lúdicos para dinamizar a aprendizagem algébrica em todos os anos do 3^o e 4^o ciclos do Ensino Fundamental.

---

[1] <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/78563/178530.pdf?sequence=1>

[2] O Material Dourado foi idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori e destina-se às atividades que auxiliam a aprendizagem matemática; dentre elas a dos princípios do Sistema de Numeração Decimal. Com esse material, as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/78563/178530.pdf?sequence=1>.

[3] O Material Cuisenaire foi idealizado pelo professor belga Georges Cuisenaire. Ele é formado por peças de madeira (barras) em 10 cores e em comprimentos que variam de 1 a 10 centímetros. A peça-unidade é o cubo de 1 cm x 1 cm x 1 cm. Para cada comprimento há uma cor<www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/.../material.../escala-cuisenaire>.

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Quanto à abordagem, esta pesquisa pode ser identificada como **qualitativa**, visto que a mesma não se preocupa com representatividade numérica, mas sim, com a produção de novas informações a respeito do tema pesquisado, neste caso, a aprendizagem algébrica a partir das atividades lúdicas e tecnológicas.

Com base em Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa tem como características básicas;

- A fonte direta de dados é o ambiente natural; os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém por meio do contato direto;
- O pesquisador é o instrumento principal, não se concebendo mais a ideia da sua neutralidade;
- É descritiva; e a análise dos dados é feita respeitando, tanto quanto possível, a forma em que os dados recolhidos foram registrados ou transcritos;
- A análise é indutiva, construída ao longo do processo e não visa, necessariamente a confirmação de hipóteses.

As pesquisas qualitativas são, segundo Mazzotti (2004), multimetodológicas, isto é, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos, dentre os quais foram eleitos para este estudo: a entrevista, o questionário, os pré-testes e a sequência didática. Acredita-se que esta diversidade de recursos aumentam a validade dos resultados.

Em relação aos procedimentos utilizados pela pesquisadora, este trabalho se caracteriza como uma **pesquisa de campo** . Para Fonseca (2002) uma pesquisa de campo caracteriza-se pelas investigações em que, além da pesquisa bibliográfica e/ou documental, se realiza coleta de dados junto à pessoas, com o recurso de diferentes tipos de pesquisa (pesquisa ex-post-facto, pesquisa-ação, pesquisa participante, estudo de caso, etc.)

Desde o inicio da coleta de dados, a pesquisadora percebeu que só a teoria não seria suficiente para que se pudesse fundamentar a proposta; por isso, se fez necessário a pesquisa de campo. Esta pesquisa teve o objetivo de diagnosticar a forma como é abordada, na Educação Básica, a linguagem matemática em sala de aula e como a sua conexão com a língua materna é possibilitada ou não pelos recursos pedagógicos utilizados pelo professor.

Esta pesquisa está organizada em três etapas: preparação, desenvolvimento e análise dos dados. Na **preparação** estão a revisão bibliográfica; a delimitação dos sujeitos da pesquisa; elaboração e desenvolvimento da entrevista com os professores; a elaboração e a coleta dos questionários e dos pré-testes e; a elaboração da sequência didática. Na segunda etapa, **desenvolvimento**, houve a aplicação da sequência didática. Na terceira etapa, **a análise dos dados**, as informações coletadas foram analisados e avaliados considerando o referencial teórico desta pesquisa. Neste capítulo, pretende-se descrever a preparação e no capítulo quarto, será apresentado o desenvolvimento e a análise dos dados.

As etapas da investigação, nas quais aconteceram a participação dos sujeitos da pesquisa, foram realizadas durante os meses de outubro, novembro e dezembro de 2015, conforme as informações do Quadro 2. .

Quadro 2 – Cronograma com as etapas da investigação

Data/Período	Tarefas	Participantes
05/10	Entrevista com os professores	Professores dos alunos que responderam o pré-teste e participaram da Sequência Didática
06/10 e 07/10	Questionário e Pré-teste	Alunos dos 7^o, 8^o e 9^o anos do Ensino Fundamental
16/11 a 01/12	Atividades da Sequência Didática	Alunos do 6^o Ano do Ensino Fundamental
17/11 a 07/12	Atividades da Sequência Didática	Alunos do 7^o Ano do Ensino Fundamental
17/11 a 08/12	Atividades da Sequência Didática	Alunos do 8^o Ano do Ensino Fundamental
17/11 a 09/12	Atividades da Sequência Didática	Alunos do 9^o Ano do Ensino Fundamental

Fonte:Elaboração própria

3.1 Preparação da Pesquisa

Para Fonseca (2005), a preparação da pesquisa científica requer um planejamento para mais racionalmente organizar os procedimentos, estabelecer certas diretrizes de ação e fixar-se uma estratégia global. A preparação desta pesquisa, especificamente, aconteceu a partir das seguintes subetapas:

- revisão bibliográfica;
- levantamento dos sujeitos da pesquisa;
- elaboração e desenvolvimento da entrevista;
- elaboração e distribuição do questionário;
- elaboração e aplicação do pré-teste e a
- elaboração da sequência didática

3.1.1 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica iniciou-se com a definição do problema e se estendeu até a conclusão deste trabalho. Foi um processo desenvolvido a partir do contato com informações sobre experiências de construção de conhecimentos algébricos e dos recursos pedagógicos utilizados nas mesmas; que ocorreu, principalmente, através de publicações específicas em livros, artigos científicos, monografias, dissertações e teses.

Para Moreira e Caleffe (2006), o propósito da revisão bibliográfica num trabalho de pesquisa é mostrar que o problema precisa ser investigado, visto que o pesquisador conhece e entende os estudos já realizados e neles apoia a pesquisa que deseja realizar. Esta revisão é a parte central de qualquer estudo e se torna útil em várias etapas do trabalho.

3.1.2 Levantamento dos Sujeitos da Pesquisa

Após definidos a questão investigativa e os objetivos do trabalho e, paralelamente, à revisão bibliográfica, selecionaram-se os participantes da pesquisa. Estes, seriam alunos do Segundo Segmento do Ensino Fundamental (3^o e 4^o ciclos, de acordo com os PCNs) que contribuiriam na obtenção das respostas às questões levantadas no questionário, no pré-teste e, também, participariam da aplicação das atividades da sequência didática. No total, foram 115 alunos envolvidos na pesquisa, e estavam assim distribuídos nas turmas do Ensino Fundamental: 30 alunos do 6^o ano, 35 alunos do 7^o ano, 26 alunos do 8^o ano e 24 alunos do 9^o ano.

A pesquisadora fez a opção por realizar a observação na Escola Municipal José do Patrocínio, situada na zona urbana de Campos dos Goytacazes, RJ; na qual atua como professora das turmas de IX Fase da Educação de Jovens e Adultos. É notável destacar que também participaram desta pesquisa, 5 professores de Matemática, 4 deles da mesma escola; especificadamente, das turmas selecionadas.

3.1.3 A elaboração e desenvolvimento da entrevista

Por meio da entrevista, com profissionais da Educação, aplicada nesta pesquisa de campo, buscou-se preliminarmente obter informações iniciais de contexto pessoal e institucional e, posteriormente, conhecer alguns detalhes de suas práticas educativas e, de modo especial, sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra. Como já foi relatado na subseção anterior, foram entrevistados 5 professores, que vivenciam a realidade da Educação Básica em escolas públicas da cidade de Campos dos Goytacazes,RJ.

Como pode-se observar, a partir do roteiro da entrevista disponível no Apêndice A deste trabalho, este recurso foi elaborado com alguns objetivos específicos: identificar as concepções e experiências acerca dos recursos pedagógicos utilizados em sua prática educativa; promover uma reflexão sobre a sua postura profissional frente às tecnologias da informação; conhecer como os alunos utilizam as diversas formas de expressar-se matematicamente; e, verificar, aspectos específicos sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Rey (2002) afirma que a entrevista, na pesquisa qualitativa, tem o objetivo de converter-se em um diálogo; as informações aparecem a partir do sujeito que as experimenta em seu cotidiano. Neste caso, os professores das turmas que participarão da sequência didática proposta nesta pesquisa.

3.1.3.1 Análise descritiva das entrevistas

I-Informações pessoais de contexto pessoal e institucional:

O primeiro bloco de questões, como o próprio nome esclarece, buscou saber quem são os sujeitos desta entrevista, identificando: a) nome; b) idade; c) formação e área de atuação; d) tempo de atuação na educação; e) local de trabalho.

A tabulação dos dados desse bloco será apresentada na Tabela 1 a seguir:

A partir das informações organizadas na Tabela 1, pode-se perceber que o perfil dos sujeitos é diversificado. A idade varia entre 25 e 50 anos, mostrando que a geração nascida na “era da informação” já está presente no contexto profissional da Educação. A formação e área de atuação mostram diversos níveis de ensino, e o tempo de atuação na educação, revelam profissionais em diferentes estágios da carreira.

II. Reflexão sobre a prática educativa:

Nesta parte do roteiro, três argumentações foram propostas:

a) “Relate como a maioria de seus alunos comunica-se matematicamente. Procure responder aos questionamentos a seguir:

- São capazes de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demons-

Tabela 1 – Perfil dos entrevistados

a) Nome fictício	b) Idade	c) Formação e área de atuação	d) Tempo de atuação na educação	e) Local de Trabalho
Professor A	25 anos	Licenciado em Matemática/E. Fundamental	1 ano	Instituição Pública Municipal
Professor B	36 anos	Licenciado em Matemática/ E. Fundamental e E. Médio	15 anos	Instituições Públicas (Estadual e Municipal)
Professor C	50 anos	Licenciado em Matemática/ E. Fundamental e E. Médio	28 anos	Instituição Pública Estadual
Professor D	46 anos	Licenciado em Matemática/ Especialista em Educação/ E. Fundamental	26 anos	Instituição Pública Municipal
Professor E	44 anos	Mestre em Educação Matemática/ E. Médio	20 anos	Instituições (Federal e Estadual)

Fonte: Protocolo da pesquisa

trações com materiais pedagógicos?

- Utilizam a linguagem matemática para representar ideias, descrever relações e construir modelos da realidade?”

b) “O papel do educador no processo ensino e aprendizagem vem mudando ao longo do tempo. Como você vê sua postura profissional frente aos desafios provenientes da globalização e das tecnologias da comunicação?"

c) “Você utiliza recursos tecnológicos em sua prática?"

d) "Caso sua resposta tenha sido negativa no item anterior, vá para o item III. Caso o tenha respondido afirmativamente, relate como utiliza objetos de aprendizagem digitais, tais como: $softwares$, planilhas, dispositivos móveis, recursos de áudio e vídeo e outras ferramentas disponíveis na web em seu trabalho?"

Alguns trechos das respostas dadas merecem ser transcritos integralmente para que possam fundamentar futuras conclusões. Dessa forma, destacam-se alguns registros realizados pelo Professor A : "Falar de comunicação em Matemática é difícil, pois percebo uma grande dificuldade por parte dos meus alunos na interpretação dos enunciados das questões, refletindo a dificuldade na Língua Portuguesa. Muitas vezes quando faço a leitura do enunciado eles conseguem compreender, oralmente, a proposta da questão. Poucos são os alunos que encaram a Matemática como um instrumento de compreensão de situações do dia a dia(...). Ser professor desta geração “net” é saber utilizar e adequar à linguagem escolar a “era da informação” . Contudo, as dificuldades estruturais que as escolas ainda apresentam impedem o desenvolvimento de um trabalho rico com estas experiências digitais.

O professor B acrescenta que: “ A escola deve ser um espaço intercultural, onde se devem integrar as novas mídias, pois elas já estão presentes em todas as esferas da vida social. Porém, ainda encontro dificuldades em aproveitá-las em minha prática, pois, minhas escolas ainda carecem de material(...). Em relação à linguagem matemática, percebo um grande nó na aprendizagem quando os alunos precisam conectar diferentes "linguagens matemáticas", como por exemplo, escrever a lei de uma função, a partir da representação gráfica que a representa.” O professor C relata que: “Em geral, uma grande parte dos professores seguem o mesmo e velho modelo apresentado nos livros didáticos para planejar atividades: apresentar os conteúdos ou métodos e, em seguida, listar uma série de questões relacionadas aos mesmos. Isso se dá quando o professor não investe em atualizações e não incorpora os novos paradigmas. Enquanto educadora, busco em minhas aulas propiciar espaços para discussão de propostas pautadas em recursos midiáticos; recursos tecnológicos disponíveis até no próprio smartphone de meus alunos.(...) A Matemática já é dita como “bicho papão” por muitos deles, então devemos utilizar dos mais variados recursos para derrotar este paradigma. (...) Muitas vezes, observando a representação gráfica de uma função, por exemplo, eles não conseguem representá-las algebricamente (...). Expressar-se matematicamente é a grande dificuldade para a maior parte dos nossos alunos.

“A globalização abriu novos caminhos e possibilidades para que todos busquem novos conhecimentos, isto em todas as áreas, principalmente a do ensino escolar. Diante dessa realidade, procuro atualizar-me constantemente em relação às TICs[1] e utilizá-las na minha prática, buscando enfrentar os desafios da sociedade globalizada”. Afirmou o professor D. Ele ainda ressalta: “Muitas vezes a linguagem matemática tão cheia de formalismos e simbologias torna-se mais real quando utilizamos recursos diferenciados em nossas aulas. Por exemplo, temos o uso das balanças de dois pratos para registrar o conceito de equações.”

O professor E finalizou dizendo: “Não basta que a escola incorpore as novas tecnologias, é preciso que nós, como educadores, estejamos conscientes de que o mais importante é aproximar a cultura escolar da cultura da vida. As reformas educativas atuais e as demandas da globalização reconduzem a função do educador, que deve ser de “arquiteto do conhecimento”. Em minha prática, busco valorizar os conhecimentos prévios dos alunos e, em algumas vezes, utilizo, mapas conceituais para ajudá-los na elaboração de novos esquemas necessários na resolução de problemas, por exemplo. Assim, percebo que eles

[1] Tecnologias da Informação e Comunicação

conseguem se comunicar matematicamente de forma mais eficaz."

Todos os professores entrevistados afirmaram que conhecem um vasto número de recursos digitais; porém, os professores A e B relataram que ainda não tiveram oportunidade de utilizá-los em sala de aula, devido às dificuldades de ordem técnica nas escolas em que atuam: falta de máquinas suficientes, dificuldade de acesso à Internet e computadores arcaicos que não "suportam" a instalação de $softwares$.

Os professores C, D e E destacam que utilizam os recursos digitais esporadicamente. Revelam que já trabalharam com geometria a partir do software $GeoGebra$ e também já aproveitaram os recursos do $Winplot$. A professora E acrescenta que utiliza o software $Poly$ para desenvolver a visão espacial dos educandos.

III- Sobre o aprendizado/ ensino da Álgebra...

Neste momento, os professores foram questionados, especificamente sobre a aprendizagem algébrica.

a) Você gosta de trabalhar os conceitos algébricos? Por quê? A partir de qual ano escolar estes conceitos algébricos são introduzidos em suas aulas?

Nesta questão, os professores foram unânimes ao afirmarem que a Álgebra não é um assunto fácil de ser trabalhado, pois os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão. Logo, não gostam de trabalhar com a Álgebra; apesar de introduzi-la desde o sétimo ano do Ensino Fundamental.

A professora B afirma que, quando possível, prefere escolher turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, pois neste ano escolar os aspectos algébricos ainda não foram introduzidos no currículo.

b) Quais recursos você utiliza para trabalhar os conceitos algébricos?

As professoras A, B e E afirmaram que procuram trabalhar os conceitos algébricos a partir de exercícios; algumas vezes fazem uma conexão com conceitos de Geometria.

A professora D destacou que além dos exercícios, trabalha os produtos notáveis utilizando figuras geométricas. Já a professora C afirma que, apesar de considerar os jogos recursos que estimulam a participação dos alunos, ainda não teve oportunidade de utilizá-los ao trabalhar com Álgebra. Estas duas professoras destacaram que ainda não tiveram a oportunidade de trabalhar a Álgebra a partir dos recursos digitais; apesar de utilizarem os mesmos como ferramentas na construção de alguns conceitos geométricos.

c) No estudo de Álgebra quais as maiores dificuldades percebidas nos alunos? No seu ponto de vista, qual ou quais as causas para estas dificuldades?

As maiores dificuldades destacadas foram: representar, na linguagem algébrica, uma situação-problema; compreensão dos princípios aditivo e multiplicativo na resolução de equações; identificar uma equação ou inequação de primeiro grau que expressa um problema; interpretar, geometricamente, sistemas lineares; resolver equações do segundo grau, completas, e utilizá-las na interpretação de desafios.

Os professores identificaram as dificuldades na interpretação da simbologia própria da Álgebra e no domínio das técnicas operatórias, como as grandes limitações percebidas nos alunos.

d) Na sua opinião, o que pode ser feito para que o aprendizado de Álgebra se torne mais prazerosa?

As sugestões apresentadas foram: utilizar a pedagogia de jogos, utilizar recursos digitais e dinâmicas para a solução de dúvidas(ex. trabalho de monitoria com os alunos).

e) Você concorda que a aprendizagem dos conceitos aritméticos devem anteceder à aprendizagem algébrica? Justifique sua resposta.

As professoras A, B, C e D afirmam que sim. "Não podemos trabalhar os conceitos algébricos sem que alguns aspectos aritméticos tenham sido construídos" diz a professora A. A professora B exemplifica, dizendo que os alunos não aprendem equação, sem antes estudar operações com números racionais. As professoras C e D completam dizendo que as maiores dificuldades em Álgebra se dá devido à carência de conhecimentos prévios. Os alunos dizem: "Não sabemos operar com números; imaginem com letras!"

A professora E discorda das demais, acredita que o ideal é que o trabalho com Álgebra e Aritmética ocorram juntos, desde o primeiro segmento do Ensino Fundamental, e não apenas nos anos finais da Educação Básica. Acrescenta ainda que, infelizmente, não é o que acontece na Educação Pública brasileira.

Em relação às discussões oportunizadas por esta entrevista, existem alguns fatos notórios:

- Naquele contexto educacional, a prática pedagógica está alicerçada em recursos pedagógicos restritos, as dificuldades de ordem técnica para o manuseio dos recursos digitais disponíveis na escola implicam na não utilização, efetiva, dos mesmos por parte dos professores. Alguns exemplos de utilização de recursos tecnológicos foram citados, mas nenhum deles relacionado aos aspectos algébricos. Entre os outros recursos utilizados está a resolução de exercícios, comprovando que na prática, o trabalho com a Álgebra se dá a partir da memorização de técnicas e não na produção de significados, como propõe Lins e Gimenes (2006).

- A aprendizagem algébrica é tratada como algo difícil de ser trabalhado e as dificuldades apontadas pelos professores são justamente nos descritores da Prova Brasil, apresentados na introdução deste trabalho.

- A dificuldade explícita na comunicação matemática, aspecto avaliado no PISA, a falta de conexão entre as diversas linguagens, em específico a utilização da linguagem algébrica e a língua materna foram fatos destacados pelos professores.

3.1.4 A elaboração e a distribuição do questionário

Em outra etapa da pesquisa, foi proposto aos alunos observados um questionário, disponível no Apêndice B deste trabalho. O questionário foi uma oportunidade para os alunos observados, relatarem como a Matemática, em especial as habilidades algébricas, tem contribuído para "compreensão e leitura do mundo", de que forma os recursos tecnológicos e as atividades lúdicas são utilizados na escola e como se dá a sua interação com as ferramentas virtuais.

Preencheram o questionário 85 estudantes, dos quais 48 eram do sexo feminino e 37 do sexo masculino. A idade dos alunos varia de 13 anos aos 18 anos e o nível de escolaridade era do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental. É importante destacar que os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental que participam desta pesquisa, não responderam ao questionário, pois no mesmo encontram-se questões relacionadas à aprendizagem algébrica, que efetivamente ainda não tiveram contato.

Segundo Rey (2002), a palavra questionário se refere a um meio de obter respostas a questões logicamente relacionadas a um problema central, por uma fórmula que o próprio informante preenche. O número reduzido de informações que podem ser obtidas po meio deles, impõe ao pesquisador a obrigação de conhecer, tanto quanto possível, o assunto, antes de começar a formular as questões. Nesse sentido as questões foram redigidas no sentido de fornecer informação que permitisse:

a) Obter dados pessoais (idade, sexo, ano de escolaridade);

b) Caracterizar a experiência vivenciada em relação à Internet e seus recursos;

c) Promover uma reflexão sobre a aprendizagem matemática.

Conforme orientação de Moreira e Caleffe (2006), o questionário foi aplicado pelos professores das turmas e os alunos poderiam optar por não se identificar, garantindo o anonimato de suas respostas. A seguir, estão apresentados os resultados desta pesquisa, em valores percentuais, aproximados na Tabela 2 e na Tabela 3.

Observou-se que, embora menos da metade dos alunos possuírem computador em casa, 64 deles têm smartphone, e assim, estão conectados à Internet. Porém, apenas 26 alunos afirmaram que utilizam os recursos disponíveis na rede, para outros fins que não sejam as redes sociais. Batista (2011) destaca que:

> A habilidade que os jovens têm para lidar com estas tecnologias, a popularização das mesmas e o desenvolvimento de aplicativos específicos são

Tabela 2 – Experiência em relação à Internet e seus recursos

1. Possui computador em casa?	• Sim- 45% • Não- 55%
2. Possui *smartphone*?	• Sim- 75% • Não- 25%
3. Utiliza a Internet para:	• Apenas para acessar redes sociais- 70% • Apenas para realizar pesquisas - 10% • Outros fins- 20%
4 Enumere três recursos da web mais utilizados por você. Os recursos mais indicados, pela ordem de preferência, foram:	• *WhatsApp* • *Facebook* • *Blog*

Fonte:Protocolo da pesquisa

fatores que podem contribuir para introdução destes recursos nas práticas pedagógicas.

A questão 4 é uma pergunta aberta. Moreira e Caleffe (2006) afirmam que, ao elaborarem questões abertas, a pesquisadora dá aos alunos a oportunidade de escreverem as razões pessoais acerca do tema. Neste caso ficou apenas confirmada a conclusão obtida na questão 3, acerca das redes sociais, que foram aqui, especificadas.

Tabela 3 – A Matemática, o cotidiano e as tecnologias

1. Você gosta de estudar Matemática?	• Sim- 30% • Não- 70%
2. Estudar Álgebra é...	• interessante- 5% • chato- 40% • difícil- 55%
3. As habilidades algébricas adquiridas na escola são utilizadas por você em outras situações do cotidiano?	• Algumas vezes - 60% • Sempre - 20% • Nunca – 20%
4. Em suas aulas de Matemática... A resposta que melhor completa a frase é...	• só resolvo exercícios - 80% • resolvo exercícios, participo de jogos e utilizo materiais lúdicos tais como: geoplano, ábaco e dobraduras - 10% • resolvo exercícios, participo de jogos e utilizo recursos tecnológicos - 10%

Fonte: Protocolo da pesquisa

Com as respostas das questões do item “Matemática cotidiano e as tecnologias”, apresentadas na Tabela 3, pode-se destacar que a Matemática mostra-se como uma área do conhecimento que os alunos, em sua maioria, não gostam de estudar. Silveira (2002) explica que a realidade retratada nesta questão existe a partir de um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. Esta autora realizou um levantamento junto aos alunos da Educação Básica e identificou que a Matemática é considerada sem significado e misteriosa; e assim o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Como resultado de tantos sentimentos ruins que esta disciplina proporciona ao aluno, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não se sentir motivado pelas aulas vem o sentimento de ódio e o desinteresse pela Matemática.

Apenas 4 dos alunos entrevistados consideram interessante estudar Álgebra e, 17 deles, afirmam que utilizam as habilidades algébricas, adquiridas na escola, em outras situações do cotidiano. Esta realidade mostra-se como um reflexo das suas aulas de Matemática, e também pode ser evidenciada nas respostas da questão 4.

Para completar a frase "Em suas aulas de Matemática..." 68 dos alunos escolheram a opção "só resolvo exercício"; revelando que a prática pedagógica fundamentada na memorização e nos exercícios repetitivos ainda é a predominante nas aulas de Matemática; enquanto recursos lúdios e tecnológicos ainda não são utilizados com frequência. A adoção dessa metodologia não tem apresentado bons resultados, vistos as conclusões apresentadas nos relatórios finais do PISA (BRASIL, 2013a) e SAEB (MEC, 2011), apresentadas na introdução deste trabalho. A memorização estimulada pelos exercícios repetitivos em detrimento do estímulo ao raciocínio e à aquisição das novas linguagens fazem a aprendizagem matemática tornar-se pouco significativa.

3.1.5 A elaboração e a aplicação do pré - teste

Os pré-testes, disponíveis nos Apêndice C e Apêndice D deste trabalho, foram aplicados aos alunos que responderam ao questionário e, futuramente, participariam das atividades da Sequência Didática.Estes alunos foram divididos em dois grupos, de acordo com o ano escolar que estavam frequentando : grupo A e grupo B.

- **Grupo A** - 35 alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental (3^o ciclo do Ensino Fundamental, de acordo com os PCNs). Aqui identificados pela letra maiúscula A, seguida de um número natural de 1 a 35. Ex.: A1, A2,..., A35

- **Grupo B**- 50 alunos dos oitavo e nono anos do Ensino Fundamental (4^o ciclo do Ensino Fundamental, de acordo com os PCNs). Aqui identificados pela letra maiúscula B, seguida de um número natural de 1 a 50. Ex.: B1, B2,..., B50

Os pré-testes foram aplicados pelas respectivas professoras das turmas participantes da pesquisa durante uma aula de Matemática, com duração de 50 minutos. A atividade aplicada ao grupo A era composta de 5 questões e a do grupo B, continha 6 questões. O objetivo principal era diagnosticar, especificadamente, as dificuldades apresentadas pelos alunos, nas competências algébricas essenciais para o ciclo de escolaridade em curso, segundo os PCNs. Vale destacar que, os alunos do 6^o Ano do Ensino Fundamental, participantes desta pesquisa, não responderam ao pré-teste já que, naquela oportunidade, ainda não tinham tido o contato com as habilidades algébricas avaliadas.

3.1.5.1 O pré-teste do grupo A

As atividades do pré-teste do grupo A (Apêndice C) foram elaboradas visando verificar as seguintes competências algébricas, propostas pelos PCNs para os alunos do 3^o ciclo do Ensino Fundamental:

i) Utilizar a linguagem algébrica para representar generalizações inferidas a partir de contextos numéricos e geométricos.

ii) Aplicar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

A seguir, na Tabela 4, serão apresentadas algumas considerações sobre as questões propostas ao grupo A.

Tabela 4 – Análise do pré-teste do grupo A

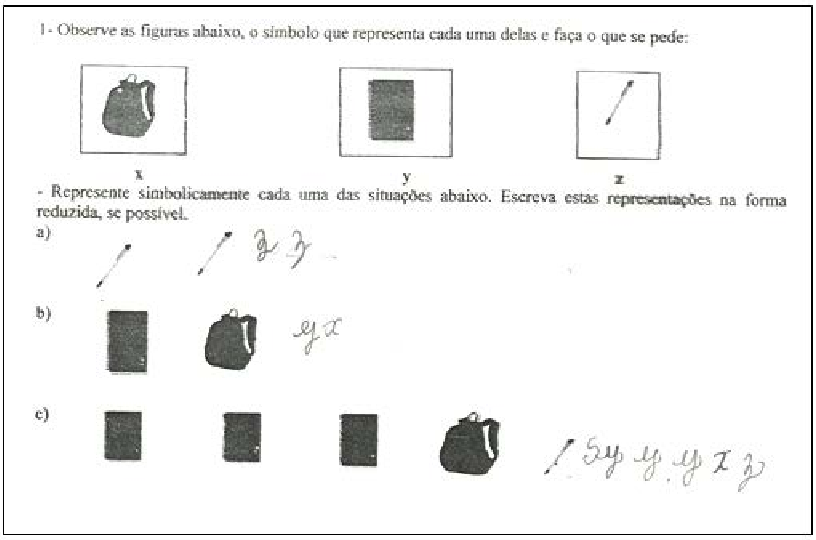
Questão/Objetivo específico	Acertos	Em branco	Erros
1- Representar situações-problema utilizando a linguagem algébrica.	15	5	15
2- Utilizar uma expressão algébrica para representar o perímetro de uma figura.	10	8	17
3-Representar uma situação-problema utilizando equações do 1^o grau e resolvê-la.	8	5	22
4- Resolver equações do 1^o grau.	7	8	20
5- Identificar o padrão da sequência e descobrir alguns termos da mesma .	25	1	9

Fonte: Elaboração própria

A questão 1 foi elaborada para verificar se os alunos eram capazes de representar, uma determinada situação, utilizando a linguagem algébrica. Foi diagnosticado que a maioria dos erros ocorreram quando os alunos adicionavam termos não-semelhantes da expressão algébrica elaborada, como pode-se verificar na resposta do aluno A30, apresentada na Figura 3. Com as conclusões apresentadas, este aluno revela que ainda não representa quantidades desconhecidas utilizando os símbolos oferecidos; ou seja, não é capaz de elaborar uma expressão algébrica a partir do contexto matemático apresentado. Os PCNs destacam que, se comunicar utilizando a linguagem matemática deve ser uma habilidade desenvolvida na Educação Básica.

Na questão 2 (Figura 4) os alunos deveriam utilizar uma expressão algébrica para determinar o perímetro de um figura. Antes, porém, teriam que concluir as medidas de três lados da referida figura, pois não estavam identificados explicitamente. 17 alunos

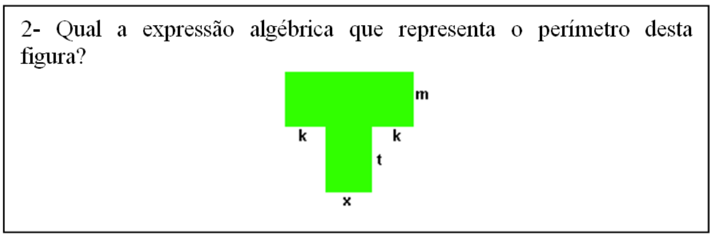
Figura 3 – Resolução da questão 1, do pré-teste aplicado ao grupo A, registrada pelo aluno A30.



Fonte:Protocolo da pesquisa

não concluíram a questão corretamente : 10 alunos representaram o perímetro da figura com a expressão 10 $xtmkk$ (adicionando termos que não são semelhantes) e os outros 7, registraram como resposta: $2k + t + m + x$ (não aplicando, corretamente, o conceito de perímetro). Estas conclusões revelam uma interpretação incorreta dos símbolos operatórios. Segundo Booth (1995), podemos considerar que estes alunos ainda não compreenderam a “ausência do fechamento”.

Figura 4 – Questão 2 do pré-teste aplicado ao grupo A



Fonte:Protocolo da pesquisa

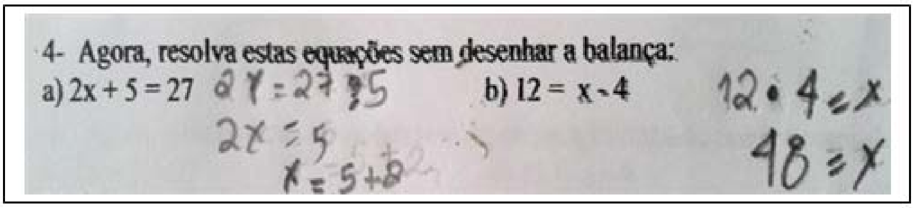
As questões 3 e 4 , foram elaboradas a partir de um dos descritores da Prova Brasil, que avalia a capacidade do aluno de identificar uma equação do primeiro grau que expressa um problema e resolvê-la.

Na questão 3 são apresentadas duas balanças, em equilíbrio, e alguns objetos contidos nos pratos das mesmas. Alguns dos objetos tinham o “peso” identificado pela letra x. O objetivo era encontrar o valor de x, a partir da resolução de uma equação do 1^o grau. Dos 35 alunos que responderam o pré-teste, 18 não conseguiram montar as equações e

4 elaboraram as equações, mas não as resolveram corretamente. Desta análise, pode-se concluir que apenas 22% dos alunos alcançaram o objetivo proposto no descritor da Prova Brasil.

A proposta da questão 4 era verificar a aplicação dos conceitos aritméticos na resolução de equações do 1^o grau. Os erros diagnosticados mostram que os alunos não compreendem os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Igualdade; o que pode ser verificado na resposta do aluno A5, apresentada na Figura 5. Apenas 20% dos alunos acertaram a questão.

Figura 5 – Resolução da questão 4, do pré-teste aplicado ao grupo A, registrada pelo aluno A5



Fonte:Protocolo da pesquisa

Na questão 5, esperava-se que os alunos realizassem generalizações, para descobrir a quantidade de quadrinhos existentes em algumas figuras de uma dada sequência. A maioria dos alunos conseguiu compreender o padrão da sequência dada, dentre eles percebeu-se que 10 alunos conseguiram acertar a questão, a partir do desenho dos 10 primeiros termos da sequência. Veja o registro do aluno A6 apresentado na Figura 6. Oito alunos erraram a questão, mostrando que ainda não realizavam as generalizações e também não utilizaram outro recurso para concluir a questão.

No grupo A, as maiores dificuldades apresentadas foram nas questões 2, 3 e 4, nas quais as habilidades trabalhadas envolviam: a resolução de equações do primeiro grau, com uma incógnita e a representação simbólica de situações-problema.

3.1.5.2 O pré-teste do grupo B

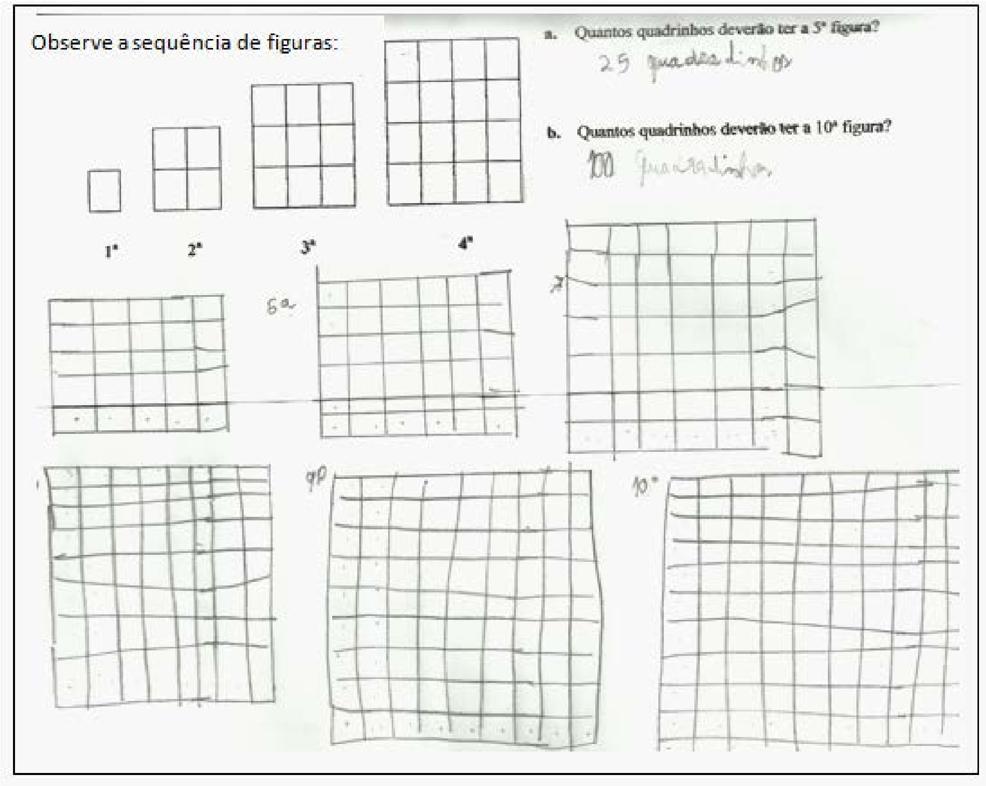
O pré-teste do grupo B (Apêndice D) foi elaborado a partir dos critérios de avaliação apresentados pelos PCNs para o 4^o ciclo do Ensino Fundamental. Ao final deste ciclo, de acordo com o referido documento, os alunos devem ser capazes de:

i) Resolver situações-problema por meio de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

ii) Construir procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com monômios e polinômios.

iii) Observar regularidades e estabelecer a relação de dependência entre variáveis.

Figura 6 – Resolução da questão 5, do pré-teste aplicado ao grupo A, registrada pelo aluno A6



Fonte:Protocolo da pesquisa

No grupo B as questões 1, 4 , 5 e 6 foram as que obtiveram maior índice de erro. Nelas, as habilidades observadas se referiam à transcrição de desafios para a linguagem algébrica, às operações com monômios e polinômios, à resolução de equações do primeiro grau e de sistemas de equações envolvendo estas equações do 1^o grau com duas incógnitas. Como está registrado na Tabela 5.

A questão 1 foi elaborada afim de verificar como os alunos iriam traduzir a situação-problema apresentada para a linguagem algébrica. As etapas da resolução deste desafio que foram consideradas são as seguintes: a elaboração da equação que apresenta algebricamente as informações oferecidas e a resolução desta equação. 18 alunos acertaram, totalmente, a questão; deste total 10 registraram, corretamente, as etapas da resolução e 8 resolveram, a mesma, utilizando o método da tentativa. Dos 64% alunos que erraram a questão, 30% deles não conseguiram sequer elaborar a equação sugerida no desafio. Com estas informações, comprova-se a dificuldade dos alunos nas questões nas quais são exigidas mudanças de representação e tratamento referentes aos registros em linguagem natural e/ou linguagem algébrica.

Na questão 2, apresentada na Figura 7, os alunos deveriam, por meio da observação, estabelecer uma relação entre as duas variáveis envolvidas: a quantidade de palitos e o

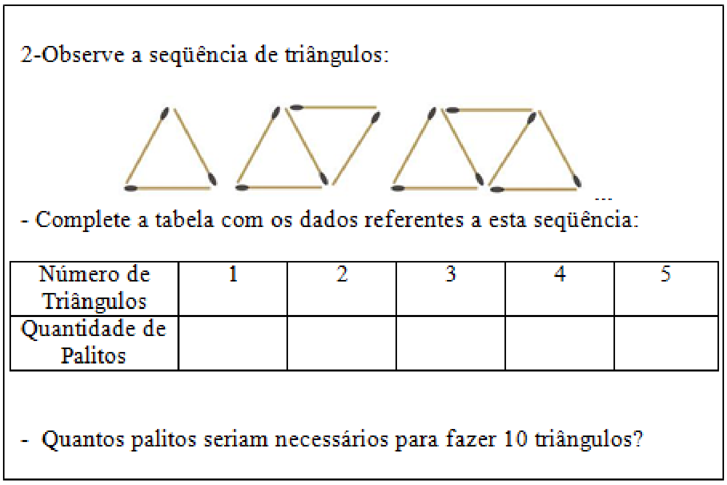
Tabela 5 – Análise do pré-teste do grupo B

Questões/Objetivo	Acertos	Em branco	Erros
1- Resolver situações-problema utilizando equações do 1^o grau	18	18	22
2-Realizar generalizações, a partir de uma sequência de figuras.	30	5	15
3-Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.	30	10	10
4- Resolver uma situação-problema envolvendo sistema de equações do 1^o grau com uma incógnita.	5	16	29
5- Resolver sistema de equações do 1^o grau com uma incógnita.	22	7	21
6-Operar com monômios e polinômios.	4	10	36

Fonte: Elaboração própria

número de triângulos apresentado nas figuras. Apenas 5 alunos erraram todos os itens; 10 alunos conseguiram preencher a tabela, corretamente, fazendo registros pictóricos. Assim, pode-se notar que apesar de não realizarem uma generalização, a partir do contexto apresentado na questão, alguns alunos utilizaram outro método para a resolução da mesma.

Figura 7 – Questão 2 do pré-teste aplicado ao grupo B


2-Observe a seqüência de triângulos:

...

- Complete a tabela com os dados referentes a esta seqüência:

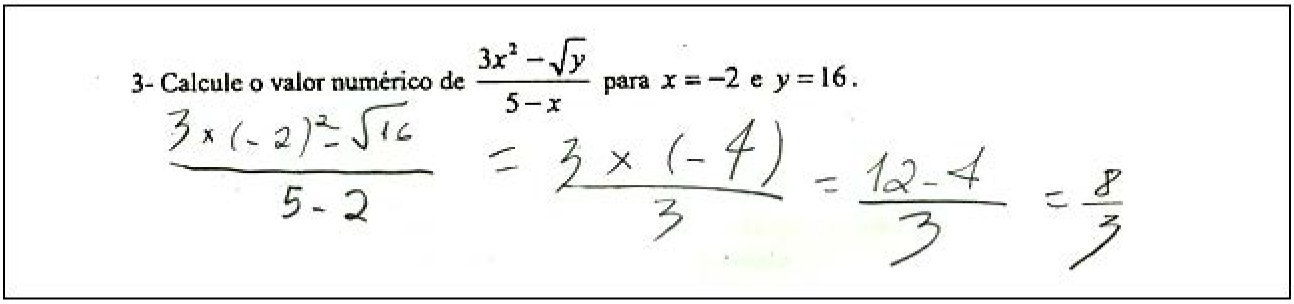
Número de Triângulos	1	2	3	4	5
Quantidade de Palitos					

- Quantos palitos seriam necessários para fazer 10 triângulos?

Fonte:Protocolo da pesquisa

A questão 3 foi proposta para diagnosticar as dificuldades dos alunos ao calcularem o valor numérico de uma expressão algébrica. 60% dos alunos concluíram de forma correta a questão. Todos os 10 alunos que erraram a questão, mostram dificuldade ao operar com números inteiros, conforme pode-se verificar na resposta do aluno B7 apresentada na Figura 8.

Figura 8 – Resolução da questão 3, do pré-teste aplicado ao grupo B, registrada pelo aluno B7



3- Calcule o valor numérico de $\frac{3x^2-\sqrt{y}}{5-x}$ para $x=-2$ e $y=16$.

$$\frac{3\times(-2)^2-\sqrt{16}}{5-2} = \frac{3\times(-4)}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

Fonte: Protocolo da pesquisa

A resposta indicada na Figura 8 mostra que o referido aluno, faz a substituição, correta, dos valores numéricos oferecidos na questão. Seus erros ocorrem ao multiplicar e ao calcular potências de base negativa. Neste caso, a carência dos conceitos aritméticos dificultaram a resolução da questão.

As questões 4 e 5 (Figura 9) envolviam a resolução de sistemas de equações com duas incógnitas. Nestas, a pesquisadora busca verificar se o alunos são capazes de resolver situações-problema por meio de sistemas de equações do primeiro grau, com duas incógnitas, aplicando as propriedades da igualdade para determinar suas soluções e analisando o contexto da situação enfocada.

Figura 9 – Questões 4 e 5 do pré-teste aplicado ao grupo B

4- Um número é formado de dois algarismos. A soma desses dois algarismos é igual a 6. Trocando os algarismos de lugar, o novo número tem 18 unidades a menos que o número original. Qual é o número original?

(Fonte: http://brainly.com.br/tarefa/765039)

5- Resolva o sistema de equações:

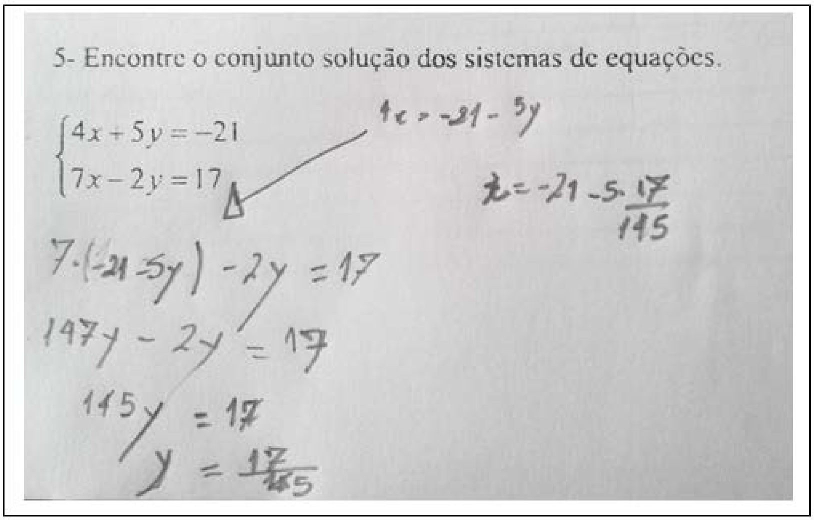
$$\begin{cases} 4x+5y=-21 \\ 7x-2y=17 \end{cases}$$

Fonte:Protocolo da pesquisa

Todos os alunos que erraram a questão 4 (58% do total) não conseguiram elaborar o sistema de equações a partir das informações dadas; mostrando não conhecer o significado algébrico da solução do mesmo. É notável destacar que nesta situação, a relação entre a Álgebra e a linguagem materna é o fator que gera a dificuldade na questão; visto que pelos resultados da questão posterior, um número maior de alunos mostrou conhecer pelo menos um método para a resolução dos referidos sistemas.

Na questão 5, o índice de erro caiu para 30% : 15 alunos e aplicaram incorretamente o método da substituição e 7 cometeram erros nos cálculos. O aluno, cuja resposta está apresentada Figura 10, tenta utilizar o método da "substituição" para resolver o sistema, mas não isola o valor da incógnita x na primeira equação. Assim, ele mostra que tentou, apenas, mecanizar o referido método, já que não conhece o porquê da sua aplicação. Esta forma de tratar a Álgebra como um conjunto de procedimentos mecânicos é um dos pontos que dificulta a aprendizagem dos alunos. Segundo os PCNs, essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos.

Figura 10 – Resolução da questão 5, do pré-teste aplicado ao grupo B, registrada pelo aluno B15



Fonte: Protocolo da pesquisa

O objetivo da questão 6, apresentada na Figura 11, era diagnosticar como os alunos iriam realizar as operações com monômios e polinômios. Foi verificado que apenas 8 % dos alunos acertaram a questão toda, o que representa apenas 4 alunos no total e, desse número, não havia aluno da turma do 8^o ano.

Sobre esta questão vale ressaltar que dos 36 alunos que erraram a questão, 30 substituíram, corretamente, as letras A, B, C e D pelas expressões ou valor correspondente. Os erros ocorreram ao operar com monômios ou polinômios. Em relação aos que acertaram a questão, apenas um deles identificou as expressões dos itens "b" e "d" como o produto notável, "quadrado da soma".

Figura 11 – Questão 6 do pré-teste aplicado ao grupo B

6- Sabendo que $A= x^2 - 4x + 4$, $B= 4$, $C= 2x$ e $D= x+1$, calcule o valor das expressões:

a) $A . B$ b) $(B + C)^2$ c) $B + C - D$ d) $(C + D)^2$

Fonte: Protocolo da pesquisa

A aplicação dos pré-testes objetivou identificar, nos alunos participantes da pesquisa, a aquisição das habilidades algébricas propostas pelos PCNs para a Educação Básica. Ao analisar as respostas dos alunos, buscou-se priorizar não o acerto ou o erro em si, mas as estratégias utilizadas por eles, a sua produção escrita que revelou suas facilidades e/ou dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, conforme sugere Cury (2007).

A análise dos resultados do pré-teste permitiu à pesquisadora comprovar as dificuldades algébricas dos alunos, e que deveriam ser trabalhadas nas atividades da sequência didática a ser aplicada. Foi evidenciado nas respostas encontradas, nos dois grupos que participaram desta etapa da pesquisa, que muitos alunos ainda não conseguem registrar seus raciocínios de forma coerente porque não compreendem a proposta do desafio ou não dominam a linguagem simbólica apresentada nos mesmos. Portanto, na sequência didática devem ser evidenciadas a elaboração e a interpretação de registros matemáticos; ou seja, a comunicação matemática.

3.1.6 Elaboração da sequência didática

Com a análise das respostas do questionário respondido pelos alunos e das argumentações apresentadas pelos seus educadores, pode-se comprovar a hipótese inicial de que a linguagem algébrica é abstrata e sem significado para a maioria dos alunos, e sua conexão com a língua materna é dificultada, também, pelos recursos pedagógicos utilizados pelo professor . Muitos alunos ainda não vinculam a Matemática com a vida, pois as experiências vivenciadas na escola estão muito distantes de seu contexto social. Em algumas propostas educativas os recursos lúdicos e midiáticos são utilizados, espontaneamente. Existem professores que apesar de conhecerem a importância destes recursos, ainda não os utilizam em sua prática.

Fundamentada nas considerações obtidas a partir do questionário, da entrevista e da análise dos resultados do pré-teste, foi elaborada a proposta didática. Ela consiste em um conjunto de atividades (que se encontram nos Apêndices E, F, G, H), desenvolvidas para cada ano do segundo segmento do Ensino Fundamental. Para Zabala (1998), uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de objetivos educacionais , que têm um princípio e um fim conhecidos pelos professores e pelos alunos.

Vale destacar que estas atividades foram aplicadas nas mesmas turmas que responderam o questionário e realizaram o pré-teste. Exceto a turma analisada do sexto ano do Ensino Fundamental, que não respondeu o questionário e não participou do pré-teste, pois neste ano escolar os alunos ainda não trabalham com aspectos algébricos de forma sistematizada.

3.1.6.1 Sequência Didática para ser aplicada na turma de 6^o ano do Ensino Fundamental

A Sequência Didática aplicada na turma de 6^o ano do Ensino Fundamental é composta de atividades denominadas por **Atividade 1** (Trabalhando com Padrões), **Atividade 2** (Números Figurados), **Atividade 3** (A Matemática das balanças) e **Atividade 4** (Trabalhando com Poliedros). Todas estas atividades, disponíveis no Apêndice E deste trabalho, têm por finalidade trabalhar com a construção e ampliação do pensamento abstrato; habilidade que os PCNs incluem na pré-álgebra.

A seguir, no Quadro 3, são apresentados alguns aspectos relevantes na realização de cada atividade.

Quadro 3 – Ficha técnica das atividades do 6^o Ano

Encontro/ Atividade Trabalhada	Material Necessário	Tempo utilizado	Data da aplicação
1- Trabalhando com padrões	Folha de atividades; geoplano; computador com acesso à Internet.	2h 30 min	16/11/2015
2- Números figurados	Folha de atividades; 25 tampinhas de garrafa PET, para cada trio de alunos.	1h 40 min	18/11/2015
3- A matemática das balanças	Folha de atividades; computador com acesso à Internet.	1h 40 min	25/11/2015
4- Trabalhando com Poliedros	Folha de atividades; computador com o $software Poly$	1h 40min	01/12/2015

Fonte:Elaboração própria

.

Antes de apresentar alguns procedimentos metodológicos específicos de cada uma das atividades, é necessário destacar alguns detalhes gerais que foram observados na aplicação de o todo trabalho:

- Ao final de cada encontro, todas as atividades foram recolhidas e arquivadas para análise. Antes de aplicar a próxima atividade, a pesquisadora fez uma análise das respostas a fim de sanar, posteriormente, as possíveis dúvidas.
- Cada encontro iniciou-se com uma breve discussão sobre a atividade anterior; foram discutidas algumas respostas apresentadas e solucionadas dúvidas.

A **Atividade 1** foi aplicada em 3 tempos de aula (2h 30 min), com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização. Ela foi elaborada a partir de seis questões, para serem trabalhadas com os alunos distribuídos em duplas ou em trios. Após a turma concluir cada questão, a pesquisadora fez as intervenções necessárias antes de iniciar o próximo desafio.

A apostila elaborada serviu de roteiro para os alunos e para a pesquisadora. Nas questões 1, 2 e 5 o objetivo era trabalhar o conceito de padrão de uma sequência; nestas os alunos analisaram sequências variadas, envolvendo números e formas geométricas. Para a realização da terceira questão proposta, os alunos precisaram do Geoplano para elaborar sequências utilizando formas geométricas; portanto, antes de utilizá-lo a pesquisadora apresentou este material à turma, explicando como ele deve ser manuseado.

Para o sexto desafio, foi necessário o uso de computadores com acesso à Internet; desta forma, esta etapa do encontro aconteceu no laboratório de informática da escola. É importante destacar que como se tratava da utilização de um objeto virtual , tornou-se fundamental que, antes da realização da questão, os alunos manuseassem livremente o aplicativo, por alguns minutos, para se familiarizarem com as funções e comandos do mesmo. Tratava-se de uma “Máquina Virtual”[2] , que transforma cada número que entra em um outro, obedecendo uma determinada “lei”.

A **Atividade 2** é composta de duas questões que foram trabalhadas em 2 tempos de aula (1h 40min), com o mesmo objetivo da atividade 1, porém com outro enfoque; agora envolvendo os números figurados. Na proposta, os alunos estavam arrumados em trios; o trabalho em grupo oportuniza a colaboratividade com a troca de ideias na resolução dos desafios.

Na primeira questão, a discussão sobre números quadrados foi disparada a partir das imagens disponibilizadas na apostila dos alunos. Foi necessário deixar disponível para os alunos folhas de papel para rascunho. Alguns deles precisaram realizar registros pictóricos antes de conseguir as generalizações pretendidas.

Para a segunda questão, os alunos precisaram de tampinhas de garrafas PET [3], que a pesquisadora ofereceu aos grupos. Com este material, construíram representações de números triangulares e a partir delas observaram os padrões nas figuras feitas.

2 <http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_191_g_4_t_2.html?from=topic_t_2.html./projects/abntex/>
3 PoliTereftalato de Etileno

A **Atividade 3** também foi aplicada com a utilização do computador; portanto, no laboratório de informática, com a turma dividida em trios. Ela foi planejada para acontecer em dois tempos de aula (1h 40 min), objetivando trabalhar a resolução de desafios envolvendo valores desconhecidos, utilizando o método da tentativa.

A proposta foi utilizar a "Balança Alternativa" [4]. Trata-se de um objeto digital que disponibiliza desafios no qual o aluno deve buscar os valores dos "pesos" que mantém a balança em equilíbrio.

Inicialmente, foram utilizadas as três primeiras atividades disponíveis no ambiente virtual. Nas questões 1 e 3 o desenho da balança já aparece na interface, mas na questão 2 o aluno deve desenhá-la para registrar solução do desafio.

Na **Atividade 4** os alunos utilizaram o $softwarePoly$ [5], portanto precisaram do computador com o programa instalado. Ela estava prevista para ser aplicada em 2 tempos de aula (1h 40 min) e foi elaborada com o objetivo de oportunizar a generalização de propriedades geométricas específicas dos prismas e pirâmides.

Inicialmente, os alunos, divididos em trios, foram orientados para identificarem na área de trabalho o ícone do $Poly$ e tocarem para abri-lo. A pesquisadora apresentou o aplicativo, informando alguns detalhes necessários para o manuseio; tais como a utilidade dos links apresentados.

Em seguida, os alunos exploraram livremente o programa, observaram as planificações e os movimentos dos sólidos trabalhados, no espaço. A pesquisadora os orientou a preencher a tabela, da questão 2, a partir das observações feitas. Com a análise da tabela, os alunos concluíram a relação entre o número de lados da base e os números de vértice, arestas e faces de um prisma qualquer.

3.1.6.2 Sequência Didática para ser aplicada na turma de 7^o ano do Ensino Fundamental

A Sequência Didática aplicada na turma de 7^o ano do Ensino Fundamental foi elaborada a partir das considerações obtidas após a análise das respostas do pré-teste do Grupo A. Se trata de um conjunto de 5 atividades identificadas por: **Atividade 1** (Jogo da Memória), **Atividade 2** (Ache-me na malha), **Atividade 3** (Equilibrando balanças), **Atividade 4** (Equações com cartões coloridos) e **Atividade 5** (Equações "com sentido"). Todas estas atividades estão disponíveis no Apêndice F deste trabalho; no Quadro 4 estão destacadas algumas informações para a realização das mesmas. .

Vale destacar, inicialmente, que cada um dos cinco encontros com a turma do 7^o ano foi previsto para acontecer em dois tempos de aula(1h 40 min.).

No primeiro encontro, a pesquisadora relembrou o objetivo do seu trabalho. E em

[4] <http://www.vdl.ufc.br/ativa/atividades.htm>
[5] <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php>

Quadro 4 – Ficha técnica das atividades do 7^{o} Ano

Encontro/ Atividade Trabalhada	Material Necessário	Tempo utilizado	Data da aplicação
1- Jogo da Memória	Folha de atividades; cartas do Jogo da Memória.	1h 40 min	17/11/2015
2- Ache-me na malha	Folha de atividades, lápis de cor tesoura, cartas do jogo; folha de atividades e dado.	1h 40 min	19/11/2015
3- Equilibrando balanças	Folha de atividades; computador com acesso à Internet.	1h 40 min.	26/11/2015
4- Equações com cartões coloridos	Folha de atividades, cartões coloridos e palitos de picolé.	1h 40 min	01/12/2015
5- Equações “com sentido”	Folha de atividades, fita métrica ou régua e lápis de cor	1h 40 min	07/12/2015

Fonte:Elaboração própria

seguida, abordou o conceito de expressão algébrica, já que alguns alunos não mostraram conhecê-lo ao resolver as questões 1 e 2 do pré-teste. Valeu destacar neste momento, a definição de termos semelhantes de uma expressão algébrica e exemplificar situações apresentadas em linguagens distintas; por exemplo um mesmo desafio registrado na língua materna e na linguagem algébrica.

Feitas as considerações iniciais, foi dado início a aplicação da **Atividade 1**. Esta, foi dinamizada a partir de um Jogo da Memória, que tem como objetivos trabalhar a tradução de situações-problema para a linguagem algébrica e a produção de um registro escrito, como forma de relato da dinâmica realizada e das novas descobertas matemáticas.

A turma foi dividida em trios para a realização do jogo; antes porém, a pesquisadora explicou detalhadamente as regras do mesmo. Cada aluno precisou, com as peças do jogo, formar pares de cartas; uma contendo um desafio escrito na língua materna e outra, com o mesmo desafio representado na linguagem algébrica.

Na etapa seguinte, após os trios concluírem o jogo, produziram um texto coletivo relatando os detalhes observados durante a realização do mesmo; tais como dúvidas, estratégias utilizadas para solucionar os problemas encontrados, etc. Na mesma produção, os alunos foram desafiados a definir, uma expressão algébrica e identificar, nas peças do jogo da memória, pares de expressões equivalentes.

A **Atividade 2** foi implementada a partir de um jogo denominado “Ache-me na malha”. Com este jogo, a pesquisadora pretendeu complementar o trabalho com as expressões algébricas iniciado na atividade anterior. Neste momento, foi dado a prioridade ao valor numérico de uma expressão algébrica e a regularidade em sequências numéricas elaboradas a partir de expressões algébricas.

Inicialmente, a turma foi dividida em trios. Cada trio recebeu uma cartela com as cartas, que precisavam ser recortadas uma a uma, uma malha com 70 números inteiros distintos, na qual os alunos marcaram as respostas (materiais disponíveis no Apêndice F deste trabalho), além de uma tesoura, lápis de cores diferentes e um dado.

Em seguida, foram apresentadas as etapas do jogo e algumas informações importantes. A pesquisadora esclareceu as dúvidas que apareceram e logo os alunos começaram a jogar. Veja, na sequência, algumas considerações:

- O primeiro jogador lança o dado e retirou uma carta do monte. Em seguida, encontra o valor numérico daquela expressão, substituindo o valor desconhecido, na mesma, pelo número sorteado no dado.
- O aluno marca, na malha, o valor numérico encontrado na etapa anterior. Para isso, cada jogador tem uma cor de lápis diferente dos demais. Caso o número já tenha sido marcado, o jogador não pontua.
- Termina o jogo quando acabam as cartas ou quando a malha estiver completa; vence quem colocar mais marcações;
- Se um jogador tiver errado a marcação, os adversários ganham um ponto extra por cada erro, lembrando que o grupo é quem deve verificar durante o jogo a resposta do colega.

Após terminarem o jogo, individualmente, os alunos utilizaram as expressões algébricas trabalhadas para registrar suas concepções acerca dos conceitos de variável e de sequência numérica, a partir das seguintes questões:

- Em todas as expressões numéricas que foram trabalhadas no jogo aparecem a variável x. Escolha uma delas e explique, com suas palavras, qual o significado do x na expressão.
- Escolha outra expressão que aparece no jogo e, a partir dela, obtenha uma sequência numérica. Registre todos os cálculos realizados e responda:

Os números da sequência elaborada por você têm uma regularidade? Caso sua resposta seja positiva, explique como você descobriu?

Finalizando, a pesquisadora discutiu as respostas apresentadas, analisando algumas cartas do jogo.

As atividades 3 e 4 foram organizadas com o mesmo objetivo: comparar o conceito de variável com o de incógnita; no caso resolvendo equações do primeiro grau, mas com estratégias distintas. Visto que, nas questões 3 e 4 do pré-teste, em que os alunos foram avaliados nesta habilidade, os resultados não foram satisfatórios.

A **atividade 3** foi elaborada a partir do objeto digital denominado "Aprendendo equações através da balança" disponível no RIVED (Rede Interativa Virtual de Educação). Assim, este encontro aconteceu no laboratório de informática da escola e a turma ficou dividida em grupos de três ou quatro alunos.

Previamente a pesquisadora ligou os computadores que foram utilizados pela turma e acessou o endereço <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html>, onde está disponibilizado o objeto digital que será utilizado nesta atividade.

A conversa inicial foi conduzida a partir do contexto apresentado na página inicial do objeto virtual utilizado, que é o equilíbrio das balanças. Arrastando os tomates disponíveis, os alunos observaram as situações de igualdades e desigualdades numéricas.

Em seguida, os trios fizeram os exercícios propostos para as situações apresentadas em que há um "peso desconhecido" $x > 0$. Vale destacar que o próprio objeto digital oferece a correção das respostas; os alunos só conseguem acessar o próximo desafio se acertarem o inicial.

Para o desafio $x - 1 = 2$ a pesquisadora propôs os seguintes registros:

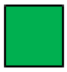
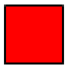
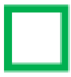
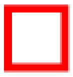
- Relate como você conseguiu descobrir o valor do "peso x" para manter a balança em equilíbrio.
- Agora, clique na janela "fazer exercícios" e tente solucionar os desafios. Não esqueça de registrar, com desenhos, suas conclusões. (Dica: Faça o desenho de uma balança para cada situação apresentada, mostrando as mudanças que ocorrem nos pratos da mesma para que ela se mantenha em equilíbrio).

Em seguida, a proposta foi repetir os procedimentos da questão anterior para os desafios : $2x = 6$ e $x/3 = 1$.

Para finalizar este encontro, a pesquisadora apresentou o conceito de uma equação do primeiro grau, exemplificando a resolução das mesmas utilizando desenhos de balanças.

A **atividade 4** foi iniciada com uma conversa inicial relembrando o encontro anterior e fixando o conceito de equação. Em seguida, a pesquisadora apresentou à turma, que estava dividida em grupos de 3 alunos, o material necessário para a realização das tarefas deste encontro. Tratava-se de quadradinhos com 3 cm de lado, em cartolina branca, verde e vermelha, observando um código cromático; como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Material para a Atividade 4

Material	Código Cromático
	(+1) Unidade Positiva
	(-1) Unidade Negativa
	+ x (Unidade Positiva da Incógnita x)
	- x (Unidade Negativa da Incógnita x)

Fonte: Protocolo da pesquisa

Vale ressaltar que, cada trio recebeu uma quantidade igual a 10 unidades de cada uma das peças identificadas na figura anterior. Além disso, receberam 2 palitos, tipo de picolé, com os quais representaram a igualdade e uma folha com o roteiro da atividade.

O desafio inicial foi a resolução da equação $-5 + x = 4 - 2x$. A pesquisadora construiu, com os alunos, algumas etapas para esta resolução, e os grupos puderam acompanhá-la com os materiais disponíveis.

- Traduzir a equação apresentada para a “linguagem dos cartões”.
- Realizar uma operação de equilíbrio, somando $2x$ em ambos os membros da igualdade.
- Simplificar os pares ($-x$) e (+x).
- Realizar outra operação de equilíbrio, somando cinco unidades em cada membro da igualdade.
- Simplificar os pares (-1) e (+1).
- Realizar uma operação de equilíbrio, dividindo por 3 cada membro da igualdade.
- Traduzir a resposta encontrada para a linguagem algébrica.
- Fazer a verificação da resposta encontrada na equação dada.

Após concluir a resolução da equação $-5 + x = 4 - 2x$, o desafio para os grupos foi utilizar cartões coloridos para resolver $x + 8 = -3x - 5$. Em seguida, os grupos registraram cada uma das operações de equilíbrio e de simplificação que utilizaram. No final, escreveram a resposta utilizando a linguagem algébrica e verificaram o resultado encontrado.

A **atividade 5** propôs a utilização de expressões algébricas e equações como estratégia para resolver desafios do cotidiano. Tinoco (2008) destaca que uma das funções da Álgebra é a de ser instrumento para resolver problemas.

A pesquisadora iniciou o encontro com algumas questões para um debate, a fim de verificar algumas concepções em relação aos estudos realizados até o momento:

- Por que usar letras em Matemática?
- Para que servem as equações?

Após a discussão, que destacou que as fórmulas são elaboradas a fim de estabelecer uma relação entre grandezas, foram propostas as questões da atividade. Tratava-se de desafios que envolvem equações que nos ajudam compreender situações de nosso cotidiano.

No roteiro da atividade, que todos os alunos receberam, estavam descritas as três propostas, que envolvem a conexão entre a linguagem algébrica e a língua materna. Na questão 1, o contexto é descobrir o número que seu colega calça; para isso a pesquisadora entregou uma régua ou fita métrica para cada dupla de alunos. No restante das questões, o trabalho foi individual.

A questão 2 abordou o consumo de energia elétrica dos aparelhos eletrônicos; a discussão inicial partiu da leitura do trecho de um artigo publicado em :<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/equacao-1.htm>.

O título da questão 3 é “Arquitetando”, e nela o conceito de área foi envolvido; por isso, precisou ser revisto pela pesquisadora, com a turma. Ou seja, foi trabalhado o conteúdo cognitivo do texto, independente do texto do desafio. Para Duval (2003) esta é uma situação normativa que exige tratamentos paralelos ao texto. Nesta questão os alunos também fizeram o uma representação pictórica do desafio; e para o mesmo, precisaram de lápis de cor, que foram ser fornecidos pela pesquisadora.

3.1.6.3 Sequência Didática para ser aplicada na turma de 8^o ano do Ensino Fundamental

A Sequência Didática aplicada na turma de 8^o ano do Ensino Fundamental foi elaborada a partir das considerações obtidas após a análise das respostas do pré-teste do Grupo B. Se trata de um conjunto de 3 atividades identificadas por: **Atividade 1** (A Álgebra dos vitrôs), **Atividade 2** (Jogo da Velha), **Atividade 3** (Algeplan e o Quadrado da Soma). Todas estas atividades estão disponíveis no Apêndice G deste trabalho; no Quadro 5, estão destacadas algumas informações para a realização das mesmas.

Torna-se fundamental destacar que as atividades propostas para este ano escolar têm objetivos que abordam os conceitos de monômios e polinômios e as operações que

Quadro 5 – Ficha técnica das atividades do 8^{o} Ano

Atividades	Material Necessário	Tempo utilizado	Data da aplicação
1- A Álgebra dos vitrôs	Folha de atividades, computador com acesso à Internet e lápis de cor.	1h 40 min	18/11/2015
2- Jogo da velha	Cartões com desafios e com as respostas dos mesmos, cartela com o jogo da velha.	1h 40 min	23/11/2015
3- Algeplan e produtos notáveis	Folha de atividades, computador com acesso à Internet e lápis de cor.	1h 40 min	08/12/2015

Fonte:Elaboração própria

os envolvem. Já que no pré-teste, foi diagnosticado que todos os alunos da turma observada apresentaram dificuldades na questão que avaliava estas habilidades. Os objetivos trabalhados nesta sequência didática estão abaixo enumerados.

- Utilizar as operações com monômios para determinar as áreas de figuras variadas.
- Realizar as atividades propostas no objeto virtual “Álgebra dos vitrôs”[6] e registrar cada análise realizada, utilizando a malha quadriculada e a língua materna
- Operar com monômios e polinômios para pontuar no “Jogo da Velha”.
- Representar polinômios utilizando o Algeplan [7].
- Reconhecer polinômios equivalentes observando as peças do Algeplan.
- Representar, geometricamente, o produto notável “quadrado da soma”, utilizando o Algeplan.

É válido destacar que todos os encontros estavam previstos para durar 2 tempos de aula(1h 40min). O primeiro encontro foi iniciado com uma discussão a partir do significado matemático das palavras monômio e polinômio; já que os alunos mostraram não conhecê-los se analisarmos o resultado da questão 6 do pré-teste. Foi necessário, também, uma revisão no conceito de área.

6 <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/raquel_leonogildo_gustavo_tania/projeto2MX.html>

7 <http://mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf>

Logo em seguida, se deu início à **Atividade 1**, que foi implementada a partir do objeto digital denominado “Álgebra dos vitrôs” disponibilizado na plataforma RIVED. Portanto, esta atividade aconteceu no laboratório de informática da escola, com a turma arrumada em grupos de 3 ou 4 alunos. Cada aluno recebeu uma folha para acompanhar as etapas da atividade e as questões propostas, além do lápis de cor.

Já no laboratório, com os computadores, ligados previamente pela pesquisadora, os alunos acessaram o seguinte endereço <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/raquel_leonogildo_gustavo_tania/projeto2MX.html>. A partir da tela inicial deste objeto digital, a pesquisadora motivou a atividade. Alguns comandos para a utilização deste aplicativo, foram apresentados aos alunos:

- Clicar no ícone “Entrar”. Em seguida, utilizar a seta vermelha disponível no canto direito da tela, para acessar o catálogo de atividades.
- Em seguida, clicar na primeira peça.
- Ainda clicando na seta vermelha da direita, observar algumas telas com instruções para a realização das atividades.
- Anotar as instruções oferecidas, pois serão importantes no decorrer da atividade;
- Na sequência, verificam-se algumas atividades propostas.
- De acordo com as explicações do aplicativo, clicar em uma das figuras no canto superior direito e arrastá-la para o espaço do vitrô. Utilizar o valor algébrico de cada peça para resolver os desafios propostos.

Após responder o desafio proposto pelo próprio objeto digital, cada aluno registrou, por escrito, a resolução do desafio. Na malha quadriculada, fizeram o desenho de cada peça selecionada para formar o vitrô.

Em seguida, foi proposto aos alunos que volassem à tela em que aparecem as peças de vitrô e clicassem na peça 2. Os grupos realizaram a atividade proposta e fizeram o registro, conforme as orientações da questão 1. Para finalizar, a pesquisadora concluiu o encontro fazendo uma breve discussão a partir dos conceitos de monômio e polinômio, monômios semelhantes e nas operações com monômios, que foram trabalhadas na atividade.

O segundo encontro foi iniciado com a apresentação da Teleaula 61 do Novo Telecurso [8]. A pesquisadora aproveitou algumas situações apresentadas neste vídeo para rever os conceitos de monômios, monômios semelhantes, polinômios; além de exemplificar

---

8 <www.youtube.com/watch?v=MasXxq3CYKc>

operações com polinômios. Sem interrupção, o vídeo completo dura, aproximadamente, 15 minutos.

Após este primeiro momento, chegou a vez de apresentar a proposta da **Atividade 2**. Tratava-se de um Jogo da Velha especial; em que os alunos tiveram a oportunidade de operar com monômios e polinômios, registrando, por escrito, cada jogada e conferindo os resultados encontrados; para isso, os alunos trabalharam em duplas.

Cada dupla recebeu uma cartela, confeccionada em cartolina (espécie de tabela com três linhas e três colunas, em que cada célula foi identificada por uma letra maiúscula A, B,..., I), grupo de nove cartões contendo desafios identificados com as letras de A até I no verso e, outro grupo de nove cartões contendo as respostas dos desafios propostos, também identificados no verso com as letras de A até I. Todos estes materiais estão disponíveis no Apêndice G.

A dinâmica do jogo foi a seguinte: O primeiro jogador escolheu uma letra, retirou o desafio correspondente a ela e resolveu-o. O outro jogador verificou a resposta do colega a partir do cartão que continha a resposta do referido desafio. Caso a resposta estivesse certa, quem a resolveu colocava sua marca no lugar da letra escolhida; caso estivesse errada, quem marcava era o outro jogador. Na sequência, o segundo jogador retirava outra questão e continuava o jogo da mesma maneira. Ganhava a partida quem conseguisse colocar primeiro sua marca em três casas na vertical, horizontal ou diagonal.

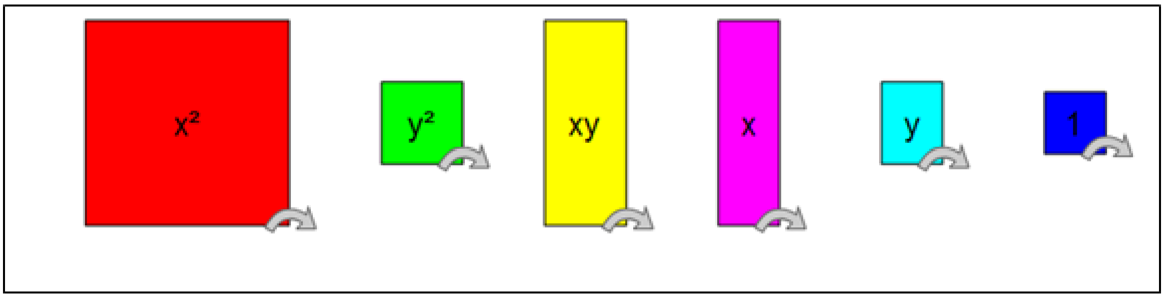
Durante a realização do jogo, os alunos registraram seus cálculos em cada jogada, mostrando os procedimentos utilizados para resolver o desafio. Caso, o jogador tivesse encontrado um resultado diferente daquele que aparece no cartão de resultados, o outro jogador refazia a operação, explicando ao colega passo a passo do seu raciocínio; buscando o resultado que aparece no cartão. A pesquisadora solucionou as dúvidas que apareceram. Para concluir os trabalhos os alunos fizeram uma breve avaliação do encontro, destacando suas dúvidas e as novas descobertas.

O terceiro encontro aconteceu em dois momentos; o primeiro deles no laboratório de informática, com os alunos divididos em trios, e o outro, na sala de aula, com os alunos trabalhando, individualmente. Nele, foi dinamizada a **Atividade 3** a partir do "Algeplan", um material manipulativo utilizado para no trabalho com os polinômios. Foi utilizado a versão digital do Algeplan, disponível no endereço <http://mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf>

Quando chegaram ao laboratório, os grupos já encontraram as peças do Algeplan na tela dos computadores (Figura 13).

A partir da imagem, a pesquisadora apresentou a proposta de trabalhar com as áreas das figuras apresentadas. Neste material foram abordadas as operações com polinômios de grau, no máximo 2, considerando as áreas de retângulos. A partir desta ideia, foram

Figura 13 – Peças do Algeplan



Fonte: mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

construídas as peças que representam os monômios que compõem este material. Para representações negativas, quando não for relacionar o monômio que representa a figura, com o conceito de área, utiliza-se o verso das mesmas. Neste modelo, clicando na seta situada no canto direito de cada figura.

Depois de apresentado o material, a pesquisadora modelou o polinômio $2x^2$+ y^2 + 2xy - x + 3, utilizando o Algeplan. Em seguida, os grupos também tiveram a oportunidade de manusear o objeto virtual, construindo, geometricamente, figuras cujas áreas representam polinômios variados, indicados pela pesquisadora.

A próxima proposta foi a montagem de um quadrado utilizando uma peça vermelha, uma peça verde e duas peças amarelas. A partir desta construção, os grupos elaboraram polinômios para representar a área do quadrado. A pesquisadora sugeriu $(x + y)^2$ como uma expressão que representa a referida área e a identificou como um produto notável.

Neste momento, a discussão foi conduzida a partir do significado da expressão “produto notável”. Foi pedido aos alunos que dessem exemplos de outros produtos notáveis. Como eles não os apresentaram, a pesquisadora propôs uma pesquisa rápida no livro didático.

Na sequência, foi enfatizado o trabalho com o quadrado da soma. Cada grupo representou, utilizando o Algeplan, o produto notável $(x + 3y)^2$. Individualmente, representaram o trinômio $(2x + y)^2$, utilizando uma malha quadriculada.

O encontro foi concluído com uma avaliação dos trabalhos realizados nesta pesquisa.

3.1.6.4 Sequência Didática para ser aplicada na turma de 9^{o}ano do Ensino Fundamental

As propostas desta Sequência Didática foram definidas a partir da análise das respostas do pré-teste aplicada ao Grupo B e também dos descritores da Prova Brasil, visto que este ano escolar é submetido a esta avaliação. É notório destacar que o pré-teste do grupo B foi aplicado para todo o 4^o ciclo do Ensino Fundamental, e por este motivo o mesmo não continha questões envolvendo equações do 2^o grau; já que este assunto é específico ao 9^o para o Ensino Fundamental.

O trabalho com este ano escolar envolveu um grupo de 3 atividades identificadas por: **Atividade 1** (Trabalhando com sistemas de equações do 1o grau), **Atividade 2** (Equações do 2^o grau), **Atividade 3** (Resolvendo equações utilizando produtos notáveis). Todas estas atividades estão disponíveis no Apêndice H deste trabalho. No Quadro 6 estão destacadas algumas informações necessárias para a realização das mesmas.

Quadro 6 – Ficha técnica das atividades do 9^o Ano

Atividades	Material Necessário	Tempo utilizado	Data da aplicação
1- Trabalhando com os sistemas de equações do 1^o grau	Folha de atividades; computador com o software $GeoGebra$; calculadora.	2h 30 min	19/11/2015
2- Equação do 2^o grau	Folha de atividades, computador com acesso à Internet ou $smartphone$.	1h 40 min	24/11/2015
3- Resolvendo equações utilizando produtos notáveis	Folha de atividades; tesoura e lápis de cor.	2h 30 min	30/11/2015

Fonte:Elaboração própria

.

A **atividade 1** foi elaborada a fim de contemplar dois Descritores da Prova Brasil, MEC (2011), que também foram abordados nas questões 4 e 5 do pré-teste:

- (D34) Identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema;
- (D35) Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações de primeiro grau;

Esta atividade foi desenvolvida com os alunos divididos em grupos de 4, exceto o desafio 4, que os alunos responderam, individualmente. Como foi dinamizada com o auxílio do $GeoGebra$[9], a mesma deve foi aplicada no laboratório de informática da escola. Portanto, previamente, a pesquisadora instalou o programa nos computadores[10].

9 Programa de matemática dinâmica, o qual une aritmética, álgebra, geometria e cálculo. O $GeoGebra$ possibilita o desenho de pontos, vetores, segmentos, linhas e funções, e ainda, a alteração dinâmica deles, assim que terminados. Com ele também é possível inserir equações e coordenadas diretamente nos gráficos.

10 Para instalar o $GeoGebra$ acesse<https://www.geogebra.org/download>

O encontro, foi previsto para durar 3 tempos de aula (2h 30min), teve início com uma breve explanação da pesquisadora sobre os objetivos do trabalho. Em seguida, a mesma, abordou a utilização de representações distintas de um mesmo objeto.

Todos os alunos receberam uma folha contendo um roteiro da atividade e os quatro desafios propostos. A proposta do desafio 1 era escrever uma situação-problema, apresentada na língua materna, na linguagem algébrica; em seguida, resolvê-la, utilizando um sistema de equações do 1^o grau, com duas variáveis. Em seguida, a partir dos comandos oferecidos pela pesquisadora, os alunos utilizaram o $GeoGebra$ para representar, graficamente, a situação dada.

No desafio 2, a proposta era que cada aluno escrevesse uma equação do 1^o grau com duas incógnitas e a trocasse com um colega do grupo. Em seguida, cada um representou a equação no plano cartesiano utilizando o programa $GeoGebra$; construiu três pontos sobre a reta e determinou três soluções da equação. Finalmente, verificaram se os pares ordenados obtidos realmente eram soluções da equação, utilizando a calculadora.

No desafio 3, os grupos resolveram, graficamente, o sistema linear, utilizando o $GeoGebra$. Em seguida, relacionaram os pares ordenados que são soluções deste sistema.

Os alunos resolveram o desafio 4, individualmente. Nesta questão, uma situação descrita na Língua Materna foi apresentada algebricamente e graficamente.

Finalizando este encontro, a pesquisadora voltou à discussão inicial que se referia às representações variadas de um mesmo objeto matemático.

Como já foi relatado anteriormente, o tema "equações do 2^o grau" não foi abordado no pré-teste; contudo foi trabalhado nas atividades seguintes desta sequência didática, visto que é apresentado como um dos descritores da Prova Brasil,(MEC, 2011): (D31) Resolver problema que envolva equação de segundo grau.

O segundo encontro foi iniciado com uma revisão do encontro anterior; foram enfocadas as dúvidas e as descobertas feitas. A pesquisadora aproveitou a discussão para destacar o conceito e a resolução de uma equação do 1^o grau. Ele foi previsto para durar 2 tempos de aula (1h 40min).

Na sequência dos trabalhos foi dinamizada a **Atividade 2**; que aconteceu a partir das propostas da Teleaula 73 do Novo Telecurso[11]. A pesquisadora baixou este material, previamente, e trouxe para projetar na sala de aula, com auxílio do $datashow$. Sem interrupção, o vídeo completo dura cerca de 13 minutos.

A partir das situações apresentas na Teleaula, a pesquisadora interrompeu a sua apresentação para solucionar dúvidas dos alunos e fazer uma nova abordagem dos assuntos.

[11] <https://www.youtube.com/watch?v=0obrznICwbg>

Após as discussões oportunizadas pela Teleaula, os alunos responderam, em grupos de 4 alunos, algumas questões, que estavam disponíveis numa folha de atividades. Estas questões envolviam os conceitos de equação do segundo grau, coeficientes destas equações, equações completas, incompletas e a solução da equações incompletas.

O encontro foi encerrado com a apresentação das respostas dos grupos e solução das possíveis dúvidas que foram destacadas.

A **Atividade 3** foi elaborada com o objetivo de promover uma revisão nos casos de produtos notáveis, assunto que os alunos mostraram dificuldades na questão 6 do pré-teste e que serão utilizados como ferramentas para resolver equações completas do 2^o grau.

A proposta, que foi aplicada no terceiro encontro da pesquisadora com a turma analisada, consistia na utilização de um material concreto que associava áreas de figuras geométricas às operações matemáticas envolvidas, no caso os produtos notáveis e as equações do 2^ograu. Este encontro estava previsto para durar 3 tempos de aula (2h 30min).

Esta atividade foi dividida em 4 etapas. A etapa 1 enfocava a propriedade distributiva envolvendo polinômios. Da etapa 2 em diante, foi retomada a ideia de alguns produtos notáveis: quadrados da soma e da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos.

Para iniciar a atividade, foram apresentadas aos alunos as peças disponíveis na folha de atividades, que deveriam ser recortadas na medida em que forem realizando as etapas da atividade.

Os alunos foram orientados para identificar a área de cada peça, assim como composições entre elas, a partir das questões propostas.

Apesar do trabalho acontecer em grupos de quatro alunos, cada um recebeu a folha de atividades e uma tesoura para o uso individual.

Após as 4 etapas da atividade, os alunos foram desafiados a desenvolver produtos notáveis utilizando a representação geométrica e resolver equações do segundo grau utilizando produtos notáveis. Nestes desafios, os alunos tiveram que registrar, por escrito, o raciocínio utilizado. O encontro foi encerrado com uma breve revisão dos assuntos trabalhados.

Capítulo 4

Aplicação da Sequência Didática e Análise dos dados

Neste capítulo há o relato da proposta didática baseada nas atividades disponíveis nos Apêndices E, F, G e H deste trabalho. Será apresentado, detalhadamente, o processo de experimentação das atividades; e também, serão destacadas as atitudes dos alunos, as intervenções da pesquisadora e algumas conclusões.

É importante destacar que a pesquisadora apresenta os objetivos do trabalho e alguns detalhes do desenvolvimento do projeto aos sujeitos da pesquisa, antes da realização das atividades propostas em cada turma analisada. Neste momento também são construídas algumas regras para viabilizar os encontros.

4.1 Trabalho com o 6^o ano do Ensino Fundamental

As atividades deste ano escolar, disponíveis no Apêndice E deste trabalho, foram aplicadas em uma turma de 33 alunos. Sendo que, apenas 30 destes alunos participaram de todas as atividades desenvolvidas. Nas mesmas, os alunos serão identificados, individualmente pela letra maiúscula A, seguida de um número natural de 1 a 30.

4.1.1 A atividade 1 (Apêndice E)

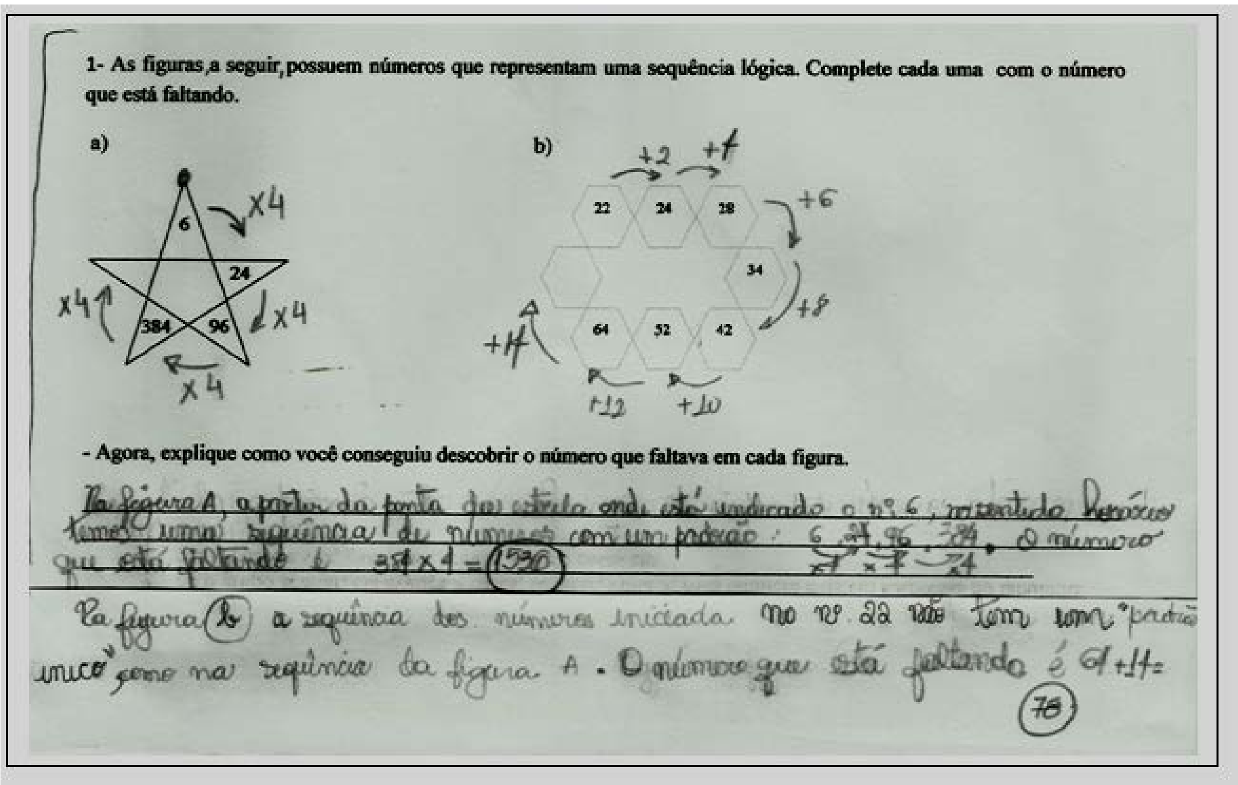
Objetivo: Desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

Desenvolvimento: Esta atividade é composta de 6 desafios, elaborados a partir da concepção de Álgebra como "Aritmética generalizada", como identificam os autores Lins e Gimenes (2006) e Usiskin (1995). As questões de 1 a 5 foram trabalhadas com os alunos divididos em duplas. Aqui, identificadas pela letras maiúsculas do alfabeto latino (A a O). Na questão 6, a turma precisou ficar arrumada em trios, pois houve um problema técnico com alguns computadores da escola. Neste relato, identificados pelas letras do alfabeto latino (A até J). Todos os 30 alunos participantes desta pesquisa estiveram presentes neste primeiro encontro.

Na **questão 1**, o objetivo era descobrir um dos termos de uma sequência numérica; antes, porém, era necessário identificar padrão da referida sequência. A maior dificuldade apresentada pelas duplas de trabalho foi relatar, por escrito, o raciocínio utilizado para resolver a questão. Apesar de, oralmente, conseguirem apresentar seus argumentos.

Lins e Gimenes (2006) destacam que para o processo de produção de significados é importante considerar, dentre outros aspectos, os textos sendo produzidos (notações, diagramas, escrita e fala) e o papel do professor como interlocutor. Nesta perspectiva, a pesquisadora sistematizou as ideias apresentadas pelas duplas, elaborando, coletivamente, um parágrafo para registrar a resposta da questão. Veja o registro da dupla I na Figura 14

Figura 14 – Registro da dupla I : questão 1 da Atividade 1 do 6^o ano



Fonte: Protocolo da pesquisa

Antes de realizar a próxima questão, a pesquisadora apresentou aos alunos exemplos de sequências variadas: numéricas (citou as duas sequências destacadas na questão 1 desta atividade), formadas por símbolos ou formas geométricas.

Na **questão 2** foi apresentada uma sequência de figuras geométricas e os alunos deveriam descobrir alguns elementos da mesma; ou seja, observar regularidades. Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) destacam que o pensamento algébrico tem alguns elementos caracterizadores e um deles é a percepção de regularidades.

No item (2a) o objetivo era encontrar o 8º elemento da sequência; já no item (2b) foi solicitado representar o 20º elemento da sequência, sem a necessidade de desenhar todos os termos anteriores. É notório destacar que, neste item, nenhuma dupla de trabalho conseguiu concluir, corretamente, o desafio, sem registrar todos os termos da referida sequência. Neste momento, a pesquisadora nota que os alunos ainda não conseguem estabelecer as relações entre aqueles objetos, sem o auxílio da representação pictórica. Para Freitas (2014), a dificuldade que os alunos apresentam em reconhecer os padrões das sequências demonstra a falta de prática com atividades visuais; experiências prévias com questões que estimulem o raciocínio algébrico.

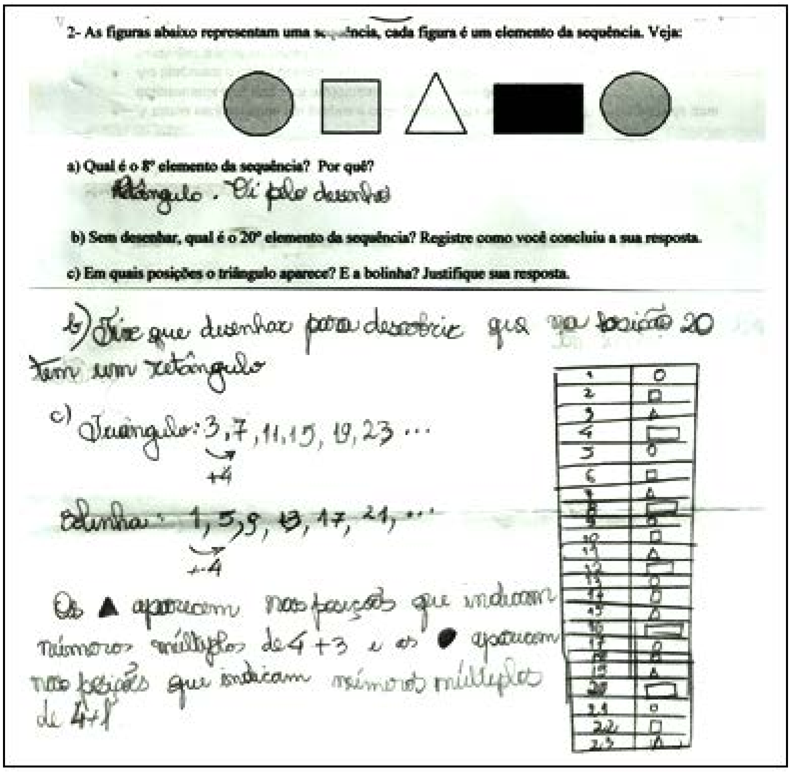
No item (2c) foi solicitada as posições ocupadas pelos triângulos e pelos círculos. Para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o processo de generalização, isto é, o processo de descoberta e comprovação de propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos, é um elemento central no pensamento algébrico.

A Figura 15 mostra as respostas da dupla A, que após fazer o registro pictórico dos 20 primeiros termos da sequência, conseguiu estabelecer uma relação entre as posições ocupadas pelos triângulos e pelos círculos. Esta dupla teve a oportunidade de apresentar aos colegas suas conclusões; e assim, os alunos que ainda não tinham concluído a atividade, solucionaram suas dúvidas. Para Smole (2000), em todos os níveis de ensino os alunos devem ser estimulados a se comunicar matematicamente; o professor deve levar seus alunos a pensarem e expressarem ideias.

Na **questão 3** também foi trabalhada a sequência formada por figuras geométricas. Mas, nesta oportunidade, cada dupla utilizou o Geoplano para criar a sua sequência de figuras. Na sequência, as duplas trocaram entre si os Geoplanos e buscaram descobrir o padrão da sequência montada pelos colegas, identificando o próximo elemento da mesma. Para Smole (2000), se os alunos forem encorajados a se comunicar matematicamente com seus colegas e com o professor, eles terão oportunidade para explorar e conectar seus pensamentos,novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um determinado assunto matemático. Na Figura 16 é apresentada a sequência elaborada pela dupla C.

Esta questão despertou muito interesse dos grupos, visto que as atividades lúdicas são atividades que geram prazer, segundo Araujo (2000). A pesquisadora aproveitou este contexto para lançar o desafio: Você é capaz de descobrir o décimo elemento da sequência que vocês estão analisando? Algumas duplas conseguiram descobrir o termo procurado, sem a necessidade de desenhar os dez primeiros termos da sequência. Mostrando, desta forma, que já conseguiram estabelecer relações entre objetos; iniciando assim o processo de generalização.

Figura 15 – Registros da dupla A referente à questão 2 da atividade 1 do 6^o ano



2- As figuras abaixo representam uma sequência, cada figura é um elemento da sequência. Veja:

a) Qual é o 8º elemento da sequência? Por quê?

Retângulo. Vi pelo desenho

b) Sem desenhar, qual é o 20º elemento da sequência? Registre como você concluiu a sua resposta.

c) Em quais posições o triângulo aparece? E a bolinha? Justifique sua resposta.

b) Tive que desenhar para descobrir que na posição 20 tem um retângulo

c) Triângulo: 3, 7, 11, 15, 19, 23 ... +4

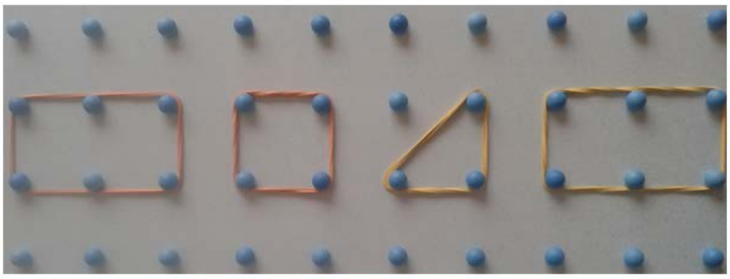
Bolinha: 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... +4

Os ▲ aparecem nas posições que indicam números múltiplos de 4+3 e as ● aparecem nas posições que indicam números múltiplos de 4+1

Fonte: Protocolo da pesquisa

Figura 16 – Registros da dupla C referente à questão 3 da atividade 1 do 6^o ano

3- Criem uma sequência de figuras no *Geoplano* e peçam a uma dupla de colegas para que descubram o critério que vocês usaram para construí-la. Também pergunte a eles(as) qual é o próxima figura desta sequência.

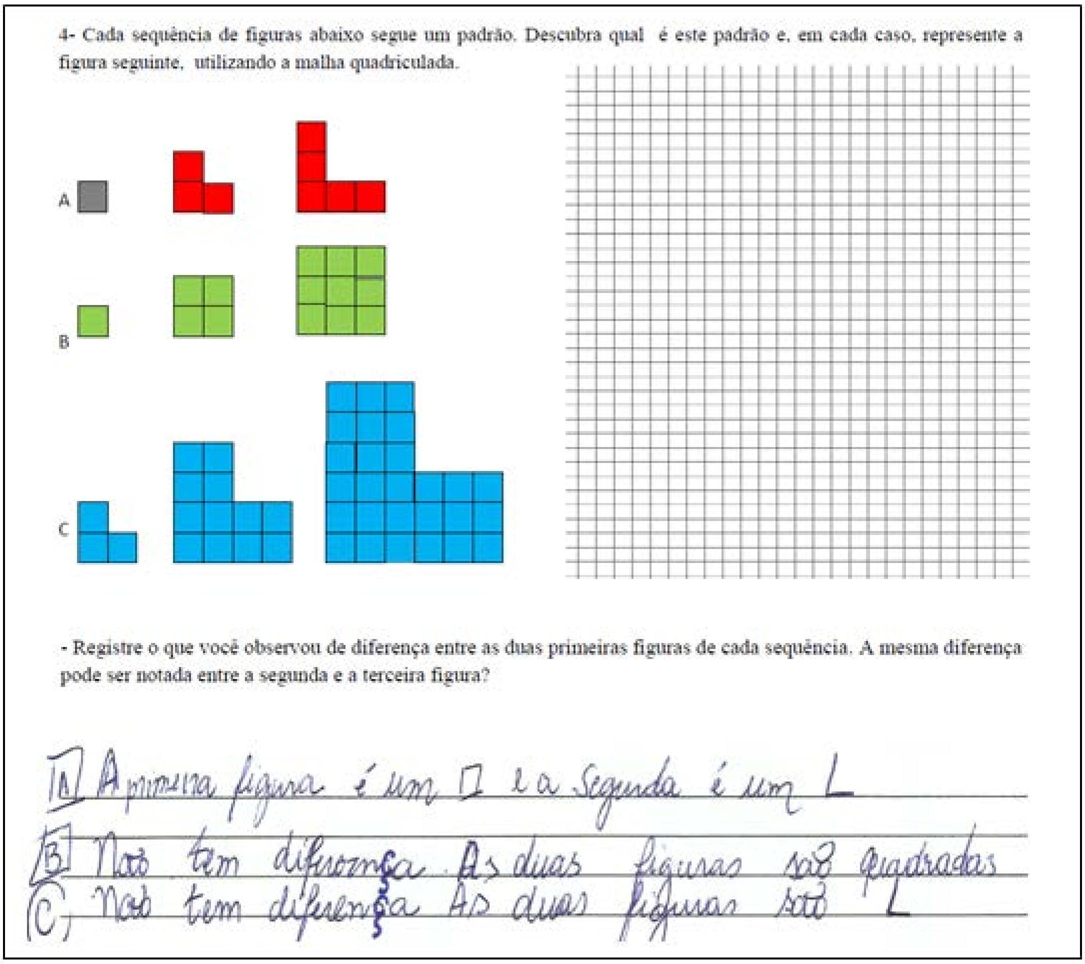


Fonte: Protocolo da pesquisa

Nas questões 4 e 5, o objetivo era descobrir os padrões de sequências formadas por figuras geométricas, construídas por quadradinhos.

Na **questão 4** era necessário, também, registrar, por escrito, os aspectos que diferenciavam as duas primeiras figuras de cada sequência. E se este fato era observado entre o segundo e o terceiro elemento. A pesquisadora procurou não intervir, inicialmente, deixando as duplas registrarem suas conclusões; para posteriormente, analisar o modo de pensar e raciocinar, detectar erros e corrigi-los. Assim, a mesma, pode notar que a dupla B ainda não conseguia estabelecer as relações entre as figuras apresentadas (Figura 17).

Figura 17 – Registros da dupla B referente à questão 4 da atividade 1 do 6^o ano



Fonte:Elaboração própria

A pesquisadora trabalhou, de modo particular com a dupla B, destacando com os alunos a quantidade e a posição dos quadradinhos que diferenciavam as figuras da sequência.

Na **questão 5**, além de completar a tabela com os números de quadradinhos de cada figura da questão 4, os alunos deveriam responder ao desafio: “Há alguma relação entre os valores que você utilizou para preencher a segunda e a terceira colunas? Explique o que você concluiu.”

As duplas conseguiram visualizar os padrões das sequências a partir dos elementos apresentados. Alguns alunos ainda precisaram utilizar a malha quadriculada para completar a última coluna da tabela, que se referia à décima figura da sequência.

Bonadiman (2012) afirma que as figuras e os esquemas assumem, na Matemática, um papel singular, pois todos contêm informações que permitem a visualização dos conceitos. A abordagem visual desempenha um papel importante no trabalho com os conceitos matemáticos, pois pode oportunizar significados para a aprendizagem dos mesmos.

Nesta oportunidade, a pesquisadora perguntou: A sequência numérica obtida na segunda linha da tabela obedece a um padrão? Qual? Um dos alunos da dupla B afirmou: “De uma figura para a outra, acrescentamos sempre dois quadradinhos.” Na Figura 18 temos os registros, da mesma equipe, agora sobre o seguinte desafio: “Há alguma relação entre os valores que você utilizou para preencher a segunda e a terceira colunas?”

Figura 18 – Registros dos alunos A2 e A3 referentes às questões 5 e 6 da atividade 1 do 6^o ano

5- Complete a tabela com os números de quadradinhos de cada figura da questão 4. Preencher a última coluna é um desafio. Pense um pouco, que você conseguirá responder sem precisar desenhar. Se necessário, utilize a malha quadriculada.

Sequência	1ª Figura	2ª Figura	3ª Figura	4ª Figura	5ª Figura	10ª Figura
A	1	3	5	7	9	19
B	1	4	9	16	25	100
C	3	12	27	48	75	300

- Observe com atenção e responda:

a) Há alguma relação entre os valores que você utilizou para preencher a segunda e a terceira colunas? Explique o que você concluiu.

Sim. Os números da terceira linha são iguais ao da segunda linha X 3.

Fonte: Protocolo da pesquisa

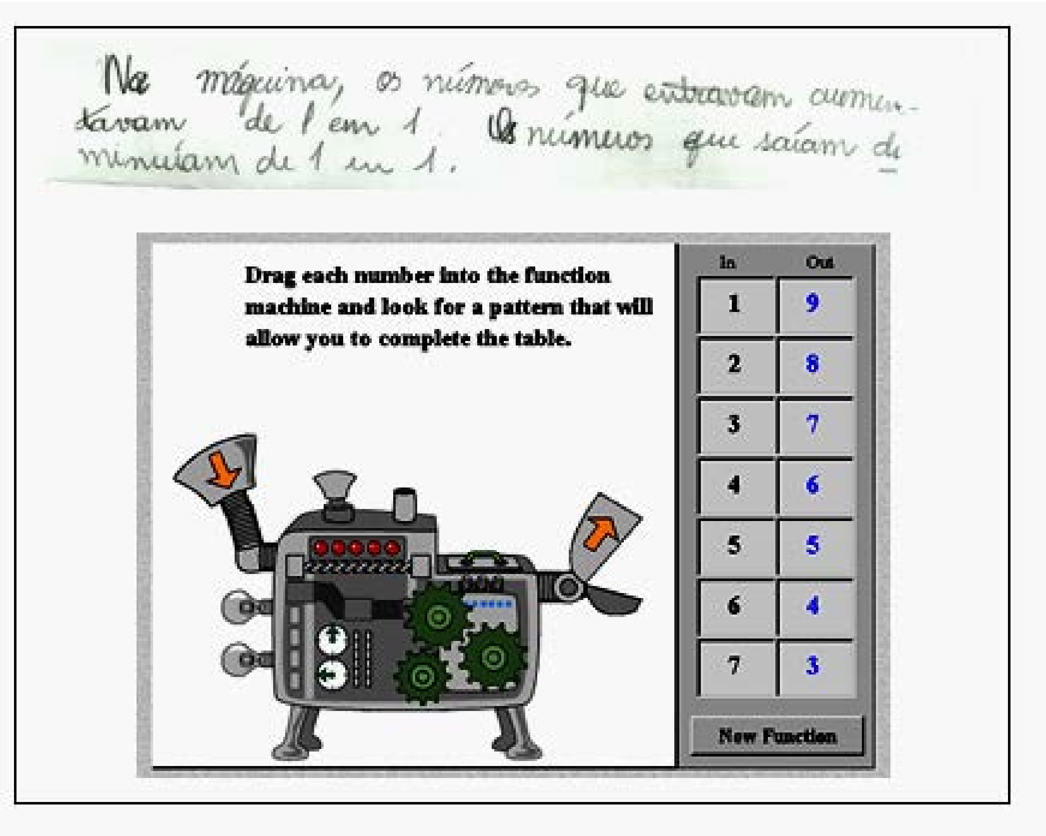
A **questão 6** despertou a curiosidade dos alunos. Um deles, destacou: “O que a Matemática tem a ver com tecnologia?”. A “máquina” utilizada foi elaborada por um projeto educativo financiado pela “National Science Foundation”; trata-se de uma biblioteca de materiais virtuais. É importante destacar que a interface deste objeto digital foi apresentada em Inglês, mas este fato não dificultou a realização das tarefas por parte dos alunos.

Nas primeiras tentativas de trabalhar com o objeto virtual, algumas duplas não conseguiram descobrir a lei da máquina a partir da observação dos números que entraram na mesma. Por isso, após a verificação, precisavam clicar em “New Function” e iniciar outra atividade. Por este motivo, os grupos não concluíram esta tarefa no mesmo tempo.

Para Costa e Oliveira (2004), as novas tecnologias não substituem o professor, mas modificam algumas de suas funções. O professor transforma-se agora no estimulador da curiosidade do aluno por querer conhecer, por pesquisar, por buscar as informações. Nesta situação, em particular, a pesquisadora atuou como mediadora, entre os alunos e a "máquina".

Na Figura 19 observe a primeira máquina analisada pelo trio F e o registro feito por eles.

Figura 19 – Registros de um dos alunos do trio F, referente à questão 6 da atividade 1 do 6^o ano



Fonte:Protocolo da pesquisa

4.1.2 A atividade 2 (Apêndice E)

Objetivo: Desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

Desenvolvimento: Como na atividade 1, a concepção de Álgebra como “Aritmética generalizada”, segundo os autores Lins e Gimenes (2006) e Usiskin (1995), foi abordada nesta atividade. As questões foram trabalhadas com os alunos divididos em 10 trios e uma dupla. Aqui, identificadas pela letras maiúsculas do alfabeto latino (A a K). 32 alunos participaram desta atividade, incluindo os 30 observados nesta pesquisa.

Após a identificação de alguns números quadrados, algumas questões foram apresentadas:

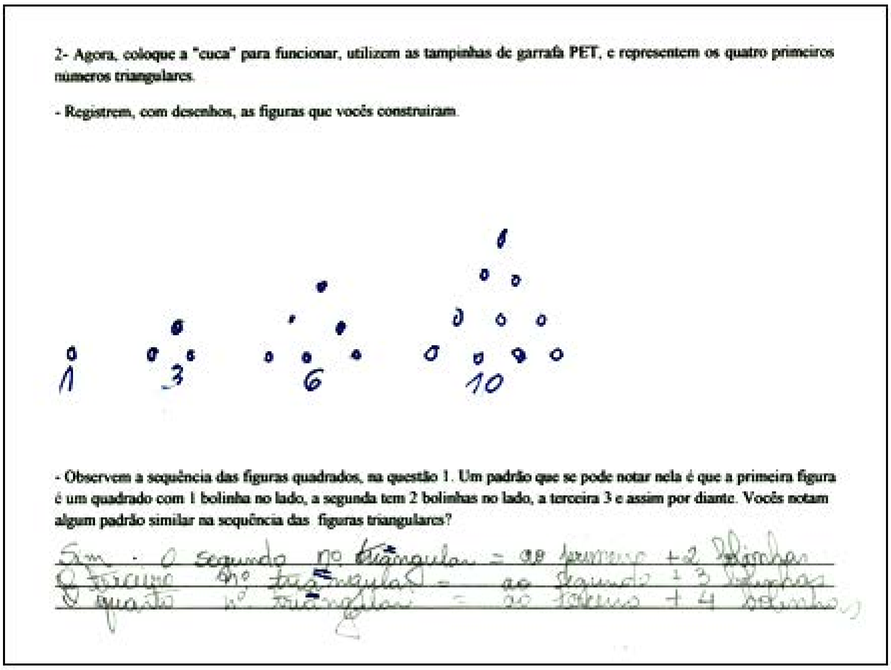
- Utilize o Geoplano para representar as duas próximas figuras da sequência dos números quadrados.
- 10 é um número quadrado? Por quê? Vale destacar que para responder a esta pergunta era necessário concluir quais seriam as características de um número quadrado.
- Qual é o oitavo número quadrado? E o décimo? Explique como você chegou a estas conclusões.

Na sequência, foi apresentado o conceito de números figurados; como aqueles que podem ser representados por construção geométrica de pontos com igual distância entre si. De acordo com as figuras obtidas chamam de números quadrados, números triangulares, números pentagonais... Posteriormente, surgiram as propostas com os números triangulares:

- Utilizem as tampinhas de garrafa PET, e representem os quatro primeiros números triangulares.
- Registrem, com desenhos, as figuras que vocês construíram.
- Observem a sequência das figuras quadradas, na questão 1. Um padrão que se pode notar nela é que a primeira figura é um quadrado com 1 bolinha no lado, a segunda tem 2 bolinhas no lado, a terceira 3 e assim por diante. Vocês notam algum padrão similar na sequência das figuras triangulares?

A pesquisadora notou que, nesta atividade, as representações geométricas oportunizaram aos alunos a criação de uma imagem mental que possibilitou testar, generalizar e validar as ideias propostas naqueles desafios, relacionados aos números figurados. Para Freitas (2014), a conexão feita a partir da manipulação do material, possibilita o aluno avançar para o pensamento abstrato. Vale destacar a consideração feita por um dos alunos da dupla G : "Professora, acho que não preciso mais desenhar(...) para saber qual é o décimo número triangular basta imaginar um triângulo formado por filas de 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1 bolinha. A soma desses números é o número triangular." Para Duval (2003), a coordenação dos registros de representação semiótica em Matemática, permite uma melhor compreensão do objeto. Já que esta estabelece um meio de acesso ao entendimento e à aprendizagem matemática através da conversão entre os registros."A pesquisadora propôs a socialização dos resultados obtidos em cada etapa da tarefa proposta, possibilitando, desta forma, uma discussão de diferentes estratégias. À medida que as etapas foram sendo vencidas, observou-se que os alunos estavam mais independentes e autônomos em comparação com a atividade 1. A Figura 20 nos mostra as respostas apresentadas pela dupla C.

Figura 20 – Registros dos alunos referente à questão 2 da atividade 2 do 6^o ano.



2- Agora, coloque a "cuca" para funcionar, utilizem as tampinhas de garrafa PET, e representem os quatro primeiros números triangulares.

- Registrem, com desenhos, as figuras que vocês construíram.

1 3 6 10

- Observem a sequência das figuras quadrados, na questão 1. Um padrão que se pode notar nela é que a primeira figura é um quadrado com 1 bolinha no lado, a segunda tem 2 bolinhas no lado, a terceira 3 e assim por diante. Vocês notam algum padrão similar na sequência das figuras triangulares?

Sim. O segundo nº triangular = ao primeiro + 2 bolinhas
O terceiro nº triangular = ao segundo + 3 bolinhas
O quarto nº triangular = ao terceiro + 4 bolinhas

Fonte: Protocolo da pesquisa

4.1.3 A atividade 3 (Apêndice E)

Objetivo: Resolver desafios envolvendo valores desconhecidos, utilizando o método da tentativa.

Desenvolvimento: Nesta atividade a Álgebra é apresentada como "estudo de meios para resolver problemas" (USISKIN, 1995, p. 56). As questões foram trabalhadas com os alunos divididos em 11 trios. Aqui, identificadas pela letras maiúsculas do alfabeto latino (A a K).

A atividade foi iniciada com uma conversa informal, sobre a utilidade de uma balança, seus tipos e, em especial, o procedimento usado para manter uma balança de dois pratos em equilíbrio. Na sequência, utilizamos um *software* denominado "Balança Interativa", desenvolvido pelo Projeto Proativa – Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem da Universidade Federal do Ceará, cujo objetivo é favorecer o ensino de Álgebra por meio de um ambiente (jogos eletrônicos) que propicie aos alunos a experimentação.

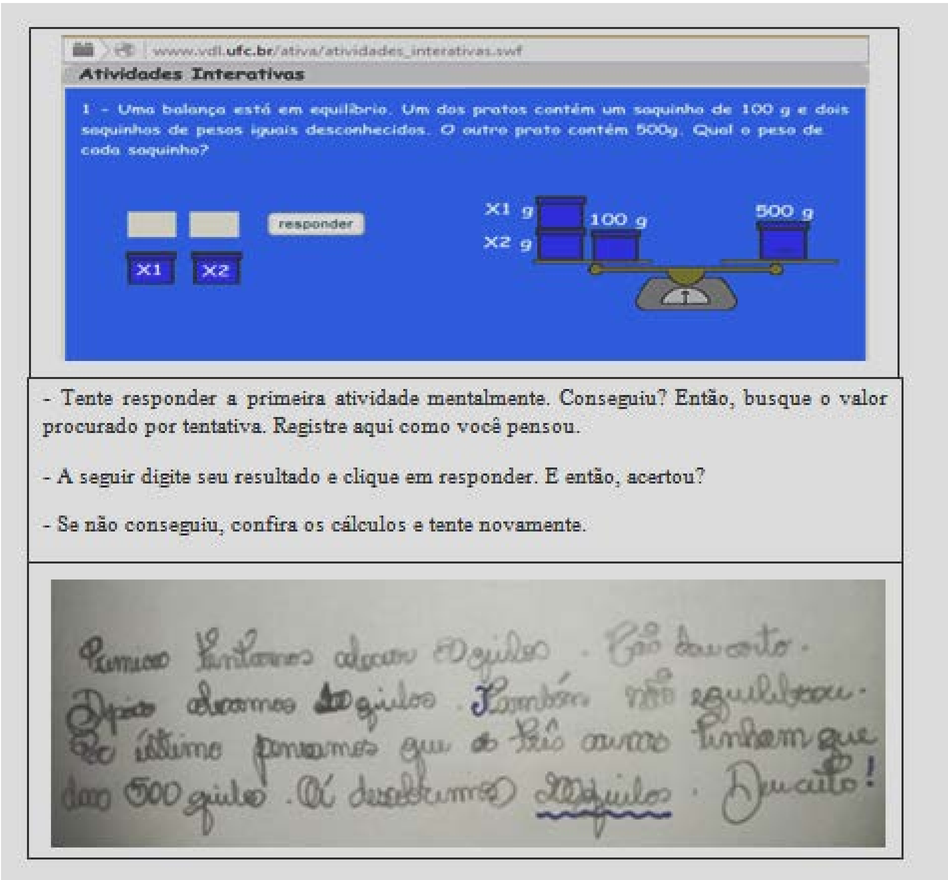
Segundo Costa e Oliveira (2004), os alunos podem vivenciar múltiplas interações nos ambientes de aprendizagem, seja com seus colegas, com professores ou com objetos do conhecimento; propiciando desta forma uma aprendizagem colaborativa.

O “Balança Interativa” é um objeto de aprendizagem que baseia-se na manipulação simulada de uma balança de dois pratos a fim de descobrir os valores desconhecidos, que são associados às letras. O usuário deve descobrir estes valores, já que as balanças encontram-se em equilíbrio.

Vale destacar alguns detalhes na realização desta atividade:

- apesar de alguns alunos terem conseguido resolver a questão 1, mentalmente, todo o raciocínio foi registrado. O registro do trio G é apresentado na Figura 21;

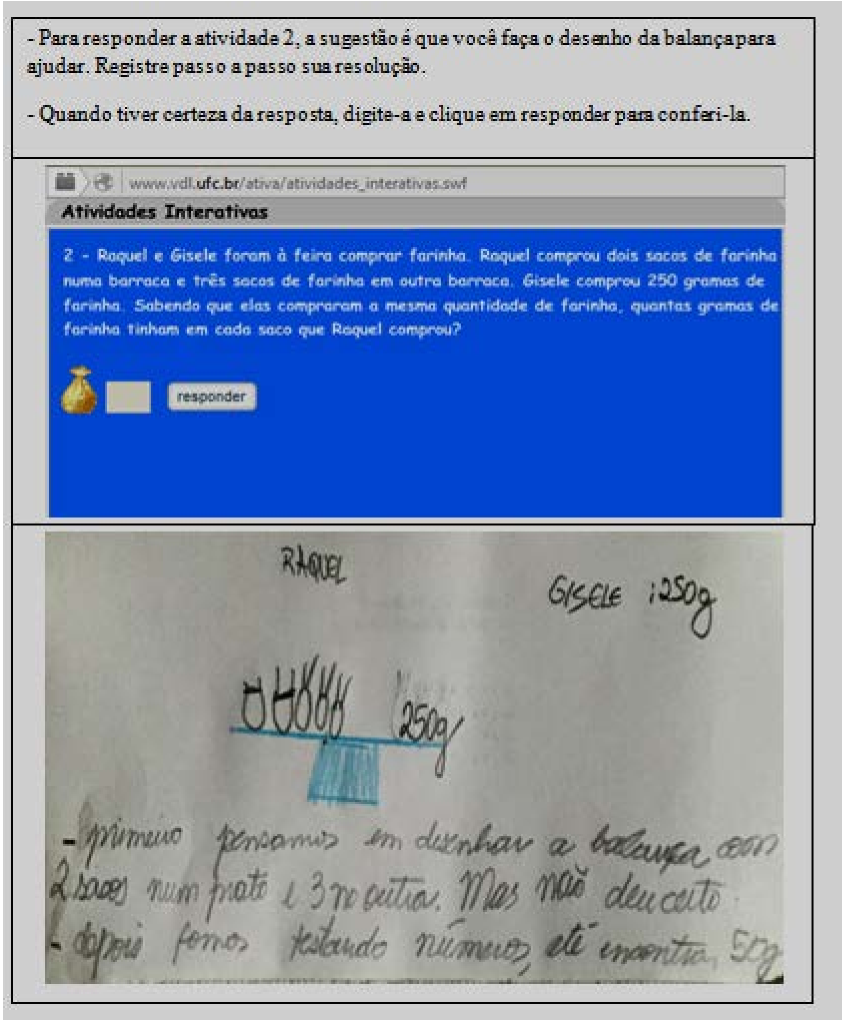
Figura 21 – Registros dos alunos do trio G, referente à questão 1 da atividade 3 do 6º ano



Fonte:Elaboração própria

- a sugestão oferecida para a questão 2 foi fazer, na folha, o desenho da balança para ajudar no registro, passo a passo, da resolução. Na Figura 22 está apresentado o registro feito pelo trio B. Ao conferir o resultado e verificar que estava correto, os grupos mostravam motivação em realizar a próxima tarefa. Algumas vezes a pesquisadora interveio, junto aos grupos, para rever as respostas incorretas;

Figura 22 – Registros dos alunos do trio B, referente à questão 2 da atividade 3 do 6º ano



Fonte:Elaboração própria

- no final da questão 3, os trios apresentam suas soluções para a turma, mostrando as estratégias utilizadas. Desta forma, compartilham saberes e constroem novas ideias; tornando a aprendizagem colaborativa.

4.1.4 A atividade 4 (Apêndice E)

Objetivo: Desenvolver do pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

Desenvolvimento: Esta atividade é realizada a fim de abordar a concepção de Álgebra como “o estudo das relações entre grandezas”, segundo Usiskin (1995); a partir do software $Poly$[1]. Trata-se de um recurso digital que permite a investigação de sólidos tridimensionalmente, com a possibilidade de planificá-los e rotacioná-los.

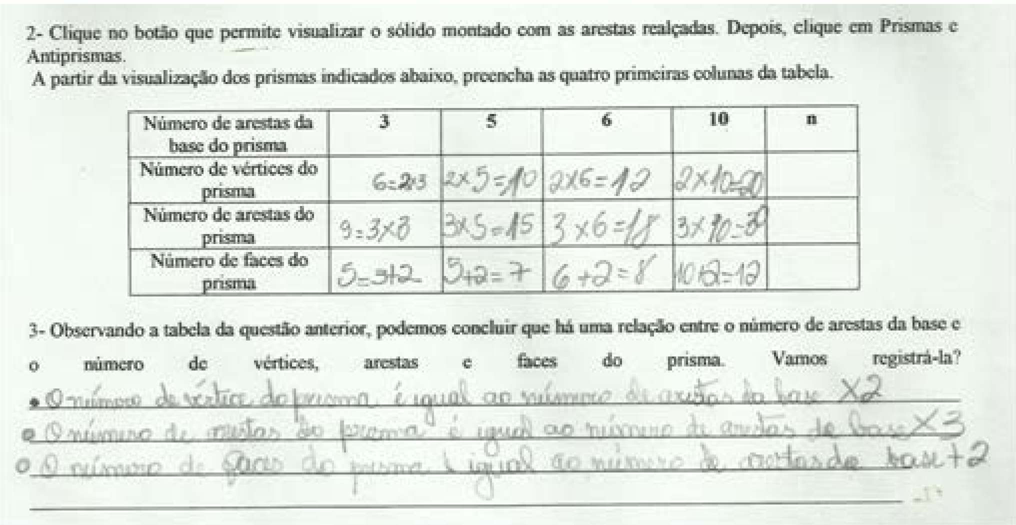
[1] É um software elaborado pela Pedagoguery Software, que permite a investigação de sólidos tridimensionalmente com possibilidade de movimento, dimensionalmente planificação e de vista topológica

Como foram utilizados os computadores da escola e, no momento, só estavam disponíveis 10 computadores, as questões 1 e 2 foram realizadas com os alunos arrumados em 10 trios, identificados pela letras maiúsculas do alfabeto latino (A a J). Já as questões 3, 4 e 5 os alunos responderam individualmente; eventualmente um ou outro aluno recorreu ao software para verificar algumas situações.

O tema "poliedros" foi escolhido para dinamizar os aspectos algébricos nesta questão, visto que os conceitos relacionados ao mesmo, tais como: faces, arestas, vértices; já tinham sido trabalhados pelos alunos naquele ano escolar.

No primeiro momento os grupos exploraram livremente o programa. Em seguida, utilizaram os prismas disponíveis no link "Prismas e Antiprismas" para preencher as quatro primeiras colunas da tabela, identificando o número de faces, arestas e vértices destes sólidos. Vale destacar que a pesquisadora discutiu com a turma os resultados encontrados na tabela, antes de realizar a próxima etapa. A Figura 23 apresenta a resposta do aluno A2.

Figura 23 – Registros do aluno A2, referentes às questões 2 e 3 da atividade 4 do 6^o ano.



2- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em Prismas e Antiprismas.
A partir da visualização dos prismas indicados abaixo, preencha as quatro primeiras colunas da tabela.

Número de arestas da base do prisma	3	5	6	10	n
Número de vértices do prisma	6=2x3	2x5=10	2x6=12	2x10=20	
Número de arestas do prisma	9=3x3	3x5=15	3x6=18	3x10=30	
Número de faces do prisma	5=3+2	5+2=7	6+2=8	10+2=12	

3- Observando a tabela da questão anterior, podemos concluir que há uma relação entre o número de arestas da base e o número de vértices, arestas e faces do prisma. Vamos registrá-la?

- O número de vértice do prisma é igual ao número de arestas da base X2
- O número de arestas do prisma é igual ao número de arestas da base X3
- O número de faces do prisma é igual ao número de arestas da base +2

Fonte: Protocolo da pesquisa

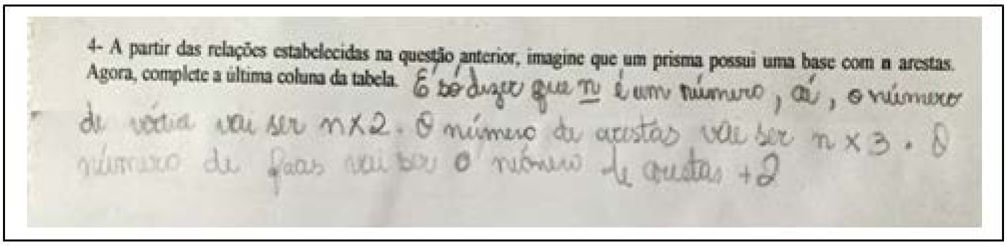
Na etapa seguinte, a sugestão era realizar uma observação dos dados numéricos, de cada prisma, contidos na tabela da questão anterior; com o objetivo de os alunos concluírem algumas regularidades. Vale destacar algumas intervenções dos alunos:

- "Os números que aparecem na segunda linha são iguais aos da primeira, só que multiplicados por 2." (aluno A2)
- "Ah! Já sei! Os números da terceira linha são iguais ao da primeira linha multiplicados por 3."(aluno A5)

- “Os números da quarta linha também têm a ver com os números da primeira: $3+2=5$, $5+2=7$, $6+2=8$, $10+2=12$.” (aluno A10)

Depois desta discussão, os alunos registraram, sem maiores dificuldades, a relação entre o número de arestas da base e o número de vértices, arestas e faces do prisma. Em seguida, generalizaram esta relação para um prisma de n arestas. O registro do aluno A3 é apresentado na Figura 24:

Figura 24 – Registro do aluno A3, referente à questão 4 da atividade 4 do 6^o ano



4- A partir das relações estabelecidas na questão anterior, imagine que um prisma possui uma base com n arestas. Agora, complete a última coluna da tabela. É só dizer que n é um número, aí, o número de vértice vai ser n×2. O número de arestas vai ser n×3. O número de faces vai ser o número de arestas +2

Fonte: Protocolo da pesquisa

A partir das generalizações feitas na questão 4, os alunos responderam a questão 5, sem maiores problemas.

4.1.5 Avaliação do trabalho com o 6^o ano do Ensino Fundamental

No último encontro com a turma trabalhada, os alunos tiveram a oportunidade de registrar uma avaliação das atividades realizadas, a partir da proposta apresentada pela pesquisadora e disponível no Apêndice A.

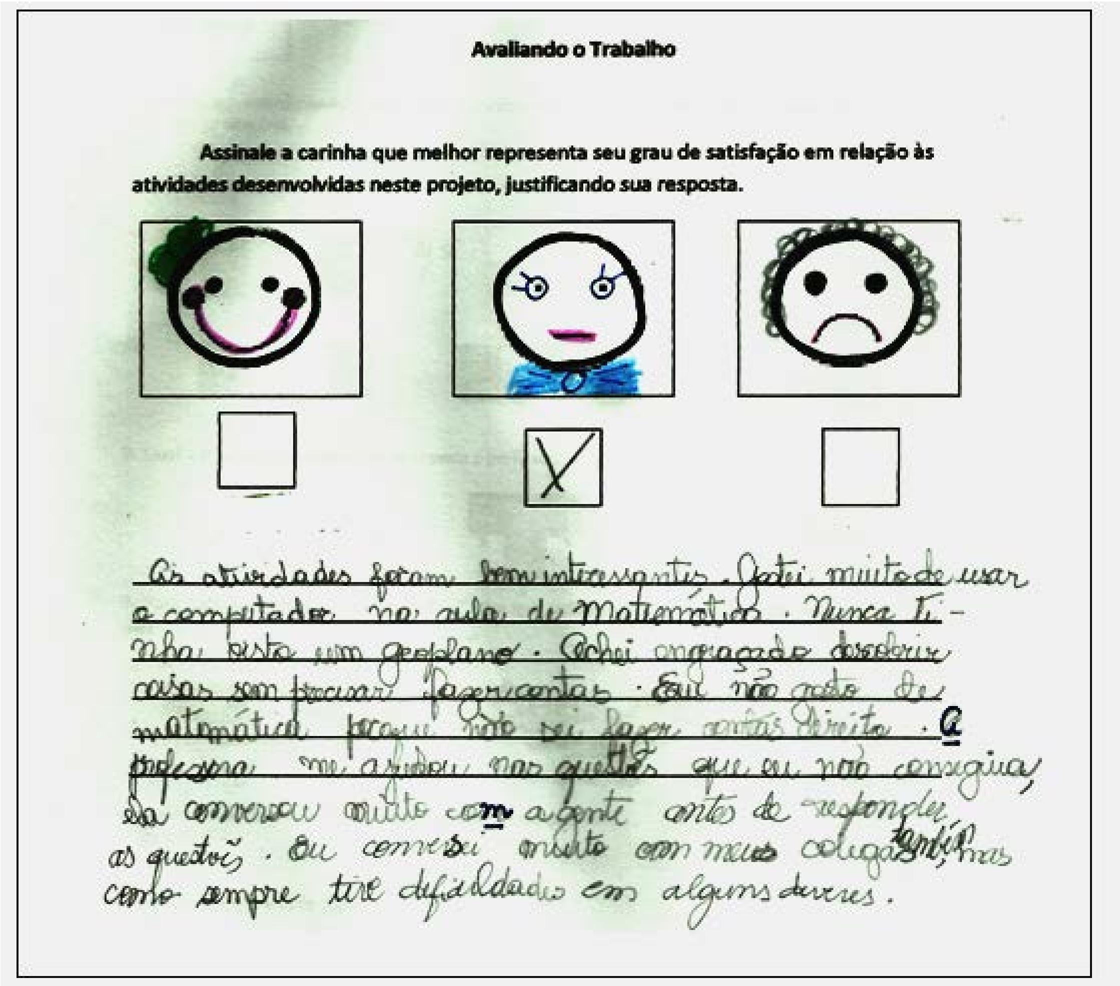
Cada aluno recebeu uma folha com um pequeno roteiro de avaliação. Primeiro, cada um deveria escolher um dos símbolos apresentados para indicar seu grau de satisfação em relação às atividades desenvolvidas no projeto; em seguida, deveriam justificar a escolha feita.

29 dos 30 alunos que participaram das atividades escolheram a primeira opção como grau de satisfação em relação ao trabalho realizado. O aluno A4 destacou que achou interessante trabalhar com o computador nas aulas de Matemática fazendo "tarefas de investigação".

O único aluno que marcou a segunda opção como grau de satisfação em relação ao trabalho realizado, foi o aluno A5. Sua avaliação está registrada na Figura 25. Ele destaca que tem dificuldades na disciplina, principalmente nas operações; e que gostou muito de descobrir "coisas novas"apenas observando; sem precisar fazer contas. Ou seja, neste momento ele se refere ao trabalho com as generalizações. Já o aluno A5, relatou que nunca tinha feito atividades de Matemática em que precisasse escrever tanto; e assim, ele aprendeu com mais facilidade.

Durante a realização deste trabalho no 6^{o}ano, a pesquisadora pôde perceber o interesse dos alunos nas atividades propostas e, principalmente, nas questões que envolviam padrões e generalizações; pois os mesmos as encaravam como desafios.

Figura 25 – Registro da avaliação das atividades feita pelo aluno A5.


Avaliando o Trabalho

Assinale a carinha que melhor representa seu grau de satisfação em relação às atividades desenvolvidas neste projeto, justificando sua resposta.

As atividades foram bem interessantes. Gostei muito de usar o computador na aula de Matemática. Nunca ti-
nha visto um geoplano. Achei engraçado descobrir coisas sem precisar fazer contas. Eu não gosto de matemática porque não sei fazer contas direito. A professora me ajudou nas questões que eu não conseguia, ela conversou muito com a gente antes de responder as questões. Eu conversei muito com meus colegas também, mas como sempre tive dificuldades em alguns deveres.

Fonte: Protocolo da pesquisa

4.2 Trabalho com o 7^o ano do Ensino Fundamental

As atividades propostas para este ano escolar, disponíveis no Apêndice F deste trabalho, foram aplicadas em um grupo de 37 alunos. Sendo que, apenas 35 destes alunos participaram de todas as atividades desenvolvidas. Neste relato, os alunos serão identificados, individualmente, pela letra maiúscula A, seguida de um número natural de 1 a 35 (A1, A2, ..,A35). Quando trabalharam em grupos, estes foram nomeados a partir das letras maiúsculas do alfabeto latino A, B,...L.

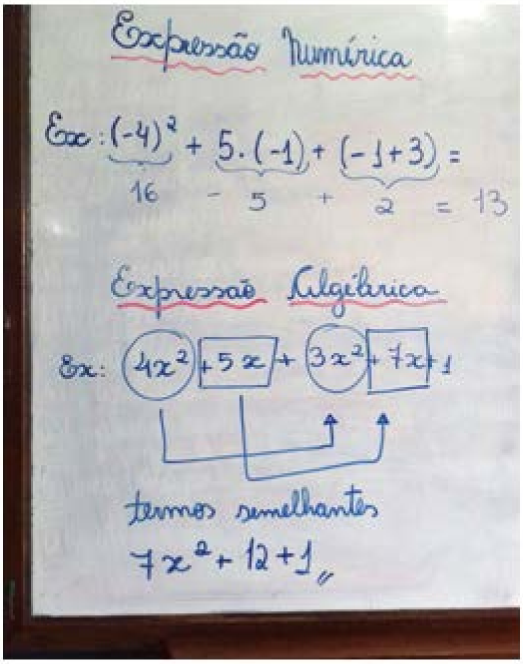
4.2.1 Atividade 1 (Apêndice F)

Objetivos: Representar uma situação-problema apresentada na língua materna para a linguagem algébrica e vice-versa; produzir um texto relatando o jogo realizado e apresentando conceitos matemáticos construídos.

Desenvolvimento:

Esta atividade foi dinamizada a partir de um Jogo da Memória, com 36 participantes (deste total, estão incluídos os 35 alunos observados nesta pesquisa). Antes do início dos trabalhos por parte dos alunos, a pesquisadora promoveu uma discussão apresentando o conceito de expressão algébrica, definindo os termos da mesma e as operações com termos semelhantes; visto que estes foram aspectos deficientes diagnosticados no pré-teste. Neste momento, vale destacar, que esta discussão iniciou-se a partir de exemplos de expressões numéricas e operações com números inteiros e se estendeu às operações com termos semelhantes de uma expressão algébrica.

Figura 26 – Registro feito pela pesquisadora ao introduzir a atividade 1.



Fonte: Protocolo da pesquisa

Na sequência foram apresentadas as regras do Jogo da Memória Matemática:

- O "Memória Matemática" é um jogo composto de pares de cartas; em algumas delas aparecem desafios e, em outras cartas as expressões algébricas que os representam.
- As cartas são embaralhadas e colocadas na mesa e a pessoa tem uma chance para virar a carta e encontrar o seu par. Se não conseguir, a vez é do próximo.

- É um jogo divertido para ser jogado entre duas ou mais pessoas, e que pede atenção e concentração, pois se um dos participantes virar a carta errada, e os demais prestarem atenção na carta que ele virou, pode ajudar os seguintes a descobrir o par e marcar pontos.
- Quando uma pessoa encontra um par, ela continua jogando até errar. É um jogo que ajuda a desenvolver o raciocínio, e pode ser usado por pessoas de qualquer idade.

Conhecidas as regras, a turma foi organizada em 12 trios. Na proposta inicial, o jogo deveria ser realizado, no tempo máximo, 40 minutos. Contudo, dois trios precisaram de mais 5 minutos para concluir a atividade.

Durante a realização do jogo, a pesquisadora esteve atendendo aos alunos e solucionando as dúvidas que apareceram, principalmente nas primeiras rodadas. O aluno A10 afirmou que a carta “$4 + n$” era o par da carta “perímetro de um quadrado cujo lado mede n”. Neste momento a pesquisadora interveio e aproveitou para relembrar o conceito de perímetro com a turma. Em relação ao referido aluno, a situação apresentada revelava, segundo (DUVAL, 2003), uma não congruência. Foi preciso trabalhar o conteúdo cognitivo do texto, no caso o conceito de perímetro, independente do texto apresentado na carta do jogo.

O aluno A4, que integrava o trio C, relacionou as cartas: “Se n representa um número inteiro, a soma do triplo desse número com 8 é $3 + n + 8$”. Neste momento o aluno A 6, que fazia parte do mesmo trio, explicou: “O triplo é três vezes um número, se o número é n, vai ser $3n$ e não $3 + n$”. Nesta situação, o trabalho colaborativo oportunizou uma aprendizagem rica em significados; pois, nos trios, cada aluno buscava formar seus pares de cartas e também avaliava os pares montados pelos colegas. O jogo requeria muita atenção de todos os participantes.

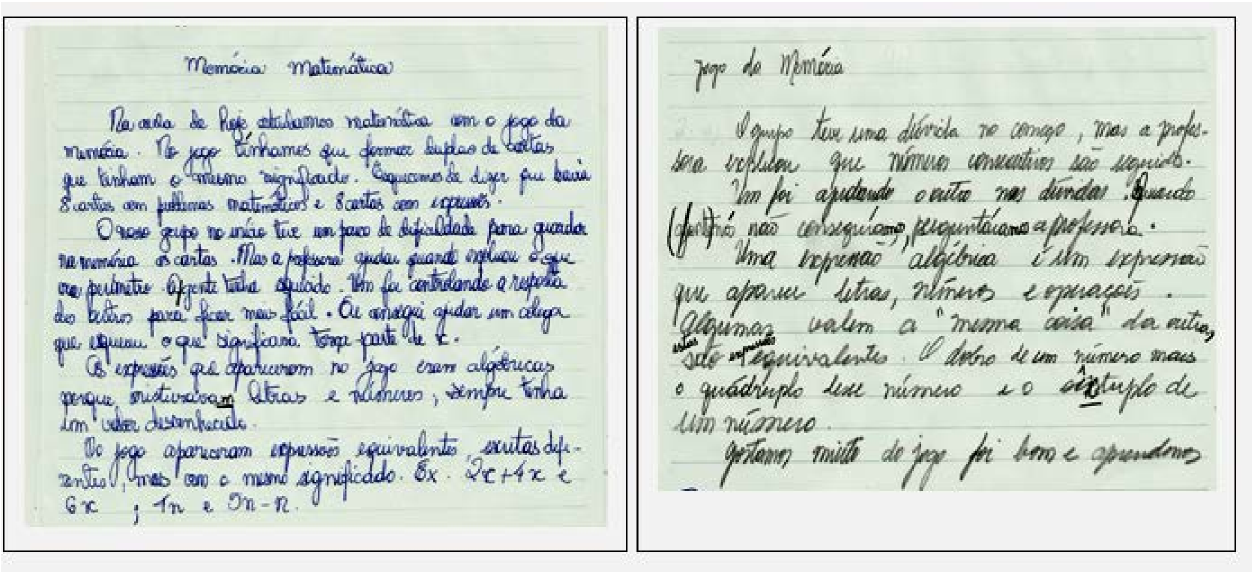
Após o término do jogo, cada grupo de alunos elaborou um texto coletivo relatando o que foi observado na realização do mesmo. Para isso, a pesquisadora ofereceu um roteiro com seguintes questionamentos:

- O seu grupo apresentou alguma dificuldade na realização do jogo? Quais?
- Como vocês solucionaram os problemas que apareceram?
- Nas dicas iniciais sobre o jogo “Memória Matemática” foi esclarecido que em algumas cartas iriam aparecer “expressões algébricas”. Explique como poderíamos definir uma expressão algébrica.
- Nas cartas do jogo aparecem expressões que podem ser substituídas uma pela outra, ou seja, apresentam o mesmo valor algébrico. Estas expressões são chamadas expressões equivalentes. Identifique os pares de expressões equivalentes.

A produção de textos nas aulas de Matemática aproxima ainda mais a aprendizagem da disciplina com a da língua materna. É o que afirma Smole (2000) e o que pretende a pesquisadora com as atividades propostas. Torna-se evidente que nesta primeira experiência de produção textual, os alunos mostraram algumas dificuldades de conectar e organizar estruturalmente as ideias. Mas, com as demais atividades propostas, a expectativa foi que a comunicação matemática por meio da escrita pudesse evoluir.

É notório que alguns grupos não elaboraram textos; apenas responderam as questões do roteiro. Mas, alguns conseguiram organizar melhor as ideias. Na Figura 27 são apresentados os registros dos alunos A7 e A5, respectivamente.

Figura 27 – Registros feitos pelos alunos A7 e A5


Memória Matemática

Na aula de hoje estudamos matemática com o jogo da memória. No jogo tínhamos que formar duplas de cartas que tinham o mesmo significado. Esquecemos de dizer que havia 8 cartas com palavras matemáticas e 8 cartas com expressões.

O nosso grupo no início teve um pouco de dificuldade para guardar na memória as cartas. Mas a professora ajudou quando explicou o que era perímetro. A gente tinha esquecido. Um foi controlando a resposta dos outros para ficar mais fácil. Eu consegui ajudar um colega que esqueceu o que significava terça parte de x.

As expressões que apareceram no jogo eram algébricas porque misturavam letras e números, sempre tinha um valor desconhecido.

No jogo apareceram expressões equivalentes, escritas diferentes, mas com o mesmo significado. 6x: 2x+4x e 6x ; 7n e 8n-n.

Jogo da Memória

O grupo teve uma dúvida no começo, mas a professora explicou que números consecutivos são seguidos.

Um foi ajudando o outro nas dúvidas. Quando (perto) nós não conseguíamos, perguntávamos a professora.

Uma expressão algébrica é uma expressão que aparece letras, números e operações.

Algumas valem a "mesma coisa" da outra, são equivalentes. O dobro de um número mais o quádruplo desse número é o sêxtuplo de um número.

Gostamos muito do jogo foi bom e aprendemos

Fonte: Protocolo da pesquisa

Ao analisar o registro dos alunos, apesar das dificuldades que alguns grupos apresentaram em comunicar suas ideias textualmente, pode-se observar pelos relatos que o jogo foi um recurso motivador para novas aprendizagens. Outro fato notado é que os conceitos de expressões algébricas e equivalentes foram sistematizados pela maioria dos alunos; visto os pares de cartas do jogo que os alunos conseguiram formar, relacionando uma mesma informação apresentada em linguagens distintas. Apenas 3 alunos não formaram duplas de cartas, 4 alunos formaram apenas uma dupla, 8 alunos formaram duas duplas, 8 alunos formaram três duplas, 13 alunos formaram quatro duplas.

Ao compararmos os resultados desta atividade com aqueles das questões 1 e 2 do pré-teste, que se referiam as mesmas habilidades em questão, nota-se o crescimento cognitivo por parte dos alunos. Visto que mais de 90% dos mesmos já representam situações-problema apresentadas na língua materna, na linguagem algébrica e vice-versa. Enquanto no pré-teste, apenas 15 dos 35 alunos acertaram a primeira questão e na segunda, a quantidade de acertos foi reduzido para 10.

4.2.2 Atividade 2 (Apêndice F)

Objetivos: Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica e elaborar sequências numéricas a partir de expressões algébricas, analisando a regularidade das mesmas.

Desenvolvimento: Esta atividade foi aplicada no segundo encontro da pesquisadora com esta turma. Estiveram presentes 36 alunos, dos quais 35 foram observados neste trabalho. Este momento foi iniciado com uma breve revisão do encontro anterior. Em seguida, a pesquisadora trabalhou os conceitos de variável e de valor numérico de uma expressão algébrica, visto que foi observado por ela, na atividade anterior, a dificuldade que alguns alunos ainda apresentaram em compreender que as letras apresentadas nas expressões representavam números e que, dependendo da situação, poderiam variar.

Após este momento de revisão e retomada de conceitos, foi apresentado à turma as regras do jogo "Ache-me na malha". Este material é uma adaptação da proposta apresentada por Vieira (2011) em sua dissertação de mestrado apresentada na Universidade Federal de Goiás. Contudo, a referida autora propõe este jogo para uma turma do 2º ano do Ensino Médio, buscando trabalhar a iniciação algébrica com os alunos ao invés de dar continuidade a conteúdos do currículo; vistas as dificuldades elementares que os mesmos apresentavam, tais como substituir uma letra por um número e compreendê-la como uma variável ou incógnita.

Como na atividade anterior, a turma foi organizada 12 trios. Na proposta inicial, o jogo deveria ser realizado, no tempo máximo de 50 minutos. Contudo, em 40 minutos os alunos concluíram esta etapa da atividade.

Esse é um jogo estratégico, pois cada aluno busca meios próprios para atingir o objetivo final. Nele, são trabalhadas habilidades como percepção, raciocínio e lógica. Ao contrário do Jogo da Memória apresentado na Atividade 1, o fator sorte não interfere no resultado. A sua aplicação se deu a partir de algumas etapas:

Primeira etapa: A confecção do jogo

Cada grupo recebeu uma cartela com as cartas do jogo, que precisavam ser recortadas; para isso a pesquisadora ofereceu algumas tesouras. Além das tesouras, receberam também um dado; uma planilha com 70 números inteiros distintos, onde marcariam as respostas de cada jogador, lápis de cores diferentes e um cartão para cada jogador acompanhar a pontuação no decorrer das jogadas.

Segunda etapa: Mãos à obra!

Com o material confeccionado e com cada jogador já com sua cor de lápis identificada, foi a vez de iniciar o jogo.

Cada grupo escolheu um jogador para iniciar, este lançou o dado e retirou uma carta do monte. Em seguida, encontrou o valor numérico daquela expressão substituindo o valor desconhecido na mesma, pelo número sorteado no dado.

O aluno marcou, na malha, o valor numérico encontrado na etapa anterior. Para isso, cada jogador usou o lápis da cor escolhida previamente. Se o número já tivesse sido marcado, o jogador não pontuava.

É importante destacar que cada jogador fez o registro dos cálculos realizados para cada expressão. Os outros jogadores do grupo, conferiram os mesmos, antes de qualquer marcação na planilha de respostas. Nesta oportunidade pôde ser notado que em alguns grupos surgiu o espírito de competição entre os jogadores, pois o erro do adversário significava uma pontuação extra para os demais. Em alguns casos, a pesquisadora foi solicitada pelos alunos afim de solucionar dúvidas. A seguir será descrita uma situação que surgiu no trio F:

- Aluno A16: Professora! A17 sorteou a carta "-3x + 2" e no dado saiu o número 6. Veja, ele fez errado!

- Aluno A17: Não fiz errado não, professora! Tirei o "x" e coloquei o 6 no lugar. Deu -18 + 2= -20.

- Aluno A18: Tenho uma dívida de 18 reais, pago 2 reais e fico devendo 20? Como pode?

A pesquisadora, então aproveitou a situação apresentada por este trio e, foi ao quadro, rever algumas situações onde aparecem operações de adição e subtração com números inteiros. Aproveitando a sugestão do aluno A18, usou exemplos aplicando a ideia de dívida para os números negativos.

O jogo terminava para cada grupo, quando acabavam as cartas. O vencedor foi o jogador que colocou mais marcações na planilha.

Nas primeiras rodadas do jogo a a pesquisadora precisou intervir junto a alguns grupos, pois algumas dúvidas ainda ocorreram ao encontrar expressões cujo expoente da variável era 2. Ou seja, apresentaram dificuldade ao aplicar o conceito de potência. Muitas dificuldades dos alunos iniciantes em Álgebra são portanto, herdados da Aritmética. (TINOCO, 2008).

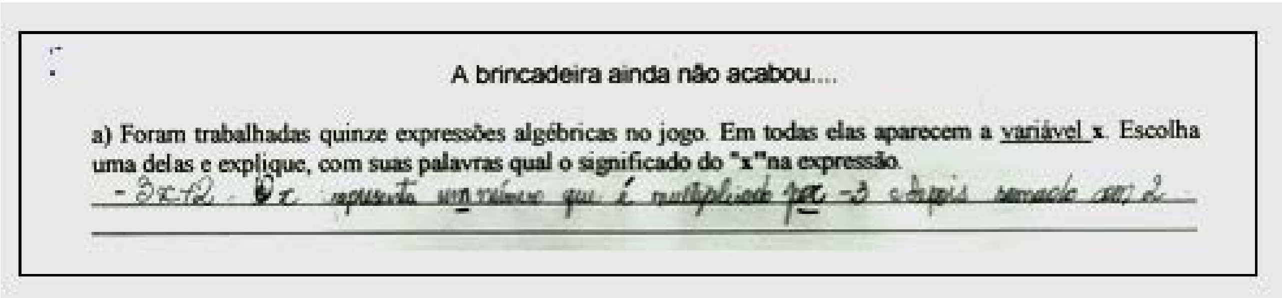
No decorrer das rodadas, pôde ser observado o grande interesse dos alunos em buscar fazer os cálculos corretos e pontuar no jogo. Como já destacado neste trabalho, Oliveira (2007) afirma que ao brincar de algo que te interessa, o educando mostra alegria e prazer na aprendizagem.

Após a conclusão do jogo a pesquisadora recolheu o cartão de registro de cada jogador, e analisando os mesmos percebe-se que em nenhum dos grupos houve jogador que não pontuou; revelando assim que os alunos, ludicamente, compreenderam o que significa calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Em 75% dos grupos cada jogador fez 3 pontos, não apresentando pontuação extra para nenhum deles. O que mostra a motivação em pontuar e não permitir que o adversário receba ponto extra pelo seu erro.

Como o jogo despertou muito interesse da turma, a sugestão é aplicá-lo novamente, utilizando dados com faces onde aparecem números negativos. O nível de dificuldade deve aumentar e novas descobertas devem ocorrer.

Utilizando as peças do jogo e a conversa inicial deste encontro, os alunos tiveram a oportunidade de registrar, por escrito, algumas ideias relacionadas aos assuntos trabalhados, a partir de alguns desafios propostos pela pesquisadora. Smole (2000) afirma que quanto mais o educando tem a oportunidade de refletir um determinado assunto - falando, escrevendo ou representando- mais ele o compreende. Nesta perspectiva veja na Figura 28 o registro do aluno A25 relacionado ao primeiro questionamento (item a) proposto pela pesquisadora. No segundo desafio, a proposta era escolher uma expressão algébrica que aparecia no jogo e, a partir dela, elaborar uma sequência numérica.

Figura 28 – Registro do aluno A25



A brincadeira ainda não acabou....

a) Foram trabalhadas quinze expressões algébricas no jogo. Em todas elas aparecem a variável x. Escolha uma delas e explique, com suas palavras qual o significado do "x"na expressão.

$-3x+2$. O x representa um número que é multiplicado por -3 depois somado com 2

Fonte:Protocolo da pesquisa

Com os registros dos alunos, a pesquisadora pôde observar que 28 alunos, aproximadamente 80% dos alunos analisados, explicaram claramente o que significa uma variável numa expressão algébrica. E no desafio 2, mostraram que, de fato, construíram o conceito em questão, elaborando sequências numéricas a partir de valores distintos atribuídos à variável ‘´x”. Como foi dito no capítulo 1 deste trabalho, na base do processo de educação algébrica deve estar o conceito de variável; portanto, segundo Tinoco (2008), ele deve acompanhar toda a educação básica.

Ainda no segundo desafio, a pesquisadora propõe aos alunos que relatem se a sequência elaborada por eles apresentam regularidade. Neste momento a Álgebra é tratada como Aritmética generalizada, segundo a concepção de Lins e Gimenes (2006) e Usiskin (1995).

A questão 5 do pré-teste também solicitava aos alunos uma análise de sequências, mas naquele caso, envolvendo figuras geométricas. A maioria dos alunos respondeu corretamente aquela questão, mas 10 alunos ainda utilizaram como estratégia de resolução o registro pictórico. A proposta deste segundo desafio, no entanto, era perceber regularidades em uma sequência numérica; não apareciam figuras geométricas para representá-las.

Dos 9 alunos que erram a questão 5 do pré-teste, 4 acertaram este segundo desafio. 6 dos alunos que utilizaram o registro pictórico para resolver a questão do pré-teste, conseguiram resolver o desafio em questão, apenas observando a regularidade entre os termos da sequência. Assim, pode-se concluir que o trabalho dinamizado a partir do significado do conceito de variável influenciou positivamente os alunos no desenvolvimento da habilidade de generalização.

Antes de recolher as atividades, a pesquisadora concluiu o encontro fazendo uma discussão a partir das questões propostas e das conclusões que os alunos apresentaram em relação as mesmas.

4.2.3 Atividade 3 (Apêndice F)

Objetivos: Resolver equações por meio das operações inversas, a partir de recursos tecnológicos; registrar, utilizando a língua materna, os procedimentos utilizados para manter as balanças em equilíbrio.

Desenvolvimento: A pesquisadora utilizou, nesta atividade, o objeto virtual "Aprendendo equações através da balança" [2]. Este material está disponível no RIVED (Rede Interativa Virtual de Educação), um programa da Secretaria de Educação à Distância que tem por objetivo a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem. Os conteúdos produzidos pelo RIVED são públicos e podem ser acessados através do sistema de busca, que permite visualizar, copiar e comentar os conteúdos publicados. Portanto, este material pode ser acessado, em qualquer computador com acesso à Internet.

Ao chegar ao laboratório de informática da escola, os alunos, divididos em 11 grupos de três alunos e um grupo de 4 alunos, já encontraram nas máquinas, a tela inicial do objeto virtual a ser utilizado por eles. Cada um recebeu também uma folha com o roteiro da aula e algumas atividades propostas (disponível no Apêndice F deste trabalho).

Para iniciar as discussões, a pesquisadora lançou alguns questionamentos, que os grupos deveriam responder oralmente. Segundo os PCNs, a comunicação matemática por parte dos educandos da Educação Básica deve ocorrer também por meio da linguagem oral.

- Vocês sabem como este tipo de balança funciona?

[2] <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html>

Figura 29 – Tela inicial da “Balança Digital”

Fonte:<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html>

- Considerando que os tomates têm “pesos” iguais, se colocarmos a mesma quantidade de tomates nos dois pratos da balança, ela ficará equilibrada? Tente comprovar seu argumento arrastando, com o mouse, os tomates que aparecem no lado direito da tela até os pratos da balança.

Como, atualmente, não há muitas balanças desse tipo em uso, a pesquisadora imaginava precisar explicar como elas funcionam. Mas, não foi preciso, todos os grupos mostraram conhecer o funcionamento de uma balança de dois pratos.

Neste momento, os alunos puderam manusear o objeto digital apresentado. Como a interface é simples, rapidamente concluíram que a função da seta vermelha, que aparece no lado direito da tela, é alterar o desafio trabalhado e ao clicar na janela, que se encontra abaixo da figura, obtém-se os desafios relacionados ao desafio em questão. O próprio objeto digital informa se a resposta indicada pelo grupo está correta ou não. Se estiver correta, basta acessar o ícone “próximo exercício” e conferir a próxima questão. Se estiver errada, o próprio recurso digital informa o erro.

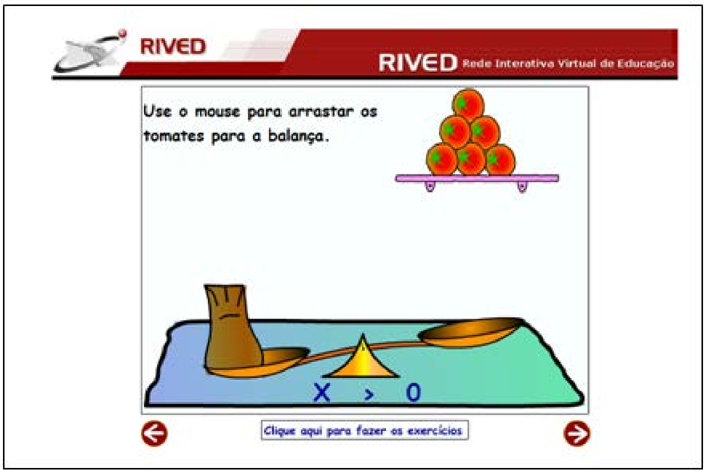
Para Silva (2016), tornar o ensino da Álgebra significativo é um desafio e o uso de atividades exploratórias pode ser um dos caminhos para torná-lo possível.

Quanto à questão do equilíbrio mantido após colocar tomates em ambos os pratos da balança, a dupla A se manifestou dizendo: “Qualquer quantidade de tomates que a gente colocar em um prato e colocar, a mesma, no outro, não vai dar diferença na balança. No programa, vamos continuar com o sinal de “=”. Se não colocarmos quantidades iguais, a balança ficará desequilibrada, vão aparecer os sinais “< ” ou “>”.

Tinoco (2008) ressalta que, explorar atividades que utilizam o uso de balanças de dois pratos é fundamental para que os alunos associem o equilíbrio a uma igualdade, com o sentido de uma equivalência; e, analogamente, o desequilíbrio a uma desigualdade. Essa prática facilita o desenvolvimento de um processo muitas vezes difícil para o aluno: passar da linguagem verbal para a linguagem algébrica. Pensando neste aspecto, a pesquisadora propôs as questões 1 e 2 que serão apresentadas posteriormente na folha de atividades entregue a cada aluno.

Na sequência, a pesquisadora sugeriu aos grupos que clicassem na seta vermelha, que aparece no canto direito da tela. Assim, tiveram acesso ao desafio indicado na Figura 30.

Figura 30 – Desafio proposto pela "Balança Digital"



Fonte:<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html>

Agora, na situação apresentada, há um "peso desconhecido". Neste momento a pesquisadora lança outros desafios:

- Qual é o valor deste "peso" desconhecido?
- Como ele está representado nesta situação?
- Qual grupo pode explicar como conseguiu descobrir?

Após alguns minutos, o grupo B se manifestou dizendo: "O peso é igual ao de quatro tomates. Conseguimos descobrir arrastando um tomate de cada vez para o outro prato da balança. Quando colocamos 4, a balança se equilibrou. Na figura, este peso está representado pelo x."

Apenas o grupo C não conseguiu compreender a explicação dada pelos colegas. Então, a pesquisadora fez uma mediação, mostrando que se colocarmos uma quantidade maior ou menor de tomates no segundo prato da balança, ela irá permanecer desequilibrada.

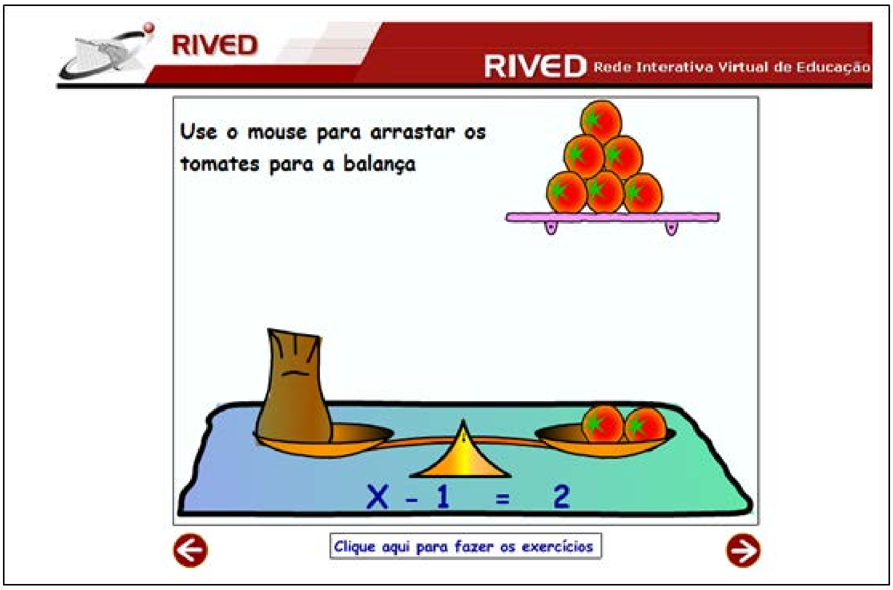
Nesta oportunidade foram acrescentadas as seguintes questões:

- Este "peso x" pode assumir valores diferentes?
- Na atividade do último encontro, vimos que o valor de x podia variar. E nesta situação, isto pode acontecer?

O aluno A30 destacou: Esta situação é diferente. O x só pode valer 4 para a balança estar equilibrada. Com esta afirmação, pode-se comprovar que o conceito de incógnita começa a ser estruturado para este aluno. Segundo Usiskin (1995), este conceito fundamenta a Álgebra como estudo de meios para resolver problemas.

Clicando, novamente, na seta vermelha à direita da tela, os alunos tiveram acesso à situação apresentada na Figura 31.

Figura 31 – Desafio proposto pela Balança Digital



Fonte:
<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html>

Na tela está representada a situação: $x - 1 = 2$. O desafio proposto é descobrir o valor do "peso x". Inicialmente, cada grupo explicou, oralmente, as estratégias utilizadas e, em seguida, relataram por escrito (questão 1 item a da folha de atividades, disponível no Apêndice F. Vale destacar as considerações apresentadas pelos grupos D e E.

O grupo D mostrou que para resolver a questão, arrastou o tomate, que estava no prato da esquerda, para o prato da direita tentando deixar no primeiro prato apenas o pacote com o "peso desconhecido". Assim observaram que a balança ficou em equilíbrio, e a expressão que apareceu foi $x = 3$; isto é o prato da direita ficou com 3 tomates.

Já o grupo E explicou que tirou o pacote com o "peso x" e no lugar foi colocando tomates até a balança ficar em equilíbrio. Isto aconteceu após eles arrastarem 3 tomates.

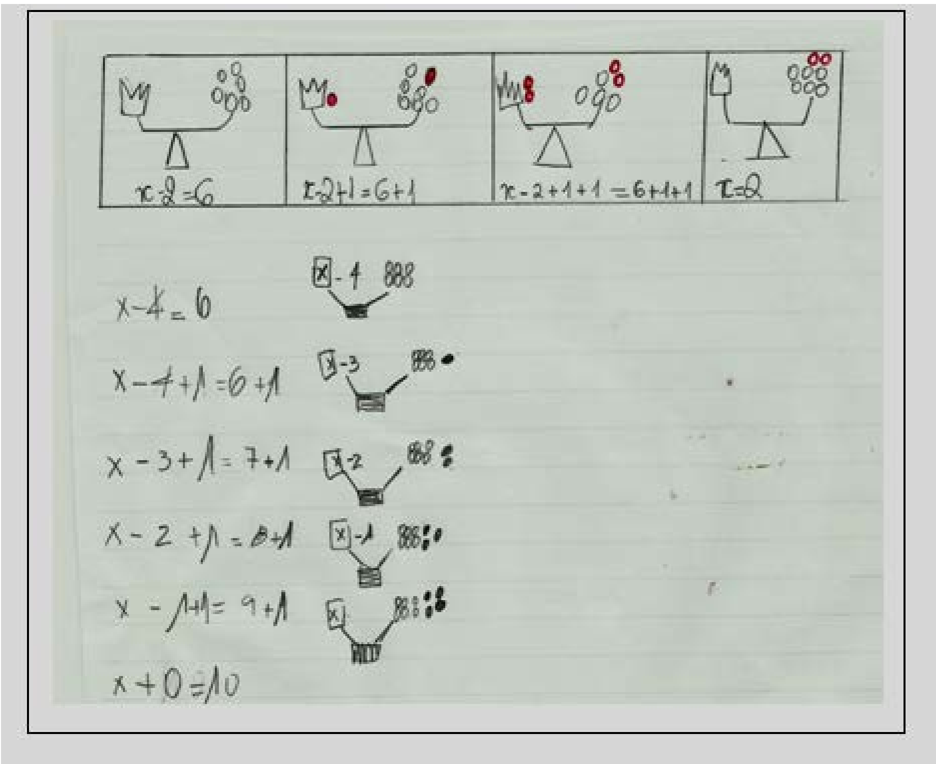
Utilizando a mesma tela do objeto virtual, os grupos clicaram na janela “fazer exercícios” e solucionaram os desafios propostos. Na folha de atividades registraram as conclusões; fazendo o desenho de uma balança para cada situação apresentada.

Nas questões propostas, o valor do x era encontrado a partir de operações inversas. Portanto, antes dos alunos resolvê-las, a pesquisadora tomou um exemplo do próprio objeto digital e, no quadro de giz, aplicou a ideia de acrescentar, igualmente, os tomates nos pratos da balança. Destacou também a possibilidade de acrescentar ou retirar os “pacotes” com valores desconhecidos. É importante destacar que os alunos participaram deste momento acrescentando ideias e registrando conclusões.

Para Smole (2000), quando o educando verbaliza os procedimentos que adotam, justificando-os, ou comentam o que escrevem, representam ou fazem esquemas, está modificando conhecimentos prévios e construindo novos significados para ideias matemáticas.

Este fato pode ser observado se analisarmos os resultados da questão 3 do pré-teste, que também se referia à ideia de equilíbrio de equações. Naquela questão, 18 alunos sequer montaram as equações propostas. Agora, daquele total, 15 conseguiram registrar, de forma correta, suas conclusões fazendo o desenho de uma balança para cada situação apresentada pelo objeto virtual trabalhado neste contexto. Vale destacar os registros do aluno A20 (Figura 32).

Figura 32 – Resolução apresentada pelo aluno A20



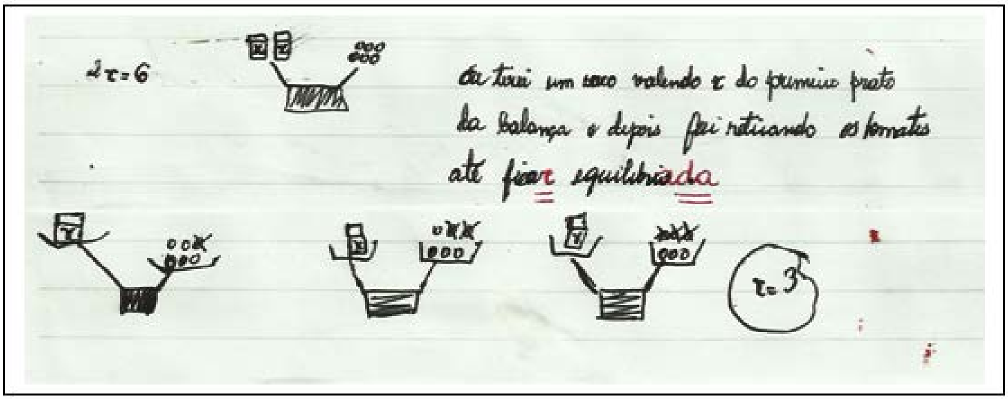
Fonte: Protocolo da pesquisa

Após os grupos apresentarem suas conclusões, a pesquisadora argumentou: “Na situação analisada, o “peso” x apareceu no prato da esquerda. E se ele estivesse no prato da direita?” O grupo I concluiu: “É só, agora, arrastar os tomates para o prato da esquerda.” Seu objetivo com esta questão é levar os alunos a compreender que o processo é similar. Já que na resolução de equações muitas dúvidas ocorrem quando a incógnita aparece no segundo membro da igualdade.

Na questão 2 da folha de atividades foi proposto aos alunos que repetissem os procedimentos da questão 1 para os desafios $2x = 6$ e $x/3 = 1$. Agora, os registros foram feitos individualmente. É importante destacar que 3 alunos não concluíram a questão, pois o tempo disponível para o encontro se esgotou.

Na questão 3 do pré-teste, que já foi referida anteriormente, apenas 8 alunos no total de 35, conseguiram concluir corretamente o raciocínio proposto. Aqui, todos estes 8 alunos, mais os 5 que tinham deixado em branco e mais 17 alunos que tinham errado a referida questão, conseguiram registrar a maior parte dos desafios propostos pelo objeto digital. Na Figura 33 e na Figura 34 são apresentados alguns relatos.

Figura 33 – Resposta do aluno A12, que havia deixado em branco a questão 3 do pré-teste

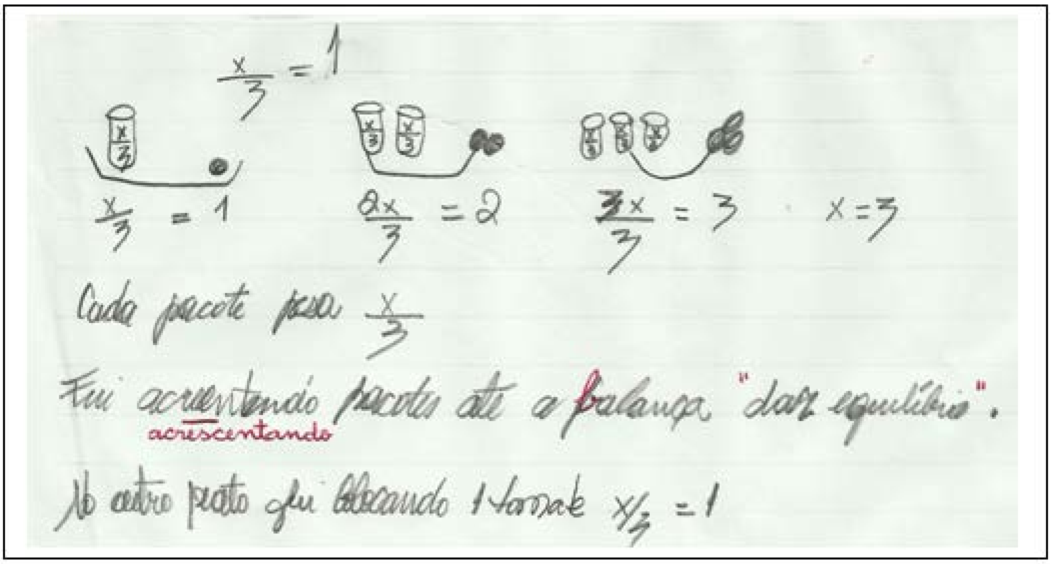


Fonte: Protocolo da pesquisa

Concluídas as atividades da folha, a pesquisadora aproveitou para encerrar o encontro mostrando que a variável x nestas atividades é denominada incógnita. Neste momento ela fez um paralelo com o encontro anterior. O aluno A24 afirmou que: “ As questão trabalhadas hoje são diferentes, pois, as expressões algébricas aparecem seguidas do sinal de igual e de um número”. Aproveitando esta argumentação, foi apresentado à turma o conceito de equação do 1^o grau.

O aluno A33 concluiu, afirmando: “Para facilitar, professora, podemos dizer que uma equação é uma expressão numérica que possui um de seus valores escondidos”. Foi até o quadro e deu o exemplo: $3.10 - 5 = 25$ Se a gente esconder o número 10, vai ficar assim, $3.x - 5 = 25$.

Figura 34 – Resposta do aluno A15, que havia errado a questão 3 do pré-teste



Fonte: Protocolo da pesquisa

A pesquisadora aproveitou o exemplo e completou: “ Resolver esta equação é achar o número não conhecido (incógnita), neste exemplo, descobrir o número 10.”

O tempo usado para o encontro foi de 2 horas, foram usados mais 20 minutos que o tempo previsto. Muito empolgados com as atividades, alguns alunos afirmaram que iriam acessar o objeto digital em casa para resolver outras equações. Para Abrantes (2001) a utilização de recursos digitais oportuniza o desenvolvimento de motivação e gosto pela Matemática.

4.2.4 Atividade 4 (Apêndice F)

Objetivos: Resolver equações do 1^o grau, justificando cada etapa de resolução e verificando o resultado encontrado; traduzir uma equação do 1^o grau para um linguagem simbólica e, após resolvê-la, traduzir a resposta para a linguagem algébrica.

Desenvolvimento: O encontro foi iniciado com os relatos de três alunos, que mostraram ter utilizado, em casa, o objeto virtual trabalhado no encontro anterior. Um deles destacou que não conseguiu resolver a equação $3x + 4 = 7$ proposta por aquele recurso. A pesquisadora, aproveita a oportunidade para rever a resolução de equações, utilizando o equilíbrio de balanças de dois pratos.

Como já foi relatado anteriormente, esta atividade, como a atividade 3, foi elaborada para apresentar aos alunos mais um recurso para a resolução de equações do 1^o grau. Neste momento, as equações foram apresentadas a partir de cartões coloridos; prática elaborada por Olival (2007) e descrita na Revista do Professor em abril de 2007. Paralelamente ao procedimento lúdico proposto pelo autor, a pesquisadora buscou desenvolver a comunicação matemática por meio dos relatos, oral e por escrito, das atividades desenvolvidas com auxílio do material.

Antes de mostrar a dinâmica com os cartões, a pesquisadora utilizou uma reta numérica, para fazer uma breve revisão da propriedade dos números inteiros, que apresenta como zero a soma de dois números opostos.

Relembrando o encontro anterior, a pesquisadora sugeriu que os alunos pensassem como resolveriam a equação $-5+x = 4-2x$, utilizando a Balança Virtual. Depois de alguns minutos apenas a aluna A2 se manifestou dizendo: "Acho que teríamos que acrescentar pacotes e tomates nos dois pratos da balança para resolver o desafio. Aparece x nos dois lados da igualdade. Vai dar trabalho! "

Propositalmente, nas equações que foram trabalhadas neste encontro as incógnitas apareceram em ambos os membros da igualdade; para que a pesquisadora pudesse trabalhar com a bidirecionalidade do sinal de igualdade.

Para Tinoco (2008), a ideia, muito utilizada na Álgebra, de que o sinal de igualdade pode indicar equivalência entre duas expressões, pode não ser percebido imediatamente pelos alunos. É preciso enfatizar o fato de o símbolo da igualdade ser bidirecional; já que o aluno com experiência apenas em Aritmética, considera este símbolo unidirecional; a igualdade é vista como tendo uma expressão do lado direito e um número do lado esquerdo.

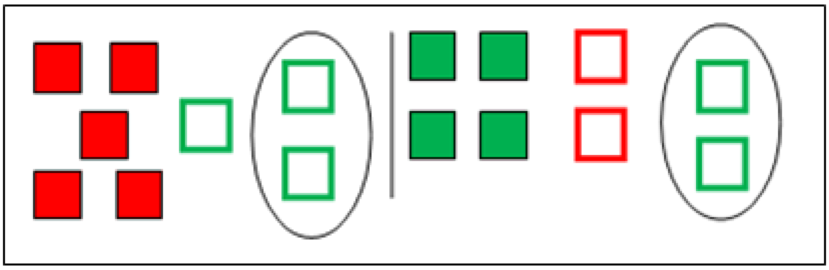
Na sequência da atividade, a pesquisadora apresenta o material que será utilizado, como um novo recurso que vai auxiliar na resolução de equações do 1^o grau. Destaca o significado de cada quadradinho a partir do código cromático, e a propriedade da soma dos números opostos aplicada aos quadradinhos : um cartão verde somado com um vermelho se anulam e um branco com contorno verde somado com um branco de contorno vermelho também somam zero. Neste momento, esclarece que a igualdade da equação será representada por dois palitos tipo de picolé.

Participaram desta atividade 36 alunos, incluindo os 35 sujeitos desta pesquisa; os mesmos estiveram divididos em trios. Na primeira etapa da atividade, os grupos são desafiados a traduzir a equação $-5+x = 4-2x$ para a linguagem dos cartões. O grupo F foi o único que não fez o registro correto; os alunos não diferenciaram o cartão verde do cartão branco com contorno verde; registrando assim, a equação $-5 + 4 = x - 2$. Neste momento a pesquisadora atendeu este grupo em particular, pedindo que eles escrevessem em cada um dos cartões seu código cromático. Desta forma os próprios alunos diagnosticaram o erro que haviam cometido.

Nesta oportunidade, a pesquisadora relembrou que o objetivo do trabalho é encontrar o valor do quadradinho branco com contorno verde (x) e para isso, teríam que deixá-lo isolado em um membro (em um prato da balança se referindo à Balança Digital). Ou seja, os cartões brancos com contornos coloridos devem ficar em um membro e os cartões verdes e vermelhos no outro membro da igualdade. Relembrando o encontro anterior, foi sugerido uma operação de equilíbrio.

A sugestão inicial foi somar $2x$ em ambos os membros; ou seja, adicionar dois cartões brancos com contornos verdes em cada membro. Como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Registro da operação de equilíbrio: Somar $2x$.

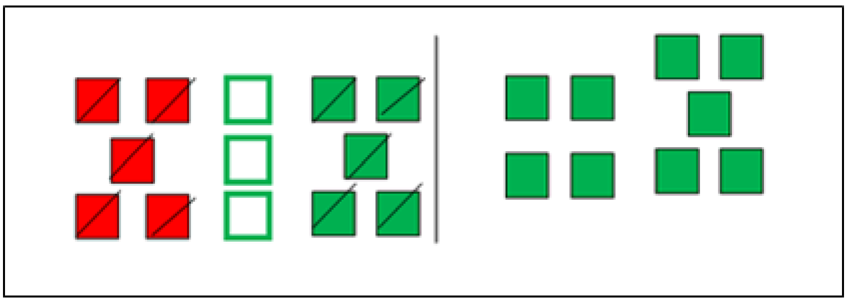


Fonte: Elaboração própria

Utilizando a propriedade que afirma que a soma de números opostos é zero, temos $-x + x = 0$. Assim, após esta simplificação, tem-se a equação $-5 + 3x = 4$.

O objetivo seguinte foi excluir os cartões vermelhos do primeiro membro da igualdade. O grupo F logo sugeriu: Vamos colocar 5 cartões verdes em cada membro. Aí, cada cartão verde “apagará” um cartão vermelho. Logo obtém-se a equação: $3x = 9$. Como está representada na Figura 36.

Figura 36 – Registro da simplificação: Eliminar os cinco pares (+1) + (-1).



Fonte:Elaboração própria

Neste momento os alunos foram levados à seguinte reflexão: “Se temos três cartões brancos com contornos verdes ($3x$) e precisamos encontrar o valor de apenas um deles (x), qual operação de simplificação devemos fazer em ambos os membros da igualdade?”

O aluno A22 esclareceu: “Temos de dividir tudo por 3”. Assim, concluiu-se que o valor do quadradinho branco com contorno verde é 3.

A pesquisadora, então pediu que o resultado da equação, encontrado na linguagem dos cartões, fosse representado na linguagem algébrica ($x = 3$).

Nesta situação, os alunos utilizaram registros de representação distintos de uma mesma equação. Para Duval (2003), a aprendizagem só torna-se significativa quando o educando utiliza variadas formas de registros e consegue mudar naturalmente de uma forma de registro para outra.

Para concluir, é sugerido aos grupos que façam a verificação do resultado encontrado na equação $-5 + x = 4 - 2x$.

A próxima equação a ser resolvida, em grupos, foi $8 + 2x = x - 3$. A pesquisadora observou o trabalho dos grupos e esclareceu as dúvidas que surgiram. Destacam-se as argumentações dos alunos A23: "Assim, consegui entender porque ao resolver equações a professora falava que mudava de membro e mudava o sinal." A31: "Os cartões coloridos representam os tomates da balança e os cartões brancos com bordas coloridas os pesos desconhecidos."

Pôde-se notar, com as argumentações dos alunos, que eles fizeram conexão com a atividade anterior e, de fato, compreenderam o mecanismo que justificava o método utilizado pela professora da turma; mostrando assim, a capacidade de relacionar as linguagens algébrica e lúdica. É notável destacar ainda que ambos os alunos responderam incorretamente as questões 3 e 4 do pré-teste, onde a habilidade de resolver equações do 1^o grau foi avaliada. Após 20 minutos de discussões, os grupos concluíram a tarefa.

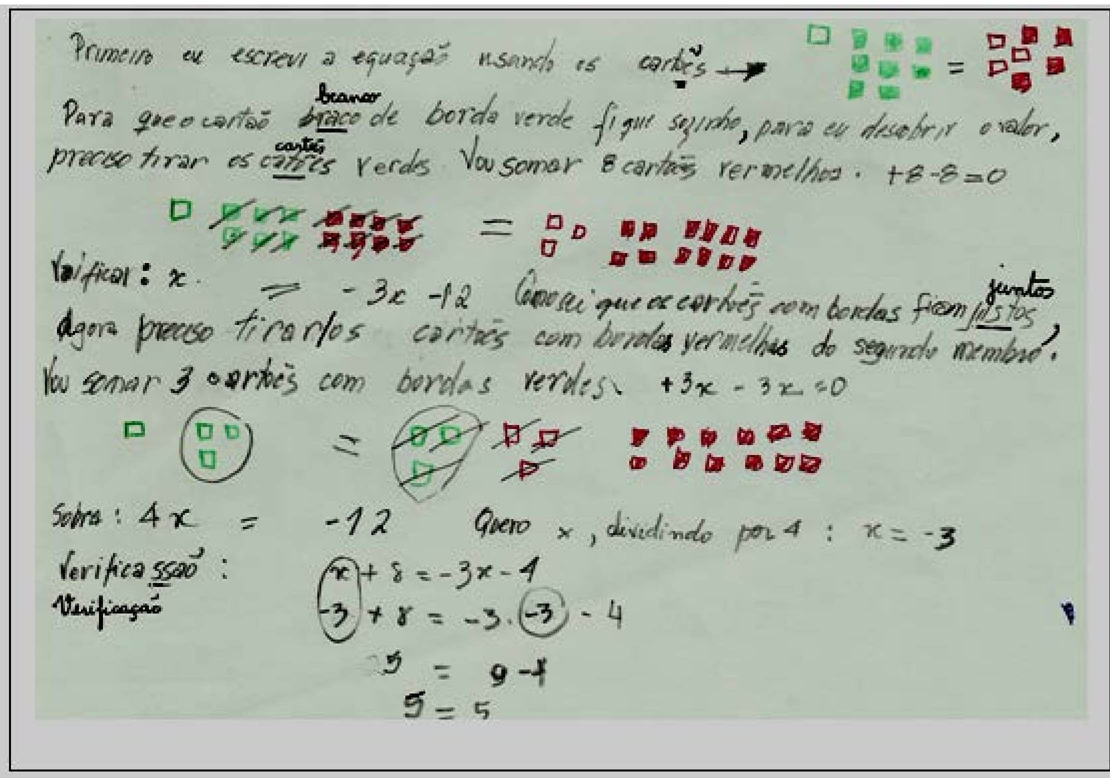
No próximo momento, os alunos receberam uma folha na qual estava registrada cada etapa da resolução da equação $-5 + x = 4 - 2x$, feita anteriormente, utilizando os cartões coloridos e lápis nas cores vermelha e verde. Na folha, havia a sugestão de um desafio, que os alunos responderam individualmente:

- Resolva a equação $x + 8 = -3x - 4$, utilizando os cartões coloridos. Registre cada uma das operações de equilíbrio e de simplificação que você utilizou. No final, escreva sua resposta utilizando a linguagem algébrica e verifique o resultado encontrado.

Ao analisar os registros destes alunos, que Duval (2003) identifica como representações externas e afirma que são os meios que estes se apropriam para externalizar suas representações mentais. A pesquisadora percebeu que, 31 alunos resolveram corretamente a equação utilizando os cartões coloridos, agora representados por desenhos de quadradinhos. Na Figura 37 temos o registro do aluno A7 que também havia errado as questões 3 e 4 do pré-teste.

Analisando os registros e comparando-os com as respostas das questões 3 e 4 do pré teste, nota-se que:

Figura 37 – Registro do aluno A7, referente à resolução da equação $x - 8 = 3x - 4$.



Fonte:Protocolo da pesquisa

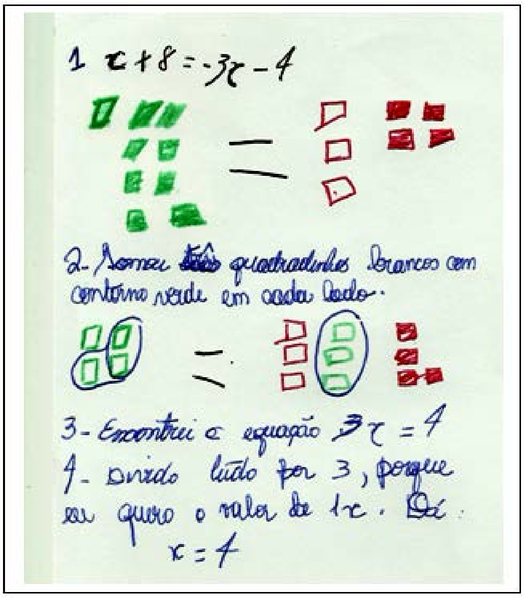
- 31 alunos acertaram a questão proposta. Destes, 7 alunos haviam acertado as questões do pré-teste;
- 7 haviam deixado o pré-teste em branco e 17 haviam errado as questões do pré-teste.
- Dos 5 alunos que erraram a questão proposta, apenas 1 não conseguiu sequer iniciar os registros com os cartões. Os outros 4 cometeram erros no desenvolvimento da questão ao fazer as operações de equilíbrio. Veja o registro do aluno A8, na Figura 38 ao acrescentar $3x$ em ambos os membros da igualdade, ele se esquece do termo +8 no primeiro membro.

4.2.5 Atividade 5 (Apêndice F)

Objetivos: Ler com atenção o problema e levantar dados; fazer a conversão do enunciado para a linguagem das equações, usando letras e símbolos; resolver a equação estabelecida, analisar o resultado obtido e dar a resposta coerente

Desenvolvimento: Esta atividade foi desenvolvida no quinto encontro com a turma de 7^o ano; estiveram presentes apenas os 35 alunos observados nesta pesquisa. A pesquisadora propôs algumas questões para um debate no início do encontro, a fim de verificar algumas concepções em relação aos estudos realizados até o momento.

Figura 38 – Registro, da resolução da equação $x + 8 = -3x - 4$, feito pelo aluno A8.



Fonte:Protocolo da pesquisa

- Por que usar letras em Matemática?
- Para que servem as equações?

Nesta oportunidade a pesquisadora iniciou a discussão destacando que as letras, os números e os sinais operatórios são elementos da linguagem algébrica. Para, Olival (2007), enquanto o número é uma entidade singular, a letra é um ente matemático plural, com a capacidade de representar qualquer elemento de um conjunto, o que justifica chamá-la de variável.

O aluno A2 afirmou: “Temos que pensar que a letra na equação está no lugar de um número que foi escondido.” Foi destacado neste momento que, as equações são ferramentas utilizadas na resolução de problemas. Equacionar um problema significa obter a equação que traduza este problema, expresso na nossa Língua, para a linguagem algébrica.

Olival (2007) destaca que as soluções literais, chamadas fórmulas, resolvem todos os problemas semelhantes ao problema geral pela simples substituição das letras pelos dados numéricos. As fórmulas matemáticas são criadas no intuito de estabelecer razões entre diferentes grandezas, facilitando cálculos complexos e permitindo que todos que tenham o conhecimento básico em Matemática possam usá-las de forma correta e eficiente.

As fórmulas ou equações matemáticas constituem uma importante ferramenta na determinação de valores desconhecidos. Nesta atividade, o trabalho foi realizado a partir de equações que nos ajudam a compreender situações do nosso cotidiano. Elas são apresentadas no contexto de três questões.

Questão 1 Descubra o número que você calça

Nesta questão, foi apresentada a expressão algébrica capaz de determinar o número que uma pessoa calça a partir do comprimento do seu pé, em centímetros. Inicialmente, foi dado o exemplo de uma pessoa que possui o pé medindo 26 cm e em seguida, cada aluno escolheu um colega para fazer a medição do pé, usando régua ou fita métrica.

O caráter experimental da matemática favorece o desenvolvimento do pensar, uma vez que esta abordagem pedagógica estimula a construção do conhecimento de maneira ativa. Para muitos soa estranho, Matemática experimental? (AMBRóSIO, 1986).

Após a medição feita, os alunos utilizaram a expressão:

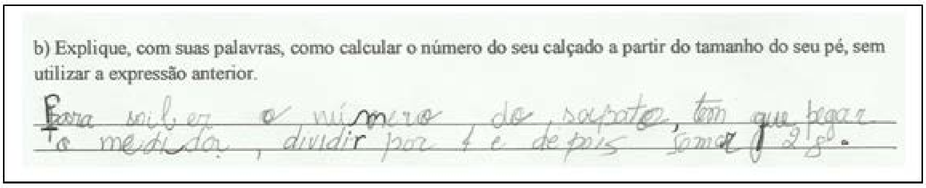
$$\frac{5p+28}{4} = N \tag{4.1}$$

, para descobrir quanto calça o referido colega. Todos os alunos conseguiram utilizar a fórmula, fazendo a substituição correta e os cálculos devidos. é importante destacar que p corresponde à medida do pé em centímetros e N o número do calçado.

Na etapa seguinte, cada aluno foi desafiado a conferir o número do seu calçado, usando o comprimento do seu pé, em centímetros, e em seguida, explicar como fizeram a conferência sem utilizar a expressão algébrica anterior. Neste momento, os alunos coordenaram dois registros de representações semióticas: a língua materna e a escrita algébrica. Para (DUVAL, 2003) a compreensão em Matemática se dá a partir da coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas.

Apenas um aluno não conseguiu realizar, com clareza, o registro solicitado. Como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Registro, da resolução da questão 1 item b, feito pelo aluno A8


b) Explique, com suas palavras, como calcular o número do seu calçado a partir do tamanho do seu pé, sem utilizar a expressão anterior.

Para saber o número do sapato, tem que pegar a medida, dividir por 4 e depois somar 28.

Fonte:Protocolo da pesquisa

Questão 2 Calculando o consumo de energia elétrica

Esta questão foi contextualizada a partir das seguintes informações[3]:

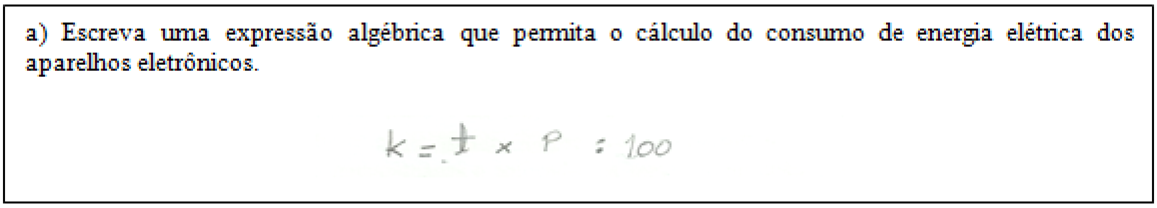
> O aumento do consumo de energia elétrica, em razão do consumismo acelerado, tem provocado a construção de mais usinas hidrelétricas. Elas não poluem o ar, mas causam enormes impactos ambientais, em virtude

[3] <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/equacao-1.htm.Acessoem12/11/2015>

> da quantidade de água represada a fim de mover as turbinas na produção da energia elétrica. Alternativas têm sido utilizadas; tais como a energia nuclear e a energia eólica. Saiba como calcular o consumo de energia elétrica dos aparelhos que você tem em casa, podendo assim economizar eletricidade e dinheiro. O consumo de energia elétrica dos aparelhos de uma casa (k) é obtido a partir da milésima parte do produto do número que representa o tempo que o aparelho ficou ligado (t) pelo valor da potência do aparelho(P).

Como na questão anterior, os alunos também foram desafiados a coordenar dois tipos de representações semióticas. Agora, porém a proposta era escrever uma expressão algébrica que permita o cálculo do consumo de energia elétrica de aparelhos eletrônicos. Ou seja, deveria partir de uma situação descrita na língua materna e representá-la na linguagem algébrica. Todos os alunos fizeram a representação correta, alguns utilizaram uma expressão fracionária, outros, utilizaram o sinal da divisão. Como fez o aluno A30 (Figura 40).

Figura 40 – Registro da resolução da questão 2 item a, feita pelo aluno A30


a) Escreva uma expressão algébrica que permita o cálculo do consumo de energia elétrica dos aparelhos eletrônicos.

$k = t \times P : 100$

Fonte: Protocolo da pesquisa

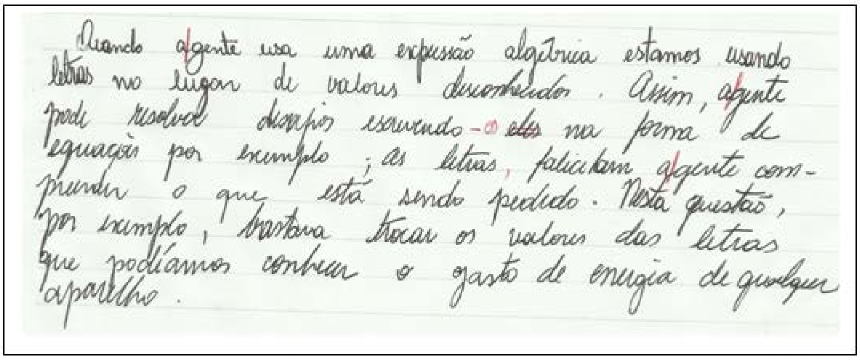
Na sequência, foi solicitado aos alunos que se posicionassem sobre a vantagem ou desvantagem do trabalho com equações para representar desafios. Vale ressaltar a afirmação de (SMOLE, 2000) de que a escrita, como os demais recursos de comunicação, também sofre evolução à medida que o professor trabalha com os alunos diversos portadores de informação. O que pode ser observado se analisarmos as atividades de alguns alunos no decorrer desta pesquisa. O aluno A5, por exemplo, na primeira atividade desta pesquisa mal conseguiu responder as questão propostas ao elaborar o texto solicitado; nesta questão, porém, produziu um parágrafo bem coerente e coeso a partir da proposta. (Figura 41)

Questão 3 Arquitetando...

O desafio proposto nesta questão foi o seguinte: “Uma casa com 100 m^2 de área construída possui 2 quartos, quadrados, do mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 68 m^2?”

Primeiro, a pesquisadora pediu aos alunos que fizessem um esboço do desenho desta casa e destacasse, com lápis de cor, a área que representava os quartos; com o objetivo de que a representação pictórica pudesse contribuir para desenvolvimento do

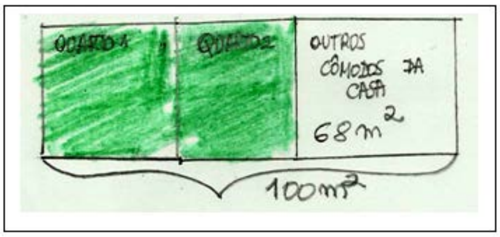
Figura 41 – Registro feito pelo aluno A5, referente à questão 2 item b


Quando agente usa uma expressão algébrica estamos usando letras no lugar de valores desconhecidos. Assim, agente pode resolver desafios usando-o ~~elas~~ na forma de equação por exemplo; as letras, faciliam agente compreender o que está sendo pedido. Nesta questão, por exemplo, bastava trocar os valores das letras que podíamos conhecer o gasto de energia de qualquer aparelho.

Fonte: Protocolo da pesquisa

pensamento algébrico que seria necessário no próximo desafio. Veja na Figura 42, como o aluno A29 representou a referida situação:

Figura 42 – Representação pictórica da questão 2 item a, feita pelo aluno A30.



Fonte: Protocolo da pesquisa

O próximo desafio desta mesma questão foi “Represente a situação descrita no desafio, utilizando a linguagem matemática. A seguir, resolva-o.”

Antes de deixar os alunos resolverem, a pesquisadora interveio om algumas indagações:

- Como calculamos a área de um quadrado? Vocês conhecem uma fórmula própria para este cálculo?

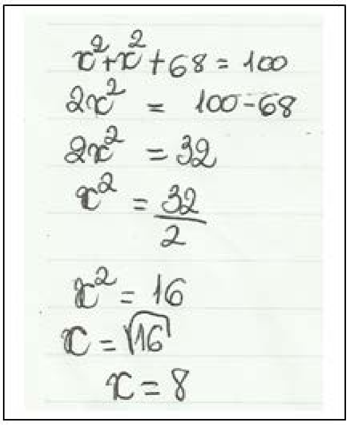
O aluno A28 registrou: ”Basta pegar a medida do lado e multiplicar por ela mesma; ou seja fazer $lado.lado$.

- E na situação apresentada, qual é a medida do lado dos quartos?

O aluno A25 destacou: “Como não sabemos, temos que representá-la por uma letra, incógnita”.

Após esta pequena discussão, os alunos registraram suas respostas. Nas mesmas, pôde-se observar que 28 alunos apresentaram suas respostas de forma correta e 7 alunos erraram a resposta final. Dos erros cometidos, ainda notou-se que 5 escreveram uma equação coerente e acabaram registrando cálculos incorretos. Como se pode verificar no registro do aluno A23 (Figura 43).

Figura 43 – Registro do aluno A30 referente à questão 3.



Fonte: Protocolo da pesquisa

Apesar de não ter sido proposta nenhuma questão com esta abordagem no pré-teste, a pesquisadora resolve abordar nesta atividade a ideia das equações que representam situações da realidade dos alunos, visto que esta é uma das preocupações dos PCNs, quando revelam que a aprendizagem algébrica deve ocorrer a partir de situações com significados para os educandos, e do PISA, BRASIL (2013a), em suas avaliações.

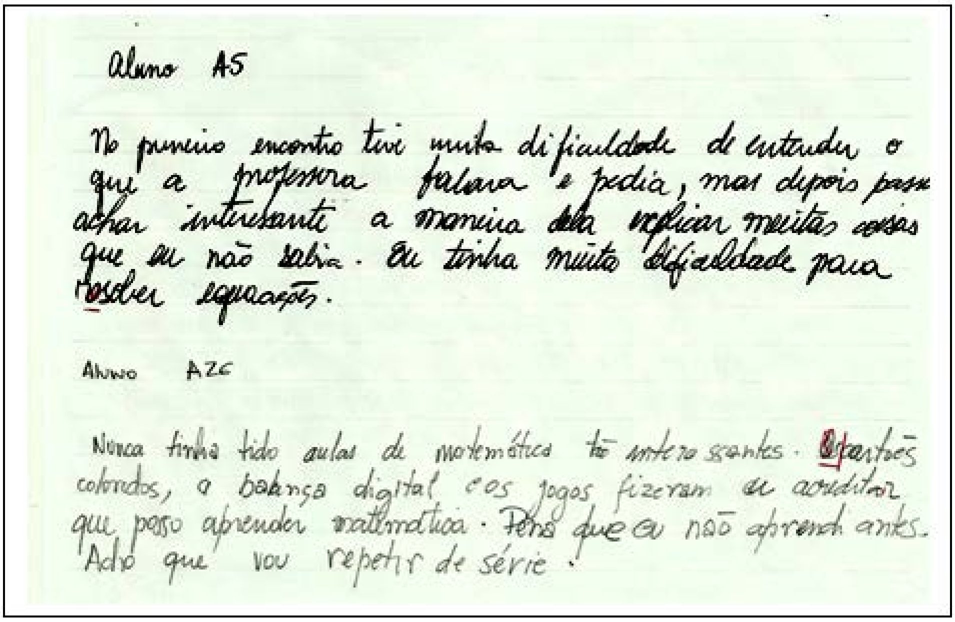
Para o PISA, o letramento matemático reflete uma perspectiva que reforça o papel social da educação matemática, cuja responsabilidade é estabelecer o elo entre os conteúdos escolares e o cotidiano do aluno.

4.2.6 Avaliação do trabalho com o sétimo ano

Nos minutos finais do último encontro, a pesquisadora solicitou aos alunos que registrassem, por meio de um parágrafo, uma avaliação do trabalho desenvolvido nos cinco encontros. Na Figura 44 estão destacadas as considerações dos alunos A5 e A26.

É notável que por se tratar de uma turma agitada e com grande número de alunos, a pesquisadora teve um pouco de trabalho para manter a disciplina na realização do primeiro encontro. Contudo, nos encontros posteriores, a maioria dos alunos mostrou-se tão envolvida e interessada com a proposta, que participou com muito entusiasmo das atividades. Muitos deles externavam no decorrer dos encontros a surpresa em conhecer

Figura 44 – Avaliação dos trabalhos feita pelos alunos A5 e A26.



Aluno A5

No principio encontro tive muita dificuldade de entender o que a professora falava e pedia, mas depois passei achar interessante a maneira dela explicar muitas coisas que eu não sabia. Eu tinha muita dificuldade para resolver equações.

Aluno A26

Nunca tinha tido aulas de matemática tão interessantes. Os cartões colorados, a balança digital e os jogos fizeram eu acreditar que posso aprender matemática. Pensei que eu não aprendi antes. Acho que vou repetir de série.

Fonte: Protocolo da pesquisa

novas estratégias para o trabalho com as situações matemáticas que tiveram oportunidade de estudar naquele ano escolar.

4.3 Trabalho com o 8^o ano do Ensino Fundamental

As atividades elaboradas, para este ano escolar, estão disponíveis no Apêndice G deste trabalho, foram aplicadas numa turma de 28 alunos. Sendo que, apenas 26 destes alunos participaram de todas as atividades propostas. Nas mesmas, os alunos foram identificados, individualmente, pela letra maiúscula A, seguida de um número natural entre 1 e 26 (A1, A2,..., A26). Quando trabalharam em grupos, estes foram nomeados a partir das letras maiúsculas do alfabeto A, B,..., M.

Como já relatado no capítulo anterior deste trabalho, todos os alunos da turma do 8^o ano do Ensino Fundamental participantes desta pesquisa, não conseguiram responder corretamente a questão 6 do pré-teste, que envolvia as habilidades de operar com monômios e polinômios e aplicar as propriedades de produtos notáveis. Diagnosticada esta situação, a pesquisadora resolveu enfatizar, em sua pesquisa, atividades envolvendo as referidas habilidades; já que se tornam pré-requisitos para o próximo ano escolar e são destacadas, pelos PCNs, como critério de avaliação para o 4^o ciclo do Ensino Fundamental.

4.3.1 Atividade 1 (Apêndice G)

Objetivos: Interpretar a linguagem do objeto virtual[4] para resolver desafios envolvendo o conceito de área; utilizar as operações com monômios para determinar as áreas de figuras variadas; realizar as atividades propostas no aplicativo e registrar cada análise realizada, utilizando a malha quadriculada e a língua materna.

Desenvolvimento

Esta atividade, implementada a partir do objeto "Álgebra dos vitrôs"[5], disponível na plataforma RIVED, foi trabalhada com a turma dividida em 4 trios e 4 quartetos, deste total de alunos estavam incluídos os 26 sujeitos desta pesquisa. Este encontro havia sido planejado para durar 1h 40 min; contudo foi preciso de mais 30 minutos para a conclusão da proposta.

Antes de abordar o tema da atividade, apresentado no RIVED, a pesquisadora pediu aos alunos que enumerassem os assuntos que eles estudaram no ano escolar em curso. Dentre outros temas destacados, o aluno A2 afirmou: "Estudamos um negócio muito complicado chamado de polinômio."

A partir da fala deste aluno, a pesquisadora perguntou se algum aluno poderia definir o que é um polinômio; e nenhum deles tentou, pelo menos, apresentar uma ideia sobre o assunto. Portanto, a pesquisadora, percebeu a necessidade de uma pesquisa rápida sobre o tema em questão. Para isso, alguns alunos fizeram uma pesquisa no *Google*, utilizando o próprio *smartphone* e outros, preferiram usar o livro didático que tinham em mãos.

A conversa continuou quando o aluno A5 apresentou uma definição apresentada no site: <mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/polinomios.htm>. "Polinômios são expressões algébricas que possuem monômios." Neste momento, a pesquisadora intervém definindo expressões algébricas, conceituando monômios e exemplificando operações com monômios. Esta conversa que tinha sido planejada para durar apenas 15 minutos, durou ao todo 30 minutos.

Na sequência, é apresentada a tela inicial do objeto virtual e a seguinte indagação: "Você sabe o que é um vitrô?" O aluno A7 define assim:"É uma janela feita só de vidros, igual vejo na minha igreja". A pesquisadora completa a definição do aluno, afirmando que um vitrô é um tipo de janela que pode ser de correr ou abrir, confeccionada com vidros, que podem ser coloridos ou não e que, com certeza, os alunos já tiveram a oportunidade de ver vários tipos de vitrôs, em casa, igrejas, edifícios, etc.

4 Objeto Virtual de Aprendizagem é um recurso virtual, de suporte multimídia e linguagem hipermídia, que pode ser usado e reutilizado com o intuito de apoiar e favorecer a aprendizagem, por meio de atividade interativa, na forma de animação e simulação, com aspecto lúdico<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/kalinke/grupos-de-pesquisa/pde/pdf/professor_esse_e_o_OVA.PDF>

5 <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/raquel_leonogildo_gustavo_tania/projeto2MX.html>

Nesta atividade, os alunos tiveram a oportunidade de confeccionar vitrôs utilizando peças no formato de figuras geométricas, a partir do aplicativo disponível no RIVED (Figura 45).

Figura 45 – Tela inicial do aplicativo “Álgebra dos vitrôs”.

Fonte: rived.mec.gov.br

Após analisarem os vitrôs apresentados na tela inicial do objeto digital e identificarem cada figura geométrica utilizada em sua confecção, os alunos clicaram no ícone “Entrar”. E assim, tiveram acesso às orientações necessárias para a realização das atividades propostas, sempre clicando na seta vermelha disponível no canto direito da tela.

Logo após, os alunos conseguirem ter acesso às informações do próprio aplicativo, a pesquisadora fez uma breve revisão no conceito de área, já que este, deveria ser aplicado na realização das tarefas seguintes. Segundo Duval (2003), a compreensão do texto do desafio depende da relação entre o conteúdo cognitivo do mesmo (no caso, as operações com polinômios) e a base de conhecimento do educando (no caso, o cálculo de áreas de figuras planas).

Após cinco cliques na seta vermelha, disponível no canto direito da tela, os grupos tiveram acesso ao catálogo de atividades (Figura 47) e foram orientados a clicar na primeira peça.

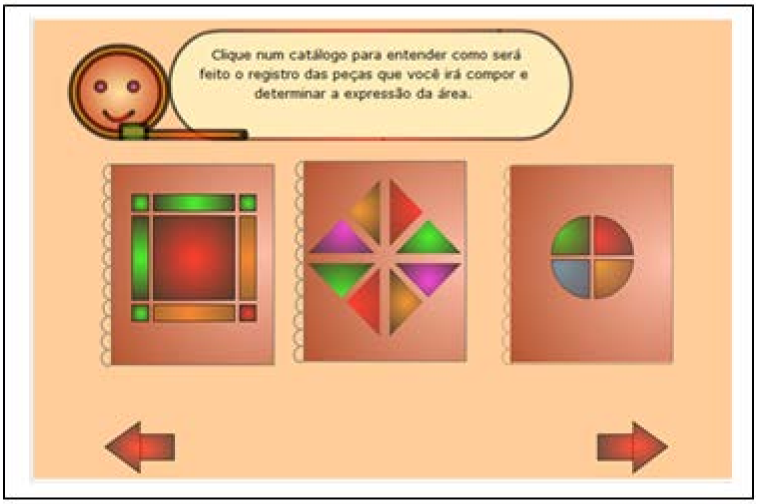
Ainda clicando na seta vermelha, identificada anteriormente, os alunos observaram algumas telas com instruções para a realização da atividade proposta. Na sequência são apresentados os desafios (Figura 48).

De acordo com as explicações do aplicativo, bastava clicar em uma das figuras, no canto superior direito, e arrastá-la para o espaço do vitrô. Utilizando o valor algébrico de cada peça, os alunos deveriam responder os desafios propostos.

Figura 46 – Orientações oferecidas pelo aplicativo “Álgebra dos vitrôs”

Fonte:rived.mec.gov.br

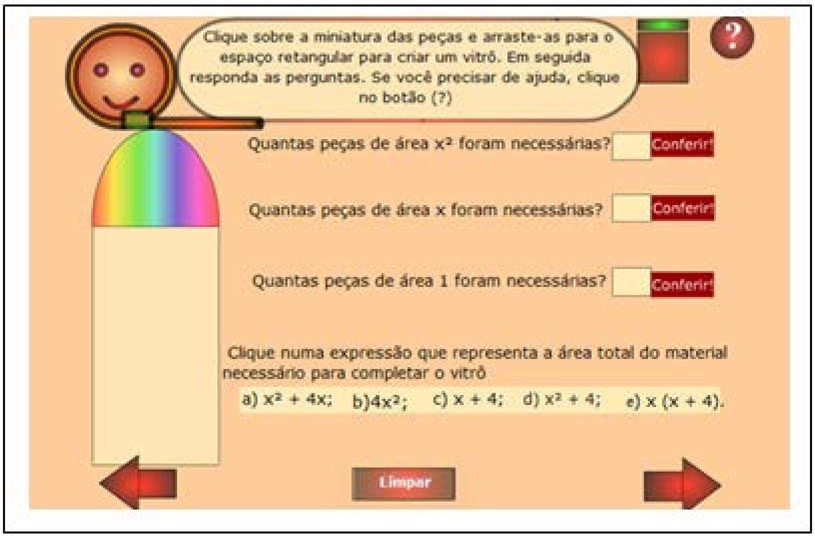
Figura 47 – Catálogo de Atividades.



Fonte: rived.mec.gov.br

O grupo A conseguiu montar o vitrô, com as peças dadas, mas não identificou corretamente o valor da área da peça de cor verde. Os alunos indicaram a área da referida figura como 4 dm^2. Além disso, representaram a área do vitrô como $x^2 + 4 = 4\,x^2$ (Figura 49). Como o próprio aplicativo não conferia a resposta apresentada pelo grupo, a presença da pesquisadora foi solicitada. Esta, sugeriu aos alunos que clicassem no ícone “?” para rever

Figura 48 – Atividade proposta a partir da primeira peça do catálogo.



Fonte: rived.mec.gov.br

a área das peças que estavam utilizando e, em seguida, limpassem a tela e iniciassem, novamente, a atividade. Nesta oportunidade, também foi revisto, com o grupo, a adição de monômios

Figura 49 – Registro da atividade proposta pelo aplicativo, referente à peça 1, feito pelo grupo A.

Fonte: rived.mec.gov.br

Os grupos C e D também precisaram limpar a tela e refazer a atividade. Ambos, haviam registrados como resposta, inicialmente, $x^2 + 4$. Ao reverem as dimensões das peças e suas respectivas áreas, conseguiram encontrar o resultado correto.

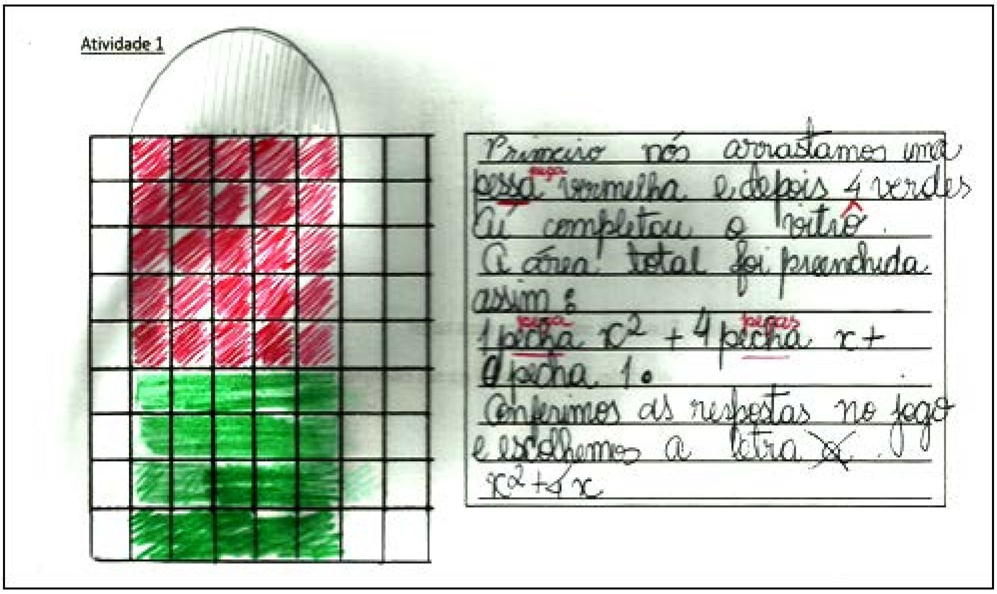
Para Lins e Gimenes (2006), o professor deve permitir, em suas atividades, que os alunos produzam significado para a Álgebra. Neste caso, o trabalho com os monômios que representavam áreas distintas, facilitou a compreensão da adição entre monômios semelhantes. Vale ressaltar o que o aluno A10 destacou : “Só podemos somar áreas de figuras iguais, então só posso somar uma peça verde com outra da mesma cor. Não posso somar uma vermelha com uma verde. É a mesma coisa com os monômios; só somo um com outro se tiverem a mesma parte de letras (literal)”.

Na etapa seguinte, foi solicitado que cada aluno, registrasse, utilizando a malha quadriculada oferecida, as peças usadas para montar o vitrô. E, na sequência, descrevesse, por escrito, cada etapa da realização da tarefa.

Como foi observada dificuldade, por parte da maioria dos alunos, em representar por escrito a tarefa realizada; a pesquisadora propôs um registro oral. Para Tinoco (2008), observa-se grande dificuldade dos alunos em se expressar por escrito utilizando a linguagem corrente. Só o trabalho frequente, iniciado com linguagem oral, pode minimizar o problema.

Na Figura 50 está o registro do aluno A9, que fazia parte do grupo C. No mesmo, pode-se verificar que as ideias estão organizadas em frases desconexas, mas o aluno conseguiu identificar as peças que usou e o polinômio utilizado no registro da resposta final.

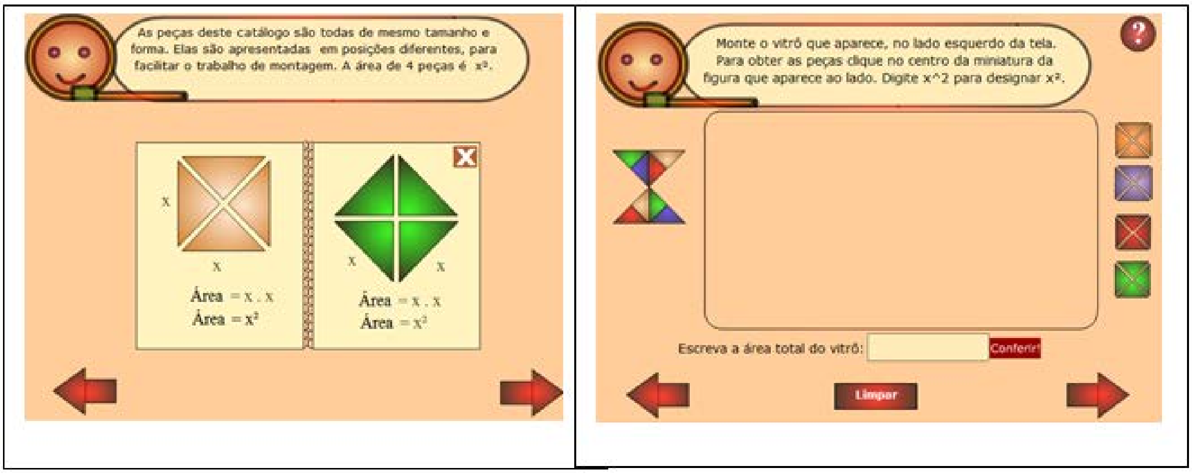
Figura 50 – Registro da atividade proposta pelo aplicativo, referente à peça 1, feito pelo aluno A9.



Fonte: Protocolo da pesquisa

Para resolver o próximo desafio proposto no aplicativo, os alunos voltaram à tela na qual aparecem as peças de vitrô e clicaram na peça 2. Clicando na seta vermelha, obtiveram as orientações necessárias para o trabalho (Figura 51).

Figura 51 – Orientações para o desafio proposto a partir da peça 2.



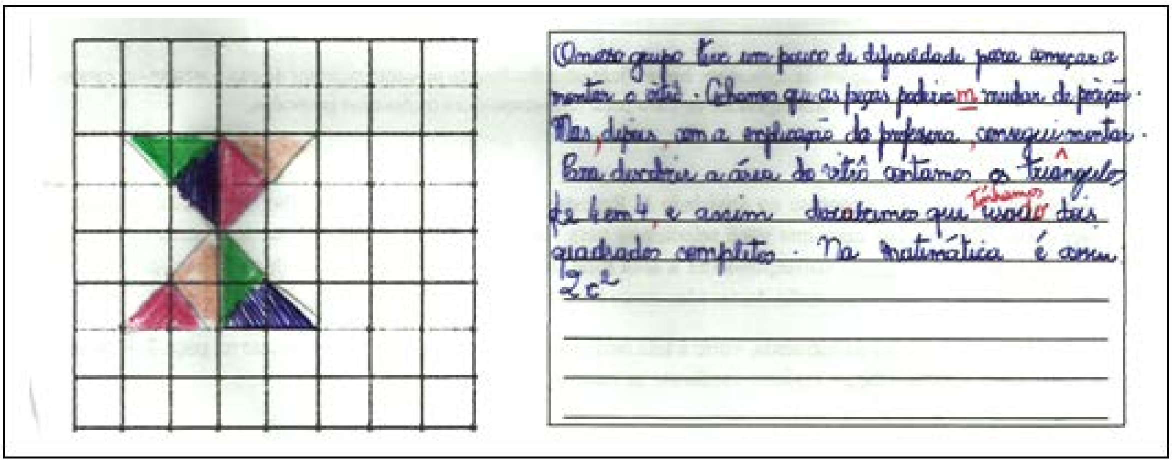
Fonte: rived.mec.gov.br

Para manusear o aplicativo, os grupos B e C tiveram dificuldade para posicionar as peças; por isso, os 30 minutos que tinham sido reservados para este desafio não foi suficiente.

Alguns grupos erraram , inicialmente, a questão pois resolveram trabalhar com a fração $x^2/4$ para representar cada peça do vitrô; e ao realizarem os cálculos com números fracionários, acabaram cometendo erros. O grupo E, por exemplo, indicou como resposta, o monômio $x^2/32$.

Quanto aos registros, pictórico e escrito, todos os grupos conseguiram realizá-los sem a intervenção da pesquisadora. Na Figura 52 está a resposta apresenta pelo grupo F.

Figura 52 – Registro do grupo F relacionado ao desafio proposto a partir da peça 2.



Fonte: Protocolo da pesquisa

A partir das observações feitas durante a realização das atividades e de uma breve revisão dos conceitos trabalhados nas mesmas, realizada no final do encontro, a pesquisadora percebeu que, apenas, 4 alunos manifestaram dúvidas ao adicionar monômios. Número reduzido, se comparado às respostas da questão 6 do pré-teste.

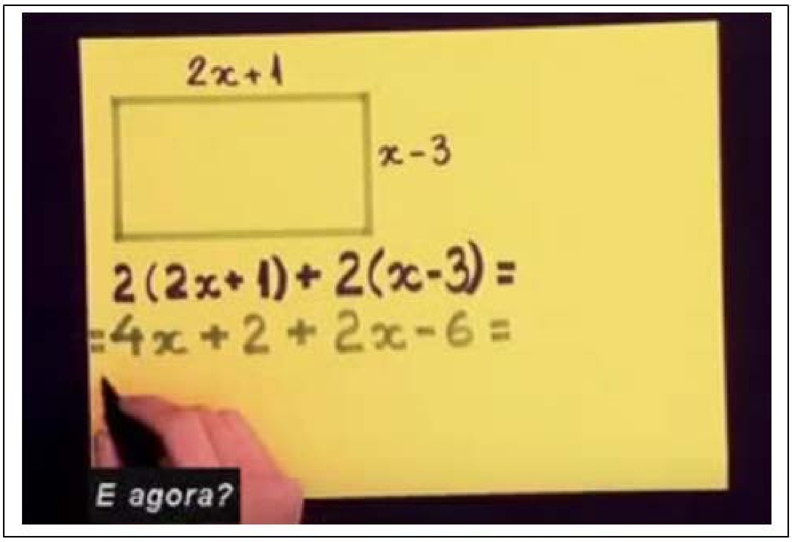
4.3.2 Atividade 2 (Apêndice G)

Objetivos: Operar com monômios e polinômios; registrar cada jogada realizada no jogo e conferir os resultados encontrados.

Desenvolvimento: Esta atividade foi aplicada no segundo encontro da pesquisadora com a turma. Este encontro iniciou-se com a apresentação da Teleaula 61 do Novo Telecurso[6], que abordava os conceitos de monômios, monômios semelhantes, polinômios; além de apresentar situações envolvendo operações com monômios e polinômios. Neste momento inicial, que aconteceu no laboratório de informática da escola, os alunos revisaram alguns aspectos trabalhados no encontro anterior e a pesquisadora aproveitou algumas situações para abordar as operações com monômios e polinômios.

Vale destacar a discussão gerada pelo desafio, proposto na Teleaula, que consistia em determinar o perímetro de um retângulo, cujas dimensões eram identificadas por polinômios (Figura 53).

Figura 53 – Desafio proposto na Teleaula 61.



Fonte:www.youtube.com/watch?v=MasXxq3CYKc

A proposta apresentada era aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, como mostra a resolução indicada na Figura 53. Porém, alguns alunos não compreenderam a utilização desta propriedade e, portanto, a pesquisadora interrompeu a Teleaula e refez

6 <disponívelem:www.youtube.com/watch?v=MasXxq3CYKc>

o desafio, aplicando a distributiva e também, usando a soma dos quatro polinômios que representam os lados do retângulo, conforme sugestão do aluno A13.

A segunda parte deste segundo encontro ocorreu na sala de aula, com a turma arrumada em duplas, aqui identificadas com as letras maiúsculas de A até M. Vale lembrar que participaram deste encontro, apenas os 26 alunos observados nesta pesquisa. A proposta era um Jogo da Velha diferente do convencional. Para os jogadores marcarem seus símbolos na cartela, como no jogo da velha convencional, deveriam antes resolver, corretamente, um desafio. Estes desafios envolviam operações com monômios e polinômios.

Cada dupla recebeu um kit com os seguintes materiais(disponíveis no Apêndice G): um conjunto com 9 cartões contendo os desafios, identificados pelas letras de A até I, no verso; um conjunto de 9 cartões com as respostas e as letras correspondentes aos seus desafios no verso; uma cartela como a que está identificada na Figura 54.

Figura 54 – Cartela para o Jogo da Velha

A	**B**	**C**
D	**E**	**F**
G	**H**	**I**

Fonte: Protocolo da pesquisa

Após as duplas receberem o material, cada uma escolheu o jogador que iniciou o jogo. Em todas as rodadas o procedimento foi o mesmo: primeiro um jogador escolheu uma letra, retirou o desafio correspondente a mesma e resolveu-o; o outro jogador da dupla verificou a resposta do colega, a partir do cartão que contém a resposta do referido desafio. E assim, as posições dos jogadores iam se alterando até o final da partida. Caso a resposta estivesse certa, o jogador que resolveu o desafio, colocava sua marca no lugar da letra escolhida; caso estivesse errada, quem marcava era o outro jogador. Ganhava a partida quem conseguisse colocar primeiro sua marca em três casas na vertical, horizontal ou diagonal.

Para Oliveira (2007), os jogos e outras atividades lúdicas tornam-se indispensáveis no relacionamento entre as pessoas, bem como uma possibilidade de cooperação e autonomia. Nesta situação, quando o jogador encontrava um resultado diferente daquele que aparecia no cartão de resultados, o outro jogador refazia a operação, explicando ao colega passo a passo do seu raciocínio; buscando o resultado que aparecia no cartão. Assim, cooperava com o colega na construção de novas aprendizagens. Caso a dúvida não fosse resolvida pelo colega, a pesquisadora intervinha.

Paralelamente às rodadas, cada jogador registrou, por escrito, as estratégias que utilizou para a resolução do desafio proposto. Para Smole (2000), quando pedimos aos alunos para verbalizarem os procedimentos ou escrevam as estratégias que adotam, estamos permitindo que modifiquem conhecimentos prévios e construam novos.

Vale destacar algumas considerações observadas durante a aplicação desta atividade.

Na primeira rodada:

- Apenas as duplas A e C não solicitaram a intervenção da professora.
- Nas duplas B, D, E e F um dos alunos errou o desafio resolvido e o colega também não conseguiu resolvê-lo. A pesquisadora foi solicitada e realizou intervenções a fim de solucionarem as dúvidas.
- Nas outras 7 duplas, os colegas conseguiram resolver, corretamente, o desafio que os primeiros jogadores haviam errado. Contudo, não conseguiram explicar, para os colegas, o raciocínio utilizado.

Outras considerações:

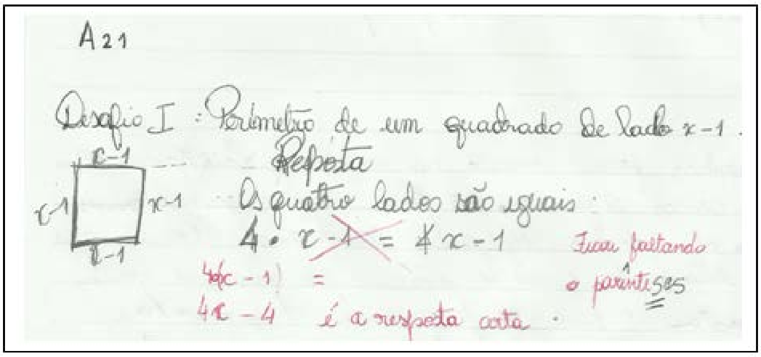
- A intervenção da pesquisadora passou a ocorrer com menor frequência nas atividades das duplas, a partir da segunda rodada.
- Apenas a dupla L (formado pelos alunos A14 e A20) continuou exigindo uma atenção especial da pesquisadora em todas as rodadas, solucionando dúvidas.
- 6 alunos (A4, A5, A9, A10, A14 e A20) não conseguiram resolver o desafio C, que solicitava o cálculo da área de um retângulo cujas dimensões são expressas pelos polinômios $x^2 + 3$ e $x + 1$. Como a dúvida foi notada em várias duplas, ao efetuar a multiplicação x^2 por x, a pesquisadora foi ao quadro e fez uma breve revisão nas propriedades de potências.
- No desafio E era solicitado o resultado da soma dos polinômios $x^4 + 3x^2 - 5$ e $-3x^2 + 9$. O aluno A14 não conseguiu resolvê-lo, corretamente, porque adicionou termos não semelhantes. Ele registrou como resposta “ x^4+ $4x^2$”. Sobre o aluno A13, sua dupla, afirmou que a resposta estava errada, o aluno A14 argumentou: “ Fiz 3 - 5 = $-2x^2$ e -3 + 9 = $6x^2$. Então: $-2x^2 + 6x^2 = 4x^2$”. A13 destacou: “Seu erro está quando você somou $3x^2 - 5 - 3x^2 + 9$, o resultado é 4, e não $4x^2$”. Neste momento, a pesquisadora percebeu que, mesmo utilizando argumentos incorretos, o aluno A14 verbalizou seu raciocínio e o aluno A13 foi claro, destacando a soma incorreta que o colega tinha feito.

Para Smole (2000), quando o aluno troca experiências em grupo, comunicando suas descobertas, apresentando seus argumentos, ouvindo e analisando as ideias dos outros, ele interioriza conceitos e os significados envolvidos na linguagem matemática.

Para finalizar este encontro, a pesquisadora pediu que os alunos pudessem explicitar suas dúvidas em relação aos conteúdos trabalhados naquela atividade. Apenas o aluno A14 afirmou que é muito difícil trabalhar com os polinômios, pois precisa saber fazer contas com os números também; não é só usar as letras. Esta é uma consideração também apresentada por (LINS; GIMENES, 2006): A Álgebra e a Aritmética uma depende da outra.

O aluno A13 concluiu afirmando: "Quando a gente precisa corrigir o erro do colega é muito interessante, prestamos mais atenção e tentamos ver como ele pensou." Na Figura 55 está o registro, da dupla H, de uma das rodadas do Jogo da Velha. Os dois alunos combinaram entre si, que quando um errasse o desafio, o outro iria fazer a correção na próprio material do colega. Neste caso, o aluno A21 respondeu e o aluno A22 fez a correção.

Figura 55 – Registro da resposta da dupla H do desafio I do Jogo da Velha



Fonte:Protocolo da pesquisa

4.3.3 Atividade 3 (Apêndice G)

Objetivos: Representar polinômios utilizando o Algeplan[7]; reconhecer polinômios equivalentes observando as peças do Algeplan; determinar a área de figuras geométricas formadas com as peças do Algeplan; representar geometricamente o produto notável "quadrado da soma".

Desenvolvimento: O encontro iniciou-se no laboratório de informática da escola. O objeto virtual Algeplan foi utilizado como recurso de aprendizagem dos produtos notáveis.

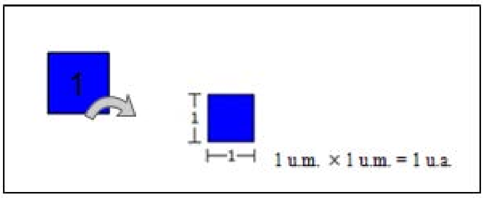
Na primeira parte do encontro, a turma esteve dividida em 6 grupos com três alunos e 2 grupos com 4 alunos (todos sujeitos desta pesquisa). A pesquisadora apresentou as peças do Algeplan, a proposta de construir figuras geométricas a partir delas e a possibilidade de escrever, algebricamente, a área das figuras formadas. Em seguida, entregou aos alunos uma folha com o roteiro das atividades e alguns desafios.

[7] <disponívelem:http://mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf>

Considerando os monômios que compõem o objeto virtual, foram definidos alguns fatos:

- Para mudar a posição de cada peça, basta clicar na seta que se encontra no canto direito da mesma.
- Para desfazer a construção, clicar na seta preta, no canto esquerdo da tela.
- Na janela que aparece no final da tela, aparece o registro algébrico da construção geométrica realizada.
- A notação u.m. significa unidade de medida de comprimento e u.a. significa unidade de área.
- O número "1" representado no quadrado azul (Figura 56), indica a área do quadrado de lado unitário.

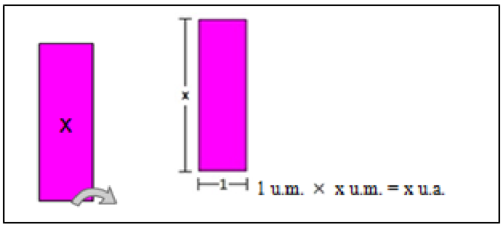
Figura 56 – Peça do Algeplan cuja área é 1 u.a.



Fonte:mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

- O ‘´x" indicado no retângulo rosa (Figura 57), indica a área do retângulo que possui um dos lados medindo 1 u.m. e o outro, x u.m.

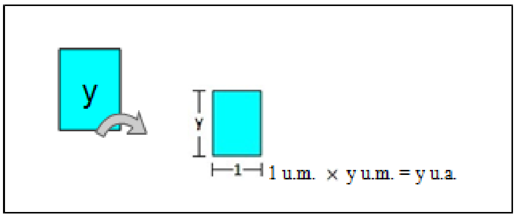
Figura 57 – Peça do Algeplan cuja área é x u.a.



Fonte: mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

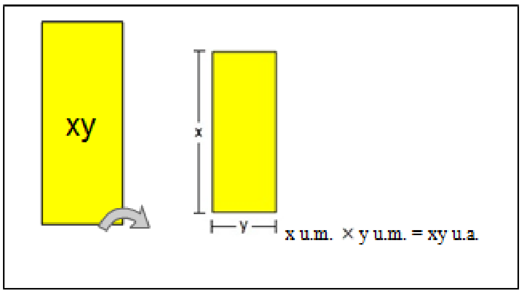
- O "y", representado na Figura 58, indica a área do retângulo com um dos lados medindo 1 u.m. e o outro, medindo y u.m.
- O "xy", representado no retângulo amarelo (Figura 59), indica a área do retângulo com um dos lados medindo x u.m. e o outro, medindo y u.m.

Figura 58 – Peça do Algeplan cuja área y u.a.



Fonte: mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

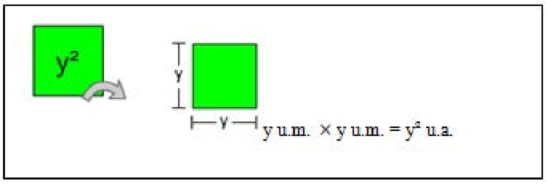
Figura 59 – Peça do Algeplan cuja área é xy u.a.



Fonte: mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

- O “y²”, representado no quadrado verde (Figura 60), indica a área do quadrado de lado medindo y u.m.

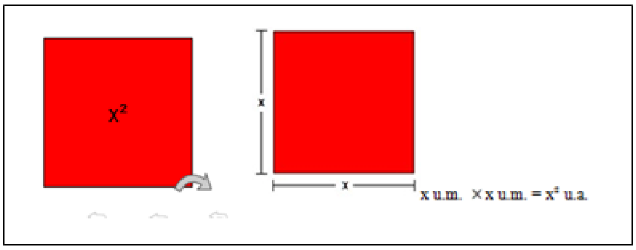
Figura 60 – Peça do Algeplan cuja área é y^{2}u.a.



Fonte:mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

- O “x²”, representado no quadrado vermelho (Figura 61), indica a área do quadrado de lado medindo x u.m.
- Observou-se que a medida unitária, x e y são arbitrárias, porém obedecem a seguinte relação: a medida unitária é menor do que a medida y, e a medida y é menor do que a medida x.
- Para a representação de polinômios com coeficientes negativos, clica-se na seta que se encontra no canto direito de cada figura. Vale ressaltar que neste caso, não

Figura 61 – Peça do Algeplan cuja área é x^2 u.a.



Fonte:mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf

torna-se significativo relacionar os monômios com a área de uma figura geométrica; visto que não há sentido calcularmos áreas negativas.

Depois do trabalho individual com cada peça do Algeplan, a pesquisadora modelou alguns polinômios utilizando este material. A situação consistia, essencialmente, em identificar, para cada termo do polinômio, quais e quantas "peças" do Algeplan estão envolvidas e agrupá-las. Em seguida, foi a vez dos alunos manusearem o objeto virtual e fazerem suas primeiras descobertas.

O aluno A5 destacou: "Aqui eu pude ver que só podem ser somadas figuras iguais, e verificar isso no polinômio. Eu ainda tinha dúvida se podia somar 2 com x. Vi que não posso, "2" são quadradinhos azuis e x são retângulos rosa. Enfim, consegui entender!"

O aluno A6 acrescentou ainda : "Este material é parecido com aquele dos vitrôs(atividade1); mas agora, podemos criar peças variadas, usar nossa imaginação."

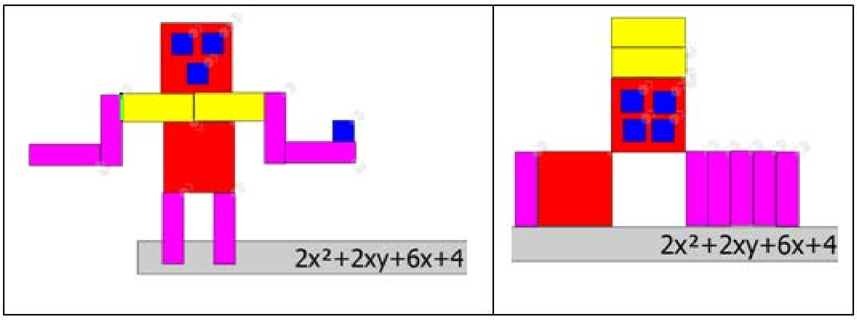
Após este momento inicial, a pesquisadora propôs aos grupos que representassem, utilizando o Algeplan, o polinômio 2x^2 + 6x + 2xy + 4. Vale destacar que os grupos não apresentaram dificuldade nesta tarefa. E para completá-la, a pesquisadora pediu que cada um deles, arrumasse as peças de uma forma criativa e depois justificasse a construção feita. Na Figura 62 estão destacadas as construções dos grupos G e H.

Smole (2000) afirma que, se bem empregada, a tecnologia pode trazer valiosas contribuições ao processo de ensino e aprendizagem, uma delas é oportunizar ao educando uma trama de combinações a partir de signos, imagens e movimentos; a fim de desenvolver sua autonomia e criatividade.

Agora, o comando dado pela pesquisadora foi diferente do anterior; ela ofereceu uma informação geométrica e a partir da mesma, surgiram desafios algébricos. Cada grupo montou um quadrado utilizando uma peça vermelha, uma peça verde e duas peças amarelas (Figura 63).

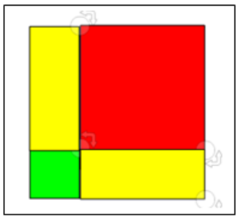
A partir da construção feita, foram propostos os desafios:

Figura 62 – Construções feitas pelos grupos G e H, usando o Algeplan, a partir do polinômio $2x^2 + 6x + 2xy + 4$.



Fonte:Protocolo da pesquisa

Figura 63 – Construção do polinômio.



Fonte:Elaboração própria

- Escreva outra expressão algébrica para representar a área do quadrado que você montou.

Os alunos tiveram, inicialmente, dificuldade para compreender a proposta da questão. O aluno A 20 indagou: “Pode ser x^2 -5xy + 7xy + $3y^2$ - $2y^2$?” A pesquisadora mostrou que aquele polinômio era de fato equivalente[8] ao polinômio x^2 + 2xy +y^2, que representa a área do quadrado em questão. Mas, que, geometricamente, não há sentido em falarmos em “áreas negativas”.

Visto a dúvida da maior parte dos alunos, a pesquisadora sugeriu aos alunos que lembrassem do método utilizado para o cálculo da área de um quadrado qualquer. O aluno A26 logo afirmou: “Basta fazer lado vezes lado.” O aluno A23 completa: “O lado deste quadrado é $x + y$”. Após estas intervenções, as duplas concluíram que o polinômio $(x + y).(x + y)$ representa a área do quadrado construído no Algeplan.

Acrescentando à discussão, a pesquisadora mostra que para um quadrado de lado 4, calcula-se a área fazendo 4 . 4 ou $4^{\ 2}$. Para um quadrado de lado x, faz-se $x^{\ 2}$. E lança a

8 Dizemos que dois polinômios p(x) e q(x) são idênticos ou equivalentes se e somente se, de maneira ordenada, seus coeficientes forem iguais

seguinte pergunta: "E para este quadrado de lado $(x + y)$?" Assim, os alunos concluíram que $(x+y)^2$ é uma outra forma de escrever a área do quadrado analisado.

A pesquisadora resumiu a discussão, registrando no quadro: As duas expressões encontradas representam a área do mesmo quadrado, então:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Assim, o **trinômio** $x^2 + 2xy + y^2$ tem como **quadrado perfeito** $(x + y)^2$.

- A expressão $(x+y)^2$ é considerada em Matemática um produto notável. Você sabe por quê?

Como não houve iniciativa dos alunos em responder a questão, a pesquisadora mostrou que o assunto discutido naquele encontro, foi também estudado por um matemático que viveu antes de Cristo, com o nome de Euclides. Ele se tornou muito conhecido pelas suas descobertas principalmente relacionadas à Geometria. Sobre o $(x+y)^2$ ele afirma:

> Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as duas partes contêm. (BAUGART, 1992, p. 7).

Foi destacado também que na época de Euclides não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento matemático, as expressões eram escritas totalmente com palavras.

Valeu ressaltar que alguns produtos de expressões algébricas como o exemplo $(x+y).(x+y)$, aparecem com muita frequência nas questões matemáticas. Pela importância que representam no cálculo algébrico, essas expressões são denominadas "Produtos Notáveis".

- Você conhece outros produtos notáveis?

Neste momento nenhum aluno apresentou exemplos, então a pesquisadora propôs uma pesquisa usando o $smartphone$ ou o livro didático que tinham em mãos.

Rapidamente o aluno A22 enumerou: quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos, o produto da soma pela diferença de dois temos, o cubo da soma de dois termos e o cubo da diferença de dois termos, a partir da pesquisa feita no site da infoescola (<http://www.infoescola.com/matematica/produtos-notaveis/>). A dupla E destacou que conseguiu visualizar na Internet, pesquisando no $Google$, imagens semelhantes ao quadrado que foi construído anteriormente. No quadro, foram registrados os outros exemplos de produtos notáveis apresentados.

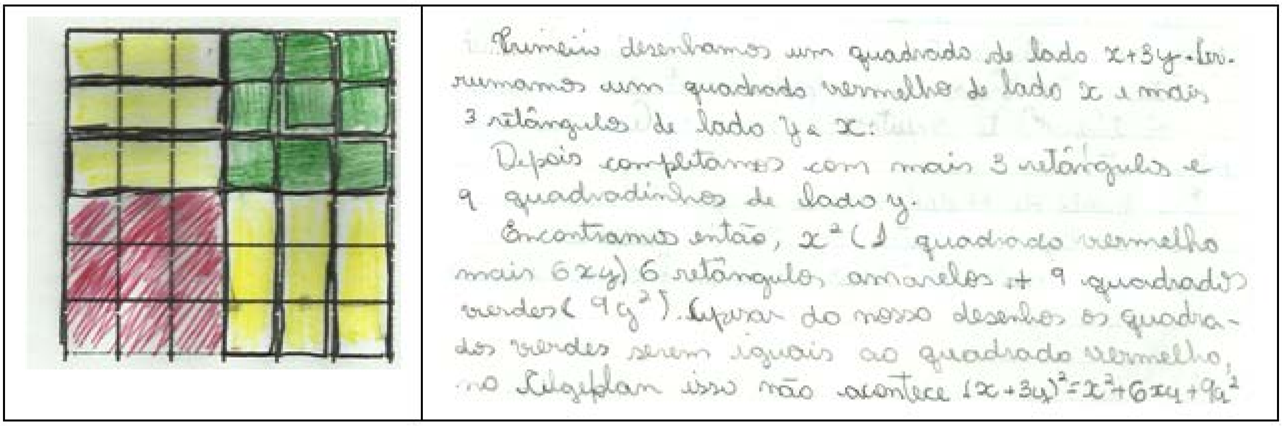
- Considerando x= 5 cm e y= 2cm, calcule, mentalmente, a área: do quadrado vermelho, do quadrado verde, de um dos retângulos amarelos e a área total do quadrado construído.

Com esta proposta, a pesquisadora pôde notar a dificuldade de alguns alunos ao fazer o cálculo mental; 10 alunos precisaram fazer o registro escrito dos cálculos necessários para resolver a questão. No final, todos grupos chegaram ao resultado correto.

A proposta seguinte é utilizar as conclusões anteriores para escrever dois produtos notáveis na forma de trinômio do quadrado perfeito. Para isso, foi preciso representar, geometricamente cada situação, utilizando a malha quadriculada.

O primeiro produto notável analisado foi (x + 3y)^2. Esta atividade foi feita em grupo, com o auxílio do Algeplan. Na Figura 64 está o registro do grupo C.

Figura 64 – Construção geométrica do produto notável (x + 3y)^2 e análise feita pelo grupo C.

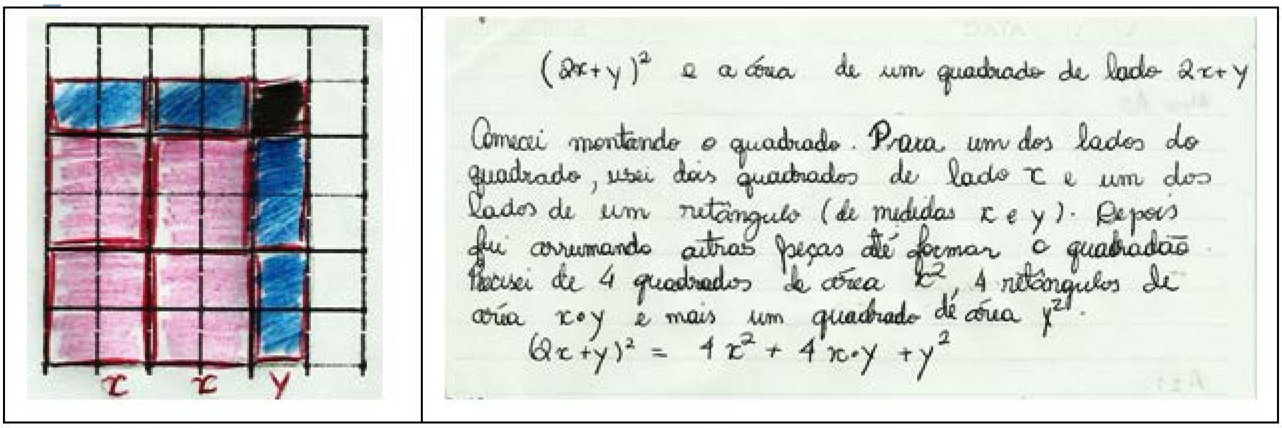


Fonte:Protocolo da pesquisa

O segundo produto notável trabalhado, individualmente, pelos alunos foi (2x + y)^2. Pôde-se observar o progresso de alguns alunos no registro de suas conclusões, se compararmos com aqueles feitos na Atividade 1 desta pesquisa. Um deles é o aluno A9, que nesta oportunidade relatou de forma clara seu raciocínio, utilizando a língua materna para relatar uma situação de aprendizagem envolvendo a linguagem algébrica (Figura 65).

Na conclusão dos trabalhos os alunos tiveram a oportunidade de fazer uma breve revisão dos encontros; abordando os assuntos discutidos, as conclusões, os pontos positivos e negativos do trabalho.

Figura 65 – Construção geométrica do produto notável $(2x + y)^2$ e análise feita pelo aluno A



Fonte: Protocolo da pesquisa

4.3.4 Avaliação do trabalho com o 8^o ano

Inicialmente, o trabalho com esta turma do 8^o ano foi um desafio, pois se tratava de um grupo de alunos bem agitados e também muito desmotivados em relação à Matemática.

É notável a grande dificuldade dos alunos na atividade inicial. Conforme o que estava relatado na questão 6 do pré-teste, todos os alunos, inicialmente, mostraram não compreender como operar com os monômios. Contudo, o recurso digital motivou a aprendizagem e o fato de o mesmo oferecer a correção do desafio, também incentivou a busca da resposta correta.

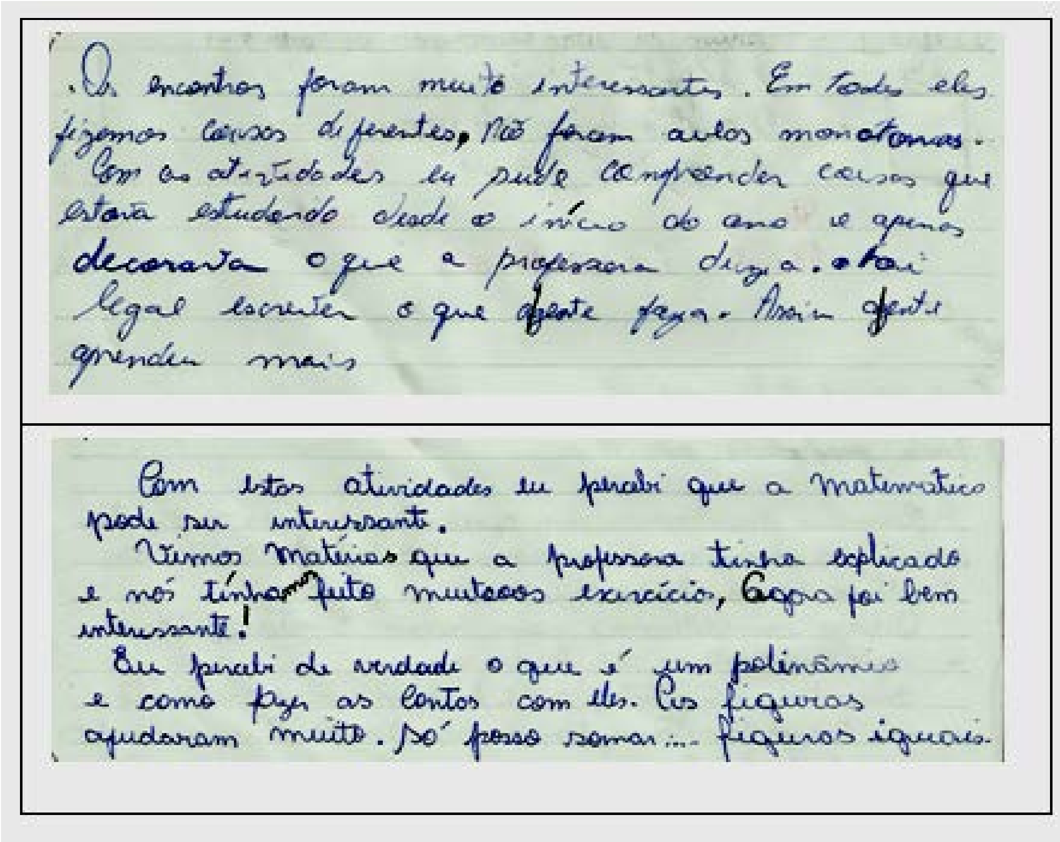
A participação nas discussões ocorridas nos encontros, se deu gradativamente. No último encontro, por exemplo, a participação oral aconteceu de forma efetiva; os próprios alunos sugeriram que a pesquisa solicitada fosse feita com auxílio da Internet. Houve também uma evolução nos registros escritos, se compararmos as conclusões apresentadas pelos alunos nas atividades 1 e 3.

Outro fato que se deve destacar é a satisfação dos alunos em perceber que eram capazes de compreender aqueles conceitos que já tinham sido trabalhados e que ainda não haviam sido construídos por eles. Verifica-se nas avaliações feitas pelos alunos A2 e A4; apresentadas na Figura 66.

4.4 Trabalho com o 9^o ano do Ensino Fundamental

O trabalho com o 9^o ano foi realizado em uma turma composta de 28 alunos, mas somente 24 deles participaram de todas as etapas da pesquisa, incluindo o pré-teste e o questionário. Neste relato, estes alunos serão identificados, individualmente, pela letra maiúscula A, seguida de um número natural entre 1 e 24. Quando trabalharam em grupos, estes foram nomeados a partir das letras maiúsculas do alfabeto A, B,..., G. Vale destacar

Figura 66 – Avaliação dos trabalhos feita pelos alunos A2 E A4.


Os encontros foram muito interessantes. Em todos eles fizemos coisas diferentes, Não foram aulas monotonas. Com as atividades eu pude compreender coisas que estava estudando desde o início do ano e apenas decorava o que a professora dizia. Foi legal escrever o que a gente faz. Assim a gente aprende mais

Com estas atividades eu percebi que a Matemática pode ser interessante.
Vimos matérias que a professora tinha explicado e nós tínhamos feito muitooos exercício, agora foi bem interessante!
Eu percebi de verdade o que é um polinômio e como fazer as contas com eles. As figuras ajudaram muito. Só posso somar ... figuras iguais.

Fonte: Protocolo da pesquisa

que as atividades desenvolvidas estão disponíveis no Apêndice H deste trabalho.

4.4.1 Atividade 1 (Apêndice H)

Objetivos: Representar, por meio de um sistema, um desafio envolvendo equações do 1^o grau; relacionar os significados algébricos e geométricos da solução de um sistema de equações lineares; utilizar o software $GeoGebra$[9] para registrar a solução geométrica de um sistema linear.

Desenvolvimento Após a pesquisadora apresentar a proposta da pesquisa, iniciou-se uma discussão a respeito de formas diferentes de representar um mesmo objeto. Os alunos participaram exemplificando algumas situações (Figura 67).

Assim, foi explicado que em Matemática este fato também acontece; temos maneiras distintas de representar um mesmo objeto matemático e foi dado o exemplo da frase “Eu tenho dois anos a mais que Maria” e a expressão $x = y + 2$, sendo x a minha idade e y a idade de Maria.

Após esta conversa inicial, a turma foi dividida em 6 grupos de 4 alunos(todos eles

9 <www.geogebra.im-uff.mat.br>

Figura 67 – Exemplos de formas distintas de representar um mesmo objeto

Fonte: Protocolo da pesquisa

sujeitos desta pesquisa) e se manteve organizada desta forma durante os trabalhos com os três primeiros desafios. Na sequência, se deu início ao desafio 1, apresentado na folha entregue aos alunos (Figura 68).

Figura 68 – Desafio 1 da Atividade 1

DESAFIO 1

Carlos sacou 110 reais em um caixa eletrônico. Essa quantia era composta apenas por cédulas de 10 e 20 reais, em um total de 8 cédulas. Quantas cédulas de cada valor Carlos sacou ?

a) Represente o desafio proposto, utilizando equações. Quais incógnitas você utilizou nas equações? Qual é o significado de cada uma delas, de acordo com o contexto do desafio?

____

____

b) Resolva, algebricamente, o sistema proposto. Explique o seu raciocínio, indicando o método que você usou para resolvê-lo.

c) Agora, vamos utilizar o *Geogebra* para apresentar a solução gráfica do sistema.

Fonte:Protocolo da pesquisa

Esta situação de ensino envolvia três tipos de registros de representação, segundo Duval (2003): Registro da língua materna, Registro de equações e Registro gráfico. O Registro da língua materna sugeria a situação-problema por meio da Língua Portuguesa, como pode ser observado no desafio, por meio do enunciado apresentado na Figura 68. Era necessário a compreensão em relação ao enunciado, ou seja, interpretá-lo, identificando as incógnitas envolvidas, para que o Registro das equações fosse feito de forma correta. O Registro gráfico representava a planificação do desafio proposto e as coordenadas de um ponto do plano, a solução do desafio.

Esta proposta foi selecionada em função da maioria dos alunos não conseguir coordenar os registros de representação algébricos propostos na questão 4 do pré-teste. Dos 50 alunos observados no pré-teste (Grupo B), 5 acertaram a referida questão, e destes, 3 eram do 9^o ano.

A sugestão foi que os alunos pudessem responder, os itens “a” e “b” do desafio. Sem maiores explicações da pesquisadora, os grupos A e D encontraram dificuldades para realizar o Registro das equações. Portanto, estes alunos tiveram um atendimento particular.

Quanto ao desafio “b”, que propunha a resolução do sistema, os grupos A, B, D e E apresentaram dúvidas ao aplicarem o método da substituição. Para solucionar a dúvida, a pesquisadora foi ao quadro e exemplificou a utilização deste método com o sistema formado pelas equações: $x - 4y = 10$ e $x + y = 5$. Em seguida, todos os grupos que apresentaram dificuldade em resolver o desafio, conseguiram chegam à resposta correta. Contudo, para registrar, por escrito, o método utilizado, a maioria dos grupos demostrou insegurança e por este motivo a proposta foi feita coletivamente.

Para o desafio “c”, era necessário a utilização do $GeoGebra$ para registrar, graficamente, o sistema trabalhado. Antes, porém foi apresentado aos alunos o programa, como um recurso computacional, que possui a função, dentre outras, de representar curvas e retas em um mesmo plano cartesiano. A pesquisadora foi passando os comandos e os grupos acompanhavam no computador.

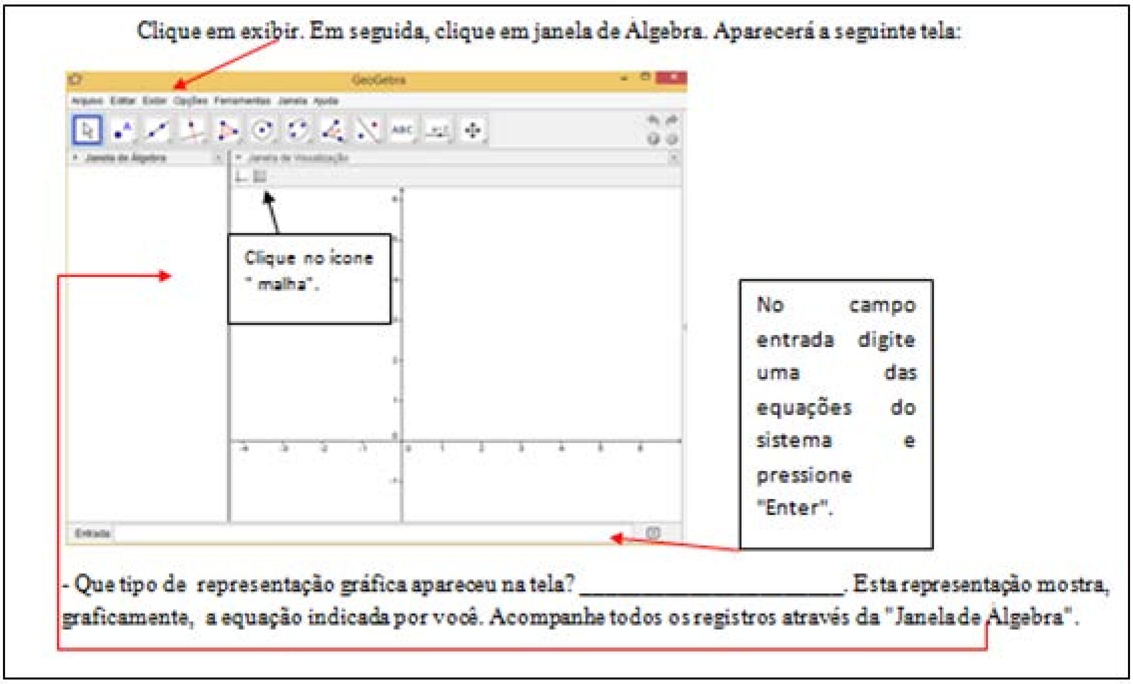
- Clique em exibir. Em seguida, clique na janela de Álgebra. Aparecerá a tela representada na Figura 69.
- Clique no ícone malha; e em seguida, digite no campo de entrada uma das equações do sistema proposto e pressione o “Enter”.

Ainda utilizando esta mesma tela do programa, foi destacada que a representação gráfica que apareceu na tela, a reta, revela a equação digitada anteriormente.

- O próximo comando dado aos grupos, foi de repetir os procedimentos indicados anteriormente, para representar a outra equação do sistema.

Neste momento a pesquisadora pôde avaliar o grande interesse dos alunos em utilizar o programa. Em alguns grupos, foi estabelecido pelos próprios alunos, que cada um deles iria digitar além da equação solicitada, outra equação qualquer, a fim de terem chance de manusear mais o programa. Assim surgiram algumas discussões, dentre elas destaca-se a argumentação do aluno A3. “Professora digitei a equação $x + y = 8$ que fazia parte do sistema e a equação $2x + 2y = 16$. A primeira reta apareceu na tela, mas a outra não apareceu. O que aconteceu?” A pesquisadora pediu que este aluno verificasse na janela

Figura 69 – Algumas dicas para a utilização do $GeoGebra$.



Fonte:www.geogebra.im-uff.mat.br

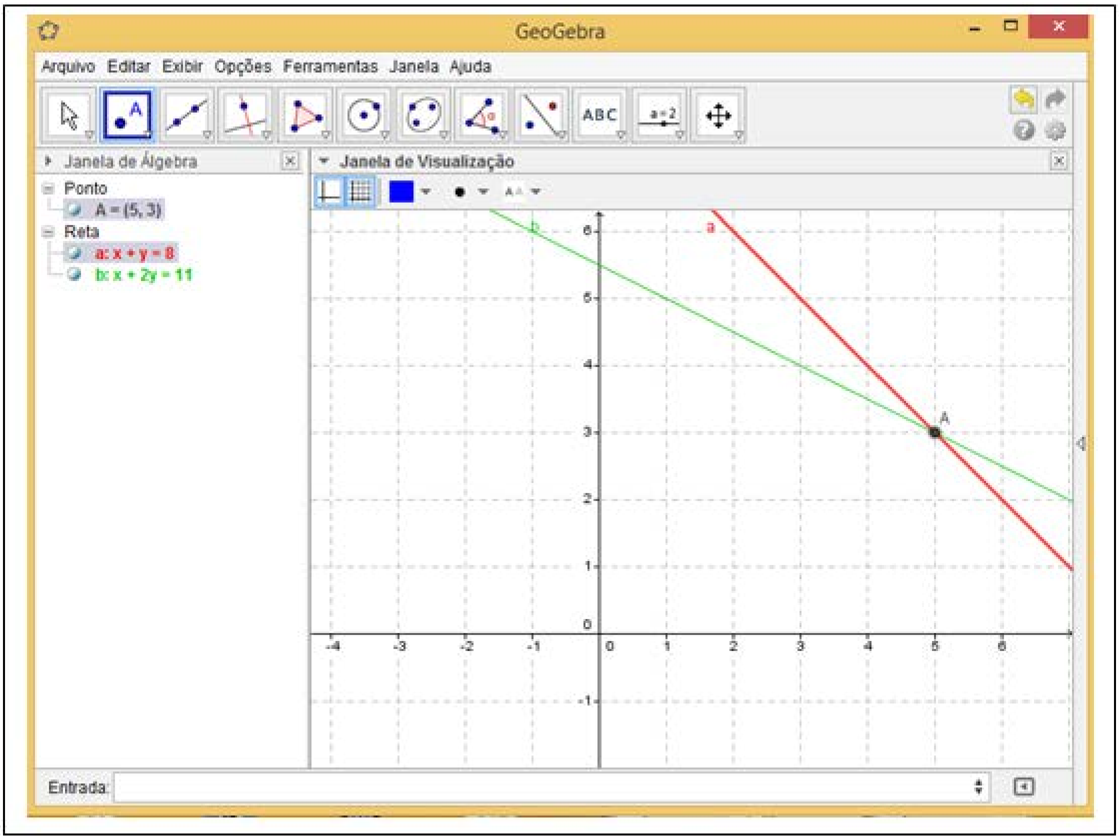
de Álgebra que esta última equação não havia aparecido. No seu lugar havia a equação $x + y = 8$ novamente. Neste momento foi explicado à turma que se tratam de equações equivalentes; cujas soluções são iguais. Portanto, as representações gráficas das duas equações são coincidentes.

- Na sequência o comando foi selecionar a ferramenta “Interseção de dois objetos”. Clicar em uma das retas e, em seguida, na outra. Foi explicado que o ponto A obtido é a interseção das duas retas, ou seja, as coordenadas desse ponto correspondem à solução do sistema (Figura 70).

A proposta do desafio 2 era trabalhar o significado geométrico e algébrico da solução de uma equação. Para isso, foi solicitado que cada aluno escrevesse uma equação do 1^o grau com duas incógnitas e trocasse a equação elaborada com um dos colega do grupo. Em seguida, individualmente, cada componente do grupo:

- Representou a equação que “recebeu” do colega no plano cartesiano, utilizando o programa $GeoGebra$.
- Construiu três pontos sobre a reta e determinou três soluções da equação.
- Verificou se os pares ordenados obtidos realmente eram soluções da equação, utilizando lápis, papel e calculadora.

Figura 70 – A solução de um sistema de equações do 1º no $GeoGebra$.



Fonte:Elaboração própria

Pôde-se observar que alguns alunos escolheram pontos com coordenadas racionais e, por este motivo, tiveram maior dificuldade nos cálculos com lápis e papel. Outros, já optaram por valores inteiros propositalmente, e o registros dos cálculos ocorreram sem maiores problemas.

Por meio deste trabalho de investigação, os alunos puderam concluir que existem infinitos pontos que se tornam solução de uma equação; contudo no caso dos sistemas de equações nem sempre isto acontece. Sobre esta questão, o aluno A20 afirmou: “Cada equação possui muitas soluções, mas quando desenhamos duas equações para representar um sistema, encontramos uma solução só.”

Nesta oportunidade, a pesquisadora interveio explicando que no caso do sistema apresentado no desafio 1, esta consideração do aluno é válida. Mas, existem outros tipos de sistemas que o fato de só possuir um ponto como solução do mesmo não ocorre. Aproveitou para pedir que os grupos representassem, geometricamente, utilizando o $GeoGebra$, o sistema: $2x + 6y = 2$ e $x + 3y = 3$.

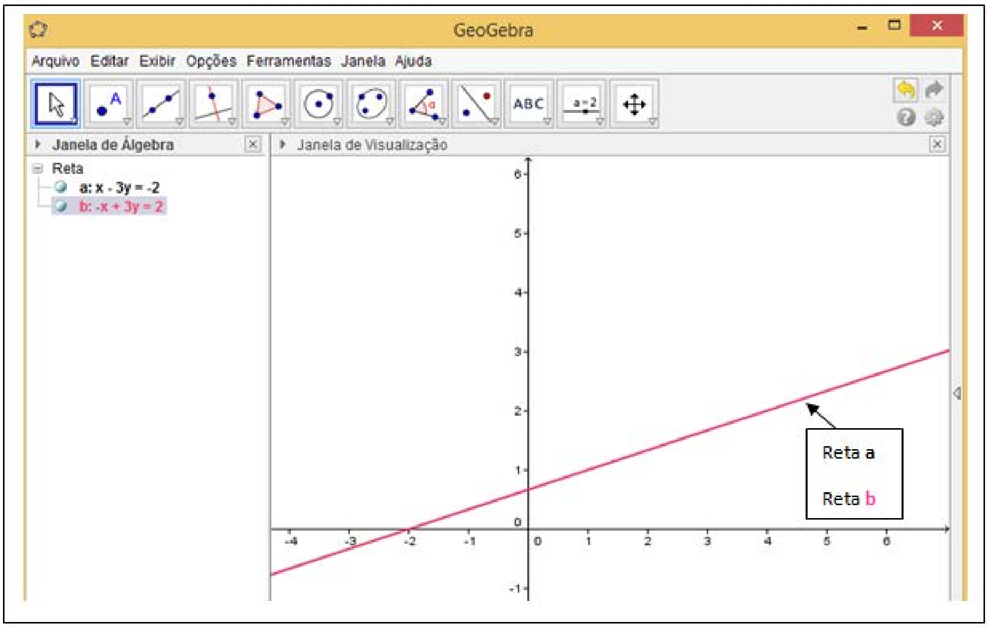
Após os grupos fazerem a construção solicitada, alguns alunos pediram a intervenção da pesquisadora pois imaginavam que haviam cometido algum erro, porque as retas encontradas não se intersectavam. Neste momento, foi explicado que sistemas como aquele, não possuem solução; ou seja, as retas não têm ponto em comum; são paralelas.

Na sequência, foi trabalhado o desafio 3. Nele, cada grupo representou, no $GeoGebra$, o sistema linear $x - 3y = -2$ e $6y - 2x = 4$. Em seguida, individualmente, cada aluno resolveu algebricamente, o dado sistema. Eles compararam com os colegas do grupo a solução encontrada e conferiram com a resolução gráfica feita no programa.

Como tratava-se de um sistema possível e indeterminado, a solução gráfica foi duas retas coincidentes. Todos os grupos fizeram a construção correta, e como a pesquisadora já havia explicado anteriormente, tratava-se de um sistema com duas equações equivalentes.

Depois que todos os grupos fizeram a representação gráfica, foi sugerido que cada grupo pudesse alterar as cores das retas traçadas. Para isso, bastava clicar com o botão direito do mouse em uma das equações que aparecem na janela de Álgebra e, em seguida, clicar em propriedades, selecionando a cor desejada. Deslizando o mouse sobre a reta desenhada observa-se que aparecem a indicação das duas retas traçadas (a e b) (Figura 71). O próximo passo foi o registro da resolução algébrica do dado sistema (Figura 72).

Figura 71 – A solução gráfica do sistema de equações, desafio 3, apresentada pelo grupo F.

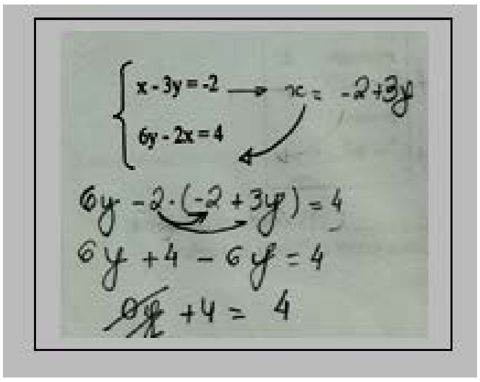


Fonte:Elaboração própria

Vale destacar que todos os alunos que participaram da atividade, com exceção do aluno A15 que cometeu um erro ao utilizar o método da substituição, chegaram a mesma conclusão da aluna A4, apresentada na Figura 72.

Visto isto, é pedido aos alunos que apresentem sugestões para a resolução daquele

Figura 72 – Registro da aluna A4 referente ao desafio 3.



Fonte: Protocolo da pesquisa

sistema. Rapidamente, o aluno A7 sugeriu: “É só irmos para o $GeoGebra$ e encontrarmos os pontos de intersecção das retas.” Segundo (DUVAL, 2003) este aluno está propondo uma conversão, uma troca de registros dentro de um mesmo objeto matemático, passar do registro da escrita algébrica de uma equação para o registro gráfico cartesiano. É importante mencionar, neste momento, que o referido aluno havia errado as questões 4 e 5 do pré-teste, que se referiam à resolução de sistemas de equações.

Aproveitando a sugestão do colega todos os grupos voltaram ao $GeoGebra$ e conseguiram identificar algumas soluções do sistema; tais como (1,1), (4,2), (-2,0). A pesquisadora explicou que existem infinitos pontos que satisfazem as equações; pois como as retas são coincidentes possuem infinitos pontos em comum.

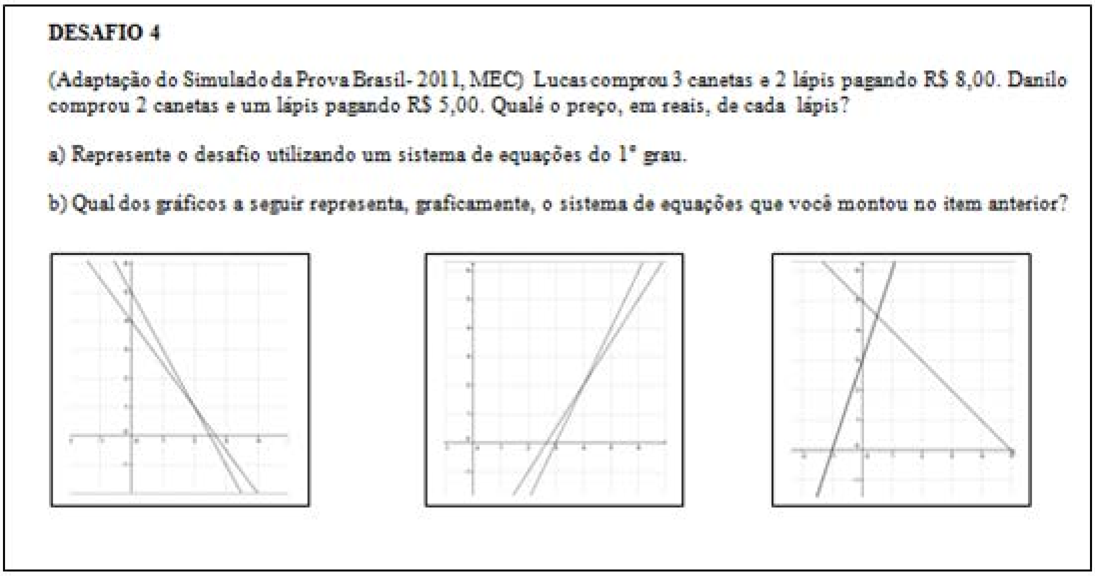
O desafio 4, foi uma espécie de síntese do trabalho realizado neste encontro (Figura 73). Nele, os alunos traduziram informações apresentadas na língua materna e identificaram sua representação gráfica. Após concluírem a questão, que foi respondida individualmente, cada aluno entregou seu registro à pesquisadora.

Para concluir o encontro, houve um momento de discussão no qual foram levantadas algumas dúvidas sobre o tema proposto. A maioria das indagações apresentadas pelos alunos se referiam as outras funções do $GeoGebra$. Abrantes (2001) destaca que os recursos tecnológicos despertam o interesse dos educandos, e só quando eles se mostram interessados desenvolvem as competências matemáticas.

Após ter observado a participação dos alunos no encontro, analisado os resultados apresentados para o desafio 4 e uma comparação com os resultados das questões 4 e 5 do pré-teste, a pesquisadora concluiu:

- Dos 24 alunos analisados, 22 representaram corretamente a situação dada por meio de um sistema de equações do 1^o grau. Destes, 20 resolveram o sistema elaborado, corretamente, e 2 cometeram erros ao aplicar o método da substituição. 2 alunos não

Figura 73 – Enunciado do desafio 4.



DESAFIO 4

(Adaptação do Simulado da Prova Brasil- 2011, MEC) Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$ 8,00. Danilo comprou 2 canetas e um lápis pagando R$ 5,00. Qualé o preço, em reais, de cada lápis?

a) Represente o desafio utilizando um sistema de equações do 1º grau.

b) Qual dos gráficos a seguir representa, graficamente, o sistema de equações que você montou no item anterior?

Fonte: Protocolo da pesquisa

representaram, de forma coerente, o sistema; escreveram as equações $3x + 2y = 8$ e $2y + x = 5$. Ou seja, utilizaram as mesmas incógnitas para representar fatos distintos nas duas equações. Na primeira, x representava o número de canetas, na segunda equação, o x representava o número de lápis.

- Se os resultados apresentados no item acima forem confrontados com as análises do pré-teste, pode-se afirmar que houve um crescimento significativo, por parte dos alunos, em relação às habilidades adquiridas. Vale destacar que todos os alunos que acertaram as questões 4 e 5 do pré-teste também acertaram o desafio 4 desta atividade. No pré-teste, questão 4, apenas 3 alunos do 9^o ano, conseguiram representar a situação apresentada na língua materna, utilizando um sistema de equação do 1^o grau, os outros 21 alunos deixaram a referida questão em branco ou elaboraram equações incoerentes à proposta dada. A quantidade de alunos que conseguiu resolver, corretamente, o sistema de equações, também aumentou; na questão 5 do pré-teste, eram apenas 12 alunos.

- 18 alunos identificaram, corretamente, a representação gráfica do sistema. Ou seja, todos que conseguiram resolvê-lo algebricamente. O que se pode notar, é que estes alunos já conseguiram fazer a conexão da solução algébrica do sistema, proposto no desafio 4, com o ponto de intersecção das retas que representam as equações envolvidas.

4.4.2 Atividade 2 (Apêndice H)

Objetivos: Definir uma equação do 2^o grau, identificando seus coeficientes; verificar se um número real é ou não solução de uma equação do 2^o grau; resolver equações do 2^o grau, incompletas; interpretar situação-problema envolvendo equação do 2^o grau, apresentada na teleaula, argumentando suas ideias e raciocínios.

Desenvolvimento: participaram desta atividade 25 alunos, distribuídos em 5 grupos de 4 alunos e um grupo de 5 alunos. Neste total,estavam os 24 alunos observados nesta pesquisa . O encontro teve início com uma breve discussão dos conceitos trabalhados na atividade 1. Nesta oportunidade a pesquisadora enfocou na definição e resolução de uma equação do 1^o grau, além de solicitar exemplos de equações do 2^o grau.

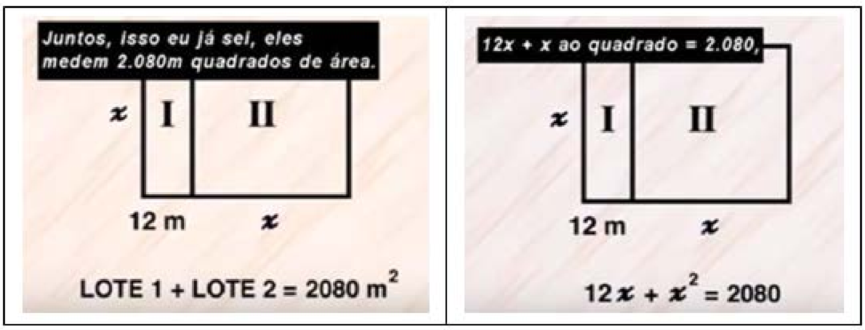
A atividade teve início com a apresentação da Teleaula 73 do Novo Telecurso[10]. Esta dinâmica aconteceu na própria sala de aula, com auxílio do $datashow$. No decorrer desta apresentação, os alunos puderam se manifestar apresentando dúvidas e questionamentos. A pesquisadora também interrompeu a apresentação para destacar alguns fatos notórios.

O primeiro fato destacado pela pesquisadora foi a representação geométrica do desafio proposto, envolvendo os dois lotes do terreno de área 2080 m^2 . Neste momento, foi retomada a questão das representações distintas de um mesmo objeto matemático, trabalhado no encontro anterior.

O desafio proposto está representado a seguir, na língua materna e, geometricamente,na Figura 74.

- O terreno é formado por dois lotes. Juntos eles medem 2080 m^2 de área. Eu sei que o primeiro lote é retangular e seu comprimento mede 12 m. O segundo lote é de forma quadrada e seu lado é igual à largura do outro lote. Quais são as dimensões do terreno?

Figura 74 – Desafio proposto na Teleaula



Fonte:www.youtube.com/watch?v=0obrznICwbg

10 <https://www.youtube.com/watch?v=0obrznICwbg>

De acordo com Duval (2003) na proposta apresentada neste desafio, utilizaram-se três tipos distintos de registros: língua natural, figuras geométricas e o sistema de escrita algébrica. Ocorreu também uma conversão, troca de registros dentro de um mesmo objeto matemático.

O aluno A20 interveio, afirmando que a resolução proposta para este desafio da teleaula, se assemelha com a questão 1 do encontro anterior; já que como naquela questão representou-se um mesmo objeto matemático de maneiras diferentes. A única diferença é que naquela questão trabalhamos com equações do 1^o grau e neste desafio, usamos uma equação do 2^o grau. Este aluno mostrou que consegue fazer conexões entre os assuntos estudados e que o conhecimento algébrico está sendo utilizado como ferramenta para a aprendizagem matemática; como propõe Lins e Gimenes (2006).

Outra intervenção foi feita pelo aluno A18. Ele relatou que não conseguia resolver equações incompletas sem usar a fórmula resolutiva. Mas que na teleaula, o método parecia simples. Neste momento, a pesquisadora deu exemplos de duas outras equações incompletas (x^2-169 = 0 e x^2 + 8x = 0) e resolveu-as sem aplicar a fórmula resolutiva, utilizando os procedimentos apresentados na teleaula.

Após verificar a resolução da equação (x^2 - 5x= 0), apresentada na teleaula e o exemplo dado pela pesquisadora(x^2 + 8x= 0), o aluno A19 indagou: “Nas equações incompletas onde temos c=0, teremos sempre 0 e o valor oposto ao termo b como as soluções?” A pesquisadora afirma que o fato observado pelo referido aluno é coerente quando o coeficiente a é igual a 1; e solicita um outro exemplo de equação incompleta, com c=0, e a diferente de 1, para conferir que, neste caso, a descoberta apresentada não é valida. O aluno A20 sugeriu então, a equação $2x^2$ +6x=0 e foi ao quadro resolvê-la.

O objetivo principal das discussões oportunizadas pela teleaula, foi trabalhar a oralidade como recurso de comunicação mais acessível que todos os alunos podem usar. Para Smole (2000), quando o educando é solicitado a verbalizar as conclusões ou comentar procedimentos, eles estão refletindo sobre os conceitos, revisando e ampliando seus conhecimentos.

Após a apresentação da teleaula, foi entregue aos alunos a folha com algumas atividades, envolvendo os temas enfocados na teleaula.

- Como se define uma equação de 2^o grau?
- Qual o significado da palavra coeficiente? Na equação do 2^o grau quais coeficientes podemos identificar? Por que o coeficiente do termo x^2 não pode ser nulo numa equação do 2^o grau?
- Verifique se x = -52 é solução da equação x^2 + 12x - 2080 = 0, apresentada no vídeo. Este valor poderá ser considerado resposta do desafio proposto? Por quê?

- No vídeo aparecem algumas equações do 2^o grau incompletas. Escreva duas equações incompletas, diferentes das que apareceram na teleaula e tente resolvê-las.

Após os alunos registrarem, por escrito, suas conclusões, chegou a vez de apresentarem, oralmente, suas respostas.

Para as duas primeiras questões não foram destacadas dúvidas e as respostas foram coerentes com as propostas das mesmas.

Agora, sobre a terceira questão, no qual foi pedido verificar se o número -52 era solução da equação dada e se o mesmo corresponderia a uma resposta do desafio proposto, houve algumas considerações importantes:

- 5 alunos responderam que -52 não era solução da equação, pois realizaram cálculos errados ao testarem o valor na equação. Outros 3 alunos erraram a questão, pois tentaram resolver a equação dada, utilizando a fórmula resolutiva e também aplicaram-na incorretamente. Visto esta dificuldade, a pesquisadora refez a questão no quadro, substituindo o valor dado e também utilizando a fórmula resolutiva.

- Dos 17 alunos que responderam que -52 era resultado da equação, 7 afirmaram que o valor também corresponderia a uma resposta do desafio proposto na teleaula. Mostrando desta forma que ainda não conseguiram analisar, que naquele contexto só poderia ser considerado a raiz positiva, no caso 40, pois se tratava de uma medida do terreno. Neste momento, a pesquisadora interveio alertando a necessidade de analisar o contexto do desafio antes de concluir se o valor encontrado como solução da equação iria satisfazer ao mesmo.

Na questão em que foi solicitado o exemplo de uma equação do 2^o grau incompleta, os alunos foram ao quadro resolvê-las. É importante destacar que o aluno A18, que havia mencionado anteriormente que tinha dificuldade em resolver equações deste tipo, sem utilizar fórmula resolutiva, resolveu corretamente a equação $2x^2 - 32 = 0$. 5 alunos não conseguiram resolver uma equação incompleta quando o coeficiente b é nulo. Os erros ocorreram ao fatorar a equação.

Apenas 2 alunos não conseguiram resolver equação incompleta, quando o coeficiente c é nulo. Neste caso os erros ocorreram ao determinar a raiz quadrada.

O encontro foi encerrado com a discussão proposta na última questão (Figura 75). O aluno A5 se posicionou afirmando que a Matemática é muito complicada de entender; principalmente quando aparecem as letras. O aluno A4 destacou que as vezes fica mais fácil decorar do que entender o que a professora faz. O aluno A6 acrescentou que a dificuldade é muitas vezes por causa do modo da professora explicar.

Com estas afirmações, verifica-se que a Álgebra torna-se uma dificuldade para muitos alunos porque os mesmos não conseguem significar os procedimentos e técnicas utilizados; muitos utilizam a memorização no lugar da compreensão.

Figura 75 – Questão da atividade 2

Fonte:www.youtube.com/watch?v=0obrznICwbg

4.4.3 Atividade 3 (Apêndice H)

Objetivos:Realizar manipulações geométricas para ilustrar alguns casos de produtos notáveis; utilizar produtos notáveis para resolver equações do segundo grau.

Desenvolvimento: Vale destacar que estiveram presentes no terceiro encontro, quando foi aplicada a atividade 3, apenas os 24 alunos observados nesta pesquisa; que permaneceram organizados em grupos de 4 durante as 4 etapas iniciais desta atividade.

A atividade teve início com uma conversa informal a partir da definição de produto notável. Nesta oportunidade os alunos informaram que este assunto tinha sido trabalhado pela professora naquele ano escolar. O aluno A2 logo deu exemplo do método que memorizou para calcular o quadrado da soma: " quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro, vezes o segundo, mais o quadrado do segundo". Vale destacar que este foi um dos quatro alunos que acertou a questão 6 do pré-teste, que enfocava o cálculo com polinômios.

Outros dois casos de produtos notáveis foram destacados pelo aluno A3: quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença. Como muitos alunos se manifestaram dizendo que não se lembravam, a professora pediu ao aluno para exemplificá-los no quadro.

Para finalizar a discussão, o aluno A5 afirmou: Não vejo utilidade de estudar esta matéria, já que só decoramos tudo isso para a prova e depois esquecemos. Não sabemos o significado de tudo isso.

Para Lins e Gimenes (2006) o papel da escola é desenvolver novos significados para a Matemática. A pesquisadora então afirmou que a proposta daquela atividade era justamente dar significado aos produtos notáveis e utilizá-los na resolução de equações do 2^o grau.

Na sequência, foi dado início a primeira etapa desta atividade. Neste momento, cada aluno recebeu uma folha com as atividades propostas e as figuras geométricas que precisarão ser recortadas no decorrer das etapas; além uma tesoura e também lápis de cores distintas.

Vale destacar que o material que foi utilizado nesta atividade é uma adaptação da proposta apresentada pela Secretaria Estadual de Educação do Rio Janeiro no documento identificado com Material para o Professor Nova Eja Módulo 1[11].

Na Figura 76 estão apresentadas as questões relativas a primeira etapa da atividade, que abordava a propriedade distributiva.

Figura 76 – Questões da etapa 1 da Atividade 3

Etapa 1: Relembrando a propriedade distributiva

a) Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.

b) Escreva uma expressão algébrica para indicar a área de cada uma das peças dadas.

c) Com essas quatro peças, construa um retângulo.

d) Qual é a medida dos lados desse retângulo que você construiu?

e) Expresse a área do retângulo construído utilizando as medidas de seus lados.

f) Você deve ter observado que a área do retângulo construído é igual à soma das áreas das quatro peças retangulares. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Fonte: Protocolo da pesquisa

Após recortar as 4 peças necessárias para a realização da atividade e indicar em cada um delas a expressão algébrica que indica a área de cada uma delas, a pesquisadora sugeriu que fossem pintadas de cores iguais as peças que possuíam a mesma área.

O próximo desafio foi construir um retângulo utilizando as quatro peças. Foi destacado que, neste caso não poderia haver sobreposição de peças.

Apenas os alunos A5 e A6, que pertenciam ao grupo F, precisaram a ajuda dos próprios colegas do grupo para montar o retângulo pedido. Ambos estavam tentando montar um quadrado.

Ao serem argumentados sobre a medida dos lados do retângulo construído por eles, os alunos do grupo F manifestaram dúvida. A pesquisadora interveio sugerindo que os mesmos indicassem a medida de cada lado das figuras utilizadas. Assim, a dúvida do grupo foi solucionada. Todos chegaram a conclusão que as dimensões do retângulo em questão era m e $m + n + q$.

11 <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/material-professor/modulo-01/MATEMATICA-MOD01-VOL01.pdf>

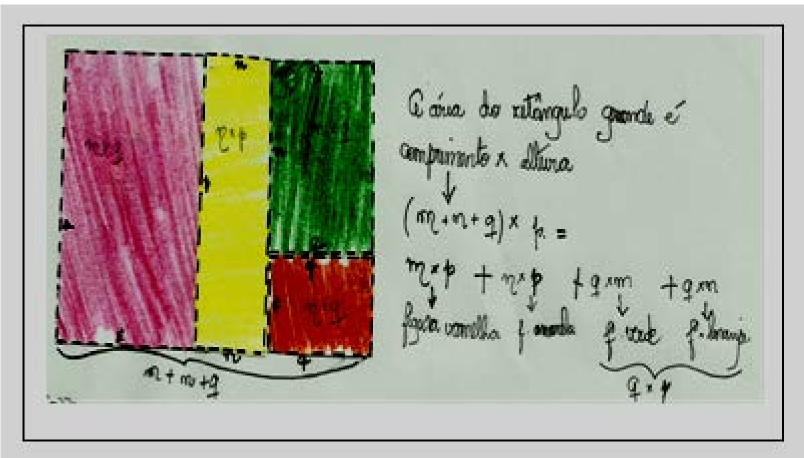
Para expressar a área do retângulo, os grupos A, B e F escreveram a expressão: $m+n+q.m$; sem os parênteses necessários. Neste momento foi discutido com a turma a necessidade de se colocar os parênteses, pois se tratava de um polinômio sendo multiplicado por um monômio.

Antes de resolver o item “f”, a pesquisadora desafia a turma a escrever a expressão, encontrada como área do retângulo, de outra forma. O aluno A20 sugere a aplicação da propriedade distributiva; então o mesmo é convidado a ir ao quadro mostrar aos colegas a sua ideia. Neste momento o aluno escreve $m.p + n.p + q.p$ = $(m + n + q).p$; assim, ele está realizando um tratamento no registro, segundo Duval (2003), que implica em permanecer em um mesmo objeto matemático, buscando o melhor registro de representação para expressá-lo. Este tratamento no registro também vai ser utilizados nas outras etapas desta atividade.

Quando os alunos expressam a área do retângulo montado como a soma das áreas das quatro peças retangulares, encontram $m.p + n.p + q.m + q.n$, como solicitado no item “f” do desafio, a pesquisadora solicita que façam uma comparação com o registro feito pelo aluno A20. O aluno A4 logo destaca, a diferença é que na nossa resposta aparecem os termos $q.m + q.n$ e na resposta de A20, aparece o termo $q.p$. Tinoco (2008) afirma que a familiarização com a propriedade distributiva é um caminho para que o aluno passe a admitir a igualdade no sentido de equivalência.

Foi dado um tempo para que os alunos pudessem analisar a situação. Depois de alguns minutos o grupo E afirmou: Olhando as figuras, descobrimos que $q.p$ é um retângulo que tem a mesma área de dois retângulos: $q.m$ e $q.n$. Assim, foi chegada à conclusão que: $m.p + n.p + q.p$ = $(m + n + q).p$ = $m.p + n.p + q.m + q.n$. Na Figura 77 temos o registro do aluno A3.

Figura 77 – Registro, das conclusões do aluno A3, referente aos desafios da etapa 1 da atividade 3



Fonte: Protocolo da pesquisa

Na segunda etapa, foi trabalhado o produto notável quadrado da soma (Figura 78). Como os alunos já tinham participado da etapa 1, em apenas 10 minutos eles recortaram as peças necessárias para a realização desta etapa, escreveram a expressão algébrica que representa a área de cada uma delas e também coloriam cada uma delas; foi destacado que as peças iguais deveriam ser coloridas da mesma cor.

Figura 78 – Questões da etapa 2 da Atividade 3

Etapa 2: Produtos notáveis: o quadrado da soma de dois termos.

a) Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.

b) Escreva uma expressão algébrica para indicar a área de cada uma das peças dadas.

c) Com essas quatro peças, construa um quadrado.

d) Qual é a medida dos lados desse quadrado que você construiu?

e) Expresse a área do quadrado construído utilizando a medida de seu lado.

f) Você deve ter observado que a área do quadrado construído é igual à soma das áreas das quatro peças dadas. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Fonte: Protocolo da pesquisa

A próxima etapa foi construir um quadrado usando as quatro peças dadas, sem sobreposição, e expressar, algebricamente, a sua área. Para esta situação, todas as duplas conseguiram escrever a expressão $(m + n).(m + n)$. Foi necessário destacar a importância de terem sido usados os parênteses, por se tratar de uma multiplicação cujos fatores são polinômios.

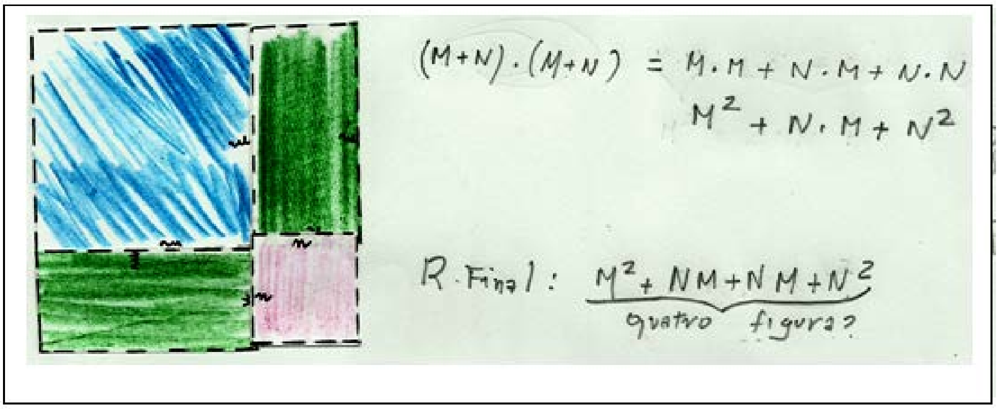
A pesquisadora sugere que aos alunos que escrevessem a expressão elaborada por eles na forma de um só polinômio; para isso deveriam utilizar a propriedade distributiva. O grupo F solicitou a intervenção da pesquisadora, pois tiveram dificuldade na aplicação da distributiva, ao efetuarem a multiplicação entre os monômios envolvidos; apesar de explicitarem que a resposta final era a soma das áreas das quatro figuras que usaram na construção, veja o registro do grupo (Figura 79).

Para solucionar a dúvida do grupo F, a pesquisadora mostra cada fator e identifica cada produto envolvido na montagem do polinômio em questão.

Em seguida, a pesquisadora, no quadro, mostra que, em Matemática, uma multiplicação de fatores iguais, pode ser escrita utilizando uma potência. Exemplificou numericamente e algebricamente esta situação; até mostrar que a área do quadrado construído, nesta etapa da atividade, poderia ser escrita também por (m + n)^2. Assim tem-se: (m + n) . (m + n) = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2. Este é um trinômio do quadrado perfeito.

Neste momento, o aluno A4 destacou: “Este é um produto notável. Quadrado do

Figura 79 – Registro da etapa 1 da Atividade 3, feito pelo grupo F.



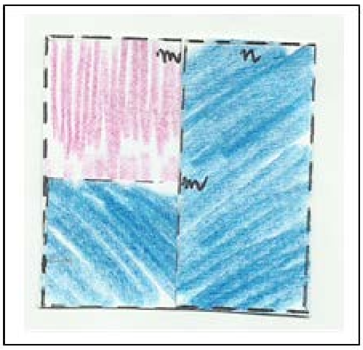
Fonte:Protocolo da pesquisa

primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo". Outros alunos também se manifestaram. O aluno A6 afirmou que compreendeu de onde surgiu a fórmula que tinha decorado; da área das figuras. Já o aluno A10 disse que assim ficou fácil de entender; se esquecer o macete pode usar a distributiva ou a figura.

Na sequência da atividade, trabalhou-se com o produto notável, quadrado da diferença de dois termos. Como nas etapas anteriores, foi solicitado aos alunos que recortassem as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades e identificassem a área de cada uma delas.

Em seguida, cada aluno deveria usar as quatro peças para obter um quadrado de lado $m - n$. Para isso, a sugestão dada foi sobrepor as peças dadas para retirar ou acrescentar áreas. Muitos grupos manifestaram dúvidas e todos eles afirmavam poder escrever a área solicitada utilizando apenas três peças, como mostra a Figura 80. Neste caso, os grupos não utilizaram o quadrado de área n^2.

Figura 80 – Registro da construção sugerida na etapa 3 feito pelo grupo E



Fonte: Protocolo da pesquisa

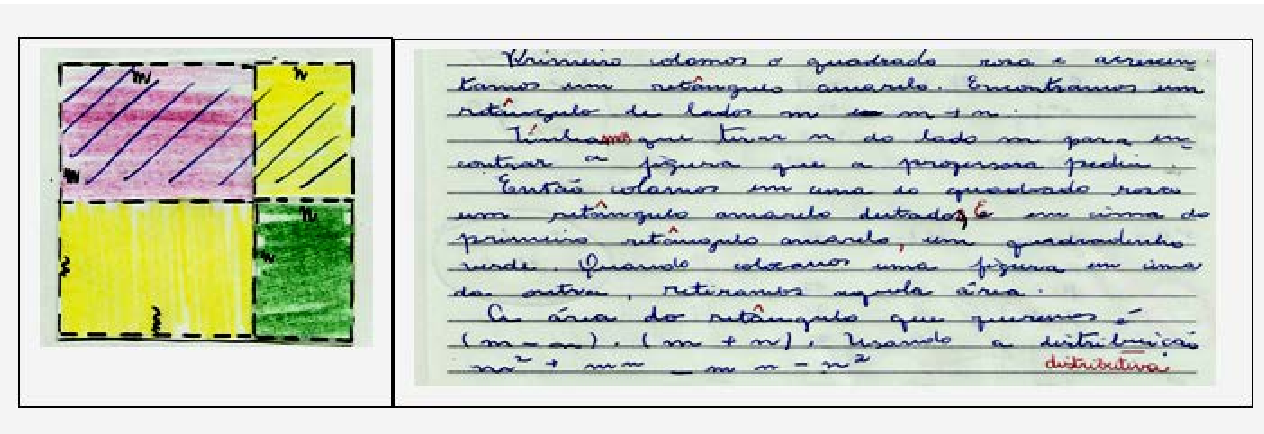
A questão era que os alunos estavam sobrepondo os dois retângulos, retirando duas vezes a área de um quadrado de área n^2. Portanto, deveria acrescentar um quadrado de área n^2.

Os alunos são levados a observar que o quadrado de lado $m - n$ pode ser obtido se: retirarem do quadrado de lado m, um retângulo de dimensões n e m e; acrescentarem um quadrado de lado n; e, finalmente, retirarem outro retângulo de dimensões n e m. Assim os grupos encontraram a expressão m^2 - 2mn + n^2 como a área do quadrado construído.

Ao expressar, algebricamente, a relação de igualdade entre a área do quadrado e a sequência de operações expostas acima, os alunos identificaram mais um caso de produto notável: $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$.

Na quarta etapa desta atividade o objetivo era mostrar, geometricamente, o caso de produto notável; produto da soma pela diferença. Após recortar as peças disponíveis para esta etapa da atividade, os alunos foram desafiados a construir um retângulo de dimensões $m + n$ e $m - n$. Para isso, poderiam justapor as peças para acrescentar e sobrepor para retirar. Na sequência, determinaram a área do retângulo construído. Na Figura 81 está o registro da conclusão apresentada pelo grupo B. Os alunos dos grupos B e

Figura 81 – Conclusões da etapa 4 da Atividade 3, apresentas pelo grupo B

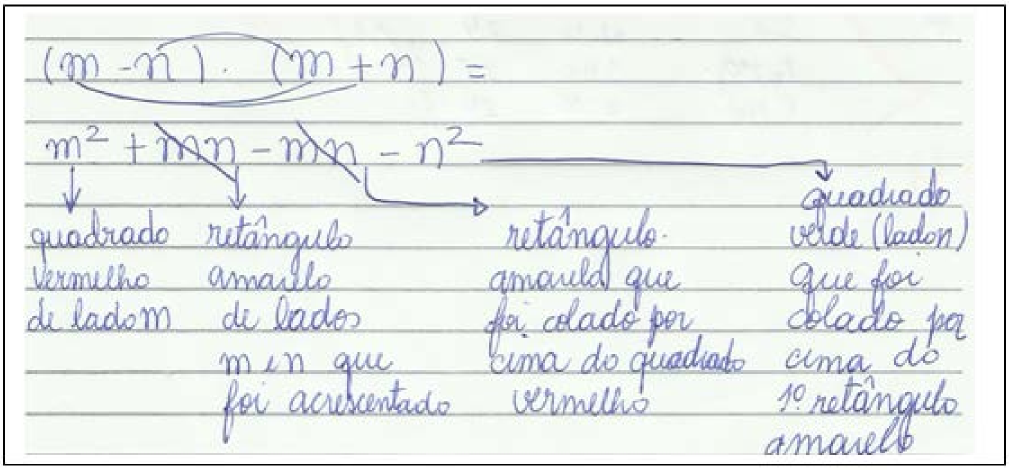


Fonte: Protocolo da pesquisa

C não conseguiram construir a figura solicitada; portanto, eles foram levados a observar que o retângulo de dimensões $m + n$ e $m - n$ pode ser obtido, se for acrescentado ao quadrado de lado m um retângulo de dimensões m e n; retirarmos do retângulo de lados m e $m + n$ formado, um quadrado de lado n e um retângulo de dimensões m e n.

Em seguida, cada aluno expressou, algebricamente, a relação de igualdade entre a área desse quadrado e a sequência de operações expostas acima. Torna-se fundamental destacar que todos eles conseguiram registrar, algebricamente, a construção geométrica realizada. Mesmo os grupos que, inicialmente, não haviam conseguido construir a figura solicitada. Na Figura 82 está o registro feito pelo grupo C. Por fim, foi destacado que o produto de $m + n$ por $m - n$ é mais um caso de produto notável; o produto da soma pela diferença de dois termos.

Figura 82 – Registro do item c da etapa 4 da Atividade 3, feito pelo grupo C



Fonte:Protocolo da pesquisa

As tarefas desta atividade foram elaboradas a partir da proposta de comunicação matemática sugerida pelos PCNs.

> Falar sobre Matemática, escrever textos sobre conclusões, comunicar resultados, usando ao mesmo tempo elementos da língua materna e alguns símbolos matemáticos, são atividades importantes para que a linguagem matemática não funcione como um código indecifrável para os alunos (BRASIL, 1998, p. 42)

.

Após as quatro etapas anteriores, em que a turma trabalhou em grupos, os alunos responderam duas questões, individualmente. O objetivo foi verificar se as habilidades trabalhadas foram realmente construídas pelos alunos e se os mesmos conseguiam transpô-las para outras situações de aprendizagem. Como não houve tempo disponível, como o planejado, os alunos expressaram, oralmente, para os colegas, suas conclusões.

Na questão 1, a proposta era desenvolver, algebricamente, dois produtos notáveis; e em seguida, registrar geometricamente suas conclusões.

No primeiro item da questão 1, o produto notável era (x - 4)^2; dos 24 alunos analisados, 18 conseguiram escrevê-lo, algebricamente e fizeram o registro geométrico correto (Neste grupo estão os quatro alunos que acertaram a questão 6 do pré-teste, que se referia às operações com polinômios); 2 alunos erraram os dois registros; 2 acertaram apenas o registro geométrico e 2 alunos acertaram apenas o registro algébrico. No segundo item, quando foi analisado o produto (x + 5)^2, o índice de acertos foi maior: 22 acertaram os tipos de registros solicitados; 1 aluno não registrou, corretamente, todo o item e 1 aluno errou o registro algébrico.

Antes de propor a resolução da segunda questão, a pesquisadora propôs uma discussão a partir da observação do produto notável $(x - 7)^2$. Ao desenvolvê-lo, algebricamente, encontramos $x^2 - 14x + 49$, que é considerado um trinômio do quadrado perfeito. Para determinar a raiz da equação $x^2 - 14x + 49 = 0$, podemos utilizar o seguinte raciocínio:

Como $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$, pode-se escrever:

$(x - 7)^2 = 0$

$(x - 7).(x - 7) = 0$ Para que este produto seja nulo, pelo menos um dos fatores deve ser zero. Assim: $x - 7 = 0$. Então $x_1 = x_2 = 7$

Para resolver a questão 2, a sugestão foi usar as informações da questão anterior, aplicar os produtos notáveis e descobrir o conjunto solução das equações:

- $x^2 - 8x + 16=0$
- $x^2 + 10x + 25=0$

Ao analisar o resultado nota-se: Apenas 13 alunos encontraram, corretamente, o conjunto solução de cada equação. Destes, 3 não utilizaram os produtos notáveis para resolvê-las. 5 resolveram, corretamente, apenas a primeira equação e 3 acertaram apenas a resolução da segunda equação. 4 erraram as duas equações.

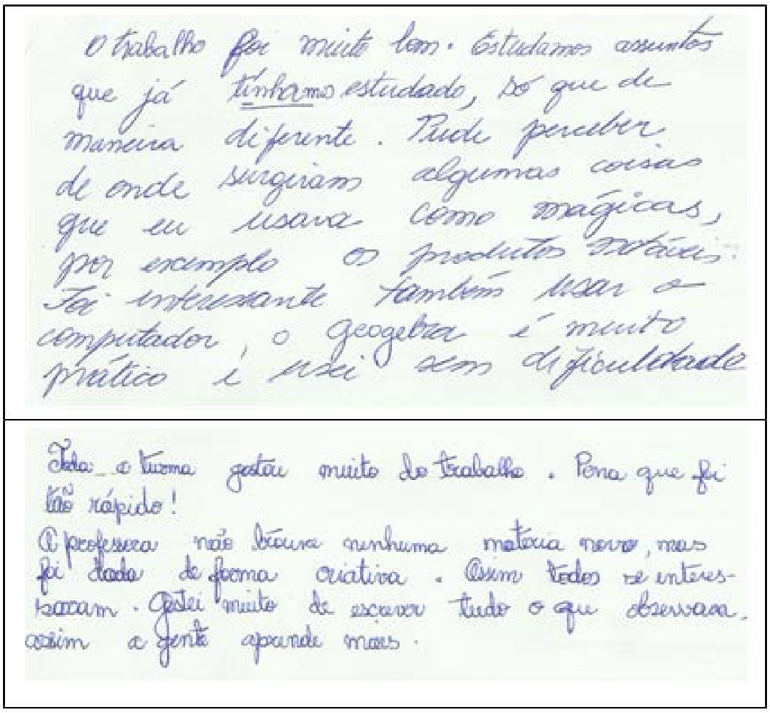
4.4.4 Avaliação do trabalho com o 9^o ano

O trabalho com os alunos do 9^o foi muito produtivo; os mesmos mostraram-se interessados em todas as atividades propostas. Apesar de alguns alunos apresentarem dificuldades no registro escrito das questões, todos participaram das discussões promovidas, expressando oralmente dúvidas e opiniões.

Vale destacar que esta atividade foi preparada para durar 2 horas e 30 minutos de aula, contudo o tempo não foi suficiente para os alunos concluírem a questão 2. Portanto, a pesquisadora solicitou mais 30 minutos da aula posterior. Em uma próxima aplicação, a sugestão é que esta atividade aconteça em dois dias diferentes, para não torná-la cansativa para os alunos.

Quanto ao desempenho cognitivo, houve um crescimento em relação às questões do pré-teste; como já foi relatado na secção anterior. Os alunos mostraram-se muito entusiasmados com as descobertas feitas; principalmente por terem compreendido, de outra forma, assuntos que já tinham sido trabalhados neste ano escolar. O que se pode notar nas avaliações feitas pelos alunos A3 e A7 (Figura 83).

Figura 83 – Avaliação dos trabalhos feita pelos alunos A3 e A7, respectivamente



O trabalho foi muito bom. Estudamos assuntos que já tinhamos estudado, só que de maneira diferente. Pude perceber de onde surgiram algumas coisas que eu usava como mágicas, por exemplo os produtos notáveis. Foi interessante também usar o computador, o geogebra é muito prático e usei sem dificuldade

Toda a turma gostou muito do trabalho. Pena que foi tão rápido!
A professora não trouxe nenhuma matéria nova, mas foi dada de forma criativa. Assim todos se interessaram. Gostei muito de escrever tudo o que observava, assim a gente aprende mais.

Fonte:Protocolo da pesquisa

Capítulo 5

Considerações Finais

As considerações finais desta pesquisa estão baseadas nos resultados da aplicação do questionário, do pré-teste, da entrevista e na avaliação do trabalho proposto na sequência didática, tendo como objetivo responder a pergunta que fundamentou esta investigação: "A utilização da linguagem algébrica, abstrata e sem significado para a maioria dos alunos, e sua conexão com a língua materna é dificultada pelos recursos pedagógicos utilizados pelo professor?"

Vale ressaltar, inicialmente, alguns dos resultados encontrados:

- a entrevista com os professores cumpriu com a sua função de fornecer dados a respeito dos métodos e técnicas utilizados pelos mesmos em suas práticas pedagógicas. Ficando diagnosticado que, em geral, os conceitos algébricos ainda são trabalhados a partir de práticas que favorecem a memorização e a repetição de métodos e técnicas.
- com as respostas dos questionários respondidos pelos alunos, pôde-se concluir que as experiências com as tecnologias, presentes no cotidiano dos alunos, não se fazem presentes nas atividades matemáticas desenvolvidas na escola. O mesmo ocorre com os materiais lúdicos: jogos, dobraduras, etc. Quanto à aprendizagem algébrica, realmente é considerada desinteressante.

Apesar das dificuldades encontradas pelos alunos na realização das primeiras atividades, principalmente em relação aos registros escritos utilizando a língua materna, a variedade de situações que vivenciaram, possibilitaram a realização das tarefas seguintes, sem maiores problemas. Os educandos mostraram-se motivados e curiosos durante todo o tempo do trabalho. O lúdico e os recursos digitais foram aproveitados como forma de promover discussões e uma interação colaborativa entre os grupos e duplas; e a partir delas, os conceitos trabalhados foram construídos. Em relação à sequência didática, ainda é importante evidenciar:

- os resultados do pré-teste oportunizaram a pesquisadora diagnosticar quais eram os aspectos algébricos mais deficientes em cada ano escolar; para que a sequência didática pudesse ser elaborada a partir dos mesmos.
- os materiais manipuláveis utilizados podem ser facilmente construídos pelos próprios alunos; com exceção do Geoplano. Neste caso, deve ser confeccionado previamente pelo professor, caso a escola não possua.
- os recursos tecnológicos utilizados na sequência didática são de fácil acesso. Os objetos digitais são acessados em qualquer computador com acesso à Internet. Vale destacar que aqueles disponibilizados na plataforma RIVED, são frequentemente atualizados; portanto numa próxima aplicação, talvez os desafios aqui propostos precisem ser modificados.

Outro fato notório é que o desempenho cognitivo dos alunos que participaram das atividades da sequência didática, foi avaliado processualmente. Isto permitiu à pesquisadora elencar as dificuldades apresentadas pelos mesmos e possibilitar a busca de novas alternativas para saná-las nas atividades posteriores. Considerando o número de alunos e professores que participaram desta pesquisa, deve-se enfatizar que não se pode generalizar os resultados, as conclusões aqui apresentadas, não são únicas e nem definitivas. Mas, por se tratar de uma pesquisa qualitativa, os mesmos podem servir de referência ou, no mínimo, de reflexão para outras pesquisas relacionadas à aprendizagem algébrica no Ensino Fundamental.

Neste trabalho, o emprego dos recursos lúdicos e tecnológicos em práticas pedagógicas, foi além da utilização de um jogo, um $software$ ou outro material manipulável, por exemplo. Estes, mostraram-se como ferramentas de ensino; meios que promoveram a socialização e a motivação dos alunos em desenvolver habilidades até então não construídas por eles. Torna-se evidente que estes recursos não vão resolver todos os problemas enfrentados pelo ensino e a aprendizagem da Álgebra; contudo, nesta experiência, favoreceram o desenvolvimento das linguagens oral, escrita e pictórica; essenciais para a construção das competências matemáticas, propostas pelos PCNs, para o Ensino Fundamental.

Fazendo um breve paralelo dos resultados desta proposta com os três estudos citados na introdução desta trabalho, conclui-se que como Freitas (2014), os materiais manipuláveis foram instrumentos dinamizadores da atividade algébrica no 6^o; mas neste contexto, de forma global, em todo o 3^o e 4^o ciclos do Ensino Fundamental. De forma distinta dos trabalhos de Marcussi (2013) e Silva (2016), que contemplam atividades convencionais dos livros didáticos, este estudo aborda, também, recursos digitais.

De acordo com todos os relatos e considerações apresentados nesta pesquisa, pode-se afirmar que o principal objetivo da mesma foi alcançado; que era analisar se as atividades lúdicas, incluindo os recursos tecnológicos, podem contribuir para o estabelecimento de um elo entre a língua materna e a linguagem algébrica; oportunizando uma aprendizagem rica em significados. Contudo, ao longo deste trabalho, outras questões foram sendo acrescentadas e por este motivo, devem ser destacadas como sugestões para um futuro prosseguimento do trabalho:

- aplicar, as atividades trabalhadas com a turma do 6^o ano, também em turmas dos primeiro e do segundo ciclo do Ensino Fundamental, já que os PCNs orientam que desde os primeiros anos de escolaridade seja trabalhada a pré-álgebra. Quanto mais cedo os alunos vivenciarem atividades com estas características, melhor será o desempenho algébrico no decorrer dos anos escolares.
- o trabalho desenvolvido com os produtos notáveis na turma de 8^o ano, que contemplou apenas o caso, "quadrado da soma"; numa futura aplicação, a dinâmica poderia ser estendida para outros casos de produtos notáveis. Este foi baseado no Algeplan digital. Caso a proposta seja desenvolvida sem o auxílio do computador, as peças (figuras geométricas que compõem o Algeplan) podem ser confeccionadas pelos próprios alunos.
- experimentar e analisar a sequência didática com alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos); já que a pesquisadora possui experiência nesta modalidade de ensino.

Espera-se que este trabalho mostre a importância de novas abordagens no estudo de conceitos algébricos. Em específico, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra aconteça, de forma significativa, durante os anos do Ensino Fundamental.

Referências

ABRANTES, P. *Reorganização Curricular do Ensino Básico*. Minisério da educação de portugal. Lisboa, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 39, 101 e 135.

ALCâNTARA, A. P. de; CORRêA, C. N. *A mediação pedagógica junto as novas tecnologias*. [S.l.], 2012. Faculdades Integradas Teresa Ávila. Citado na página 38.

AMBRóSIO, U. D. *Da realidade a ação reflexões sobre educação e matemática*. [S.l.]: 1. edição, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 107.

ARAUJO, I. R. de O. A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmitificar o ensino da matemática. *Universidade Federal de Santa Catarina*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 77.

BATISTA, S. C. F. *M-learnMat: modelo pedagógico para atividades de M-Learning em Matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Citado na página 49.

BAUGART, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.* [S.l.]: 4. edição, 1992. Traduç ao: Hygino H. Domingues. Citado 3 vezes nas páginas 22, 33 e 126.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação*. [S.l.]: 1. edição, 1994. Citado na página 41.

BONADIMAN, A. Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas . *A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens*, 2012. Citado na página 80.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *As idéias da Álgebra*, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 53.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5^a a 8^a séries*. Brasília, DF, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 21, 28, 29, 33 e 146.

BRASIL. *Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, DF, 2006. Citado na página 19.

BRASIL. *INEP*. [S.l.], 2013. Acesso em 10/11/2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/resultados>. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 51 e 110.

BRASIL. *Prova Brasil 2013*. [S.l.], 2013. Acesso em 15/11/2015. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

BUTTO, C.; ROJANO. Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matem|'atica*, v. 1, n. 16, 2004. Citado na página 27.

CARMO, J. ao dos S. Conhecimentos de estudantes de licenciatura em matemática acerca do conceito de número. *Publicação do Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso*, 2001. Disponível em: <http://www.ufmt.br/revista/arquivo/rev18/carmo.htm.> Citado na página 33.

CARPENTER, T. Developing algebraic reasoning in the elementary school generalization and proof. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, p. 155 e 162, 2001. Melbourne University of Melbourne. Citado na página 27.

COSTA, J. W.; OLIVEIRA, M. A. M. *Novas linguagens e novas tecnologias educação e sociabilidade*. Petrópolis RJ: 1. edição, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 84.

CURTO, V. Trabalhando com o computador na eja . uma análise dos relatos das práticas pedagógicas em meio digital com jovens e adultos. *Anais do Encontro Nacional sobre hipertexto*, 2009. Citado na página 38.

CURY, H. N. *Análise dos erros o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. [S.l.]: Autêntica, 2007. Citado na página 59.

DANYLUK, O. S. *Alfabetização Matemática: o cotidiano da vida escolar*. [S.l.]: 1. edição, 1993. Citado na página 34.

DUVAL, R. *Lecture et Comprehension des textes*. [S.l.]: Strasbourg :IREM, 1986. Citado na página 37.

DUVAL, R. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.* [S.l.]: 1. edição, 2003. Citado 12 vezes nas páginas 34, 36, 67, 82, 90, 104, 107, 113, 130, 135, 138 e 142.

ENGLISH, L. D. Mathematical reasoning analogies metaphors and images. *Lawrence Erlbaum Associates*, 1997. Citado na página 36.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. A contribuição para um repensar: a educação algébrica. *Pro Posição*, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 77.

FONSECA, W. C. *Métodos e técnicas de pesquisa em Comunicação*. São Paulo: Atlas, 2005. Citado na página 42.

FREITAS, L. P. *Atividades Algébricas no Sexto Ano do Ensino Fundamental com materiais manipuláveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 19, 20, 40, 77, 82 e 150.

GOMES, M. L. M. *Álgebra e Funções na Educação Básica*. Belo Horizonte MG: CAED, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 23, 26 e 27.

KLUSENER, R. *Ler Escrever e Compreender a Matemática ao Invés de Tropeçar nos Símbolos. In: NEVES, Iara et al. Ler e Escrever. Compromisso de todas as áreas.* [S.l.]: 1. edição, 2001. Citado na página 33.

LINS, R. C.; GIMENES, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* [S.l.]: 1. edição, 2006. Citado 14 vezes nas páginas 22, 24, 25, 26, 27, 48, 75, 76, 81, 94, 116, 121, 138 e 140.

LINS, R. C.; KAPUT. The early development of algebraic reasoning the current state of the fi eld. *The teaching and learning of algebra.*, 2004. Kluwer Academic Publishers. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática. As condições de conhecimento, inteligência e prática docente.* [S.l.]: 1. edição, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.

MARCUSSI, H. de F. R. *A Álgebra no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 33 e 150.

MARKARIAN, R. *A Matemática na escola : alguns problemas e suas causas.* [S.l.], 2004. Citado na página 36.

MARTINS, Z. As tic no ensino e aprendizagem de matemática. *Atas do X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia*, 2009. Disponível em: <tp://fernanda.cefetes.br/Cursos/EngenhariaEletrica/Hans/Pos_EPT/Wan/AS%20TIC%20NO%20ENSINO-APRENDIZAGEM%20DA%20MATEM%C1TICA%20t7c200.pdf>. Citado na página 38.

MAZZOTTI, A. J. A. *O método nas ciências naturais e sociais pesquisa quantitativa*. [S.l.]: 1. edição, 2004. Citado na página 41.

MEC. *SAEB*. [S.l.], 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 51, 72 e 73.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. *Metodologia da pesquisa para um professor pesquisador*. [S.l.]: 1. edição, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 43, 49 e 50.

MOREIRA, M. A. *Teorias de Aprendizagens*. [S.l.]: 1. edição, 1995. Citado na página 31.

OLIVAL, L. A. Iniciação algébrica. *Revista do Professor*, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 40, 101 e 106.

OLIVEIRA, S. A. de. O lúdico como motivação nas aulas de matemática. *Mundo Jovem*, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 39, 93 e 119.

ONUCHIC; ALLEVATO. *Novas reflex oes sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.* [S.l.]: 1. edição, 2004. Citado na página 17.

PIAGET, J. *A equilibração das Estruturas Cognitivas Problema Central do Desenvolvimento.* [S.l.]: Primeira, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.

PONTE, J. ao P. *O ensino da Matemática em Portugal: Lições do passado, desafios do futuro*. [S.l.]: 1. edição, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 24.

REY, F. L. G. *Pesquisa Qualitativa em Psicologia*. [S.l.]: 1. edição, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 49.

SANTOS, M. de L. A. O prazer de aprender através do lúdico. *Universidade Cândido Mendes*, 2010. Citado na página 39.

SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇcãO DE MINAS GERAIS. *Conteúdos Básicos*. [S.l.], 1994. Citado na página 40.

SILVA, A. M. *Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, 1997. Dissertação de Mestrado. Citado na página 29.

SILVA, C. B. *Introdução da Álgebra no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 20, 96 e 150.

SILVEIRA, M. R. A. A matemática é difícil um conceito pré construído. *Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*, 2002. Citado na página 50.

SMOLE, K. C. S. *A matemática na educação infantil: a teoria das inteligências múltipas na prática escolar.* [S.l.]: 1. edição, 2000. Citado 11 vezes nas páginas 32, 36, 77, 91, 94, 99, 108, 119, 120, 124 e 138.

SMOLE, K. C. S. *Ler escrever e resolver problemas*. Porto Alegre: ARTMED, 2001. Citado na página 36.

TINOCO, L. A. *Álgebra pensar calcular e comunicar*. [S.l.]: Instituto de Matemática da UFRJ, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 67, 93, 94, 96, 102, 116 e 142.

USISKIN, Z. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.* [S.l.]: São Paulo, 1995. Citado 9 vezes nas páginas 25, 26, 27, 75, 81, 83, 85, 94 e 98.

VIEIRA, L. B. *Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino a aprendizagem da Álgebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2011. Citado na página 92.

VIEIRA, V. D. Geometria e Álgebra uma proposta de ensino. *Universidade Federal de Goiás*, 1997. Citado na página 36.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.* [S.l.]: 4. edição, 1991. Citado na página 31.

ZABALA, A. *A prática educativa como ensinar*. [S.l.]: Artes Médicas, 1998. Citado na página 59.

ZUCHI, I. A importância da linguagem no ensino de matemática. *Educação Matemáica em Revista*, n. 16, p. 49–55, 2004. Citado na página 32.

APÊNDICE A

Entrevista

Roteiro da Entrevista

Caro(a) educador(a),
esta entrevista é uma das etapas da pesquisa que realizo no curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e objetiva compreender as dificuldades encontradas com a educação algébrica.

Fui buscar quem está com a mão na massa para me encorajar com seus acertos e erros num novo fazer pedagógico, enfatizado em recursos que buscam tornar mais significativa a aprendizagem da álgebra.

Garanto que os dados obtidos serão utilizados unicamente na pesquisa e todos os cuidados serão tomados para preservar o anonimato do(a) entrevistado(a).

Conto com a sua colaboração e agradeço desde já sua atenção.

Fernanda de Araujo Monteiro

I- Identificação:

a) Nome: b) Idade:

c) Formação e área de atuação:

d) Tempo de atuação na educação :

e) Local (is) de trabalho:

II- Reflexão sobre a prática educativa

a) Relate como a maioria de seus alunos comunica-se matematicamente. Procure responder aos questionamentos a seguir:

- São capazes de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demonstrações com materiais pedagógicos?

- Utilizam a linguagem matemática para representar ideias, descrever relações e construir modelos da realidade?

b) O papel do educador no processo ensino-aprendizagem vem mudando ao longo do tempo. Como você vê sua postura profissional frente aos desafios provenientes da globalização e das tecnologias da comunicação?

c) Você utiliza recursos tecnológicos em sua prática?

d) Caso sua resposta tenha sido negativa no item anterior, vá para o item III. Caso o tenha respondido afirmativamente, relate como utiliza objetos de aprendizagem digitais, tais como: softwares, planilhas, recursos de áudio e vídeo e outras ferramentas disponíveis na web em seu trabalho?

III- Sobre o aprendizado/ ensino da Álgebra...

a) Você gosta de trabalhar os conceitos algébricos? Por quê? A partir de qual ano escolar estes conceitos algébricos são introduzidos em suas aulas?

b) Quais recursos você utiliza para trabalhar os conceitos algébricos?

c) No estudo de Álgebra quais as maiores dificuldades percebidas nos alunos? No seu ponto de vista, qual ou quais as causas para estas dificuldades?

d) Na sua opinião, o que pode ser feito para que o aprendizado de Álgebra se torne mais prazerosa?

e) Você concorda que a aprendizagem dos conceitos aritméticos devem anteceder à aprendizagem algébrica? Justifique sua resposta.

APÊNDICE B

Questionário

Questionário

Caro(a) aluno(a), sua contribuição será muito valiosa para o desenvolvimento de meu trabalho. Conto com o seu empenho na resolução das questões a seguir, que servirá como reflexão para a minha prática pedagógica.

Conto com a sua colaboração e agradeço desde já sua atenção.

Fernanda de Araujo Monteiro

A. Identificação

Nome: ______________________________ Idade:________

Escola: _____________________________ Ano de Escolaridade:______

B. Experiência em relação ao uso da Internet e seus recursos

1. Possui computador em casa? ( ) Sim ( ) Não 2. Possui smartphone? ( ) Sim Não( )

3. Utiliza a Internet para:

( ) acessar redes sociais ( ) realizar pesquisa escolares

( ) outros fins. Cite, pelo menos um deles_______________________________

4. Enumere três recursos da web mais utilizados por você:

C. **A Matemática, o cotidiano e as novas tecnologias**

1. Você gosta de estudar Matemática?
( ) Gosto muito ( ) Gosto ( ) Mais ou menos ( )Nem um pouco. Por quê?

2. Estudar Álgebra é...
( ) interessante ( ) chato ( )difícil

3. As habilidades algébricas adquiridas na escola são utilizadas por você em outras situações de seu cotidiano? ( ) Algumas vezes ( ) Sempre ( ) Nunca

4. Em suas aulas de Matemática... - A resposta que melhor completa a frase é:

( ) só resolvo exercícios.

( ) só resolvo exercícios, participo de jogos e outras atividades lúdicas. resolvo exercícios, participo de jogos e utilizo materiais lúdicos, tais como: geoplano, ábaco e dobraduras.

( ) resolvo exercícios, participo de jogos e utilizo recursos tecnológicos.

5. Após ter realizado as atividades propostas, marque com um x o retângulo que expressa o seu grau de dificuldade em cada uma delas:

Questões/ Nível de dificuldade	**Fácil**	**Médio**	**Difícil**	**Muito Difícil**
1				
2				
3				
4				
5				

APÊNDICE C

Pré-teste aplicado ao grupo A (Alunos do 7^{o}ano do Ensino Fundamental)

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Pré-Teste
(7º Ano do Ensino Fundamental)

1- Observe as figuras abaixo, o símbolo que representa cada uma delas e faça o que se pede:


x


y


z

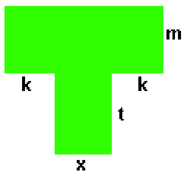
- Represente, simbolicamente, cada uma das situações a seguir. Escreva estas representações na forma reduzida, se possível.

a) 

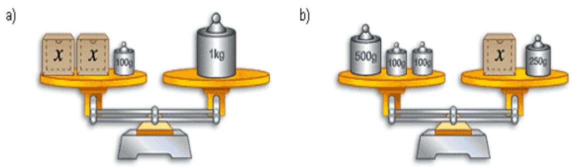
b) 

c) 

2- Qual a expressão algébrica que representa o perímetro desta figura?



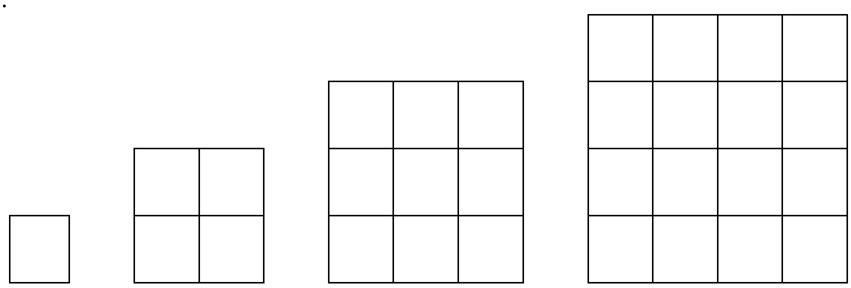
3- Para cada item, escreva a equação do 1º grau que cada balança representa e determine o valor de *x*, para:



Lembre-se: 1kg = 1000

4- Agora, tente resolver as equações, a seguir, sem desenhar a balança!
a) $2x + 5 = 27$ b) $12 = x - 4$

5-Observe a seqüência de figuras:



1ª **2ª** **3ª** **4ª** ...

a) Quantos quadradinhos devem ter na 6ª figura desta sequência?

b) Quantos quadradinhos devem ter na 10ª figura desta sequência?

APÊNDICE D

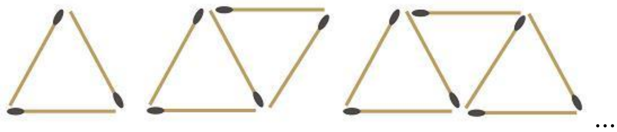
Pré-teste aplicado ao grupo B (Alunos do 8^O e 9^O anos do Ensino Fundamental)

Mestrado Profissional em Matemática

Pré-Teste
(8º e 9º Anos do Ensino Fundamental)

1- (Unicamp-SP) Roberto disse a Amanda: “Pense em um número, dobre esse número, some 12 ao resultado, divida o novo resultado por 2. Quanto deu?” Amanda disse: “15”. Roberto, imediatamente, revelou o número original em que Amanda havia pensado. Calcule esse número.

2-Observe a seqüência de triângulos:



- Complete a tabela com os dados referentes a esta seqüência:

Número de Triângulos	1	2	3	4	5
Quantidade de Palitos					

- Quantos palitos seriam necessários para fazer 10 triângulos?

3- Calcule o valor numérico da expressão algébrica: $\dfrac{3x^2 - \sqrt{y}}{5 - x}$, para $x = -2$ e $y = 16$.

4- A soma dos dois algarismos de um numeral é 6. Trocando os algarismos de lugar, o novo número tem 18 unidades a menos que o número original. Qual é o número original?

(Fonte: http://brainly.com.br/tarefa/765039)

5- Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x + 5y = -21 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$$

6- Sabendo que A= x^2 - 4x + 4, B= 4, C= 2x e D= x+1, calcule o valor das expressões:

a) A . B   b) $(B + C)^2$ c) B +C - D   d) $(C + D)^2$

APÊNDICE E

Atividades da Sequência Didática Aplicadas ao 6^{O} Ano do Ensino Fundamental

Escola:____

Nome:______________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Professora:____

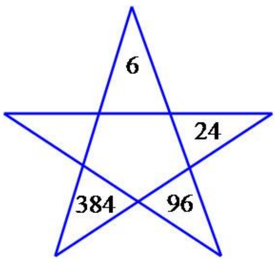
Atividade 1 **TRABALHANDO COM PADRÕES**

Habilidade trabalhada :

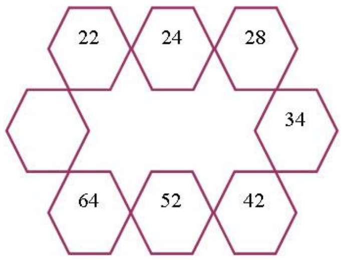
- ✓ Desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

1- As figuras, a seguir, possuem números que representam uma sequência lógica. Complete cada uma com o número que está faltando.

a)



b)



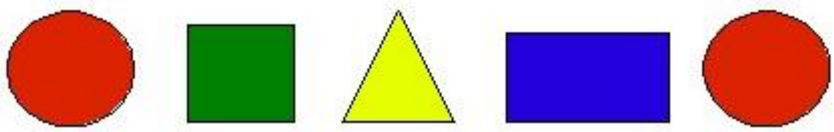
- Agora, explique como você conseguiu descobrir o número que faltava em cada figura.

____

____

____

2- As figuras abaixo representam uma sequência; cada figura é um elemento da sequência. Veja:



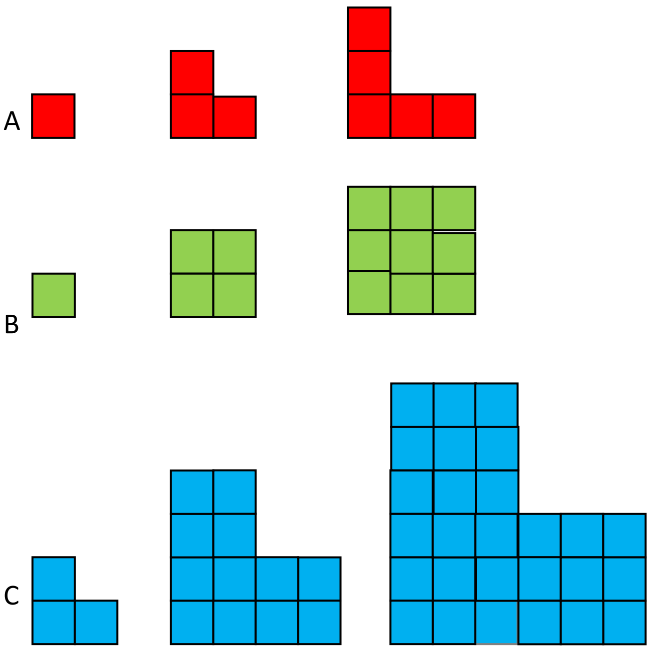
a) Qual é o 8º elemento da sequência? Por quê?

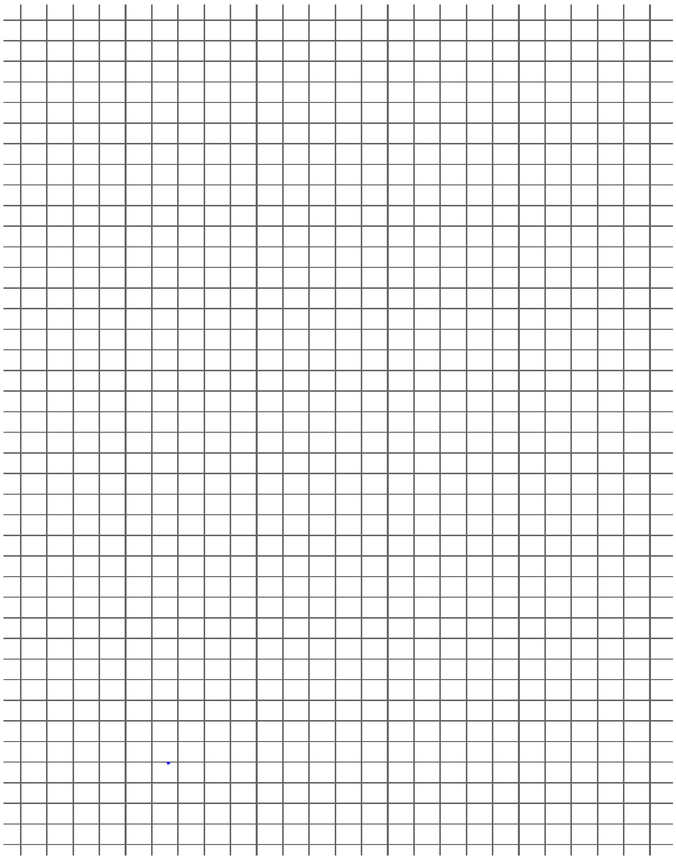
b) Sem desenhar, qual é o 20º elemento da sequência? Registre como você concluiu a sua resposta.

c) Em quais posições o triângulo aparece? E o círculo? Justifique sua resposta.

3- Crie uma sequência de figuras no Geoplano e peça a um colega para que descubra o critério que você usou para formá-la. Também pergunte a ele qual é a próxima figura desta sequência.

4- Cada sequência de figuras abaixo segue um padrão. Descubra qual é este padrão e, em cada caso, represente a figura seguinte, utilizando a malha quadriculada.





- Registre o que você observou de diferença entre as duas primeiras figuras de cada sequência. A mesma diferença pode ser notada entre a segunda e a terceira figura?

____

____

____

____

5- Complete a tabela com os números de quadradinhos de cada figura da questão 4. Preencher a última coluna é um desafio. Pense um pouco, que você conseguirá responder sem precisar desenhar. Se necessário, utilize a malha quadriculada.

Sequência	1ª Figura	2ª Figura	3ª Figura	4ª Figura	5ª Figura	10ª Figura
A						
B						
C						

- Observe com atenção e responda:

a) Há alguma relação entre os valores que você utilizou para preencher a segunda e a terceira linha da tabela? Explique o que você concluiu.

____

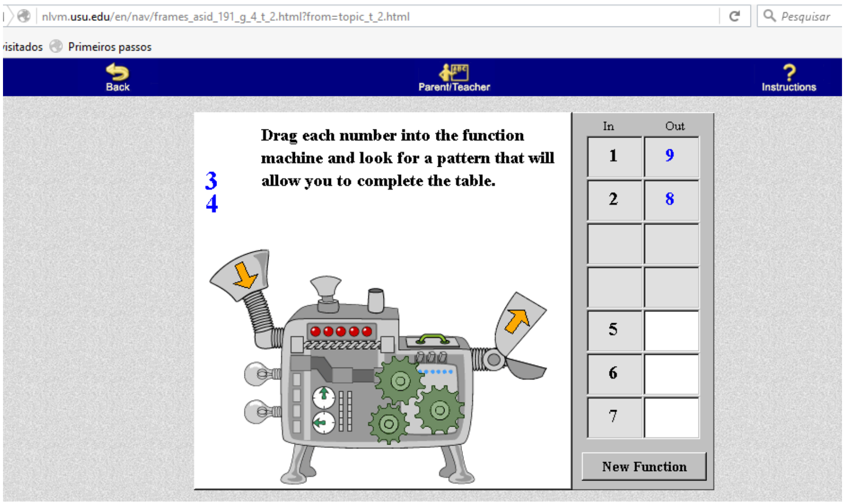
____

____

____

6-Ainda falando em sequências...

Vamos utilizar uma "Máquina Virtual" que está disponível em http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_191_g_4_t_2.html?from=topic_t_2.html. Esta máquina transforma cada número que entra em um outro, obedecendo uma determinada "lei".



Os números que estão disponíveis no lado esquerdo da tela devem ser arrastados, com o mouse, até a entrada da máquina. (Veja a seta indicativa!). Os números que sairão da máquina serão, automaticamente, na segunda coluna da tabela.

- Observe, com atenção os números que foram sendo colocados na segunda coluna e descubra a" lei da máquina". Registre a sua conclusão, após discutir com seus colegas. Em seguida, preencha os números que faltam na segunda coluna.

____

____

____

- Aperte o "Enter" e verifique se você acertou. Caso tenha errado, clique em "New Function" e inicie outra atividade.

Escola:____

Nome:________________________ Turma:________ Data:___/___/___

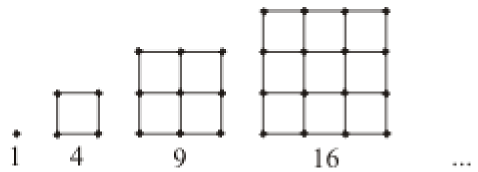
Professora:____

Atividade 2 **NÚMEROS FIGURADOS**

Habilidade trabalhada :

- ✓ Desenvolver do pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

1- A sequência de figuras abaixo é especial. Observe-a com atenção e depois fiquem atentos(as) às questões a seguir.



a) Utilize o Geoplano para representar as duas próximas figuras da sequência

1, 4, 9, 16,... é a sequência dos números quadrados.

b) 10 é um número quadrado? Por quê?

____

____

____

c) Qual é o 8º número quadrado? E o 10º? Explique como você chegou a estas conclusões.

____

____

____

____

Fique Sabendo...

Os números quadrados fazem parte de um grupo de números, chamado **Números Figurados.** Eles são números que podem ser representados por construção geométrica de pontos com igual distância entre si. De acordo com as figuras obtidas chamam de números quadrados, números triangulares, números pentagonais

2- Agora, coloque a "cuca" para funcionar, utilizem as tampinhas de garrafa PET, e representem os quatro primeiros números triangulares.

- Registrem, com desenhos, as figuras que vocês construíram.

- Observem a sequência das figuras quadrados, na questão 1. Um padrão que se pode notar nela é que a primeira figura é um quadrado com 1 bolinha no lado, a segunda tem 2 bolinhas no lado, a terceira 3 e assim por diante. Vocês notam algum padrão similar na sequência das figuras triangulares?

___

___

___

PROFMAT

Escola:____

Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/___

Professora:____

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 3 **A Matemática das Balanças**

Habilidade trabalhada :

- ✓ Resolver desafios envolvendo valores desconhecidos.
- ✓ Utilizar o método da tentativa para encontrar valores desconhecidos em situações-problema.

Vamos conversar ...

Você já viu uma balança de dois pratos?

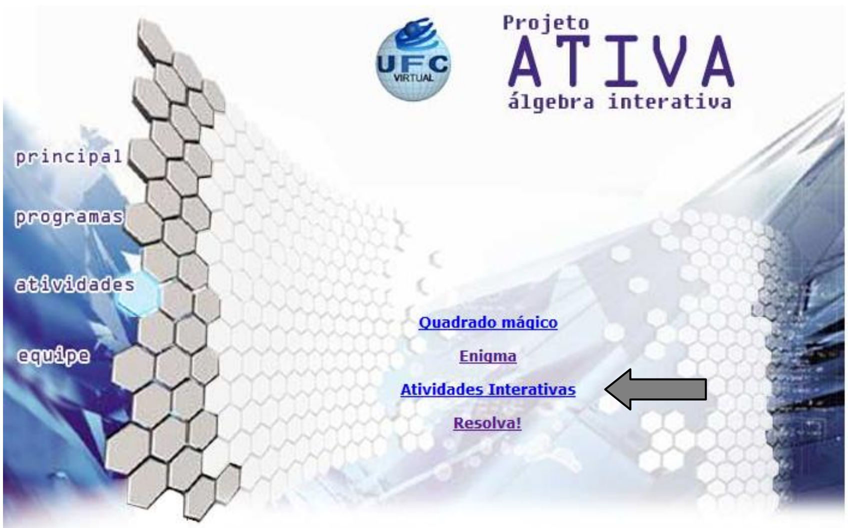
Sabe como ela funciona? Como fica em equilíbrio?

Onde ela ainda é utilizada?

Que tal utilizar uma balança deste tipo para trabalhar com a Matemática?

- No endereço eletrônico http://www.vdl.ufc.br/ativa/atividades.htm temos disponíveis algumas atividades utilizando a balança. Acesse a página e confira!

- Conseguiu acessar? Então, agora vamos clicar, com o botão direito do mouse, o link "Atividades Interativas".



- Tente responder a primeira atividade mentalmente. Conseguiu? Então, busque o valor procurado por tentativa. Registre aqui como você pensou.

____

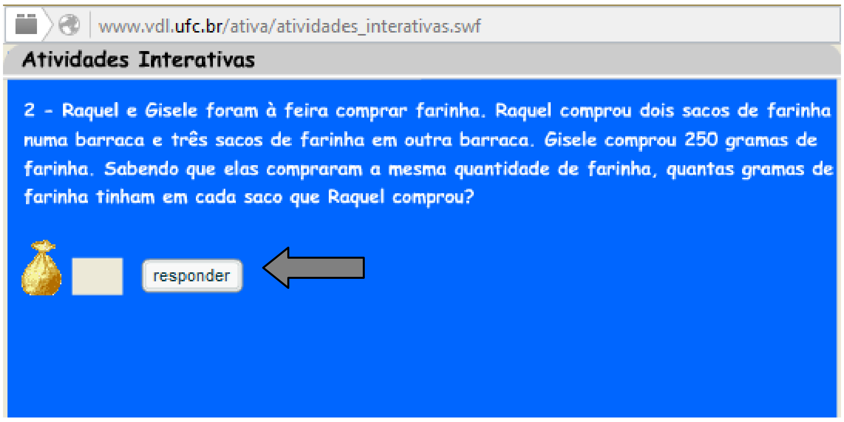
____

- A seguir digite seu resultado e clique em responder. E então, acertou?

- Se não conseguiu, confira os cálculos e tente novamente.

- Para responder a atividade 2, a sugestão é que você faça o desenho da balança para ajudar. Registre passo a passo sua resolução.

- Quando tiver certeza da resposta, digite-a e clique em responder para conferi-la.



- A atividade 3 se assemelha com a atividade 1. Contudo, agora temos "pesos" nos dois pratos da balança.

- Confira sua resposta. Agora, registre seu raciocínio.

PROFMAT	Escola:________________________ ___________________ Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/___ Professora:____

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 4 **TRABALHANDO COM POLIEDROS**

Habilidade trabalhada :

- ✓ Desenvolver do pensamento algébrico por meio da observação de regularidades e generalização.

Conhecendo o software Poly...

Trata-se de um recurso digital que permite a investigação de sólidos tridimensionalmente, com possibilidade de movimento; e também possibilita a visualização de suas planificações. Vale a pena conferir!

O software está disponível em: ftp://ftp.peda.com/poly32.exe. Vamos utilizá-lo nas atividades a seguir e no final dos trabalhos você vai registrar sua opinião sobre este aplicativo.

1- Explore livremente o programa.

2- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em Prismas e Antiprismas.
A partir da visualização dos prismas indicados abaixo, preencha as quatro primeiras colunas da tabela.

Número de arestas da base do prisma	**3**	**5**	**6**	**10**	**N**
Número de vértices do prisma					
Número de arestas do prisma					
Número de faces do prisma					

3- Observando a tabela da questão anterior, podemos concluir que há uma relação entre o número de arestas da base e o número de vértices, arestas e faces do prisma. Vamos registrá-la?
____
____
____
____

4- A partir das relações estabelecidas na questão anterior, imagine que um prisma possui uma base com **n** arestas. Agora, complete a última coluna da tabela.

5- Baseando-se nas conclusões anteriores, identifique o prisma que possui:

a) 14 vértices: ________________________________

b) 8 faces:________________________________

c) 12 arestas: ________________________________

APÊNDICE F

Atividades da Sequência Didática Aplicadas ao 7^{O} Ano do Ensino Fundamental

PROFMAT

Escola:____

Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/___

Professora:____

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 1 **JOGO DA MEMÓRIA**

Habilidades trabalhadas

- ✓ Representar uma situação-problema apresentada na língua materna para a linguagem algébrica e vice - versa.
- ✓ Produzir um texto relatando fatos importantes ocorridos na realização do jogo e destacando os conceitos matemáticos construídos.

Você, com certeza, já brincou de "jogo da memória"; mas o que vamos usar agora é especial.Vamos conhecê-lo:

Memória Matemática

a) O "Memória Matemática" é um jogo composto de pares de cartas; em algumas delas aparecem desafios e, em outras cartas as expressões algébricas que os representam.
b) As cartas são embaralhadas e colocadas na mesa, ou no chão, e a pessoa tem uma chance para virar a carta e encontrar o seu par. Se não conseguir, a vez é do próximo.
c) É um jogo divertido para ser jogado entre duas ou mais pessoas, e que pede atenção e concentração, pois se um dos participantes virar a carta errada, e os demais prestarem atenção na carta que ele virou, pode ajudar os seguintes a descobrir o par e marcar pontos.
d) Quando uma pessoa encontra um par, ela continua jogando até errar. É um jogo que ajuda a desenvolver o raciocínio, e pode ser usado por pessoas de qualquer idade.

Veja o modelo de algumas cartas do jogo:

Perímetro de um quadrado cujo lado mede n.	**4n**	**Se n representa um número inteiro, a soma do triplo desse número com 8 é....**	**3n + 8**

1-Agora, chegou a sua vez de jogar. Forme um grupo com mais dois colegas e mão à obra!

2- Após concluirmos o jogo, vamos elaborar um texto coletivo relatando o que foi observado na realização do mesmo. Tentaremos responder a alguns questionamentos:

- O seu grupo apresentou alguma dificuldade na realização do jogo? Quais?

- Como vocês solucionaram os problemas que apareceram?

- Nas dicas iniciais sobre o jogo "Memória Matemática" foi esclarecido que em algumas cartas iriam aparecer "expressões algébricas". Explique como poderíamos definir uma expressão algébrica.

- Nas cartas do jogo aparecem expressões que podem ser substituídas uma pela outra, ou seja, apresentam o mesmo valor algébrico. Estas expressões são chamadas expressões equivalentes. Identifique os pares de expressões equivalentes.

Perímetro de um quadrado cujo lado mede n.

Se n representa um número inteiro, a soma do triplo desse número com 8 é...

O quádruplo do número inteiro n, somado com o dobro de n.

O número inteiro n subtraído do seu quíntuplo.

$4n$

A soma de números inteiros consecutivos.

$5n - n$

$4n + 2n$

$3n + 8$

$2n + 1$

O perímetro de um retângulo de dimensões $2n + 1$ e $3n$.

$6n$

O triplo do número inteiro n dividido por 3

O sêxtuplo do número inteiro n.

n

$10n + 2$

PROFMAT	Escola:____ Nome:___________________Turma:______ Data:___/___/___ Professora:____	UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 2 **ACHE-ME NA MALHA**

Habilidades trabalhadas:

- ✓ Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.
- ✓ Elaborar sequências numéricas a partir de expressões algébricas e analisar as regularidades das mesmas.

Jogo[1]

Primeira etapa: O grupo confecciona o jogo; para isso, receberá duas tesouras e lápis de cores distintas.
Segunda etapa: O primeiro jogador lança o dado e retira uma carta do monte. Em seguida, encontrará o valor numérico daquela expressão substituindo o valor desconhecido, na mesma, pelo número sorteado no dado.
Terceira etapa: O aluno marcará, na malha, o valor numérico encontrado na etapa anterior. Para isso, cada jogador terá uma cor de lápis diferente dos demais. Caso o número já tenha sido marcado, o jogador não pontuará.

- Observações:

1- O jogo será realizado em grupo de 3 participantes.

2-Termina o jogo quando acabarem as cartas ou quando a malha estiver completa, vence quem colocar mais marcações;

3- Se um jogador tiver errado a marcação, os adversários ganham um ponto extra por cada erro, lembrando que o grupo é quem deve verificar durante o jogo a resposta do colega.

4- Este é o cartão para cada jogador acompanhamento as jogadas. Se necessário, aumente o número de linhas da tabela.

Rodada	Pontuação do Jogador	Pontuação Extra

5- Cartas do jogo : Cada grupo receberá estas cartas que devem ser recortadas uma a uma, usando a tesoura.

x^2	$x+1$	$x - 3$	$x(x-2)$	$2x$
$3x$	$- 4x$	$7x$	$11x$	$-3x +2$
$5x - 4$	$x^2 - 2$	$x^2 + 1$	$5x$	$-6x$

6- Esta é a malha, onde os jogadores marcarão suas respostas:

-24	-22	-18	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10
-9	-8	-8	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
0	1	2	3	4	4	5	5	6	7
7	8	9	9	10	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	42	43	44	45

A brincadeira ainda não acabou....

a) Foram trabalhadas quinze expressões algébricas no jogo. Em todas elas aparecem a variável **x**. Escolha uma delas e explique, com suas palavras qual o significado do "**x**"na expressão.

____

____

____

b) Escolha outra expressão que aparece no jogo e, a partir dela, obtenha uma sequência numérica. Registre todos os cálculos realizados e responda:

- Os números da sequência elaborada por você têm uma regularidade? Caso sua resposta seja positiva, explique como você descobriu?

____

____

____

____

[1] **Fonte:** https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3073/5/Disserta____o_Lygianne.pdf

Escola:____

Nome:____________________ Turma:_______ Data:___/___/___

Professora:____

Atividade 3 **EQUILIBRANDO BALANÇAS**

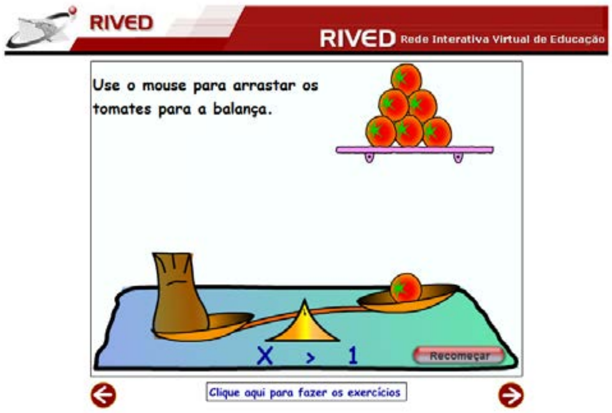
<u>Habilidades trabalhadas</u>

- ✓ Resolver equações por meio das operações inversas, a partir da linguagem tecnológica.
- ✓ Registrar, utilizando a língua materna, os procedimentos utilizados para manter as balanças em equilíbrio.

- Você já tentou equilibrar um balança? Conseguiu? Qual é o segredo?

- Na atividade de hoje, vamos equilibrar balanças virtuais, disponíveis em:
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/Antonio_miguel_e_Adilson_Sella/index.html

- Na página inicial deste endereço eletrônico temos uma imagem semelhante a que é apresentada a seguir:

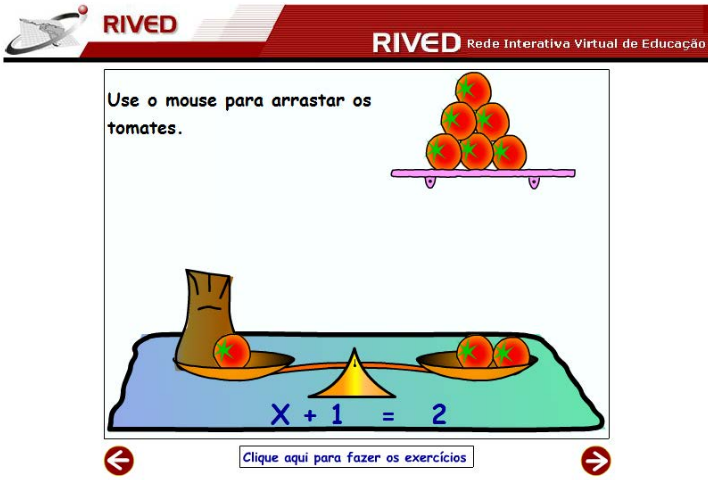


- Observe os comandos :

I- Os tomates que aparecem no lado direto da tela, podem ser colocados em um dos pratos da balança. O objetivo é manter a balança em equilíbrio!

II- Clicando na janela que se encontra abaixo da figura, você terá acesso aos exercícios. Veja um exemplo:

III- Clicando na seta vermelha, à direita, você terá acesso a outros desafios. Veja mais um exemplo:



- Agora é com você!

1-Clique mais uma vez na seta à direita, assim você encontrará o desafio: $x - 1 = 2$

a) Relate como você conseguiu descobrir o valor do "peso x" para manter a balança em equilíbrio.

____
____
____
____

b) Agora, clique na janela "fazer exercícios " e tente solucionar os desafios. Não esqueça de registrar, com desenhos, suas conclusões. (Dica: Faça o desenho de uma balança para cada situação apresentada, mostrando as mudanças que ocorrem nos pratos da mesma para que ela se mantenha em equilíbrio).

2- Repita os procedimentos da questão 1, para os desafios : $2x = 6$ e $x/3=1$

PROFMAT	Escola:____ Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/_ Professora:____

Atividade 4 **Equações com cartões coloridos**[1]

Habilidades trabalhadas:

- ✓ Resolver equações do 1º grau justificando cada etapa de resolução e verificando o resultado encontrado.
- ✓ Traduzir uma equação do 1º grau para uma linguagem simbólica e, após resolvê-la, traduzir a resposta para a linguagem algébrica.

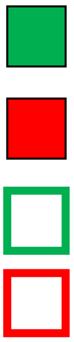
Conversando sobre o assunto...

Vimos, pelo título desta atividade, que hoje vamos resolver equações. Você sabe definir o que é uma equação?

Agora que já conversamos sobre o assunto, mãos à obra!

Para esta atividade usaremos os seguintes materiais:

- Quadradinhos com 3 cm de lado em cartolina branca, verde e vermelha, observando o seguinte código de cores:



→ (+1) Unidade Positiva

→ (+1) Unidade Negativa

→ (+ x) Unidade Positiva da incógnita x

→ (- x) Unidade Negativa da incógnita x

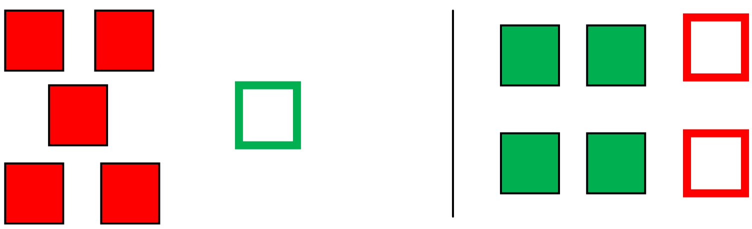
- | Palitos de picolé, que representarão a igualdade.

Iniciando nossos trabalhos...

Seja a equação : $\boxed{\mathbf{-5 + x = 4 - 2x}}$

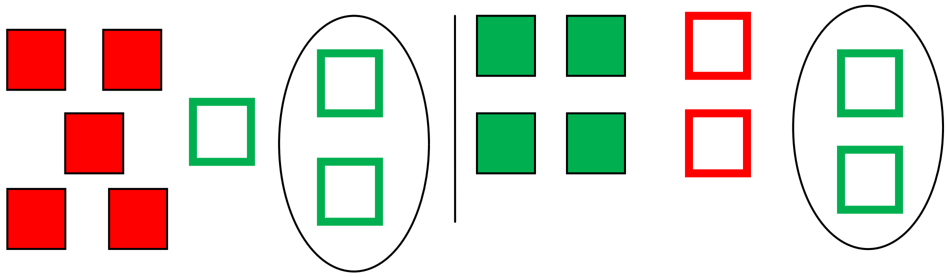
- Acompanhe cada etapa da resolução desta equação, utilizando os cartões que o seu grupo recebeu.

1- Primeiro iremos traduzir esta equação para a linguagem dos cartões:

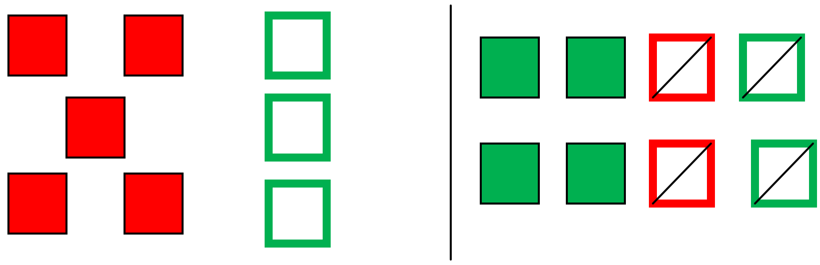


2- Na sequência, vamos realizar algumas operações de equilíbrio e simplificações:

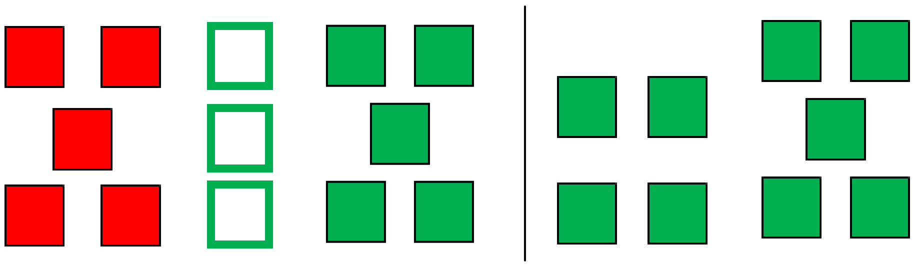
- Somar 2x em ambos os membros da igualdade:



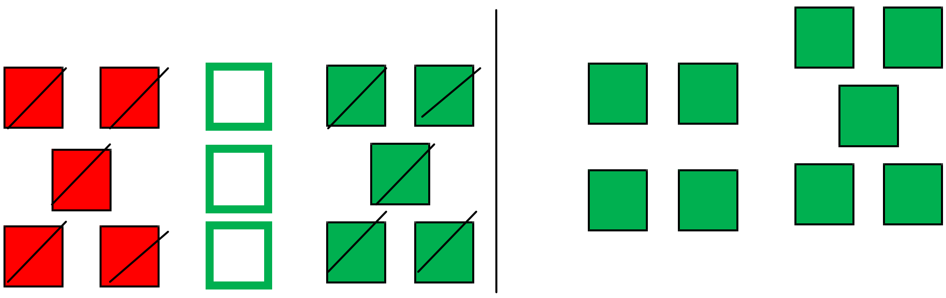
- Simplificar os dois pares (-x) + (+x):

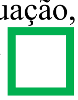


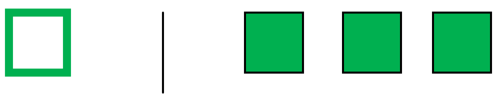
- Somar cinco unidades em cada membro da equação:



- Simplificação os cinco pares(+1) + (-1):



- Dividir por 3 cada um dos membros da equação, já que seu objetivo inicial, ao resolver a equação, é determinar o valor de x que satisfaça a igualdade inicial. Ou seja, determinar o valor da figura 



3- Registrar a resposta na linguagem algébrica: x=3

4- Fazer a verificação: $-5 + 3 = 4 - 2 . 3$

$-2 = -2$

Em síntese, foram realizadas as seguintes etapas para resolver a equação:

- Traduzir a equação para a "linguagem dos quadrinhos".
- Isolar o termo **x** no primeiro membro por meio de operações de equilíbrio. Para isso, utilizamos a propriedade que revela que os pares de opostos simbolizam o zero, por isso podem ser eliminados.

- Resolva a equação **x + 8 = -3x - 4,** utilizando os cartões coloridos. Registre cada uma das operações de equilíbrio e de simplificação que você utilizou. No final, escreva sua resposta utilizando a linguagem algébrica e verifique o resultado encontrado.

____

____

____

____

____

____

____

____

[1]**Fonte: Adaptação: Revista do Professor abril junho 2007- Porto Alegre**

Escola:______________________________ ______________________

Nome:______________________Turma:________ Data:___/___/___

Professora:____

PROFMAT

UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 5 **EQUAÇÕES "COM SENTIDO"**

Habilidades trabalhadas

- ✓ Ler com atenção o problema e levantar dados.
- ✓ Fazer a conversão do enunciado para a linguagem das equações, usando letras e símbolos.
- ✓ Resolver a equação estabelecida., analisar o resultado obtido e dar a resposta coerente

.

As fórmulas matemáticas são criadas no intuito de estabelecer razões entre diferentes grandezas, facilitando cálculos complexos e permitindo que todos que tenham o conhecimento básico em Matemática possam usá-las de forma correta e eficiente. As fórmulas ou equações matemáticas constituem uma importante ferramenta na determinação de valores desconhecidos.

Nesta atividade, vamos trabalhar com equações que nos ajudam a compreender situações do nosso cotidiano.

1- **Descubra o número que você calça**

Matemáticos desenvolveram uma expressão capaz de determinar o número que você calça através do comprimento (tamanho) do seu pé em centímetros. A expressão responsável por tal relação é a seguinte:

$N=\frac{5p+28}{4}$. Onde: N = número do calçado p = comprimento do pé em centímetros

Exemplo: O pé de uma pessoa possui 26 centímetros de comprimento. Determine o número do calçado dessa pessoa.

$N=\frac{5p+28}{4} \Rightarrow N=\frac{5.26+28}{4} \Rightarrow N\cong 40$

Resposta: O número do calçado desta pessoa é 40 .

a) Meça o pé de um colega e calcule o número do calçado que ele usa.

b) Explique, com suas palavras, como calcular o número do seu calçado a partir do tamanho do seu pé, sem utilizar a expressão anterior.

____

____

____

____

2- **Calculando o consumo de energia elétrica**

O aumento do consumo de energia elétrica, em razão do consumismo acelerado, tem provocado a construção de mais usinas hidrelétricas. Elas não poluem o ar, mas causam enormes impactos ambientais, em virtude da quantidade de água represada a fim de mover as turbinas na produção da energia elétrica. Alternativas têm sido utilizadas; tais como a energia nuclear e a energia eólica. Saiba como calcular o consumo de energia elétrica dos aparelhos que você tem em casa, podendo assim economizar eletricidade e dinheiro.

- O consumo de energia elétrica dos aparelhos de uma casa (k) é obtido a partir da milésima parte do produto do número que representa o tempo que o aparelho ficou ligado (t) pelo valor da potência do aparelho(P).

(Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/equacao-1.htm. Acesso em 12/11/2015)

- Agora, pense um pouquinho e responda:

a) Escreva uma expressão algébrica que permita o cálculo do consumo de energia elétrica dos aparelhos eletrônicos.

b) Você acha que é mais vantagem trabalharmos com as expressões algébricas para representar desafios? Por quê?

3- **Arquitetando...**

Uma casa com 100 m^2 de área construída possui 2 quartos, quadrados, do mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 68 m^2?

- Faça um esboço do desenho desta casa.

- Represente a situação descrita no desafio, utilizando a linguagem matemática. A seguir, resolva-o.

APÊNDICE G

Atividades da Sequência Didática Aplicadas ao 8^{O} Ano do Ensino Fundamental

PROFMAT

Escola:_______________________ ____________________

Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/___

Professora:____

UENF

Atividade 1 **ÁLGEBRA DOS VITRÔS**

<u>Habilidades trabalhadas</u>

- ✓ Interpretar a linguagem do objeto virtual para resolver desafios envolvendo o conceito de área.
- ✓ Utilizar as operações com monômios para determinar as áreas de figuras variadas.
- ✓ Realizar as atividades propostas no aplicativo e registrar cada análise realizada, utilizando a malha quadriculada e a língua materna.

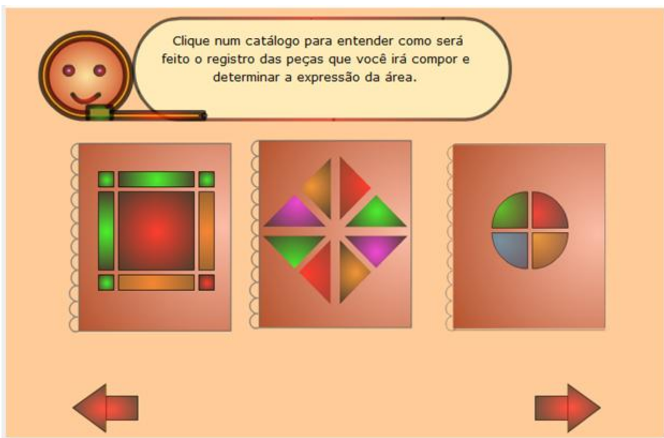
Você sabe o que é um vitrô? Se não sabe, vai saber agora...

Vitrô um tipo de janela que pode ser de correr ou abrir, confeccionada com vidros, que podem ser coloridos ou não. Com certeza você já teve a oportunidade de ver vários tipos de vitrôs, em casa, igrejas, edifícios, etc.

Nesta atividade vamos ter a oportunidade de confeccionar vitrôs utilizando a Matemática. Vamos utilizar o aplicativo disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/raquel_leonogildo_gustavo_tania/projeto2MX.html

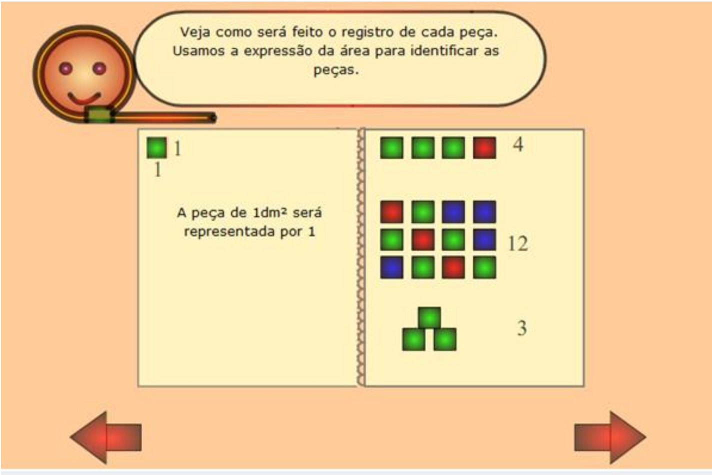
- Inicialmente será apresentada a tela seguinte:

- Você vai clicar em " Entrar". Em seguida, utilizando a seta vermelha disponível no canto direito da tela, será apresentado o catálogo de atividades.



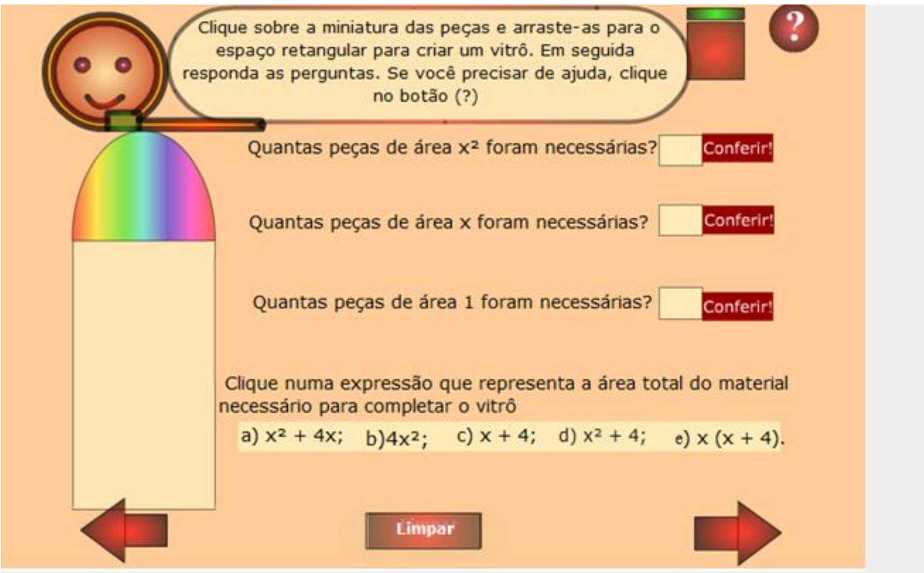
- Em seguida clique na primeira peça.

- Ainda clicando a seta vermelha da direita, você vai observar algumas telas com algumas instruções para a realização das atividades. Veja um exemplo:



- Anote as instruções oferecidas. Elas serão importantes mais tarde!

- Na sequência, teremos algumas atividades já propostas. Veja um exemplo. Esta é a atividade 1.



- De acordo com as explicações do aplicativo, basta clicar em uma das figuras, no canto superior direito, e arrastá-la para o espaço do vitrô. Utilizando o valor algébrico de cada peça você responderá os desafios propostos.

- Agora é a sua vez !

1- Responda o desafio proposto na atividade 1. Registre cada passo do seu trabalho. Na malha, a seguir, faça o desenho de cada peça que você selecionou para formar o vitrô, o <u>monômio</u> que representa a área de cada figura e o <u>polinômio</u> correspondente à área total do mesmo. Não esqueça de discutir com o colega o significado das palavras que estão destacadas neste enunciado.

2- Com a seta vermelha da esquerda, volte à tela onde aparecem as peças de vitrô e clique na peça 2. Realize a atividade proposta e faça o registro conforme as orientações da questão 1.

Meus Registros...

Atividade 1

Atividade 2

PROFMAT	Escola:__________________________ ____________________ Nome:____________________Turma:_______ Data:___/___/___ Professora:____	UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 2 **Jogo da Velha**

Habilidades trabalhadas:

- ✓ Operar com monômios e polinômios.
- ✓ Registrar cada jogada realizada no jogo e conferir os resultados encontrados

Material para cada dupla:

- Conjunto de 9 cartões com os desafios e letras de A até I no verso.
- Conjunto de 9 cartões com as respostas e as letras correspondentes aos seus desafios no verso.
- Cartela como a que está identificada a seguir.

A	**B**	**C**
D	**E**	**F**
G	**H**	**I**

Começando a trabalhar...

- Após as duplas receberem o material, cada uma vai escolher o jogador que iniciará o jogo.
- O primeiro jogador escolhe uma letra, retira o desafio correspondente a ela e resolve-o. O outro jogador vai verificar a resposta do colega a partir do cartão que contém a resposta do referido desafio. Caso a resposta esteja certa, quem a resolveu coloca sua marca no lugar da letra escolhida; caso esteja errada, quem marca é o outro jogador.
- Na sequência, o segundo jogador retira outra questão e continua o jogo da mesma maneira.
- Ganha quem conseguir colocar primeiro sua marca em três casas na vertical, horizontal ou diagonal.

Registrando o jogo...

- Em cada rodada registre seus cálculos.

- Caso, o jogador tenha encontrado um resultado diferente daquele que aparece no cartão de resultados, o outro jogador deve refazer a operação, explicando ao colega passo a passo do seu raciocínio; buscando o resultado que aparece no cartão. Caso haja dúvida, solucione com a professora.

- Em seu registro procure relatar qual é o procedimento que você utilizou para resolver o desafio.

Cartões para o Jogo da Velha

Cartões com os desafios:

A- Qual expressão representa a área de um retângulo de dimensões x e x+1?	**B-** Qual é o resultado da divisão de $12x^2$ por $4x$?	**C-** Um dos lados do retângulo mede $x^2 + 3$ e o outro mede $x + 1$. Qual é a área desse retângulo?
D- Qual é o quadrado de $(2x - 8)$?	**E-** Qual é o resultado da soma dos polinômios $x^4 + 3x^2 - 5$ e $-3x^2 + 9$?	**F-** Qual o resultado da operação : $(2x^4 + x^2 - 5) - (-5x^2 + 7)$?
G- Qual é o produto de $6a^2$ por $(-2a^2)$?	**H-** Qual expressão representa o triplo de $4x - 2$?	**I-** Escreva a expressão que representa o perímetro de um quadrado de lado $x - 1$.

Cartões com as respostas:

A	B	C	D
$x^2 + x$	$3x$	$x^3 + x^2 + 3x + 3$	$4x^2 - 32x + 64$

E	F	G	H
$x^4 + 4$	$2x^4 + 6x^2 - 12$	$-12a^2$	$12x - 6$

I
$4x - 4$

Escola:______________________________ ______________________ __

Nome:_______________________Turma:________ Data:___/___/___

Professora:____

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

Atividade 3 **ALGEPLAN E O QUADRADO DA SOMA**

Habilidades Trabalhadas

- ✓ Representar polinômios utilizando o Algeplan.
- ✓ Reconhecer polinômios equivalentes observando as peças do Algeplan.
- ✓ Determinar a área de figuras geométricas formadas com as peças do Algeplan.
- ✓ Representar geometricamente o produto notável "quadrado da soma".

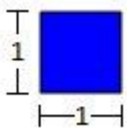
Conhecendo o Algeplan

O Algeplan é um material manipulativo utilizado para no trabalho com as operações com polinômios de grau, no máximo dois, considerando as áreas de retângulos. A partir desta ideia, são construídas as peças que representam os monômios que compõem este material. Para representações negativas utilizamos o verso das peças.

No endereço http://mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/algeplan.swf podemos acessar o Algeplan digital

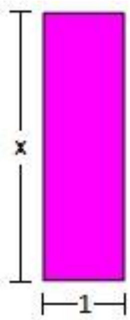
Os monômios que compõem o "Algeplan" são apresentados abaixo. Usaremos a notação u.m. significando unidade de medida de comprimento e u.a. significando unidade de área.

O número “1”, indicado na figura abaixo, representa a área do quadrado de lado unitário.



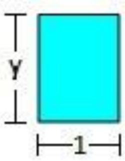
1 u.m. × 1 u.m. = 1 u.a.

O “x”, representado na figura abaixo, indica a área do retângulo que possui um dos lados medindo 1 u.m. e o outro, medindo x u.m.



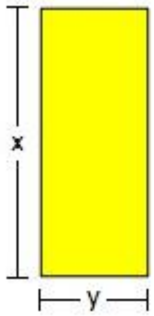
1 u.m. × x u.m. = x u.a.

O “y”, representado na figura abaixo, indica a área do retângulo com um dos lados medindo 1 u.m. e o outro, medindo y u.m.



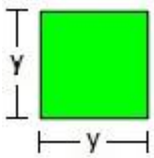
1 u.m. × y u.m. = y u.a.

O “xy”, representado na figura abaixo, indica é a área do retângulo com um dos lados medindo x u.m. e o outro medindo y u.m.



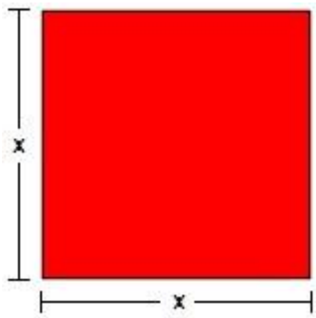
x u.m. × y u.m. = xy u.a.

O “y^2”, representado na figura abaixo, indica a área do quadrado de lado medindo y u.m.



y u.m. × y u.m. = y^2 u.a.

O “x^2”, representado na figura abaixo, indica área do quadrado de lado medindo x u.m.



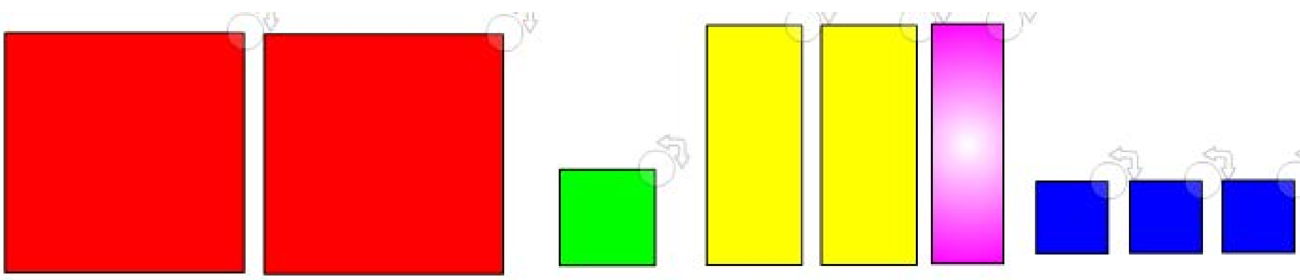
x u.m. × x u.m. = x^2 u.a.

Observamos que a medida unitária, x e y são arbitrárias, porém obedecem a seguinte relação: a medida unitária é menor do que a medida y, e a medida y é menor do que a medida x.

Atividades

1. Modelar, utilizando as diferentes peças do Algeplan, o polinômio: $2x^2 + y^2 + 2xy - x + 3$.

A solução consiste essencialmente em identificar, em cada termo do polinômio, quais e quantas “peças” do Algeplan estão envolvidas e agrupá-las. Veja:



2. Agora, represente no Algeplan virtual a expressão $-x^2 + 6x - 2xy - 4$.

3- Monte um quadrado utilizando uma peça vermelha, uma peça verde e duas peças amarelas. ? Conseguiu? Se tiver dúvida procure a professora.

- Agora, utilizando a peça montada, responda:

a) Escreva outra expressão algébrica para representar a área do quadrado que você montou.

b) A expressão $(x+y)^2$ é considerada em Matemática um **produto notável.** Você sabe por quê? Converse com seus colegas e sua professora e registre aqui.

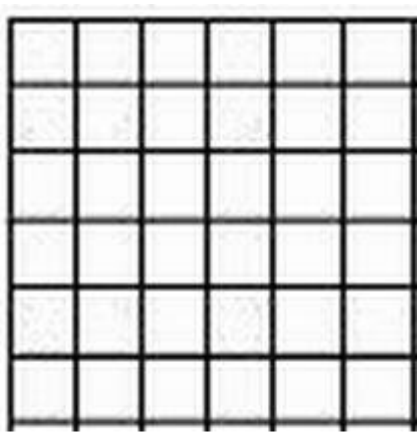
c) Você conhece outros produtos notáveis? Se ainda não conhece, a professora vai te apresentar.

d) Considerando x= 5 cm e y= 2cm, calcule a área:

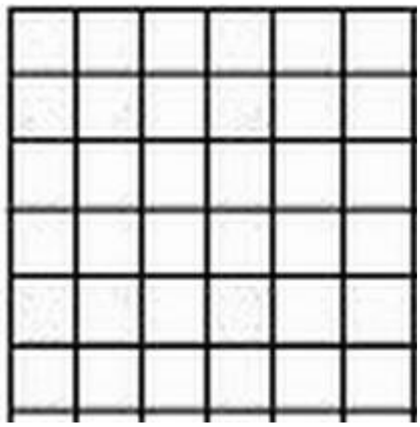
- do quadrado vermelho
- do quadrado verde
- de um dos retângulos amarelos
- total da figura.

4- Utilize as conclusões da questão anterior para escrever cada produto notável na forma de trinômio do quadrado perfeito. Para isso, represente geometricamente cada situação, utilizando a malha quadriculada.

a) $(x + 3y)^2$



b) $(2x + y)^2$



APÊNDICE H

Atividades da Sequência Didática Aplicadas ao 9^O Ano do Ensino Fundamental

PROFMAT

Escola:____

Nome:____________________ Turma:______ Data:___/___/___

Professora:______________________________________

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade 1 **Trabalhando com sistemas de equações do 1º grau**

Habilidades trabalhadas:

- ✓ Representar, por meio de um sistema, um desafio envolvendo equações do 1º grau.
- ✓ Reconhecer os significados algébrico e geométrico da solução de um sistema linear.
- ✓ Utilizar o software Geogebra para registrar a solução geométrica de um sistema linear.

DESAFIO 1

Carlos sacou 110 reais em um caixa eletrônico. Essa quantia era composta apenas por cédulas de 10 e 20 reais, em um total de 8 cédulas. Quantas cédulas de cada valor Carlos sacou ?

a) Represente o desafio proposto, utilizando equações. Quais incógnitas você utilizou nas equações? Qual é o significado de cada uma delas, de acordo com o contexto do desafio?

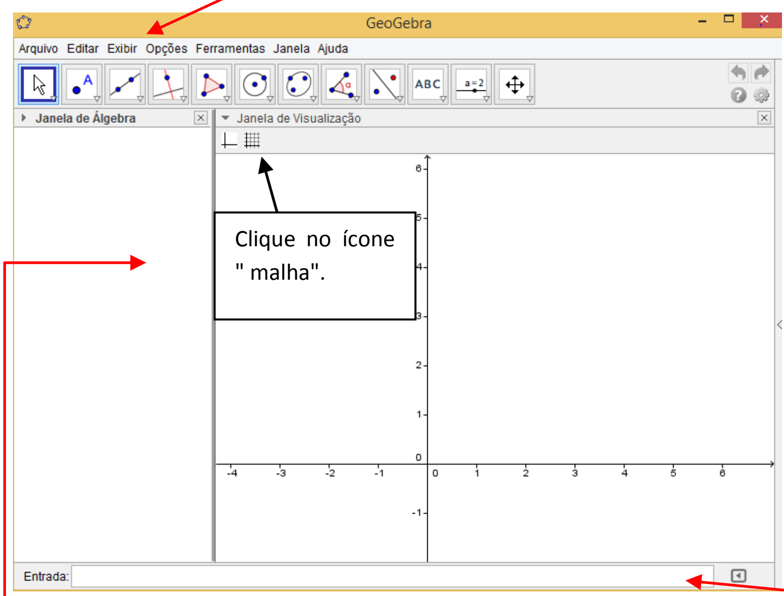
____

____

b) Resolva, algebricamente, o sistema proposto. Explique o seu raciocínio, indicando o método que você usou para resolvê-lo.

c) Agora, vamos utilizar o *Geogebra* para apresentar a solução gráfica do sistema. O *Geogebra* é um programa computacional que possibilita a representação de retas e curvas em um plano cartesiano. Para melhor visualização, o programa exibe o plano em uma malha quadriculada. Acompanhe as dicas!

Clique em exibir. Em seguida, clique em janela de Álgebra. Aparecerá a seguinte tela:

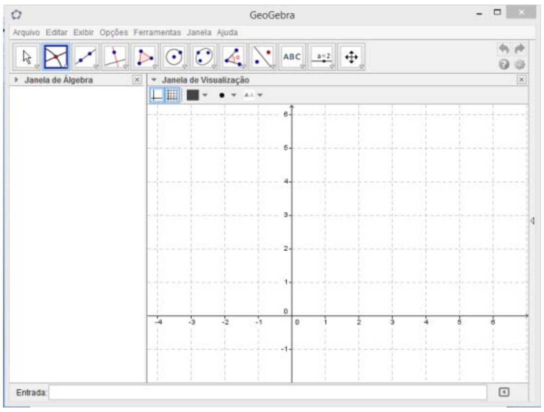


No campo entrada digite uma das equações do sistema e pressione "Enter".

\- Que tipo de representação gráfica apareceu na tela? ____________________. Esta representação mostra, graficamente, a equação indicada por você. Acompanhe todos os registros através da "Janela de Álgebra".

2ª Dica- Repita o procedimento indicado na primeira dica, para representar a segunda equação do sistema.

3 ª Dica- Selecione a ferramenta "Interseção de dois objetos"  **.** Clique em uma das retas e, em seguida, na outra. O ponto A obtido é a interseção das duas retas, ou seja, as coordenadas desse ponto correspondem à solução do sistema.



DESAFIO 2

Escreva uma equação do 1º grau com duas incógnitas e troque com um colega. Em seguida:

a) represente a equação no plano cartesiano utilizando o programa *Geogebra;*

b) construa três pontos sobre a reta e determine três soluções da equação.

c) verifique se os pares ordenados obtidos realmente são soluções da equação utilizando lápis, papel e calculadora.

DESAFIO 3

Resolva graficamente o sistema linear, utilizando o *Geogebra*. Resolva-o, também, algebricamente. Em seguida, discuta com seus colegas do grupo a solução gráfica encontrada e a relacione com a solução algébrica.

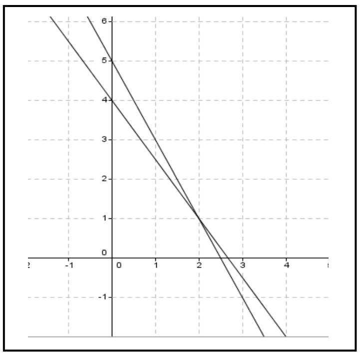
$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 6y - 2x = 4 \end{cases}$$

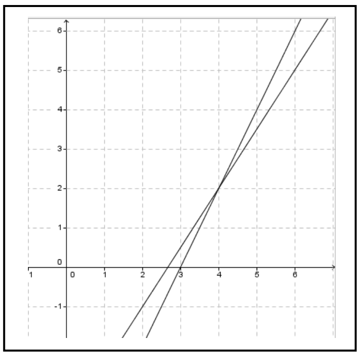
DESAFIO 4

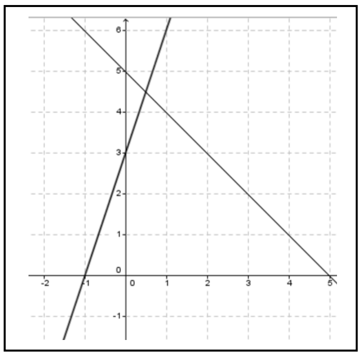
(Adaptação do Simulado da Prova Brasil- 2011, MEC) Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$ 8,00. Danilo comprou 2 canetas e um lápis pagando R$ 5,00. Qualé o preço, em reais, de cada lápis?

a) Represente o desafio utilizando um sistema de equações do 1º grau.

b) Qual dos gráficos a seguir representa, graficamente, o sistema de equações que você montou no item anterior?







Escola:____

Nome:______________________Turma:________ Data:___/___/___

Professora:____

Atividade 2 **EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

Habilidades trabalhadas

- ✓ Definir uma equação do 2º grau identificando seus coeficientes.
- ✓ Verificar se um número real é ou não solução de uma equação do 2º grau.
- ✓ Resolver equações do 2º grau, incompletas.
- ✓ Interpretar situação-problema envolvendo equação do 2º grau, apresentada na teleaula, argumentando suas ideias e raciocínios.

1. Apresentação da "Teleaula 43" do Novo Telecurso, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0obrznICwbg

2. Em grupo de quatro alunos, vamos refletir e responder questões sobre o conteúdo apresentado no vídeo.

- ✓ Como se define uma equação de 2º grau?

____
____
____

- ✓ Qual o significado da palavra coeficiente? Na equação do 2º grau quais coeficientes podemos identificar? Por que o coeficiente do termo x^2 não pode ser nulo numa equação do 2º grau?

____
____
____

- ✓ Verifique se x= -52 é solução da equação $x^2 + 12x - 2080 = 0$, apresentada no vídeo. Este valor poderá ser considerado resposta do desafio proposto? Por quê?

____
____
____

- ✓ No vídeo aparecem algumas equações do 2º grau incompletas. Escreva duas equações incompletas, diferentes das que apareceram na teleaula e tente resolvê-las.

- ✓ Em uma das cenas apresentadas no vídeo, a atriz afirma:

- Você concorda com esta afirmativa? Justifique sua resposta.____
____

PROFMAT	Escola:____ Nome:________________________ Turma:_______ Data:___/___/___ Professora:____	UENF

Atividade 3 RESOLVENDO EQUAÇÕES UTILIZANDO PRODUTOS NOTÁVEIS[1]

Habilidades trabalhadas:

- ✓ Realizar manipulações geométricas para ilustrar alguns casos de produtos notáveis
- ✓ Utilizar produtos notáveis para resolver equações do segundo grau.

Para início de conversa...

- Você sabe definir o que são produtos notáveis? Vamos discutir um pouco sobre este assunto, pois vamos utilizá-los nesta atividade.

- Agora, já podemos seguir as etapas da atividade.

Etapa 1: Relembrando a propriedade distributiva

a) Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.

b) Escreva uma expressão algébrica para indicar a área de cada uma das peças dadas.

c) Com essas quatro peças, construa um retângulo.

d) Qual é a medida dos lados desse retângulo que você construiu?

e) Expresse a área do retângulo construído utilizando as medidas de seus lados.

f) Você deve ter observado que a área do retângulo construído é igual à soma das áreas das quatro peças retangulares. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Etapa 2: Produtos notáveis: o quadrado da soma de dois termos.

a) Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.

b) Escreva uma expressão algébrica para indicar a área de cada uma das peças dadas.

c) Com essas quatro peças, construa um quadrado.

d) Qual é a medida dos lados desse quadrado que você construiu?

e) Expresse a área do quadrado construído utilizando a medida de seu lado.

f) Você deve ter observado que a área do quadrado construído é igual à soma das áreas das quatro peças dadas. Expresse algebricamente essa relação de igualdade.

Etapa 3: Produtos notáveis : o quadrado da diferença entre dois termos.

a) Recorte as peças dadas, disponíveis na sua folha de atividades.

b) Qual é a área de cada uma das peças dadas?

c) Com essas quatro peças, obtenha um quadrado de lado m-n. Para isso, sobreponha as peças dadas para retirar ou acrescentar áreas. Descreva seu raciocínio.

d) Qual é área do quadrado construído?

e) Você deve ter observado que o quadrado de lado m-n pode ser obtido se: retirarmos do quadrado de lado **m** um retângulo de dimensões **n** e **m**; acrescentarmos um quadrado de lado **n** à construção feita e, finalmente, retirarmos outro retângulo de dimensões **n** e **m.**

- Expresse algebricamente essa relação de igualdade entre a área do quadrado e a sequência de operações expostas acima.

Etapa 4: Produtos notáveis: o produto da soma pela diferença de dois termos.

a) Recorte as peças disponíveis para esta etapa da atividade.

b) Construa um retângulo de dimensões **m + n** e **m – n.** Justaponha as peças para acrescentar e sobreponha para retirar,

c) Qual é área do retângulo construído? Explique como você chegou a esta conclusão.

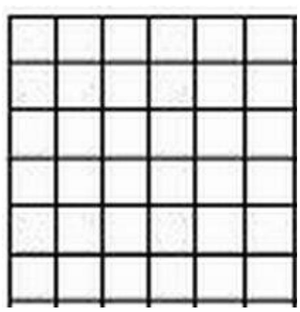
d) Você deve ter observado que o retângulo de dimensões **m + n** e **m – n** pode ser obtido se: acrescentarmos ao quadrado de lado **m,** um retângulo de dimensões **m** e **n**; retirarmos, do retângulo de lados **m** e **m + n** formado, um quadrado de lado **n** e um retângulo de dimensões **m** e **n**.

- Expresse algebricamente essa relação de igualdade entre a área desse quadrado e a sequência de operações expostas acima.

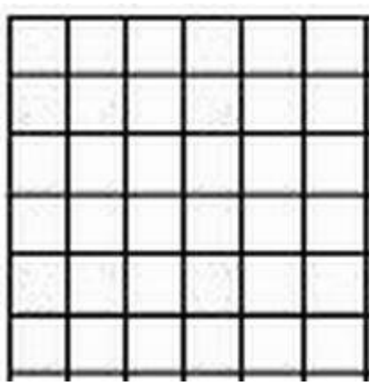
Agora, utilizando as conclusões das etapas anteriores, responda as questões a seguir:

<u>Questão 1</u>: Desenvolva, algebricamente, os seguintes produtos notáveis. Registre geometricamente suas conclusões.

a) $(x - 4)^2$



b) $(x + 5)^2$

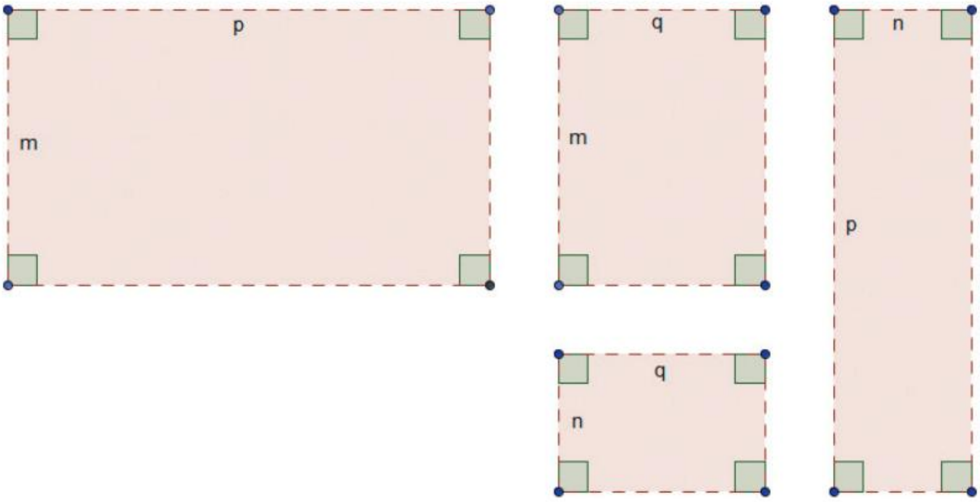


Questão 2: Utilizando as informações da questão anterior e aplicando os produtos notáveis, resolva as seguintes equações:

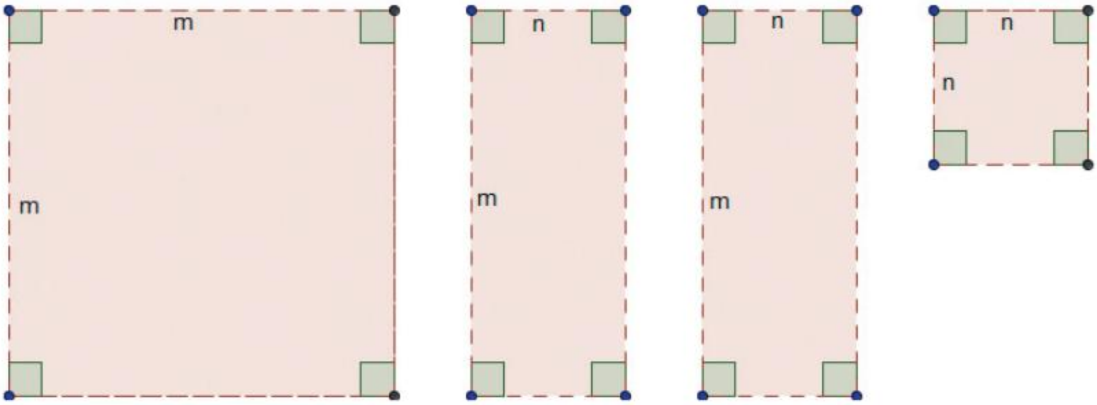
a) $x^2 - 8x + 16=0$

b) $x^2 + 10x + 25=0$

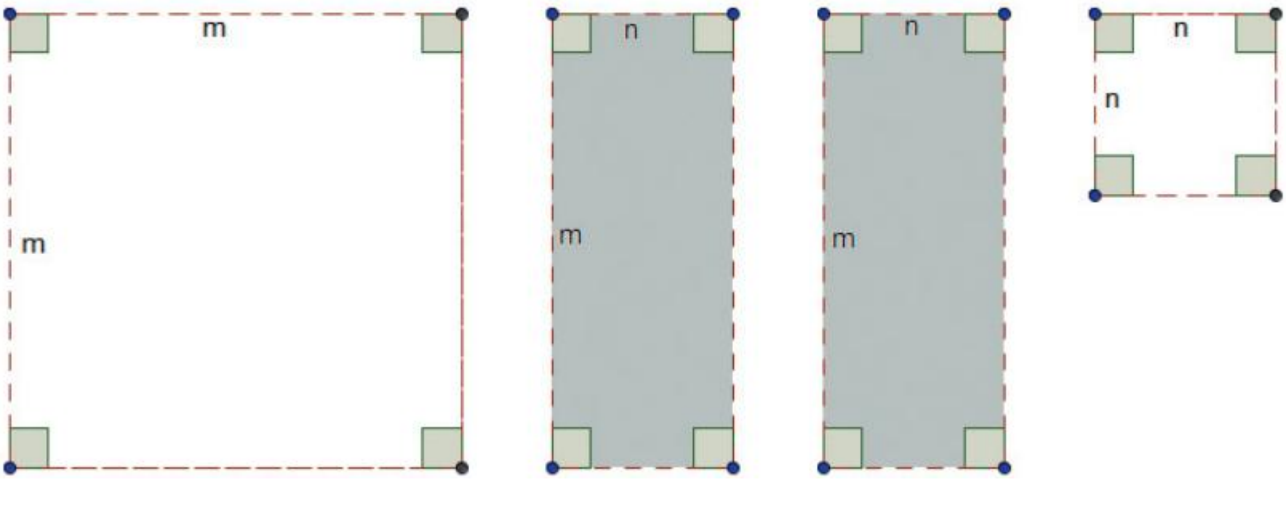
Figuras para serem usadas na etapa 1



Figuras para serem usadas na etapa 2



Figuras para serem usadas nas etapas 3 e 4



[1] Adaptação da atividade proposta pela Secretaria Estadual de Educação- Programa Nova Eja, 2013 (http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/material-professor/modulo-01/MATEMATICA-MOD01-VOL01.pdf)

Anexos

ANEXO A

Roteiro para a avaliação dos alunos do 6^{O} Ano

Mestrado Profissional em Matemática

Avaliando o Trabalho

Assinale a carinha que melhor representa seu grau de satisfação em relação às atividades desenvolvidas neste projeto, justificando sua resposta.

____

____

____

____

____

____

(Fonte: Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro, Roteiro de Atividades......)