GUILHERME COELHO MACHADO

O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS ATRAVÉS DA OBSERVAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS E SUA APLICAÇÃO EM COMPETIÇÃO DE CONSTRUÇÃO DE PONTES DE ESPAGUETE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2016

GUILHERME COELHO MACHADO

O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS ATRAVÉS DA OBSERVAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS E SUA APLICAÇÃO EM COMPETIÇÃO DE CONSTRUÇÃO DE PONTES DE ESPAGUETE

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **12/2017**

Machado, Guilherme Coelho
O estudo dos triângulos através da observação de estruturas treliçadas e sua aplicação em competição de construção de pontes de espaguete / Guilherme Coelho Machado. – Campos dos Goytacazes, 2016.
99 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 69.
1. GEOMETRIA 2. TRIÂNGULOS 3. CONHECIMENTO E APRENDIZAGEM 4. MEDIADOR 5. ESTRUTURAS 6. PONTES I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516

GUILHERME COELHO MACHADO

O ESTUDO DOS TRIÂNGULOS ATRAVÉS DA OBSERVAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS E SUA APLICAÇÃO EM COMPETIÇÃO DE CONSTRUÇÃO DE PONTES DE ESPAGUETE

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 23 de Novembro de 2016.

Prof. Nilson Sérgio Peres Sthal
D.Sc. - UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFFluminense - Campus Campos Centro

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF

Dedico este trabalho a minha família, aos meus colegas de curso, a todos os professores que compartilharam seus conhecimentos e aos meus alunos. Que Deus ilumine-os e proteja-os sempre.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir mais esta etapa de meus estudos e aprendizagem, pela proteção dada nas inúmeras viagens realizadas, pois sem ele nada disso seria possível.

A minha família, pela compreensão de minha ausência em muitos finais de semana, ao apoio e incentivo em todos os momentos.

Aos meus colegas de curso aos quais posso chamar de amigos, pois estes foram ao longo desses dois anos de convivência elevados ao mais alto grau de apreço e admiração, sobretudo aos meus companheiros de viagem Douglas Eiriz e Gilberto Caetano.

Aos meus alunos pela confiança, colaboração e dedicação na confecção dos trabalhos propostos.

Ao meu orientador pela compreensão, apoio e ensinamentos dispensados a mim durante o trabalho.

Aos professores do PROFMAT da UENF, pela dedicação e pelos conhecimentos transmitidos ao longo do curso.

Ao grupo de estudos de Cachoeiro de Itapemirim, em especial ao grande amigo Humberto Silveira Gonçalves Filho, pelo apoio nas horas mais difíceis, sendo meu grande incentivador e colaborador.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, acreditaram na proposta de estudo apresentada e incentivaram a realização deste curso e sobretudo deste projeto. A todos o meu muitíssimo obrigado.

"Um homem que nunca muda de opinião, em vez de demonstrar a qualidade de sua opinião demonstra a pouca qualidade de sua mente."
Marcel Achard

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de mostrar um procedimento metodológico para o estudo da geometria e sua utilização tanto no 2º segmento do Ensino Fundamental como no Ensino Médio, baseado na investigação matemática através de atividades experimentais. O propósito é despertar o interesse dos alunos para a compreensão de conteúdos específicos da matemática, neste caso a geometria, mais especificamente o estudo dos triângulos, melhorar a sua aprendizagem e entendimento por meio da necessidade de demonstração matemática, com a finalidade de comprovar que os triângulos são figuras geométricas rígidas, por isso eles estão presentes nas estruturas de construção. Para tanto, foi apresentada uma descrição da utilização dos triângulos desde os primórdios da história antiga, em seguida os alunos foram estimulados a observar as construções ao seu redor e identificar a forma geométrica mais presente em suas construções, por meio da metodologia da investigação matemática. Na etapa seguinte, os alunos receberam todo o embasamento teórico acerca do estudo dos triângulos, adequado ao nível de ensino a que estavam cursando. Por fim, foram divididos em grupos para construírem pontes de espaguete. Nesta última etapa, como forma de utilização prática dos conhecimentos adquiridos, os alunos construíram as pontes e estas foram expostas e ao final realizado um ensaio destrutivo das mesmas, momento em que foi avaliada qual a ponte melhor construída, assim como os conhecimentos adquiridos utilizados, e a que suportou o maior peso. Os resultados de aplicação da proposta em sala de aula foram positivos, junto aos alunos da primeira série do ensino médio do Instituto de Pesquisas Educacionais, escola da rede particular de ensino da cidade de Cachoeiro de Itapemirim-ES. Neste trabalho, o professor exerceu papel de mediador e não de mero transmissor do conhecimento.

Palavras-chaves: geometria, triângulos, conhecimento, mediador, prática, pontes e estruturas.

Abstract

This study aims to present a pedagogical method of geometry study to use both in the 2nd segment of elementary school and in high school, based on mathematical research through experimental activities, in order to arouse the interest of students of understanding specific contents of mathematics, in this case the geometry, specifically the study of triangles, improving their learning and understanding through the need for mathematical demonstration to prove that the triangles are the most rigid geometric figures and, therefore, are present in structures of construction. Therefore, a description of the use of triangles from the early days of ancient history was presented, then the students were encouraged to observe the buildings around then and identify the most present geometric shape in its structures, through mathematical research methodology. In the next step the students received all the theoretical knowledge about the study of triangles, appropriate to the level of education that were attending and, finally, they were divided into groups to build spaghetti bridges as a way of practical use of the knowledge acquired, the bridges were exposed and finally it was a destructive test, when it was evaluated which was the best bridge constructed, using the knowledge acquired and which bore the greater weight. The results of the proposed application in the classroom were positive, with the students of the first year of high school at the Institute of Educational Research, School of private schools net in the city of Cachoeiro de Itapemirim-ES. In this work, the teacher played the role of mediator and not a mere transmitter of knowledge.

Key-words:geometry, triangles, knowledge, mediator, practice, bridges and latticed structures.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

Lista de símbolos

Δ	Letra grega Delta
$\bigcap$	Intersecção
$\sim$	Semelhante
$\equiv$	Congruente
$<$	Menor
$>$	Maior

Sumário

Introdução

Quando os professores iniciam um assunto relativo a qualquer área da geometria é comum ouvirem por parte dos alunos manifestações de rejeição. Mas por que isso ocorre?

É comum ouvirmos de vários professores, que há alguns anos atrás, os livros didáticos traziam a geometria nos seus capítulos finais e isso comprometia o processo ensino e aprendizagem. Pois esse importante componente curricular só era estudado no final de cada ano letivo e, com isso, havia um lapso temporal de quase um ano letivo entre uma abordagem e outra da geometria. Recentemente, esse equívoco foi parcialmente corrigido e a maioria dos livros didáticos aborda a geometria de forma paralela às demais áreas da matemática ao longo do ano letivo e, além disso, muitas escolas adotam o sistema de dois professores, sendo um exclusivamente para geometria.

O objetivo geral deste trabalho é despertar nos alunos o interesse pelo estudo da geometria, através de uma proposta diferenciada da abordagem do estudo dos triângulos. Os objetivos específicos deste trabalho são: realizar um estudo completo dos triângulos fazendo com que os alunos percebem sua importância na construção de objetos e na construção civil, sobretudo em estruturas treliçadas; proporcionar uma aprendizagem significativa em que o aluno é levado a fazer suas descobertas com a mediação do professor e capacitar o aluno para a utilização dos conhecimentos adquiridos na prática, através da construção das pontes de espaguete.

Para consolidar o estudo da geometria e mudar definitivamente o olhar do aluno para a relevância de tal conteúdo, o ideal é sair do campo teórico para o prático. Desta forma, a aprendizagem se torna mais significativa e consistente. Para alcançar os resultados desejados, o presente trabalho foi estruturado em cinco capítulos seguindo a sequência das atividades desenvolvidas com os alunos.

No capítulo 1, será apresentado um histórico sobre alguns matemáticos como Tales, Pitágoras, Ptolomeu e Hiparco, que contribuíram significativamente para o estudo da geometria, sobretudo para o estudo dos triângulos. O objetivo é mostrar a origem das descobertas desses estudiosos e a importância de suas descobertas.

No capítulo 2, será apresentado os procedimentos metodológicos de ensino utilizada, o embasamento teórico a respeito desta metodologia e a justificativa para tal escolha.

No capítulo 3, será apresentado a primeira fase do trabalho aplicado aos alunos, onde procurou-se despertar o interesse do aluno pelo estudo da geometria por meio da observação de objetos, construções e imagens.

No capítulo 4, será apresentado, primeiramente, resultados de uma avaliação diagnóstica, que teve o intuito de verificar os conhecimentos prévios assimilados pelos alunos sobre o estudo dos triângulos. Em seguida, todo o embasamento teórico sobre o reestudo dos triângulos que foi ministrado aos alunos.

No capítulo 5, será apresentado um breve estudo sobre pontes de estruturas treliçadas. Em seguida, todas as etapas de construção da ponte de espaguete realizadas pelos alunos, utilizando os conhecimentos adquiridos ao longo do projeto, a exposição das pontes e o ensaio de destruição das mesmas, mostrando que a rigidez de uma estrutura de construção não está apenas no material utilizado, mas também na forma geométrica que a compõem. Ao final, serão apresentados os resultados de uma avaliação final aplicada aos alunos, demonstrando uma melhora significativa nos resultados, sendo perceptível que os objetivos foram atingidos.

Sobre o assunto proposto, não foi encontrado nenhum trabalho de proposta igual. Porém, foram encontrados trabalhos de cunho semelhante como o trabalho de Rodrigues (2015) que pesquisou a aplicação da Teoria de Van Hiele ao estudo dos triângulos, Souza (2016) que pesquisou a geometria aplicada à construção de pontes em arco e Silva (2016) que pesquisou a trigonometria no triângulo retângulo e exemplos na construção civil, entre outros.

Por derradeiro, buscando um gancho na Filosofia, Platão criador das academias, grande entusiasta da matemática no seu tempo, momento em que muitos matemáticos foram seus alunos ou amigos. Nesse sentido, deve-se lembrar que à entrada de sua Academia, segundo historiadores posteriores, se lia: "Que não entre quem não saiba geometria".

Capítulo 1

Histórico

Na busca de um histórico sobre o surgimento e utilização dos triângulos, pode-se observar que a dedicação ao estudo dos triângulos é bem antiga. Os professores têm o costume de citar teoremas e axiomas sem considerar que existe um contexto histórico para se chegar a tais conclusões. Talvez se os professores levassem isso em consideração, a aprendizagem se tornaria algo mais eficaz e palpável do que simplesmente decorar e repetir teoremas e axiomas, com isso os alunos evitariam fazer a clássica pergunta sobre onde usar determinados componentes curriculares na vida prática e os professores de matemática seriam privados de ouvir tais questionamentos e de ter que respondê-los. A seguir estão algumas das histórias mais conhecidas acerca dos triângulos.

1.1 Tales

Uma das etapas do estudo dos triângulos diz respeito à semelhança e seu estudo é bem antigo. Os gregos estudaram a geometria e à elevaram a um grau de excelência, ganhando notoriedade Tales de Mileto (624-546 a. C.), com o estudo das proporções entre grandezas e a comparação entre figuras semelhantes. Esta notoriedade foi adquirida, segundo a lenda, ao medir a altura de uma Pirâmide do Egito, demonstrando que a relação existente entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes é sempre a mesma.

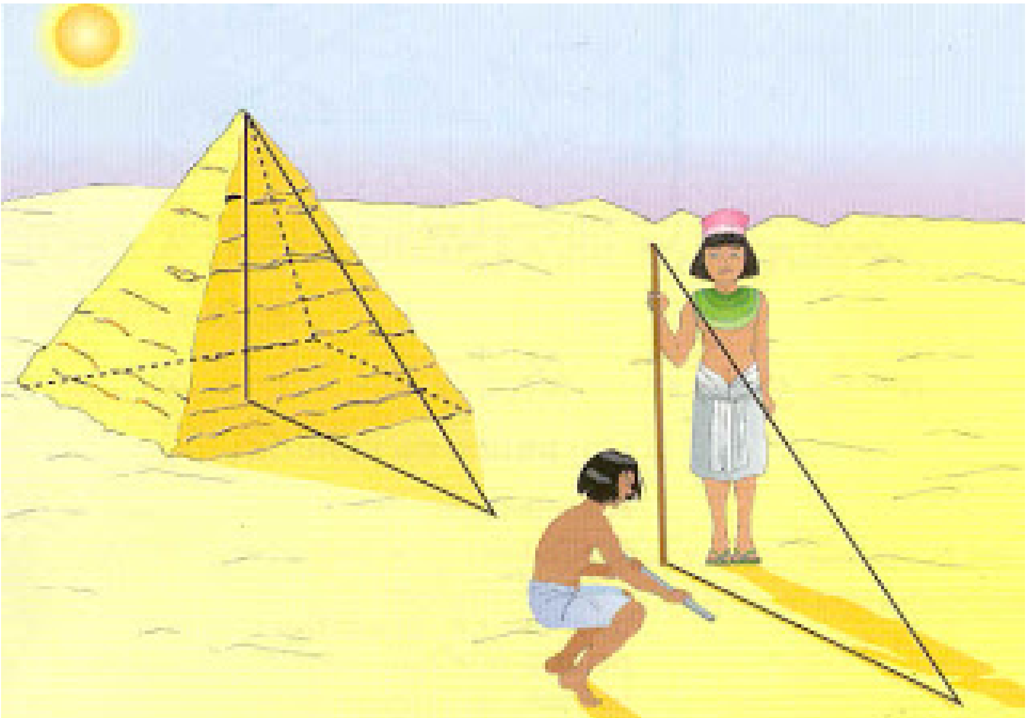
> Concretamente, pouco se sabe sobre Tales. De acordo com a lenda, ele teria nascido na cidade jônica grega de Mileto, no litoral oeste da Ásia Menor, atual Turquia. Várias afirmações conhecidas são atribuídas a ele, entre elas que visitou o Egito e calculou a altura das pirâmides; que previu um eclipse solar em 585 a. C.; que mostrou que esfregar penas com uma pedra produz eletricidade e que criou a expressão "conhece-te a ti mesmo". (FLOOD; WILSON, 2013, p. 20)

> Tales é considerado, geralmente, o primeiro matemático grego importante. Bertrand Russel afirmou que "a filosofia ocidental começa com Tales", e, na verdade, Tales era considerado um dos Sete Sábios da Grécia, título conferido por tradição a sete extraordinários filósofos gregos do século VI a. C. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 20)

Foi de posse do pensamento de que a relação existente entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes é sempre a mesma, independente do comprimento de seus lados, que Tales mediu a altura da Pirâmide de Quéops.

É comum os livros didáticos, como Iezzi, Dolce e Machado (1993), trazerem a história que durante uma viagem de Tales ao Egito, este fora abordado pelos escribas egípcios a mando do Faraó, para que calculasse a altura de uma pirâmide de base quadrangular. Após observar o tamanho da sombra que a Pirâmide projetava sobre o solo, Tales teria então fixado uma vara ao solo e esperado até o momento em que o comprimento da vara fosse igual ao comprimento de sua sombra. Pediu então que um dos escribas medisse imediatamente o comprimento da sombra da Pirâmide, alertando que a altura da Pirâmide era igual a comprimento da sombra. Claro que se levou em consideração o acréscimo da metade do lado da base da pirâmide ao comprimento da sombra, como compensação. História ilustrada na figura 1.

Figura 1 – Tales medindo a altura da pirâmide



Fonte:<http://matematicaferafacitec.blogspot.com.br/2011/08/ tales-de-mileto-piramide-e-o-teorema.html>

1.2 Pitágoras

> O Teorema de Pitágoras foi um dos grandes feitos do estudo dos triângulos. O quase lendário Pitágoras (570-490 a. C.), vejam figura 2, nasceu na Ilha de Samos, no Mar Egeu. Na juventude estudou matemática, astronomia, filosofia e música. Possivelmente por volta de 520 a. C., partiu de Samos e foi para o porto grego de Cretona (hoje no sul da Itália) e criou uma escola filosófica, hoje conhecida como pitagórica. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 22)

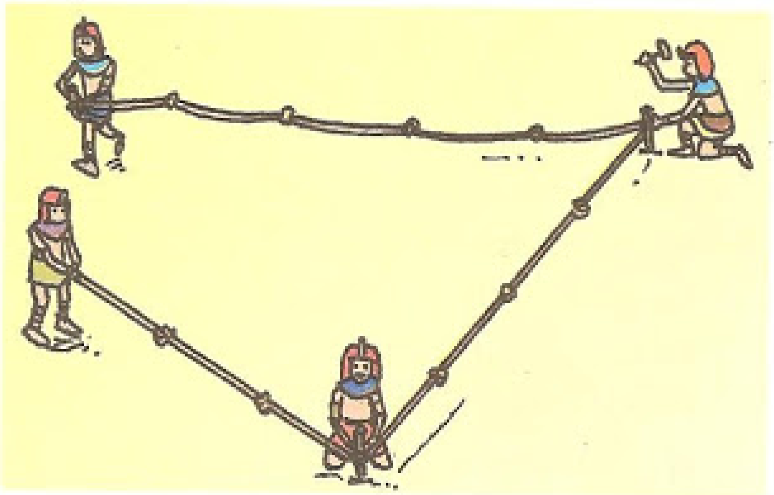
Figura 2 – Pitágoras e o Papiro

Fonte:<http://amatemticadavida.blogspot.com.br/search?q=pit%C3%A1goras>

Não se tem confirmação da veracidade sobre a história que conhecemos sobre o Teorema de Pitágoras e, até mesmo, se podemos atribuir a descoberta do Teorema que leva seu nome a ele. A certeza que se tem é que Pitágoras existiu e contribuiu muito para o estudo e desenvolvimento da geometria, sendo importantíssimo para o estudo da trigonometria plana. Há registros sobre o conhecimento do Teorema atribuído a Pitágoras pelos mesopotâmeos cerca de mil anos antes de Pitágoras nascer, o que nos leva a crer, que Pitágoras tenha sido sim, o primeiro a prová-lo.

No Egito, na mesma época, os agricultores esticavam cordas às margens do Nilo para demarcar terras para utilizarem na agricultura e nesta época já sabiam que um triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 era um triângulo retângulo. Acredita-se também, que Pitágoras possa ter tido contato com esses agricultores e utilizado desse conhecimento para provar o Teorema que leva seu nome. Vejam figura 3:

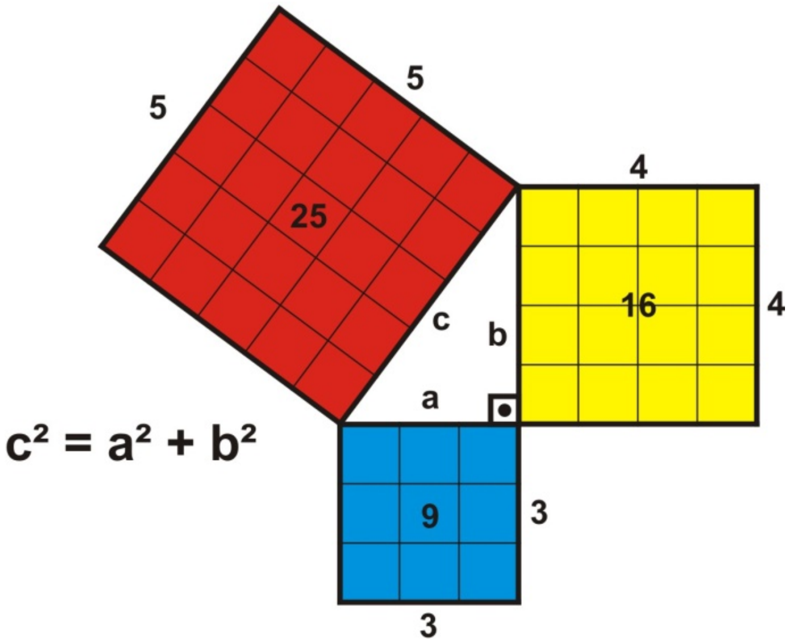
Figura 3 – Agricultores egípcios



Fonte:<http://fundamentalmatsv.blogspot.com.br/p/historia-da-matematica.html>

Em termos geométricos, o Teorema de Pitágoras pode ser provado tomando-se um triângulo retângulo e desenhando quadrados em cada um de seus lados, a área do quadrado de lado mais comprido é igual a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados, isto é, contando-se o número de quadradinhos que compõem cada um dos quadrados, verifica-se facilmente, por exemplo, que 25 = 16 + 9, conforme figura 4:

Figura 4 – Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte:<http://www.estudokids.com.br/search/teorema+de+pit%C3%A1goras>

Este raciocínio do Teorema que leva o nome de Pitágoras, está registrado em um papiro antigo. Vejam figura 5:

Figura 5 – Papiro com o Teorema de Pitágoras

Fonte:<http://grandesmatematicas.os.blogspot.com.br/p/p4.html>

Os Pitagóricos subdividiram as ciências matemáticas em quatro: aritmética, geometria, astronomia e música, chamadas de quadrivium. Vejam figura 6:

Figura 6 – Quadrivium

Fonte:<arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/>

> Na música, os Pitagóricos também faziam experiências, principalmente ligações entre certos intervalos musicais e razões simples entre números pequenos. É provável que tenham descoberto essas razões tangendo cordas de comprimento diferente e comparando as notas produzidas; por exemplo, o intervalo harmonioso de uma oitava resulta de reduzir a metade o comprimento da corda, dando a razão de 2 para 1 entre as frequências, enquanto outro intervalo harmônico, a quinta justa, resulta em reduzir a corda a dois terços do comprimento, com razão de 3 para 2. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 23)

1.3 Trigonometria

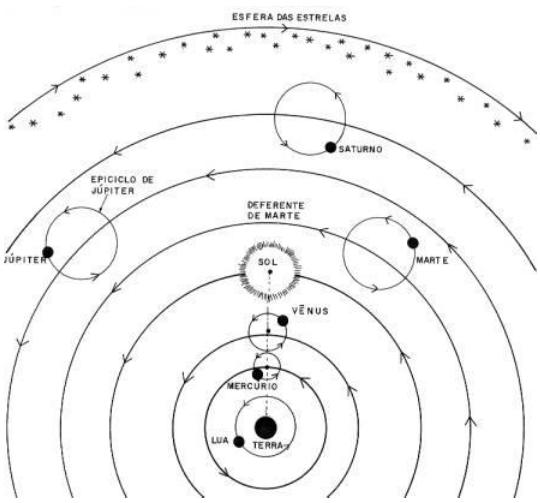
> A primeira abordagem trigonométrica da astronomia foi feita por Hiparco (190-120 a. C.), às vezes, chamado de "Pai da Trigonometria". Talvez o maior observador astronômico da antiguidade, ele descobriu a precessão dos equinócios, produziu o primeiro catálogo de estrelas conhecido e, para produzir senos de ângulos, construiu uma "tabela de acordes". Cláudio Ptolomeu de Alexandria (170-100 a. C.) baseou-se no trabalho de Hiparco e outros para produzir a sua grande obra sobre astronomia conhecida como Almagesto. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 32)

> Embora pouco da obra de Hiparco tenha sobrevivido, Cláudio Ptolomeu o considerava seu antecessor mais importante. Na verdade, a disciplina da Trigonometria (que significa medição de ângulos), criada por Hiparco por volta de 150 a. C., foi desenvolvida por Cláudio Ptolomeu. Para seu trabalho em astronomia, foi fundamental o cálculo do comprimento de cordas e círculos - corda é o segmento de reta que une dois pontos do círculo; corresponde a calcular para vários ângulos a razão trigonométrica chamada seno. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 33)

> Para descrever o movimento do sol e dos planetas, Ptolomeu criou epiciclos, pequenos círculos centrados na principal órbita circular, em que se vê o sol um planeta em movimento. O ajuste adequado de distâncias, do centro de rotação e da velocidade da rotação lhe permitia fazer as suas previsões apuradas. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 33)

Vejam os epiciclos na figura 7:

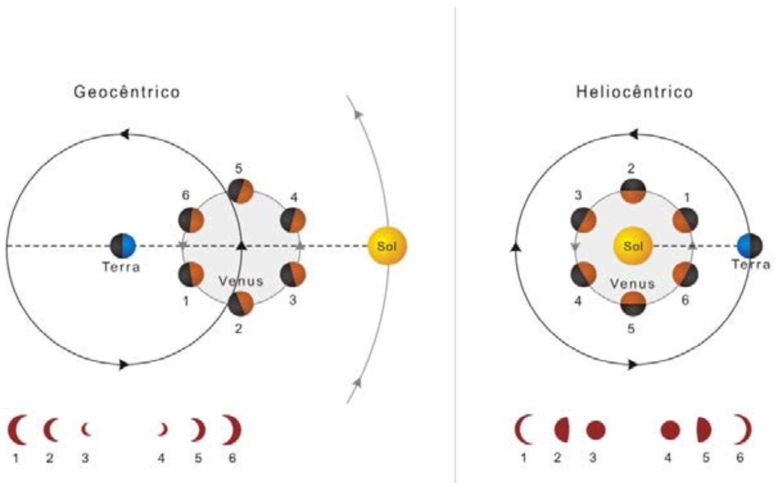
Figura 7 – Epiciclos Ptolomaicos



Fonte:<http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Geraldo/ptolemaico.htm>

Aproveitando um gancho interdisciplinar com as disciplinas de Geografia e História, facilmente verifica-se que Ptolomeu em seu tempo, ainda acreditava no Geocentrismo, ou seja, a Terra como centro do universo, idéia bem mais tarde derrubada por Nicolau Copérnico (1473-1543 d. C.), que provou a teoria do Heliocentrismo, sendo o sol o centro do universo e os demais planetas girando em sua órbita. Vejam figura 8:

Figura 8 – Geocentrismo e Heliocentrismo



Fonte:<http://umanovafisica.blogspot.com.br/2010/03/ geocentrismo-vs-heliocentrismo-ptolomeu.html>

> Ptolomeu também publicou uma obra padrão e influente chamada Geografia, que tratava da confecção de mapas, na qual discutiu vários tipos de projeção e listou a latitude e longitude de 8.000 lugares do mundo conhecido. Os seus achados foram usados por navegadores durante mais de 1.500 anos. (FLOOD; WILSON, 2013, p. 33)

1.4 Outros estudiosos da matemática e geometria

Muitos outros estudiosos da matemática tiveram grande importância para a geometria como Sócrates, Platão, Aristóteles, Euclides, Arquimedes, Apolônio e muitos outros. Porém, como o foco deste trabalho são os triângulos, os de maior destaque, que realizaram trabalhos sobre esta figura geométrica e que são aplicados na educação básica, são os que tiveram seu histórico demonstrado com maior expressão.

1.5 Histórico das pontes de macarrão

> As pontes são uma das estruturas mais antigas inventadas pelo homem. Foram criadas pela necessidade de se atravessar obstáculos, como rios ou vales, na tentativa de encontrar alimentos ou abrigos. Ganharam grande notoriedade na arquitetura após a revolução industrial com a invenção das máquinas a vapor, pois construir pontes se tornou essencial para fazer a economia acelerar, sendo que estas deveriam ser mais resistentes, significando rapidez e economia de tempo e dinheiro. (JUNIOR et al., 2012, p. 4)

> Nos tempos atuais, com toda infraestrutura tecnológica, comunicação digital e equipamentos pesados que se tem à disposição, é fácil chamar as pontes mais antigas de “primitivas”, mas não se pode esquecer das reais circunstâncias em que essas pontes foram construídas. Mesmo sem os cálculos de engenharia e os testes de materiais usados atualmente, o raciocínio lógico das estruturas esteve presente na mente dos antigos construtores de pontes, que com certeza utilizavam o conhecimento sobre a rigidez dos triângulos em seus projetos. Através do teste e do erro construíram estruturas tão bem projetadas e sólidas que sobrevivem por séculos, até os dias atuais. (JUNIOR et al., 2012, p. 4)

No Brasil, a competição de construção de ponte de macarrão é algo relativamente novo e pouco divulgado. Várias Universidades que oferecem o curso de engenharia, sobretudo de engenharia civil, utilizam-se desta competição como forma de motivar os alunos a empregar o conhecimento obtido em sala de aula e aplicá-lo de forma prática.

A competição foi realizada pela primeira vez no Brasil na UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul em 2004. A ideia proposta aos alunos consistia em analisar, projetar e construir uma ponte treliçada de espaguete, com regras previamente definidas e ao final realizar um ensaio destrutivo com a finalidade de verificar a ponte que suportaria o maior peso. Após essa iniciativa dos gaúchos, este tipo de competição se espalhou por diversas universidades pelo Brasil. Atualmente o recorde brasileiro é de 234 kgf, recorde obtido no segundo semestre de 2011 na UFRGS. Este resultado é bem superior ao recorde mundial até então, de 176 kgf, obtido em condições semelhantes, na Okanagan University College do Canadá.

Na figura 9, é possível observar diversas pontes de espaguete que foram construídas de modos distintos.

Figura 9 – Pontes de espaguete

Fonte:<http://www.colegioraizes.com.br/blog/tag/ponte-de-macarrao/>

Atualmente, poucas escolas de ensino fundamental e médio, sobretudo em cursos técnicos, através de seus professores de matemática e física vêm utilizando a construção de pontes de macarrão como forma de mostrar na prática os conhecimentos de sala de aula.

Capítulo 2

Procedimentos metodológicos

Vários filósofos da educação, como Piaget, Vygotsky, Freinet, Paulo Freire, Ausubel, entre muitos outros, contribuíram muito na busca por uma forma de educar mais eficaz. Nossa proposta não é seguir os ensinamentos de um deles, mas sim, utilizar um procedimento metodológico que leve em consideração a contribuição que todos eles deram para a educação.

2.1 Construção significativa do conhecimento

> A aprendizagem contribui para o desenvolvimento na medida em que aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. Para a concepção construtivista, o homem aprende quando é capaz de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretende ensinar ou aprender. Essa elaboração implica aproximar-se de tal objeto ou conteúdo com a finalidade de apreendê-lo; não se trata de uma aproximação vazia, a partir do nada, mas a partir de experiências, interesses e conhecimentos prévios que, presumivelmente, possam dar conta da novidade que se apresenta. Pode-se dizer que, com os significados, aproxima-se de um novo aspecto que, às vezes, só parecerá novo, mas que na verdade é possível interpretar perfeitamente com os significados que já se possuí, enquanto, outras vezes, colocará perante a pessoa um desafio ao qual tentará responder, modificando os significados dos quais já estava provida, a fim de dar conta do novo conteúdo, fenômeno ou situação. Nesse processo, não só se modifica o que já possuía, mas também é possível interpretrar o novo de forma peculiar, para poder integrá-lo e torná-lo seu. (COLL; EUFRÁSIO, 1999)

Conduzindo o processo ensino e aprendizagem desta forma, propicia-se uma aprendizagem significativa, idéia defendida por David Ausubel, ou seja, os alunos aprendem significativamente, construindo um significado próprio e pessoal para um objeto de conhecimento que existe objetivamente. Desta forma é claro que não é um processo que leva ao simples acúmulo de conhecimento, mas à integração, modificação, adaptação e relações com os conhecimentos que já possuem.

Sobre as metodologias de ensino, Santanna e Menegolla (2002), caracterizam os procedimentos de ensino sobre a ótica de três estilos: o ensino individualizado, o ensino socializado e o ensino socioindividualizado. Esses procedimentos didáticos expressam a ação docente capaz de conduzir ao alcance dos objetivos traçados.

> Os procedimentos de ensino ou situações de experiência constituem-se pela indicação clara e objetiva, precisa das ações a serem vivenciadas pelos alunos e estabelecidas pelo professor e/ou alunos conforme organização integrada horizontal e vertical dos conteúdos e objetivos, seguidos de atividades de desenvolvimento e finalizando por atividades sintetizadoras. (SANTANNA; MENEGOLLA, 2002, p. 43)

> Estas situações de ensino podem ser centradas no professor, o chamado ensino individualizado, sendo este o organizador do ensino, cabendo a ele a seleção dos objetivos, conteúdos, avaliação etc. O aluno participa meramente como elemento desencadeador. Ao professor cabe tomar as decisões, apresentar ideias, definir limites. Em oposição, existe o ensino centrado no aluno, o chamado ensino socializado, a quem cabe a responsabilidade de tomar as decisões, escolher os procedimentos que considerar relevantes. (SANTANNA; MENEGOLLA, 2002, p. 44).

Seja o ensino centrado no professor ou no aluno, o ideal é que haja um desencadeamento lógico para que seja capaz de obter a resposta de dois questionamentos: O quê? E, para quê?

É muito comum os professores na educação básica abordarem um determinado assunto de forma direta, sendo meramente transmissores de conhecimento. A prática dominante é de colocar no quadro qual o assunto a ser trabalhado e partir diretamente para sua explicação, em seguida para exercícios e por último a avaliação. Ou seja, a prática dominante é a do ensino individualizado. Já o ensino totalmente socializado não parece ser o mais adequado para a realidade dos alunos no Brasil.

O que parece ser o ideal, é o ensino baseado nos dois métodos, parte individualizado e parte socializado, o chamado ensino socioindividualizado, que conforme afirma Santanna e Menegolla (2002), ocupa uma posição mediadora, como as técnicas de projetos de estudo dirigido, soluções de problemas, estudos de caso e etc., neste caso deve haver um planejamento criterioso das etapas a serem seguidas.

2.2 PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN dão uma importância muito grande ao estudo da geometria, colocando-a como um campo muito fértil para trabalhar situações problema envolvendo, além da geometria, outras áreas da matemática. Vejamos então como a geometria é focada pelos PCN.

> Os parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental foca, no Bloco de conteúdos, o estudo do Espaço

> e Forma, estabelecendo que os conceitos geométricos constituem parte importante da currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 55)

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o estudante a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 1998, p. 55-56)

Além disso, se esse trabalho for feito a partir de exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 56)

2.3 Metodologia utilizada no projeto

Este trabalho foi baseado no método socioindividualizando de ensino, conforme Santanna e Menegolla (2002). Primeiramente foram considerados aspectos fundamentais que muito contribuem para uma aprendizagem consistente, entre eles: verificar quais os conhecimentos básicos necessários para a aprendizagem daquele assunto; verificar quais os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o assunto e, por fim, estabelecer critérios de descoberta, de construção do conhecimento com o auxílio e orientação do professor, sem que seja entregue pronto para o aluno. Assim, os alunos foram orientados a buscar e observar no mundo físico, objetos e estruturas de construção nas quais deveriam identificar as formas geométricas que as compunham, a fim de despertar algumas curiosidades.

Em seguida, o professor passa a ter um papel mais individualizado com a transmissão dos conteúdos, buscando dar um embasamento teórico acerca do estudo dos triângulos, capaz de fazer com que os alunos façam conexões, pois agora a aprendizagem tem um significado para os destinatários, uma vez que as informações que receberam servem para responder a questionamentos de suas descobertas, explicar fenômenos e proporcionar novas descobertas, deixando de ser simplesmente um processo de acúmulo de conteúdos e conhecimentos aparentemente sem sentido.

Nesta etapa também foi apresentada pelo professor, preliminarmente, a cada assunto estudado, uma viagem histórica sobre o surgimento e descobertas matemáticas, além de uma breve biografia dos matemáticos em questão, já mostradas no histórico.

Por fim, os alunos colocaram em prática os conhecimentos adquiridos, saindo do campo teórico para o prático, completando de forma consistente e duradoura o processo de ensino e aprendizagem. O conhecimento construído de forma, pode-se dizer, semiautodidata, é muito mais consistente e, sem dúvida, permanente, diferente do que ocorre com muitos conteúdos que são estudados apenas para a realização das provas e, depois disso, esquecidos pelos alunos. Desta forma, propiciou-se aos alunos a capacidade de fazerem conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento, como a Física, a História, a Geografia e até mesmo a Engenharia, por meio da construção das pontes de espaguete.

Assim, os alunos foram orientados desde o início do projeto até seu ápice com a construção da ponte de espaguete. Baseando no despertar do aluno para o estudo da geometria, buscado uma aprendizagem significativa, consistente e duradoura.

2.4 Tabela de atividades desenvolvidas

As turmas nas quais as atividades foram desenvolvidas possuem 05 aulas semanais e foram utilizadas 22 aulas para seu desenvolvimento, o que corresponde a aproximadamente cinco semanas de aula. Vejam na tabela 1:

Tabela 1 – Cronograma de atividades

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	NÚMERO DE AULAS
1. Busca de imagens	Tarefa extraclasse (5 dias)
1.1. Observação das imagens em sala de aula	02 aulas
2. Fundamentação teórica a cerca do estudo dos triângulos.	14 aulas
3. Ponte de espaguete	
3.1. Construção (realizada na própria escola)	06 aulas
3.2. Exposição e ensaio de resistência e destruição	3 horas

Fonte: Autoria própria

Capítulo 3

Despertando o interesse pela geometria através de uma aprendizagem significativa

Com o intuito de despertar o interesse pelo estudo da geometria, primeiramente os alunos foram estimulados a observar os objetos e construções do mundo físico a sua volta, registrando tudo por meio de fotos e imagens obtidas por outros meios, sendo colhidas inúmeras imagens. Essas imagens foram expostas na sala de aula para observação dos alunos e estes foram orientados a destacar, principalmente, os objetos e construções que por sua natureza foram concebidos para suportar peso, pois estes são objetos do nosso estudo. Entre as inúmeras imagens obtidas pelos alunos, destacam-se as seguintes:

1. A Ponte de Ferro da cidade de Cachoeiro de Itapemirim-ES: Como pode-se observar na figura 10, esta é uma construção metálica que inicialmente só passavam por ela trens, mas com a retirada dos trilhos do centro da cidade, a mesma foi transformada em ponte de passagem de veículos automotores, onde claramente observa-se a predominância do triângulo como forma geométrica utilizada na sua construção.

Figura 10 – Ponte de Ferro de Cachoeiro de Itapemirim-ES

Fonte:<http://olhares.sapo.pt/ponte-de-ferro-foto762368.html>

2. Galpão de empresa de beneficiamento de mármore e granito: A exploração e o beneficiamento de mármore e granito são as principais atividades econômicas do município de Cachoeiro de Itapemirim-ES. Os pais de muitos alunos ou são empresários deste ramo ou são empregados do setor. Portanto, isso faz parte do dia a dia da maioria dos estudantes. Na figura 11, os alunos notaram que além da estrutura da cobertura, na qual facilmente observa-se a forma triangular, esta mesma forma foi utilizada para construir os cavaletes que necessitam ser bem resistentes para suportar o peso das chapas de mármore e granito.

Figura 11 – Galpão de marmoraria

Fonte:<http://imoveis.mitula.com.br/imoveis/fotos-galp%C3%B5es-laranjal>

3. Construção de telhados coloniais: Através da observação da estrutura de um telhado colonial, figura 12, os alunos perceberam a predominância da forma triangular. Foi mencionado aos mesmos, que as junções das madeiras formam treliças e que esta composição triangular recebe a denominação de tesouras na construção civil. São elas que dão sustentação ao telhado.

Figura 12 – Telhado colonial

Fonte:<http://imoveis.culturamix.com/construcao/telhados-de-madeira>

4. Escada de uma biblioteca: Na figura 13, os alunos observaram que a escada só possui dois pontos de apoio, um na base e outro no seu ponto mais alto no andar superior, não havendo nenhum outro apoio intermediário por meio de colunas. Os alunos concluíram que a resistência desta escada não deve estar somente no aço utilizado em sua construção, mas também na forma triangular (triângulos retângulos) formados no contato dos degraus com as barras transversais.

Figura 13 – Escada de biblioteca

Fonte:<http://claudiabergamasco.blogspot.com.br/2012_05_17_archive.html>

5. Torre de transmissão de energia de alta tensão: Nas torres de alta tensão, figura 14, que podem ser vistas na periferia de qualquer cidade ou próxima às margens de qualquer rodovia pelo país, facilmente observa-se a predominância da forma triangular em sua estrutura de construção. Embora este tipo de torre não seja construída para suportar uma grande carga de peso, sua estrutura deve ser bem rígida, uma vez que poderá sofrer ações da natureza, principalmente tempestades e ventos fortes que poderão derrubá-la, podendo causar sérios prejuízos com a interrupção do fornecimento de energia elétrica para a população.

Figura 14 – Torres de energia elétrica

Fonte:<http://missionariatiaso.blogspot.com.br/2015/08/torre-de-babel.html>

6. Galpão de estrutura metálica: Para um melhor aproveitamento do espaço, as empresas necessitam que seus galpões não tenham colunas estruturais centrais, apenas em suas laterais, como pode-se observar na figura 15. Portanto, a estrutura desta cobertura deve ser rígida ao ponto de suportar o peso somente com pilares laterais e a melhor forma de se obter isso é utilizando a estrutura em forma de treliças. Na imagem colhida, os alunos puderam observar a predominância da forma triangular em sua estrutura, tanto para a formação das inclinações laterais para dar caimento a água da chuva que cai sobre a cobertura, como na forma com que as barras superiores transversais foram unidas à barra horizontal. Estas partes foram unidas com barras perpendiculares a barra horizontal, em seguida foram soldadas barras transversais formando triângulos.

Figura 15 – Estrutura de galpão em construção

Fonte:<http://diogenesestruturas.com.br/estrutura-metalica/>

7. Prédio em forma de lua - Dubai - Emirados Árabes Unidos: Observa-se facilmente na figura 16, que a estrutura do prédio é formada pela composição de treliças. Através da transparência do prédio, pode-se visualizar a predominância da forma triangular na estrutura, o que certamente contribuiu para a solidez do prédio nesse formato de lua.

Figura 16 – Prédio em Dubai - Emirados Árabes Unidos

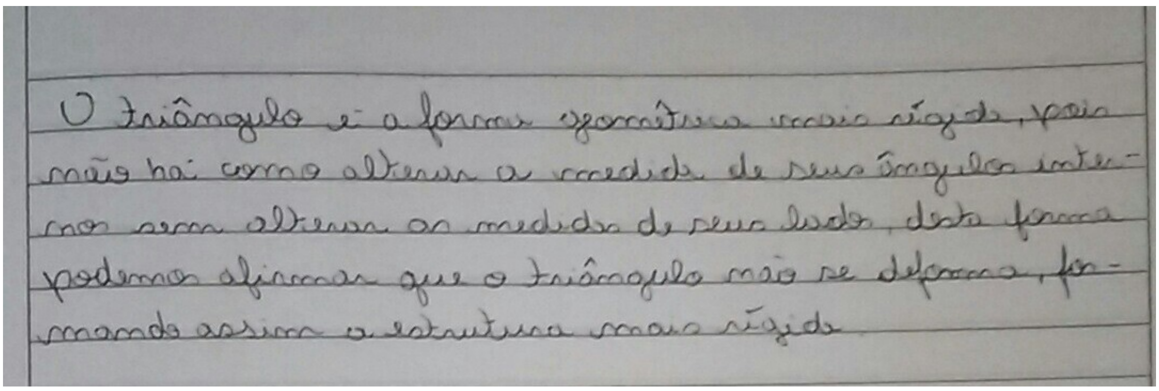
Fonte:<http://grandearquitetura.com.br/predio-em-forma-de-lua-crescente-representa-as-origens-e-o-futuro-de-dubai/>

3.1 Observação e estudo das imagens

Após a exposição e observação das imagens colhidas pelos alunos, os mesmos foram orientados a examinar de maneira mais criteriosa os objetos e construções, identificando a figura geométrica que se tornava mais frequente em suas composições. Este questionamento foi realizado de forma aberta em sala de aula e, como já era de se esperar, ao se depararem com o fato do triângulo ser a figura mais frequente, como não poderia ser diferente, de imediato surgiu a seguinte pergunta por parte dos alunos: Por que o triângulo é a figura mais usada nas estruturas de construção e em alguns objetos que necessitam suportar peso?

Objetivando despertar o interesse dos alunos pelo estudo da geometria através da construção do conhecimento, buscando uma aprendizagem significativa, a resposta não foi dada de imediato pelo professor. A partir deste questionamento, os alunos foram orientados pelo professor, no papel de mediador da aprendizagem, a pesquisar o porquê do triângulo ser a forma geométrica mais utilizada. Imediatamente após o surgimento deste questionamento, os alunos foram conduzidos até a biblioteca da escola onde, além de livros, tinham à disposição computadores com acesso a internet para serem usados como fontes de pesquisa. Esse questionamento foi realizado e registrado nos cadernos dos alunos. Como já era esperado, todos os alunos encontraram uma explicação e a registraram em seus cadernos. De volta à sala de aula, os alunos puderam expor as explicações que encontraram. Esse fato proporcionou meios para formar, a partir daí, um conceito único, coletivo, da turma, sendo o conceito final estabelecido como uma explicação para o triângulo ser a forma geométrica mais utilizada nas construções e estruturas o registrado no caderno de um aluno, conforme figura 17.

Figura 17 – Caderno de aluno

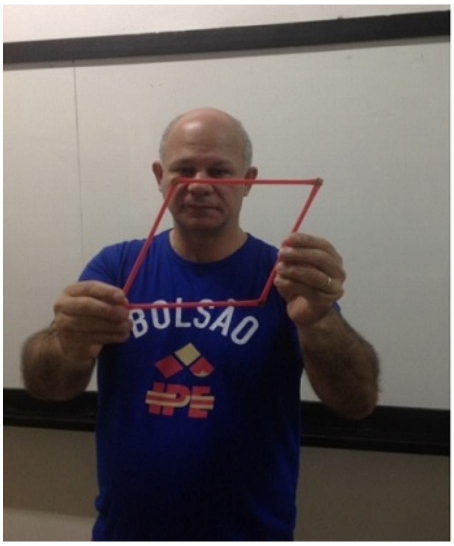

O triângulo é a forma geométrica mais rígida, pois
não há como alterar a medida de seus ângulos inter-
nos sem alterar as medidas de seus lados, desta forma
podemos afirmar que o triângulo não se deforma, for-
mando assim a estrutura mais rígida

Fonte: Protocolo de pesquisa

3.2 Sistematização do conhecimento de forma prática

Para melhor sistematizar, exemplificar e demonstrar as informações obtidas, foi realizada uma intervenção com o auxílio de recursos materiais simples, como canudos e alfinetes. Inicialmente 04 canudos foram unidos em suas extremidades por 04 alfinetes tipo percevejos, formando um quadrilátero e aplicado sobre ele uma carga, assim os alunos observaram que este se deformava facilmente. Vejam figura 18:

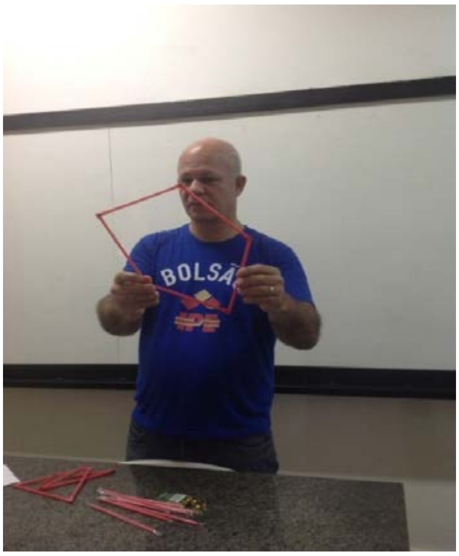
Figura 18 – Quadrilátero de canudos



Fonte: Autoria própria

Em seguida, usando 05 canudos e 05 alfinetes formou-se um pentágono, que ao sofrer uma carga também se deformou facilmente, fato observado por todos os alunos. Vejam figura 19:

Figura 19 – Pentágono de canudos



Fonte: Autoria própria

Repetindo o processo, desta vez formando um triângulo, os alunos observaram que essa forma geométrica não se deforma quando se aplica uma carga sobre ela, comprovando assim a rigidez dos triângulos de forma prática. Vejam figura 20:

Figura 20 – Triângulo de canudos

Fonte: Autoria própria

Os alunos foram então desafiados a dar uma solução para que o quadrilátero e o pentágono também se tornassem uma figura rígida. Sem nenhuma dificuldade e de forma imediata, um grupo de alunos foi à frente da sala e deu a solução de colocar um canudo em uma das diagonais do quadrilátero, formando dois triângulos, tornando-o rígido. Vejam figuras 21 e 22:

Figura 21 – Alunos com quadrilátero de canudos

Fonte: Autoria própria

Figura 22 – Solução dos alunos para o quadrilátero

Fonte: Autoria própria

Para tornar o pentágono rígido e, portanto indeformável, outro grupo de alunos apresentou a solução de fixar um canudo em cada vértice do pentágono e fixar todos estes canudos em um ponto central interno do pentágono. Vejam figuras 23 e 24:

Figura 23 – Alunos com pentágono de canudos

Fonte: Autoria própria

Figura 24 – Solução dos alunos para o pentágono

Fonte: Autoria própria

Essas demonstrações foram o ponto crucial para que os alunos se interessassem pelo estudo mais aprofundado dos triângulos, dando os primeiros sinais de estarem construindo seu conhecimento e aprendendo de forma significativa, passando a conjecturar inúmeras ideias, dentre elas, a mais interessante foi a observação de um aluno, que deduziu ser pelo fato do triângulo ser a figura geométrica mais rígida que o objeto de sinalização, quando veículos sofrem uma pane ou acidente, ser um triângulo e não outra forma geométrica, pois mesmo não tendo como finalidade suportar uma carga de peso, o triângulo de sinalização, figura 25, não corre o risco de desmontar com o deslocamento de ar proveniente dos veículos que passarem por ele.

Figura 25 – Triângulo de sinalização

Fonte:<http://www.truckval.com.br/18/70/sinalizacao/triangulo-de-sinalizacao>

Conclusão lógica e interessante, o que mostra sinais de apreensão do conteúdo, através de uma aprendizagem significativa que foi proporcionada pela construção do conhecimento. Muito embora não se tenha encontrado uma justificativa legal dos órgãos de trânsito sobre o motivo do formato deste objeto, a dedução lógica do aluno é totalmente pertinente e compatível com a teoria dos triângulos.

Desta forma, os alunos puderam observar melhor o espaço em que vivem, pois muitas vezes passam por vários lugares em seus trajetos diários de casa para escola, da escola para casa e por qualquer lugar por onde andem sem observar o que está ao seu redor. Chegando a conclusão de que a geometria está presente em todos os objetos e construções que conhecem, inclusive confessando que passaram a observar mais o ambiente em que estão inseridos e a anatomia dos objetos, despertando-lhes o interesse por profissões como engenharia, arquitetura, desenho industrial, entre outras.

Capítulo 4

Teoria dos triângulos com utilização de material concreto

O estudo dos triângulos envolve muitos conteúdos. Neste trabalho utilizamos material concreto para a abordagem de alguns destes conteúdos, em outros não utilizamos este tipo de material. Neste capítulo trataremos apenas daqueles em que este material foi utilizado. Inicialmente foi realizada uma avaliação diagnóstica para sondagem dos conhecimentos que os alunos já possuíam acerca do estudo dos triângulos.

4.1 Avaliação diagnóstica

Com o objetivo de fazer uma análise da distribuição dos conteúdos relativos ao estudo dos triângulos nos livros didáticos, utilizamos como referência 03 livros de autores distintos. O estudo dos triângulos, nos livros didáticos, é dividido entre as duas séries finais do ensino fundamental da seguinte forma:

Analisando os livros didáticos Bianchini (2002); Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006) e Iezzi, Dolce e Machado (1993) do 8º ano do ensino fundamental, constatamos que nesta etapa os alunos realizam os seguintes estudos relativos a triângulos: condição de existência, classificação quanto aos lados, desigualdade triangular, soma dos ângulos internos, congruência de triângulos, pontos notáveis do triângulo, triângulos isósceles e equiláteros. Alguns desses assuntos são abordados de forma bem superficial, um exemplo é o estudo das cevianas, que praticamente se limitam a traçá-las e a definir seus pontos notáveis.

Analisando os livros didáticos Bianchini (2002); Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006) e Iezzi, Dolce e Machado (1993) do 9º ano do ensino fundamental, constatamos que nesta etapa os alunos realizam os seguintes estudos relativos a triângulos: semelhança, casos de semelhança, relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas e cálculo da área. Antes de dar continuidade ao estudo dos triângulos no 9º ano, sempre é necessário fazer uma boa revisão no estudo dos triângulos realizado no 8º ano. Talvez o ideal seria que o estudo dos triângulos estivesse totalmente numa única série, sem essa quebra sequencial, assim, seria possível aprofundar os estudos de triângulos em vez de revisar conteúdos já estudados.

Com a finalidade de verificar os conhecimentos sobre triângulos adquiridos pelos alunos nas duas séries finais do Ensino Fundamental, uma avaliação diagnóstica, que pode ser visualizada no apêndice A, foi aplicada a 72 alunos das três turmas da 1ª série do Ensino Médio da Escola IPE - Instituto de Pesquisas Educacionais, sendo duas turmas do turno matutino e uma do turno vespertino, contemplando os conteúdos relativos ao estudo dos triângulos. A avaliação diagnóstica, no valor de 10 pontos, foi elaborada com questões muito simples, sendo uma questão para cada um dos assuntos pertinentes ao estudo dos triângulos, pois a intenção era saber se os alunos haviam assimilado os conceitos básicos das séries anteriores. Em seguida, as avaliações foram corrigidas e os alunos classificados entre quatro níveis de aprendizagem: abaixo do básico (nota inferior a 5 pontos), básico (nota de 5 a 6,9 pontos), proficiente (nota de 7 a 8,9 pontos) e avançado (nota de 9 a 10 pontos). Essa classificação é a mesma utilizada pelo PAEBES - Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo. Na Tabela 2 podemos observar os resultados obtidos.

Tabela 2 – Resultados da avaliação diagnóstica

NÍVEL	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM
ABAIXO DO BÁSICO	15	aproximadamente 21%
BÁSICO	36	50%
PROFICIENTE	13	aproximadamente 18%
AVANÇADO	8	aproximadamente 11%

Fonte: Autoria própria

Como se pode facilmente observar, alguns dos estudos realizados sobre triângulos não foram bem assimilados, pois o ideal era que tivessem poucos alunos nos dois níveis inferiores (abaixo do básico e básico) e que a maioria estivessem nos dois níveis superiores (proficiente e avançado). Desta forma, buscando uma aprendizagem significativa e consistente, um reestudo aprofundado dos triângulos foi realizado, dando ênfase àquelas partes que demonstraram mais deficiência. Os conteúdos foram exaustivamente revisados e associados ao estudo de outros conteúdos próprios desta série, como a Trigonometria, fazendo um reestudo completo dos triângulos, destacando a sua importância na construção de estruturas de construção civil.

4.2 Condição de existência de um triângulo qualquer

A condição de existência de um triângulo, cuja definição pode ser encontrada em qualquer livro didático, diz que: "Em qualquer triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros lados".(IEZZI; DOLCE; MACHADO, 1993, p. 102).

Esse conceito pode ser comprovado utilizando materiais concretos, como canudos de plástico e alfinetes. Com este material os alunos foram orientados a realizar três testes:

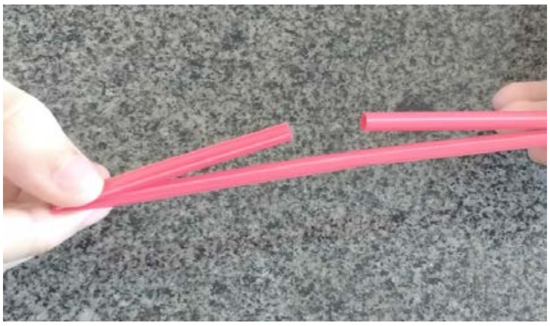
a) Primeiramente deveriam pegar dois canudos e cortá-los ao meio, deixando o outro inteiro. Em seguida, utilizando os alfinetes, unir suas pontas de modo a formar um triângulo, o que não foi possível, pois a soma das medidas dos dois lados menores era igual à medida do lado maior. Vejam figura 26:

Figura 26 – Condição de Existência do Triângulo - 1

Fonte: Autoria própria

b) O segundo teste foi cortar um pedaço de um dos canudos menores do teste anterior e em seguida tentar formar um triângulo, o que também não foi possível, pois a soma das medidas dos lados menores era menor que a medida do lado maior. Vejam figura 27:

Figura 27 – Condição de Existência do Triângulo - 2



Fonte: Autoria própria

c) O último teste foi pegar três canudos, sendo que os dois menores quando unidos linearmente deveria ser maior que o canudo maior e unir suas pontas com alfinetes formando um triângulo. Desta vez sendo possível, pois a soma das medidas dos lados menores era maior que o lado maior, comprovando o conceito apresentado. Vejam figura 28:

4.3 Soma dos ângulos internos de um triângulo

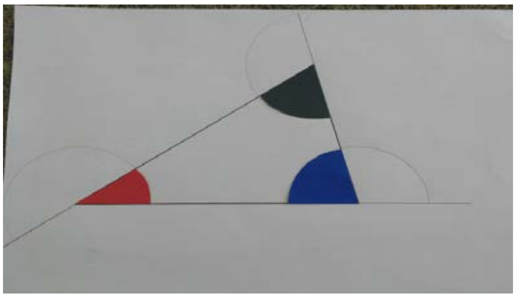
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. Este conceito é conhecido como Lei Angular de Tales. Utilizando materiais simples como régua, compasso, lápis e

Figura 28 – Condição de Existência do Triângulo - 3

Fonte: Autoria própria

papel os alunos puderam comprovar este conceito. Foram orientados a desenhar um triângulo em uma folha de papel, em seguida, usando papel colorido, a cortar os ângulos e encaixá-los sobre os ângulos do triângulo. Vejam figura 29:

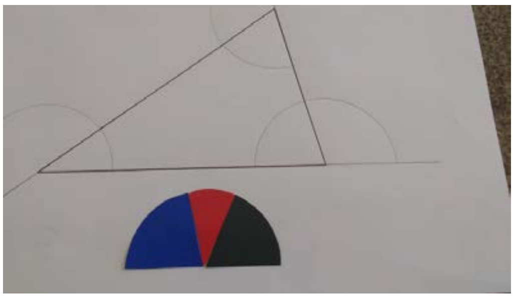
Figura 29 – Ângulos internos do triângulo



Fonte: Autoria própria

Em seguida, foram orientados a retirar esses ângulos em papel colorido e colocá-los juntos de forma adjacente, formando um ângulo de meia volta, ou seja, 180°. Comprovando, na prática, que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°. Vejam figura 30:

Figura 30 – Soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Autoria própria

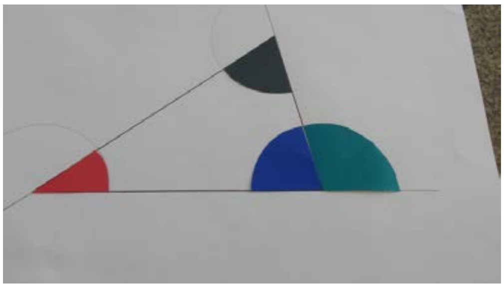
Na avaliação diagnóstica, pôde-se observar que este foi o único conceito relativo ao estudo dos triângulos que todos os alunos dominavam.

4.4 Medida do ângulo externo de um triângulo

Utilizando o mesmo material produzido no estudo anterior, os alunos cortaram um ângulo externo do triângulo, também em papel colorido, e puderam comprovar dois conceitos.

O primeiro foi que em qualquer triângulo, um ângulo interno e um ângulo externo, adjacentes, são suplementares (soma é igual a 180°). Vejam figura 31:

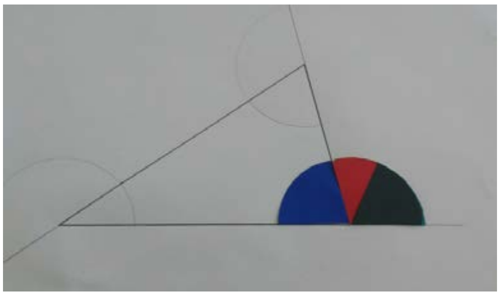
Figura 31 – Ângulo externo do triângulo - 1



Fonte: Autoria própria

O segundo conceito comprovado, foi que a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Para visualizar este conceito de forma prática, os alunos foram orientados a sobrepor os ângulos internos não adjacentes cortados em papel colorido sobre o ângulo externo, observando que se igualam. Vejam figura 32:

Figura 32 – Ângulo externo de um triângulo - 2



Fonte: Autoria própria

4.5 Teorema de Tales e a semelhança de triângulos

Uma proposta interessante ao introduzir o estudo do Teorema de Tales é contar a história de como Tales mediu a altura das Pirâmides do Egito. Os alunos conseguem visualizar como a matemática se aplica na resolução de problemas do cotidiano.

Nesta proposta, os alunos foram desafiados a resolver o seguinte problema:

Na rua onde se localiza a escola, há fios nos postes que atravessam de um lado ao outro da rua. Suponha que um caminhão com uma carga alta com cerca de 4,40 metros *de altura, altura máxima permitida segundo Resolução nº 318, de 05 de junho de 2009 do CONTRAN, vá passar pela rua, porém, o motorista está com receio da carga romper a fiação. Como você pode ajudar o motorista utilizando seus conhecimentos matemáticos? Será possível o caminhão passar pela rua da escola sem romper a fiação?* Vejam figuras 33, 34 e 35:

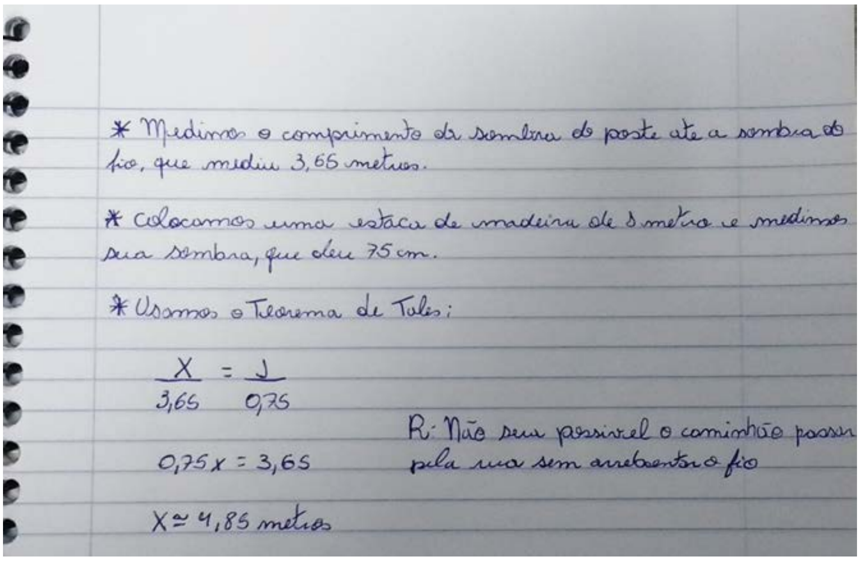
Figura 33 – Alunos medindo a sombra do poste

Fonte: Autoria própria

Figura 34 – Alunos medindo a sombra de uma estaca

Fonte: Autoria própria

Figura 35 – Resolução da questão do caderno de um aluno



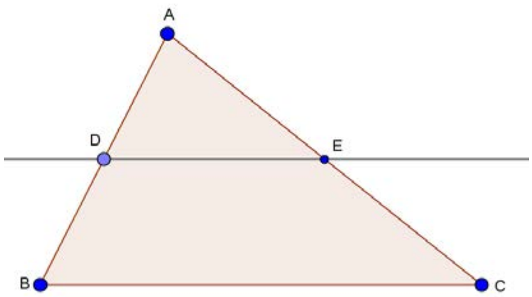
Fonte: Protocolo de pesquisa

Trabalhando dessa forma, um questionamento muitas vezes inconveniente e que desagrada muito aos professores, que é a clássica pergunta de onde vão usar o que estão aprendendo na prática pode ser evitado. Após essa demonstração do Teorema de Tales, fazer uma aplicação mais ampla até a semelhança de triângulos fica muito mais fácil.

4.5.1 Reta paralela a um dos lados do triângulo

O Teorema de Tales também demonstra que quando retas transversais são interceptadas por um feixe de retas paralelas, estas são divididas em partes proporcionais, esse conceito é utilizado quando se trabalha com feixe de retas paralelas e transversais. Este mesmo raciocínio é aplicado aos triângulos, pois qualquer reta paralela a um dos lados de um triângulo, divide os lados intersectados por esta paralela em partes proporcionais. Vejam figura 36:

Figura 36 – Teorema de Tales no triângulo



Fonte: Autoria própria

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} ou \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{EC}} ou \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

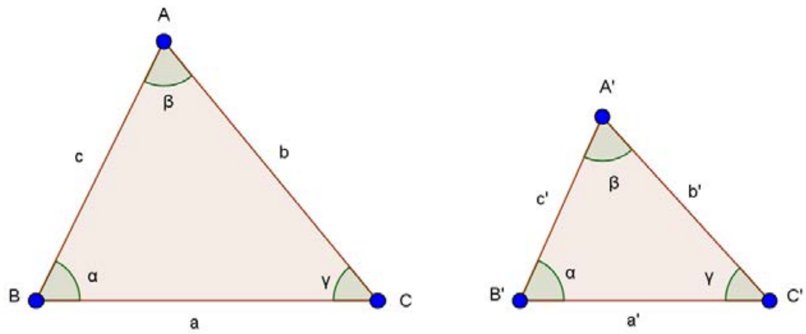
4.5.2 Semelhança de triângulos

Para que dois triângulos sejam considerados semelhantes, estes devem atender a dois quesitos:

- Os ângulos internos correspondentes devem ser congruentes;
- Os lados correspondentes devem ser proporcionais.

Vejam figura 37:

Figura 37 – Quesitos da semelhança de triângulos



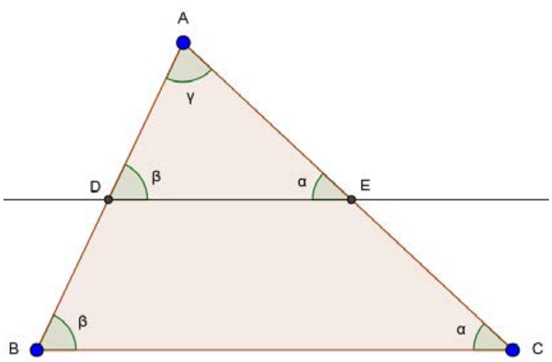
Fonte: Autoria própria

Nota-se que os triângulos △ABC e △A'B'C', os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes proporcionais, logo:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$$

Outro exemplo é o caso a seguir, em que o triângulo é cortado por uma paralela a um de seus lados, dando origem a outro triângulo semelhante ao primeiro. Vejam figura 38:

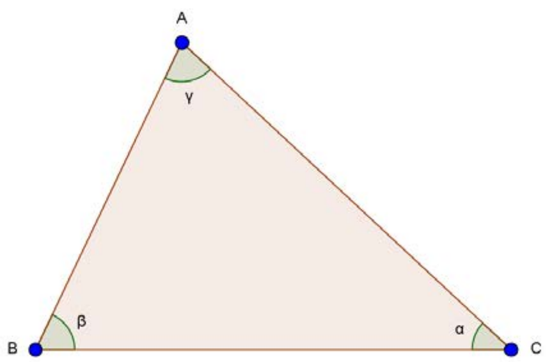
Figura 38 – Semelhança de triângulos 1



Fonte: Autoria própria

No △ABC, foi traçada a reta que passa pelos pontos D e E, paralela ao lado BC do triângulo, formando outro triângulo △ADE, é possível notar que os ângulos dos dois triângulos são congruentes. Na figura 39, os dois triângulos foram separados para melhor observação, obtendo-se:

Figura 39 – Semelhança de triângulos 2



Fonte: Autoria própria

Os triângulos $\triangle$ABC e $\triangle$ADE são semelhantes, portanto:

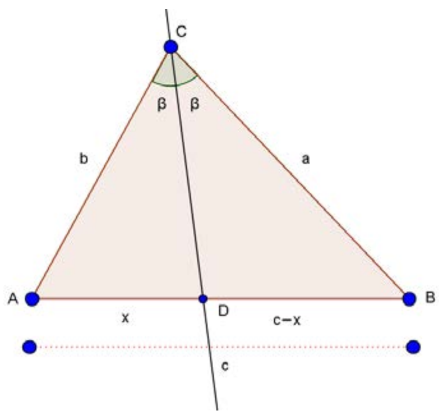
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$$

4.5.3 Teorema da bissetriz

4.5.3.1 Teorema da bissetriz interna

A bissetriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Vejam figura 40:

Figura 40 – Teorema da bissetriz interna



Fonte: Autoria própria

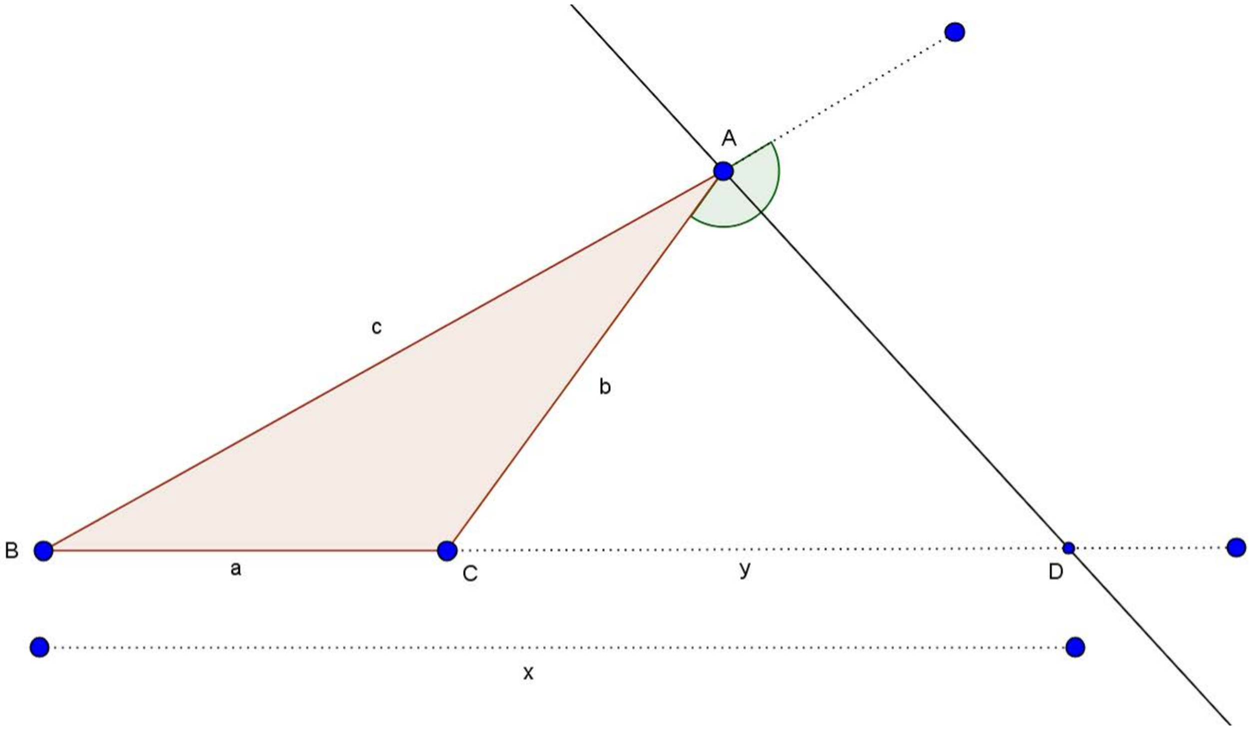
Nesta figura, foi traçada a bissetriz do ângulo C, desta forma obtém-se a seguinte proporção:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{c-x}$$

4.5.3.2 Teorema da bissetriz externa

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta o prolongamento da reta que contém o lado oposto, esta divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Vejam figura 41:

Figura 41 – Teorema da bissetriz externa



Fonte: Autoria própria

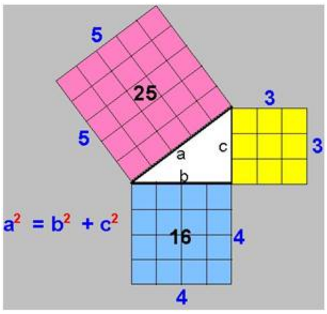
Na figura, o $\triangle$ABC tem lados a, b e c, a bissetriz externa com D pertencente à reta que passa pelos pontos B e C, assim temos que:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

4.6 Teorema de Pitágoras

Este Teorema é uma importante ferramenta para a geometria. A demonstração do Teorema de Pitágoras pode ser realizada por meio de uma malha quadriculada. Inicialmente denomina-se cada lado do triângulo retângulo, os catetos são os lados que formam o ângulo reto e a hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto, que também é o maior lado. Nesta malha, desenha-se um triângulo retângulo e em seguida um quadrado a partir de cada lado do triângulo. Utilizando os quadradinhos menores da malha quadriculada, contam-se quantos quadradinhos possui cada quadrado, obtendo-se a comprovação do Teorema de Pitágoras. Vejam figura 42:

Figura 42 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

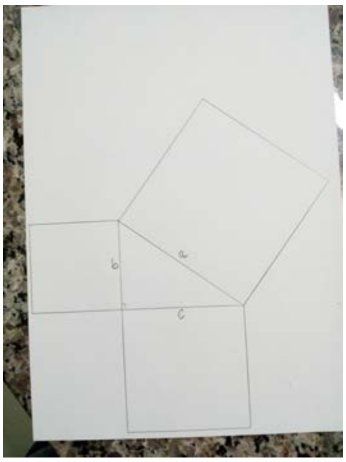


Fonte:<http://www.estudokids.com.br/search/teorema+de+pit%C3%A1goras>

Nesta imagem pode-se observar que a área do quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formadas pelos catetos. Neste caso nem há a necessidade de que os alunos saibam como calcular a área de quadrados, embora já conheçam, basta contar a quantidade de quadradinhos que compõe cada quadrado formado pelos lados do triângulo retângulo e em seguida fazer a soma e a igualdade, ou seja 25=16+9. Verificando facilmente que a área do quadrado formado pela hipotenusa é igual à soma da área dos quadrados formados pelos catetos, daí dando forma ao Teorema de Pitágoras como todos conhecem: "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

Com o intuito de comprovar o Teorema de Pitágoras utilizando material concreto, os alunos desenharam um triângulo retângulo em uma folha de papel e formaram um quadrado na hipotenusa a e nos catetos b e c, vejam figura 43. Em seguida, cortaram dois quadrados de papel colorido que foram sobrepostos aos quadrados formados pelos catetos, vejam figura 44. Por fim, esses dois quadrados formados pelos catetos foram sobrepostos sobre o quadrado formado pela hipotenusa, vejam figura 45. Desta forma provou-se que a soma das áreas dos quadrados formados pelos catetos é igual a área do quadrado formado pela hipotenusa.

Figura 43 – Comprovação do Teorema de Pitágoras 1

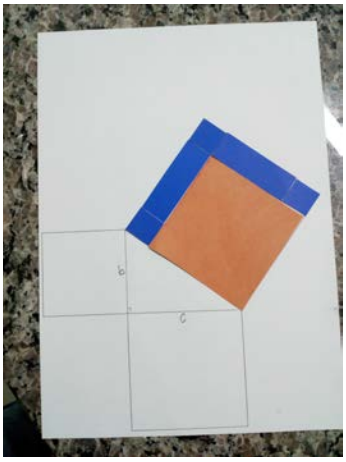


Fonte:Autoria própria

Figura 44 – Comprovação do Teorema de Pitágoras 2

Fonte: Autoria própria

Figura 45 – Comprovação do Teorema de Pitágoras 3



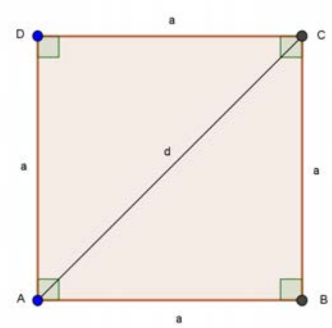
Fonte:Autoria própria

4.6.1 Aplicações do Teorema de Pitágoras

a) Diagonal do quadrado:

Sendo ABCD um quadrado de lado a, para calcular a diagonal d aplica-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle$ABC. Vejam na figura 46 que: d^2 = a^2 + a^2 $\Longrightarrow$ d^2 = 2 . a^2 $\Longrightarrow$ d = a$\sqrt{2}$

Figura 46 – Diagonal do quadrado

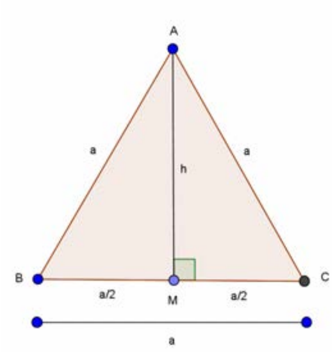


Fonte: Autoria própria

b) Altura do triângulo equilátero

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a, para calcular sua altura h aplica-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle$AMC, em que M é o ponto médio da base $\overline{BC}$. Vejam na figura 47 que: a^2 = h^2 + $\frac{a^2}{2^2}$ $\Longrightarrow$ $a^2 h^2$ + $\frac{a^2}{4}$ $\Longrightarrow$ h^2 = a^2 - $\frac{a^2}{4}$ $\Longrightarrow$ h^2 = $\frac{4a^2-a^2}{4}$ $\Longrightarrow$ h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Figura 47 – Altura do triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria

4.7 Demais conteúdos relativos ao estudo dos triângulos

Os conteúdos relativos ao estudo dos triângulos apresentados neste capítulo, são aqueles em que foram utilizados meios lúdicos de exposição. Com a utilização de materiais concretos, os conceitos foram testados e comprovados. Também foram utilizadas situações problema para que os alunos testassem na prática os conhecimentos adquiridos.

Os demais conteúdos foram expostos na forma de aula expositiva, com a utilização de recursos áudio visuais e do programa Geogebra. Esses conteúdos e a forma como foram apresentados aos alunos, podem ser vistos no apêndice C.

4.8 Exercícios e avaliação

Durante o estudo da teoria dos triângulos, vários exercícios do próprio material didático utilizado pelos alunos foram trabalhados, como forma dos alunos fixarem os conhecimentos que estavam adquirindo. Estes exercícios serviram como forma de preparação para que realizassem a avaliação final, aplicada no final do projeto, cujos dados foram devidamente analisados e serão mostrados posteriormente.

Capítulo 5

Construção da ponte de espaguete e o ensaio de destruição

> A competição para construção e teste de cargas em pontes feitas de macarrão é uma proposta que algumas Universidades do Brasil e do mundo fazem aos seus alunos de Engenharia, com o intuito de motivá-los a empregar os conhecimentos obtidos em sala de aula na prática. No geral, através de análises e pesquisas, o desafio é demonstrar passo a passo a construção do protótipo de uma ponte feita de macarrão bem como o esboço do projeto, cálculos utilizados e o ensaio destrutivo para verificar a quantidade máxima de carga suportada. (JUNIOR et al., 2012, p. 4)

Claro que os alunos do ensino fundamental e médio não possuem os conhecimentos de engenharia para demonstrar corretamente todos os cálculos que envolvem a construção de uma ponte, mostradas na construção de pontes de macarrão. Entretanto, para desenvolvê-la fizeram pesquisas, utilizaram conhecimentos básicos de física e, sobretudo, de matemática adquiridos até o momento e assim como os antigos construtores, utilizaram sua intuição, raciocínio lógico, os conhecimentos construídos nas fases anteriores do projeto, experimentos e testes para construir suas pontes de macarrão.

5.1 Breve estudo das estruturas de pontes

As pontes, que são vistas e utilizadas no dia a dia por onde todos passam, são classificadas pela engenharia em três tipos. A maior diferença entre elas é a distância que podem cruzar entre dois lados, ou seja, cada uma é adequada a uma distância a qual a ponte deva interligar. Os tipos de pontes são os seguintes:

a) Ponte em Viga: são as mais primitivas, foram as primeiras a serem construídas pelo homem e são adequadas a interligar pequenas distâncias, sendo também, as mais fáceis de serem calculadas e construídas. Podem também ligar médias e grandes distâncias utilizando vários vãos, que é a distância entre seus pilares. Podemos observar um tipo de ponte em viga na figura 48.

Figura 48 – Ponte em Viga: (Terceira Ponte - Vitória-ES)

Fonte: <http://megaengenharia.blogspot.com.br/2012/05/terceira-ponte-vitoria.html>

b) Ponte em Arco: são mais adequadas a ligar médias distâncias. Vejam figura 49:

Figura 49 – Ponte em arco: (Ponte Sydney Harbour Bridge - Austrália)

Fonte: <https://www.tripadvisor.com.br/LocationPhotoDirectLink-g255060-d257355-i70504802-Sydney-Harbour-Bridge-Sydney-New-South-Wales.html>

c) Ponte Suspensa: são adequadas a interligar distâncias maiores. Vejam figura 50:

Figura 50 – Ponte suspensa: (Ponte Golden Gate - San Francisco - EUA)

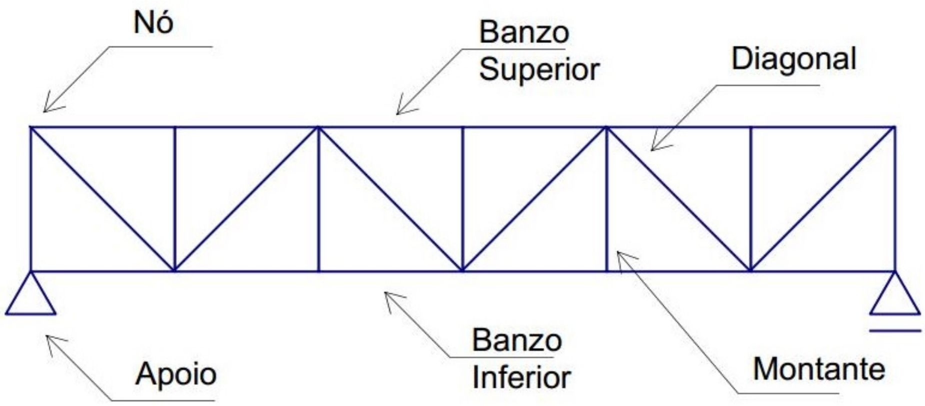
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Golden_Gate>

Como a construção da ponte de macarrão serve apenas para uma demonstração e não possui a pretensão de fazer a ligação de grandes distâncias, os alunos puderam escolher o tipo de ponte que desejassem construir, sendo frisado que as pontes de viga são as menos complicadas de se construir. Para ajudar nessa escolha, os alunos receberam um bom embasamento sobre treliças, pontes treliçadas, suas classificações e as forças que atuam sobre elas.

5.2 Partes de uma estrutura treliçada

Nas estruturas treliçadas, as vigas, que são as travessas horizontais, recebem o nome de banzo, os componentes verticais são denominados tecnicamente de montantes e têm por finalidade interligar o banzo superior ao inferior. Para que as estruturas ganhem maior rigidez, os montantes recebem um travamento triangular através das diagonais formando as tesouras. Os pontos onde os montantes e as diagonais se unem nos banzos inferior e superior são denominados nós. Observem figura 51:

Figura 51 – Ponte suspensa: Estrutura Treliçada



Fonte: <https://estagioconstrucaonavalipufrj.wordpress.com/2012/08/page/2/>

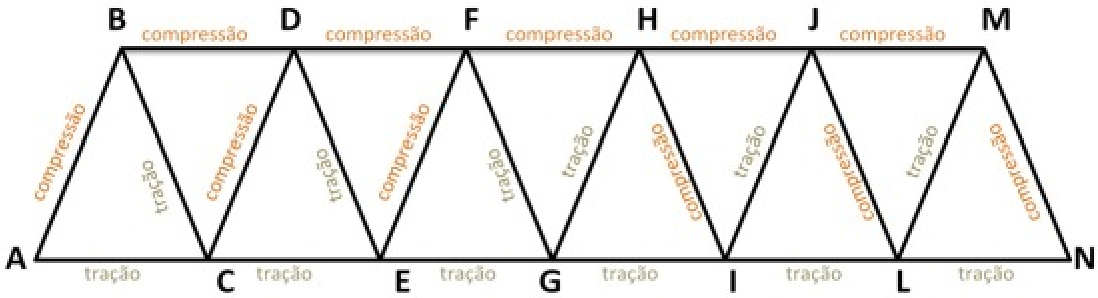
5.3 Breve estudo da treliças e forças que atuam sobre elas

> Todos os tipos de pontes lidam com duas forças importantes: as forças de compressão e de tração. A força de compressão age para comprimir ou diminuir a coisa sobre a qual está agindo e a força de tração age para expandir ou aumentar a coisa sobre a qual está agindo. Quando estas forças estão desconexas há o risco de que a estrutura entorte ou rache. A estrutura corre o risco de entortar quando a força de compressão ultrapassa a habilidade de um objeto em lidar com essa compressão e racha quando há excesso de tração sobre o objeto. Para que isso não ocorra deve-se espalhar, distribuir a força por uma grande área, fazendo com que nenhum ponto tenha de suportar o impacto da força concentrada, tirando esta concentração de um ponto e distribuindo pela área projetada, a estrutura é capaz de suportar a força. (JUNIOR et al., 2012)

As forças que vão agir sobre a estrutura, sobretudo as de tração e compressão serão distribuídas sobre os nós, fazendo com que a estrutura não entorte nem rache. Chama-se estrutura treliçada todo esse conjunto de nós onde as forças citadas vão agir.

Na figura 52, visualiza-se a distribuição da ação das forças de compressão e tração sobre todo esse conjunto de nós, ou seja, sobre a estrutura treliçada:

Figura 52 – Forças de tração e compressão



Fonte: <http://tamarindoeng.blogspot.com.br/2015_05_01_archive.html>

> O tamanho da viga, e, especialmente, sua altura controla a distância que essa viga pode atingir sem precisar de uma nova coluna. Ao aumentar a altura da viga, há mais material para dissipar a tração. Para criar vigas bem altas, os projetistas de pontes adicionam redes de apoio ou tesouras à viga da ponte. Essa tesoura de suporte adiciona rigidez à viga existente, aumentando bastante sua capacidade de dissipar tanto a compressão como a tração. Assim que a viga começar a comprimir, a força será dissipada por meio da tesoura. (JUNIOR et al., 2012)

O que é uma tesoura? As tesouras nada mais são do que um tipo de treliça. Mas o que é uma treliça? Treliças são estruturas compostas de elementos ligados em conjunto para formar uma estrutura rígida, em sua maioria, esses elementos são triângulos interligados, capazes de suportar e transportar as forças de tração e compressão de modo equilibrado, de forma a não permitir que a estrutura entorte ou quebre. Não é só na construção de pontes que as treliças são utilizadas, este recurso é muito utilizado na construção de telhados, galpões, estádios, guindastes, torres de alta tensão, cobertura de quadras poliesportivas, entre outras.

5.4 Pontes treliçadas

5.4.1 Classificação quanto ao posicionamento do convés

Viu-se anteriormente que os tipos de ponte existentes são as pontes de viga, pontes de arco e as pontes suspensas. Todos estes tipos de pontes podem ser construídas usando o sistema estrutural de treliças, sendo que as pontes, seja de que tipo forem, recebem uma nova classificação, desta vez quanto às cordas, ou seja, quanto ao posicionamento do convés, também conhecido como tabuleiro, nome técnico da plataforma sobre a qual o fluxo de pedestres ou meios de transporte vão transitar. Portanto, quanto às cordas, ou posicionamento do convés, as pontes treliçadas são classificadas da seguinte forma:

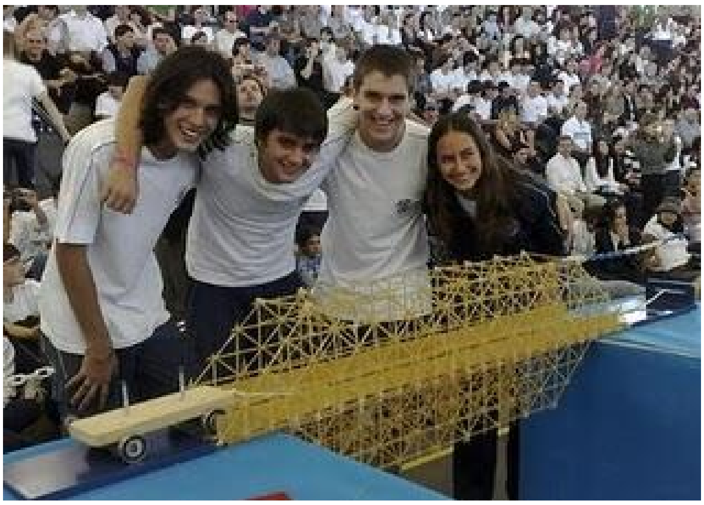
a) Ponte completamente treliçada: estão entre as mais usuais, nelas o convés, que é a plataforma por onde transitam os meios de transporte e pedestres, se localiza no banzo inferior da treliça, muito utilizada em pontes de ferrovias. Vejam figura 53:

Figura 53 – Ponte completamente treliçada

Fonte: <http://www.novaromadosul.rs.gov.br/atrativos_int.php?id=4>

b) Ponte de treliça pônei: são as menos usuais, na verdade até raras de se ver. São as pontes de treliça em que o convés ou plataforma se encontra na parte central da treliça, ou seja, na mediatriz das estruturas verticais da treliça. Vejam figura 54:

Figura 54 – Ponte de treliça pônei



Fonte: <http://www.ufsj.edu.br/noticias_ler.php?codigo_noticia=1740>

c) Ponte de treliça convés: também estão entre as mais usuais, são as pontes treliçadas em que o convés ou plataforma de encontra sobre o banzo superior das treliças. Vejam figura 55:

Figura 55 – Ponte de treliça convés

Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfwmYAB/rm-ii-3-trelica>

d) Pontes de treliças mistas: são as pontes que possuem partes de um tipo e partes de outro tipo, na imagem abaixo pode-se observar uma ponte em que no vão central ela é completamente treliçada e nas extremidades é de treliça convés. Vejam figura 56:

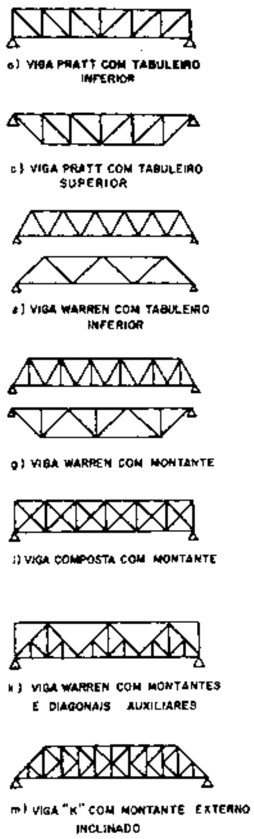
Figura 56 – Ponte de treliça mista

Fonte: <http://www.lem.ep.usp.br/pef2309/antigo/2002.1/2002pontes/Pontes%20-%20Estradas%20de%20Ferro.htm>

5.4.2 Tipos de pontes treliçadas

Existem vários tipos de pontes treliçadas, os mais conhecidos e utilizados podem ser observados na figura 57. Porém, podemos visualizar por onde passamos, pontes treliçadas distintas das que serão apresentadas, mas que utilizam estas como base. Os tipos de pontes treliçadas, em relação ao tipo de treliça utilizada na sua construção, podem ser classificadas da seguinte forma:

Figura 57 – Tipos de pontes treliçadas



Fonte: <http://www.ppgec.ufrgs.br/segovia/espaguete/papo_ptrelicadas.html>

Os alunos tiveram a oportunidade de visualizar esta imagem, sendo orientados a observar as características de cada tipo para que pudessem escolher o melhor tipo de ponte para construírem.

5.5 Critérios para a construção das pontes treliçadas

Obviamente, o objetivo deste trabalho não é fazer com que os alunos saibam fazer todos os cálculos de estrutura de construção civil, principalmente de pontes, e sim de mostrar na prática o emprego dos conteúdos estudados em sala de aula, mesmo por que são alunos de ensino fundamental e médio e não acadêmicos do curso de Engenharia Civil.

Inicialmente os alunos foram orientados a pesquisar e assistir vídeos na internet, sendo indicado pelo professor os seguintes links:

https://www.youtube.com/watch?v=wQhtyc9phxY;

https://www.youtube.com/watch?v=stNxYpXWb0U;

https://www.youtube.com/watch?v=JjGqZJWV9Sc

Todos os vídeos são referentes à construção de pontes de macarrão e competição de destruição destas pontes, como forma de despertar ainda mais o interesse dos alunos, além de dar um embasamento para que pudessem escolher o tipo de ponte que iriam construir, elaborando e executando seus projetos.

Esse trabalho de pesquisa foi escrito e entregue pelos alunos, vejam figura 58, e avaliado pelo professor, para posteriormente darem início à construção das pontes de espaguete.

Figura 58 – Trabalhos escritos dos alunos

Fonte: Autoria própria

Desta forma, foram orientados a seguir alguns critérios para projetar e construir suas pontes de espaguete, da seguinte forma:

1. Utilizar conceitos básicos de Física, como a distribuição do peso sobre a superfície, mesmo princípio dos homens que deitam em camas de prego, para distribuir a carga de peso sobre cada nó da treliça, assim seus projetos deveriam verificar o número de treliças que utilizariam para suportar a carga desejada;

2. Escolher um dos tipos de pontes treliçadas mostradas anteriormente e projetar as pontes desenhando-as em uma cartolina para servir-lhes de molde, utilizando os conhecimentos adquiridos sobre a teoria dos triângulos como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, triângulos retângulos, segmentos notáveis, entre outros;

3. Projetar uma ponte simétrica fazendo com que as forças de compressão e tração possam estar em harmonia.

5.6 Etapas de construção das pontes de espaguete

Para a confecção das pontes de espaguete, os alunos foram divididos em grupos de 8 alunos. Ao final, as pontes seriam expostas e avaliadas quanto a dois critérios: a ponte mais bem construída utilizando os conhecimentos de geometria e teoria dos triângulos e a ponte que suportasse a maior carga de peso em um ensaio destrutivo, havendo uma premiação para os melhores trabalhos, considerando os dois critérios.

5.6.1 Material utilizado

Para a construção da ponte de macarrão, os alunos tiveram que dispor do seguinte material: macarrão espaguete tipo 8, cola quente, pistola de cola quente, cola branca, pincel, durepox, lixa, cartolina, fita adesiva, tubo pvc, lápis, estilete e régua.

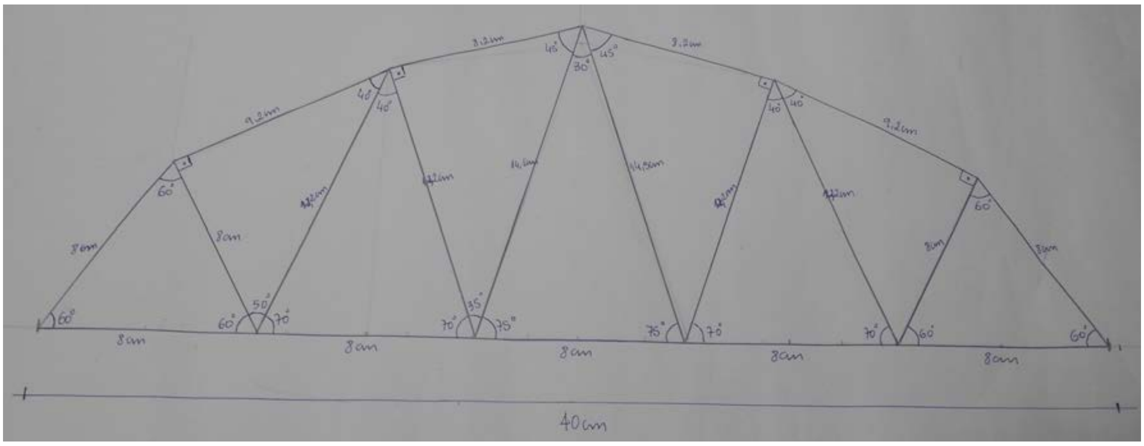
Cabe lembrar que há registros de pontes feitas com outros materiais, como palitos de churrasco, por exemplo. É um material mais fácil de manusear, mais rígido, porém menos estimulante para a competição.

5.6.2 Construção das pontes de espaguete

O primeiro passo foi a escolha da geometria da ponte, o tipo de ponte que iriam construir dentre os modelos apresentados, podendo também usar a criatividade, não esquecendo dos critérios previamente estabelecidos.

Em seguida passaram a elaborar seus projetos desenhando suas pontes em uma cartolina para servir-lhes de molde. Na figura 59, pode-se observar o projeto de um grupo usando os conhecimentos de triângulos:

Figura 59 – Projeto da ponte de espaguete



Fonte: Protocolo de pesquisa

Neste projeto, pode-se visualizar que o aluno trabalhou com vários conteúdos estudados, como triângulos isósceles, equiláteros, retângulos, soma dos ângulos internos, medida de ângulo externo, semelhança, razões trigonométricas, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, congruência, entre outros.

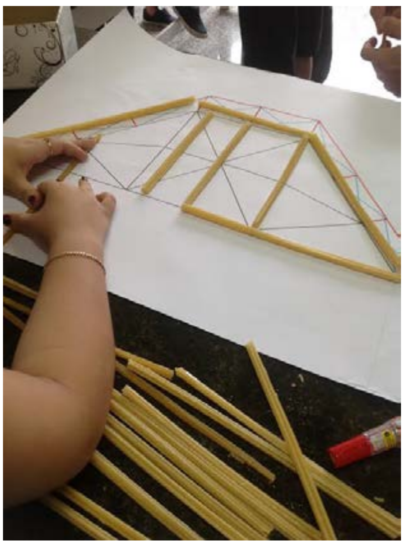
Em seguida os alunos confeccionaram o material a ser utilizado na construção de suas pontes, vejam figura 60. Inicialmente colaram os fios de espaguete com cola branca em quantidade entre 5 em 5 a 10 em 10 fios e deixaram secar.

Figura 60 – Preparação do material

Fonte: Autoria própria

Após todo o material estar preparado, cada parte foi cortada conforme o molde desenhado e os alunos iniciaram a montagem das pontes, vejam figuras 61 e 62. A princípio construíram as partes laterais em duplicidade, em seguida as laterais foram unidas em seus banzos inferiores e superiores dando forma à ponte. Cada parte da ponte foi unida em seus nós utilizando cola quente e após toda a ponte ficar pronta, os nós receberam um reforço com massa de solda tipo durepox.

Figura 61 – Corte das peças da ponte de espaguete



Fonte: Autoria própria

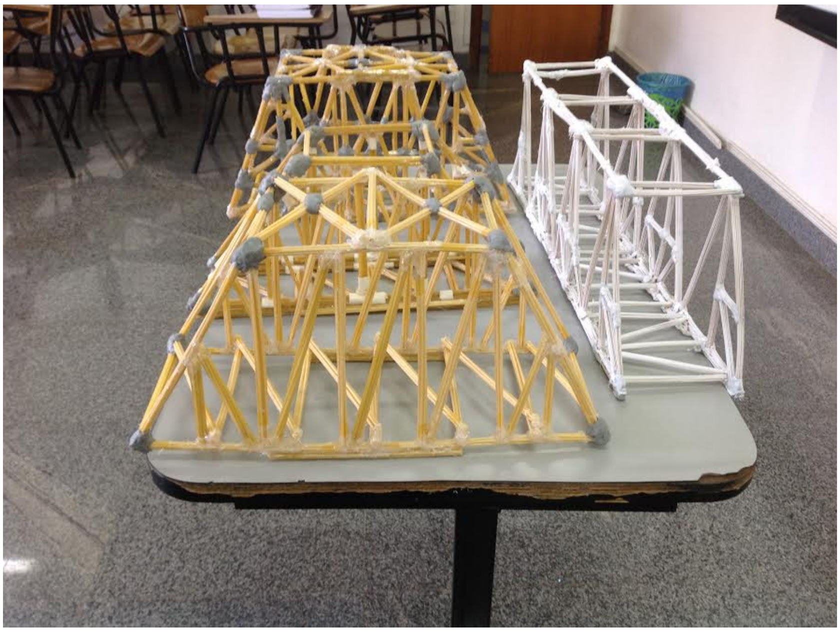
Figura 62 – Montagem da ponte

Fonte: Autoria própria

5.6.3 Exposição das pontes de espaguete e a competição

Após todas as pontes estarem prontas, estas foram expostas, vejam figura 63, e os alunos fizeram uma breve explicação de seus trabalhos para alunos de outras séries, explicando como a forma triangular, na forma de treliças, é capaz de suportar grandes cargas. Inclusive indicando que, embora o macarrão seja um material de extrema fragilidade, quando utilizado na forma de treliças, é capaz de suportar cargas desproporcionais a sua resistência, claro que considerando certas limitações.

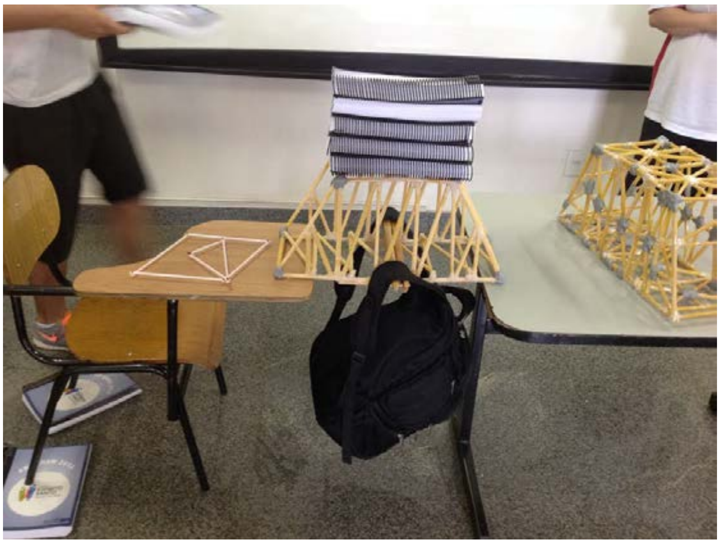
Figura 63 – Exposição das pontes de espaguete



Fonte: Autoria própria

Como última etapa do trabalho, foi realizado o ensaio destrutivo das pontes, vejam figura 64, colocando sobre cada uma delas, uma carga de peso até que a ponte quebrasse. A ponte vencedora deste ensaio suportou um peso de cerca de 21 kg.

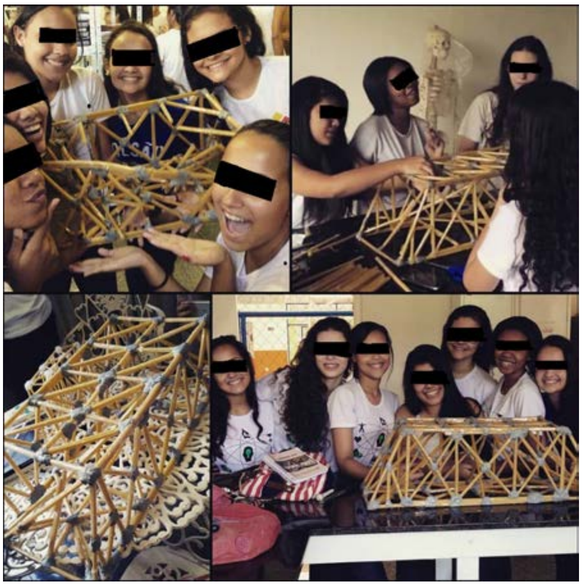
Figura 64 – Ensaio de destruição das pontes de espaguete



Fonte: Autoria própria

A premiação foi distribuída sobre dois critérios: ponte mais bem construída utilizando os conhecimentos adquiridos e ponte que suportou a maior carga. Na figura 65 temos a equipe vencedora e premiada nos dois critérios.

Figura 65 – Equipe vencedora



Fonte: Autoria própria

5.7 Avaliação Final

Como forma de avaliar todo o trabalho realizado e verificar se o objetivo de proporcionar uma aprendizagem significativa e consistente tinha sido atingido, foi aplicada aos alunos uma avaliação com 25 questões objetivas, que pode ser visualizada no apêndice B, sobre o estudo dos triângulos, no valor de 10 pontos. Nesta avaliação, as questões foram baseadas nas habilidades e competências que devem possuir de acordo com os descritores. Os descritores avaliados foram os seguintes:

a) Ensino Fundamental:

• D3 (descritor 3): Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos. (questões 1 a 7)

• D7 (descritor 7): Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificar propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. (questões 8 a 10)

• D10 (descritor 10): Utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos. (questões 11 a 16)

b) Ensino Médio:

• D2 (descritor 2): Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras geométricas planas ou espaciais. (questões 17 a 20)

• D5 (descritor 5): Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo. (questões 21 a 25)

A avaliação final foi realizada pelos mesmos 72 alunos que fizeram a avaliação diagnóstica. Os alunos que faltaram no dia da aplicação, fizeram em outro momento. Na análise dos resultados, os alunos foram classificados utilizando-se os mesmos critérios da avaliação diagnóstica. Vejam os resultados na tabela 3:

Tabela 3 – Resultados da avaliação final

NÍVEL	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM
ABAIXO DO BÁSICO	04	aproximadamente 5,5%
BÁSICO	12	aproximadamente 16,7%
PROFICIENTE	30	aproximadamente 41,7%
AVANÇADO	26	aproximadamente 36,1%

Fonte: Autoria própria

Pode-se verificar claramente que a melhoria dos resultados, se comparados com a avaliação diagnóstica, foi muito satisfatório, pois conseguiu-se retirar um número muito grande de alunos dos níveis mais baixos (abaixo do básico e básico), colocando-os nos níveis mais elevados (proficiente e avançado). Isso é reflexo de uma aprendizagem significativa e consistente.

Além das questões relativas ao estudo dos triângulos, os alunos responderam 5 perguntas sobre o trabalho desenvolvido, sobretudo sobre a construção das pontes de espaguete, obtendo os seguintes resultados:

1) Este trabalho contribuiu para a mudança da sua visão sobre a importância da geometria no dia a dia?

Sim: 72 alunos Não: Nenhum aluno

2) A metodologia utilizada neste trabalho contribuiu para sua aprendizagem?

Sim: 72 alunos Não: Nenhum aluno

3) A competição de Pontes de Espaguete proporcionou a aplicação na prática dos conhecimentos sobre triângulos?

Sim: 70 alunos Não: 2 alunos

4) Você gostaria de participar novamente de uma competição de Pontes de Espaguete?

Sim: 64 alunos Não: 8 alunos

5) Que outra contribuição este trabalho, principalmente a construção da Ponte de Espaguete, lhe proporcionou?

Como esta questão foi aberta, foram consideradas as três respostas mais frequentes:

Passei a gostar de matemática: 20

Ajudou a definir minha escolha profissional: 21

Passei a gostar de geometria: 14

Nada: 2

Outras: 15

Os resultados destes cinco questionamentos, demonstram que o trabalho proposto atingiu seus objetivos, pois todos os alunos passaram a reconhecer a importância da geometria no mundo a sua volta. Quanto ao procedimento metodológico, todos reconheceram que contribuiu para uma melhor aprendizagem. Em relação a construção e competição das pontes de espaguete, a grande maioria reconheceu que a prática contribuiu muito para a aprendizagem. Cabe ressaltar que muitos alunos e alunas despertaram o interesse pela engenharia ou outro curso na área das ciências exatas após a realização deste trabalho.

Considerações Finais

A experiência com a realização deste trabalho foi muito gratificante e serviu para comprovar que os professores podem ensinar de forma mais eficaz, proporcionando aos alunos uma aprendizagem significativa. O estudo da geometria oferece um leque muito grande de opções para ensinar com sentido, pois através dela muitos conceitos matemáticos são comprovados e demonstrados.

A realização do estudo dos triângulos utilizando os procedimentos metodológicos propostos, colocando-se o professor como mediador neste processo de ensino e aprendizagem, proporcionou que os alunos fizessem suas próprias descobertas e conclusões, desta forma conseguiram aprender de forma prática e consequentemente apreender o que foi estudado. Isso proporcionou uma grande mudança na visão dos alunos acerca do estudo da geometria.

Na construção das pontes, foi possível observar o brilho nos olhos dos alunos e o entusiasmo ao aplicarem o que aprenderam de forma prática. Ao deixarmos às aulas meramente expositivas em segundo plano, dando protagonismo a atividade prática no laboratório, os alunos tiveram a oportunidade de verificar na prática como as coisa acontecem, como os conceitos matemáticos são aplicados no mundo real. Mesmo assim, muitos ainda eram céticos em relação à resistência das pontes de espaguete, achando que estas quebrariam no primeiro contato, ceticismo que foi por água abaixo nos primeiros ensaios de destruição das pontes.

Na elaboração dos projetos das pontes, os alunos tiveram a oportunidade de aplicar todos os conhecimentos teóricos sobre a geometria dos triângulos, sobretudo semelhança, classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e ângulos, Teorema de Pitágoras, razões trigonométricas, medida de ângulo externo, entre outros.

No capítulo 4, mostramos os resultados da avaliação diagnóstica, cuja finalidade era ter uma visão dos conhecimentos que os alunos haviam assimilado nas séries anteriores acerca da teoria dos triângulos, resultados nada animadores. Já no capítulo 5, mostramos os resultados da avaliação final aplicada após todo o desenvolvimento do trabalho proposto. Na tabela 4, podemos fazer uma comparação entre os resultados obtidos em ambas as avaliações e facilmente observa-se um grande avanço na assimilação dos conteúdos propostos.

Tabela 4 – Comparativo de resultados

NÍVEL	AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	AVALIAÇÃO FINAL
ABAIXO DO BÁSICO	21%	5,5%
BÁSICO	50%	16,7%
PROFICIENTE	18%	41,7%
AVANÇADO	11%	36,1%

Fonte: Autoria própria

Podemos observar uma melhora significativa na aprendizagem, pois houve uma redução significativa no percentual de alunos nos dois níveis mais baixos e, consequentemente, um aumento, também significativo, do percentual de alunos nos dois níveis mais altos de aprendizagem.

Os resultados mostram que os objetivos propostos pelo trabalho foram plenamente atingidos, afinal, além de terem obtido um aprendizado consistente, despertou-se nos alunos o interesse pelo estudo da geometria. Os alunos reconhecem agora, que a geometria está muito presente no dia a dia, muito mais do que imaginavam antes, inclusive despertando em muitos alunos que ainda não haviam decidido que carreira se dedicar, o interesse pela engenharia.

O estudo realizado neste trabalho não deve se esgotar aqui. Deve sim servir para despertar nos professores e estudantes que tiverem a oportunidade de conhecê-lo, o interesse pela pesquisa. Como as possibilidades que a geometria nos oferece à pesquisa são muito amplas, o interesse é aprofundarmos mais neste estudo em trabalhos futuros, em outros níveis de conhecimento, sempre com o intuito de proporcionar uma aprendizagem cada vez mais sólida. Uma proposta seria a de buscar uma adaptação dos cálculos de estruturas de construção civil aos níveis de ensino médio.

Referências

BIANCHINI, E. *Matemática, (Ensino Fundamental)*. [S.l.]: São Paulo: Moderna, 2002. 217 p. Citado na página 40.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. *Coleção Matemática: fazendo a diferença (Ensino Fundamental)*. [S.l.]: São Paulo: FTD, 2006. Citado na página 40.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado na página 29.

COLL, C.; EUFRÁSIO, J. C. T. *O construtivismo na sala de aula*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página 27.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. [S.l.: s.n.], 2013. v. 9. 7 p. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 94.

FLOOD, R.; WILSON, R. *A História dos grandes Matemáticos*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 23, 24 e 25.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. dos S. *Matemática e realidade*. [S.l.]: Atual, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 20, 40 e 41.

JUNIOR, C. F. L. F. et al. Ponte de macarrao passo a passo calculos e construcao. *Trabalho de conclusao do segundo semestre, do ciclo engenharia basico apresentado a Universidade Paulista (UNIP) Orientador Marcio Frugoli*, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 25, 53, 55 e 56.

RODRIGUES, S. dos S. A. *A Teoria de Van Hiele Aplicada aos Triangulos Uma Sequencia Didatica para o 8º Ano do Ensino Fundamental*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profmat - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2015. Citado na página 18.

SANTANNA, I. M.; MENEGOLLA, M. *Didática: aprender a ensinar: técnicas e reflexões pedagógicas para formação de formadores*. [S.l.: s.n.], 2002. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.

SILVA, J. F. d. *Trigonometria no triângulo retângulo e exemplos na construção civil*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profmat - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2016. Citado na página 18.

SOUZA, F. da S. *A Geometria Aplicada a Construcao de uma Ponte em Arco*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado - Programa de Mestrado Profmat - Universidade Federal do Acre, 2016. Citado na página 18.

APÊNDICE A

Avaliação Diagnóstica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE “DARCY RIBEIRO”

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRANDO: GUILHERME COELHO MACHADO

ORIENTADOR: GERALDO DE OLIVEIRA FILHO

ALUNO:______________________________ SÉRIE/TURMA: ______

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA PARA O ALUNO

Caro(a) Aluno(a),

Esta não é uma avaliação na qual será atribuída uma nota, ela é parte da pesquisa da Dissertação do Mestrado *Estudo dos Triângulos e sua importância na composição de estruturas treliçadas aplicadas à competição de pontes de espaguete.* Suas respostas são muito importantes para a fase exploratória deste estudo, e estarão sob sigilo.

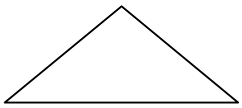
Esta avaliação visa dar uma noção sobre conhecimentos relativos ao estudo dos triângulos adquiridos e assimilados no ensino fundamental e até aqui no ensino médio. São exercícios muito simples sem grandes problematizações.

Peço gentilmente que responda as questões.

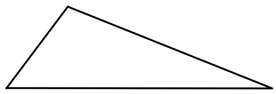
Desde já, agradeço-lhe por sua colaboração!

1) Utilizando uma régua, meça os lados dos triângulos abaixo e classifique-os quanto a medida dos lados:

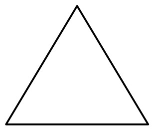
a)



b)

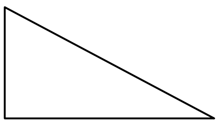


c)

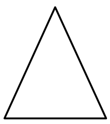


2) Classifique os triângulos abaixo quanto a medida dos ângulos(se achar melhor use um transferidor):

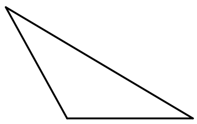
a)



b)

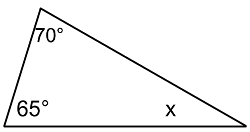


c)

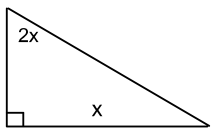


3) Calcule o valor do ângulo desconhecido nos triângulos abaixo?

a)

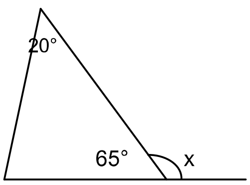


b)

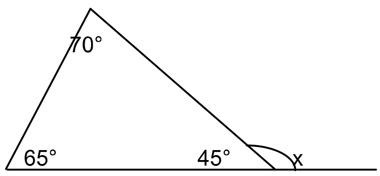


4) Calcule o valor desconhecido nos triângulos abaixo?

a)

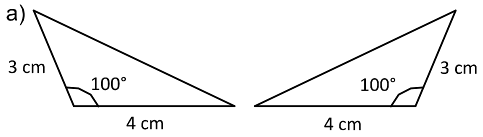


b)



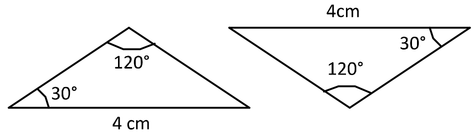
5) Indique o caso de congruência de cada par de triângulos abaixo:

a)



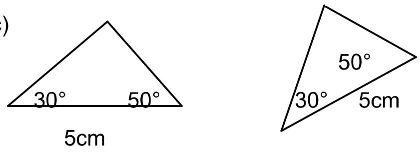
____

b)



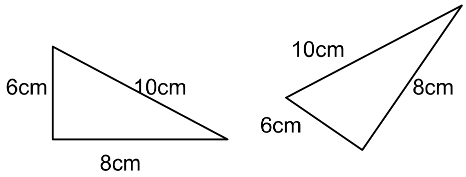
____

c)



____

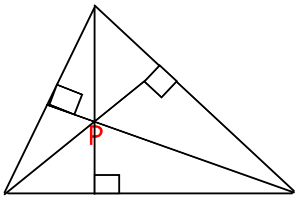
d)



____

6) Em cada triângulo abaixo indique qual ceviana está traçada e o respectivo ponto notável P:

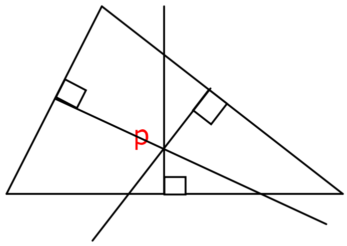
a)



____

____

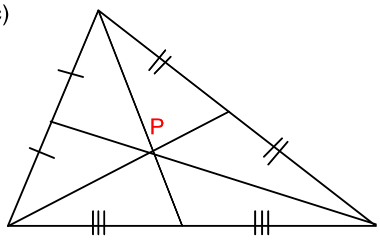
b)



____

____

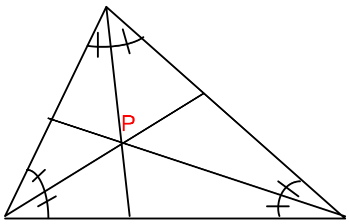
c)



____

____

d)

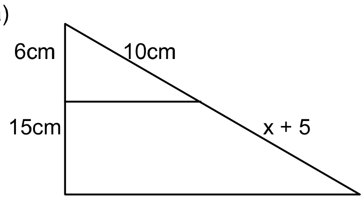


____

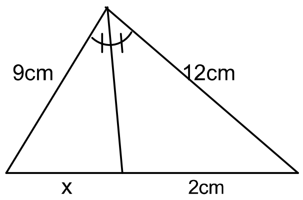
____

7) Calcule o valor de x nas figuras abaixo:

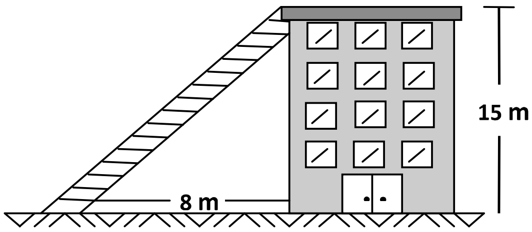
a)



b)

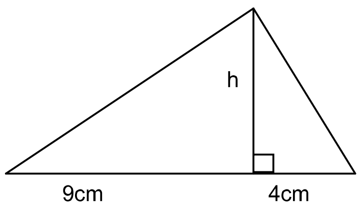


8) A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. Calcule o comprimento desta escada:

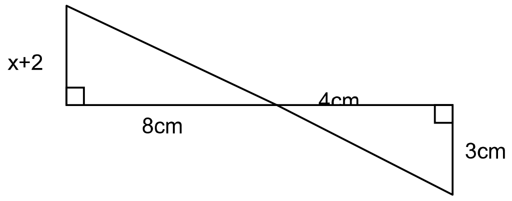


9) Um prédio projeta sobre o solo uma sombra de 6m. No mesmo instante uma pessoa de 1,80m projeta sobre o solo uma sombra de 0,6m. Qual a altura do prédio?

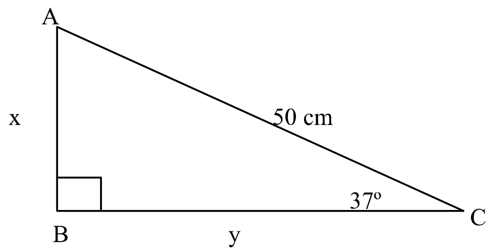
10) Calcule o valor de x no triângulo abaixo:



11) Calcule o valor de x na figura abaixo:



12) Calcule o valor de x nos triângulos abaixo: (Dados: sen 37º = 0,60   cos 37º = 0,80   tg 37º = 0,75)



13) Abaixo apresentamos em cada item três medidas. Em qual delas é possível a construção de um triângulo usando estas medidas?

I - 3cm, 6cm, 5cm
II - 5cm, 7cm, 12cm
III - 5cm, 7cm, 10cm
IV - 5cm, 5cm, 5cm

a) Somente I
b) I e III
c) I e IV
d) Nenhum
e) Todos

APÊNDICE B

Avaliação Final

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE “DARCY RIBEIRO”

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRANDO: GUILHERME COELHO MACHADO

ORIENTADOR: GERALDO DE OLIVEIRA FILHO

ALUNO:_______________________________________ SÉRIE/TURMA: ______

AVALIAÇÃO FINAL PARA O ALUNO

Caro(a) Aluno(a),

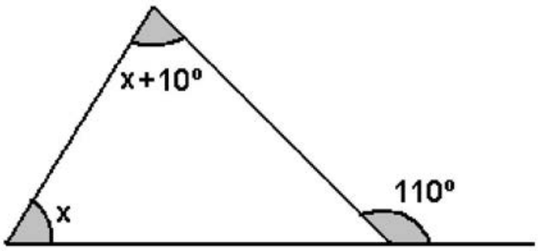
Esta não é uma avaliação é parte da pesquisa da Dissertação do Mestrado *Estudo dos Triângulos e sua importância na composição de estruturas treliçadas aplicadas à competição de pontes de espaguete.* Suas respostas são muito importantes para a conclusão deste estudo.

Esta avaliação visa verificar os conhecimentos relativos ao estudo dos triângulos adquiridos e assimilados durante este projeto. São exercícios baseados nos descritores, habilidades e competências que devem possuir..

Peço gentilmente que responda as questões com bastante atenção.

Desde já, agradeço-lhe por sua colaboração!

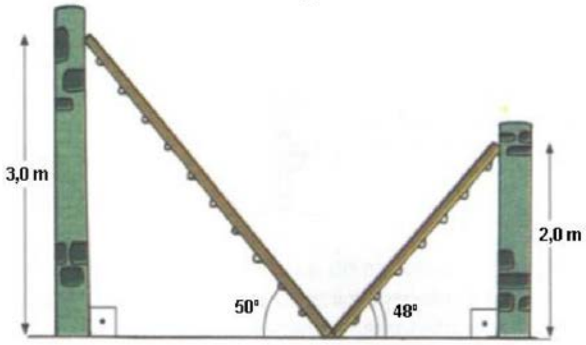
1) Observe o triângulo abaixo.



O valor de x é

(A) 110º
(B) 80º
(C) 60º
(D) 50º

2) Duas escadas estão encostadas em dois muros, como mostra na figura abaixo.



Quanto medem os ângulos formados pela escada maior e menor encostadas no muro.

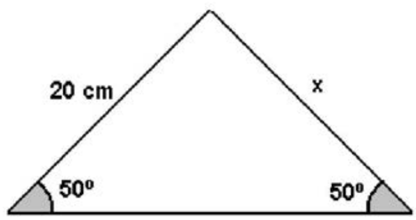
(A) 90º e 90º.
(B) 50º e 48º.
(C) 40º e 42º.
(D) 3º e 2º.

3) A figura abaixo é um triângulo utilizado para sinalização de trânsito. É denominado de triângulo equilátero.

Com relação aos ângulos e lados, podemos afirmar:

(A) todos os ângulos e lados diferentes;
(B) todos os ângulos congruentes e lados diferentes entre si.
(C) todos os ângulos e lados congruentes.
(D) dois ângulos congruentes e todos os lados diferentes.

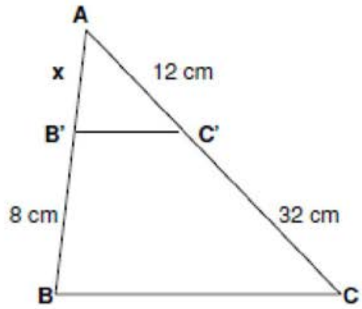
4) (SIMAVE). A figura, abaixo, representa uma peça de madeira em que um dos lados mede 20 cm e cada um dos ângulos assinalados mede 50°.



Nessa peça, quanto mede o lado indicado pela letra x?

A) 20 cm
B) 30 cm
C) 50 cm
D) 70 cm

5) Na figura a seguir, o segmento ***BC*** é paralelo ao segmento ***B'C'***.



A medida do lado **AB'** do triângulo menor é

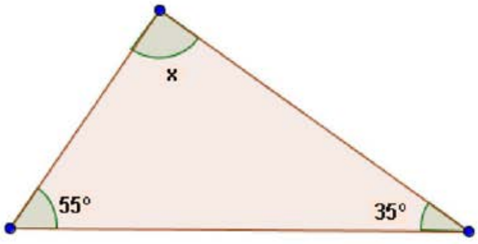
(A) 1 cm.
(B) 2 cm.
(C) 3 cm.
(D) 4 cm.

6) O telhado de algumas casas tem o formato de um triângulo isósceles.

Com relação aos ângulos e lados, podemos afirmar:

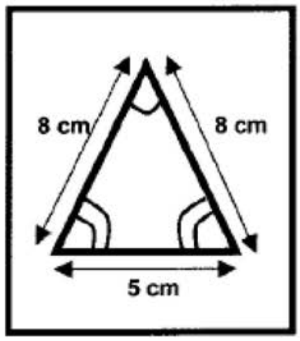
(A) possui todos os ângulos congruentes
(B) possui todos os lados congruentes.
(C) possui dois ângulos e dois lados congruentes.
(D) possui todos os ângulos diferentes entre si.

7) De acordo com o triângulo abaixo, assinale a alternativa correta:



(A) O valor de **x** é 90° e este é um triângulo retângulo.
(B) O valor de **x** é 80° e este é um triângulo acutângulo.
(C) O valor de **x** é 75° e este é um triângulo escaleno.
(D) O valor de **x** é 55° e este é um triângulo isósceles.

8) (Prova Brasil). A professora desenhou um triângulo, como no quadro abaixo.



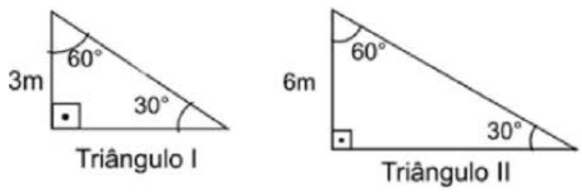
Em seguida, fez a seguinte pergunta: — "Se eu ampliar esse triângulo 3 vezes, como ficarão as medidas de seus lados e de seus ângulos?"
Alguns alunos responderam:

Fernando: — "Os lados terão 3 cm a mais cada um. Já os ângulos serão os mesmos."
Gisele: — "Os lados e ângulos terão suas medidas multiplicadas por 3."
Marina: — "A medida dos lados eu multiplico por 3 e a medida dos ângulos eu mantenho as mesmas."
Roberto: — "A medida da base será a mesma (5cm), os outros lados eu multiplico por 3 e mantenho a medida dos ângulos."

Qual dos alunos acertou a pergunta da professora?

(A) Fernando
(B) Gisele
(C) Marina
(D) Roberto

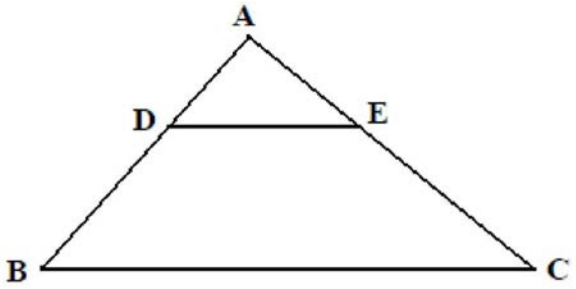
9) Observe os triângulos **I** e **II** representados abaixo.



O triângulo **I** tem 6 m² de área, quanto mede a área do triângulo **II**?

A) 12 m²
B) 18 m²
C) 20 m²
D) 24 m²

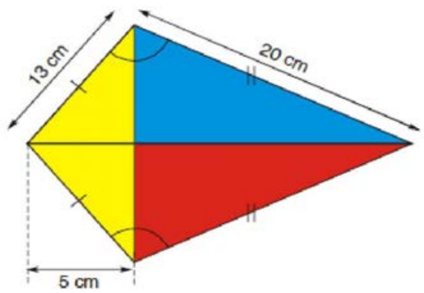
10) (Projeto con(seguir)). Na figura, BC//DE, AB =15 m, AD = 5 m, AE = 6 m.



A medida do segmento CE é, em metros:

(A) 6
(B) 10
(C) 12
(D) 18

11) (Saresp 2007). Pipa é um quadrilátero que tem dois lados consecutivos e dois ângulos opostos com medidas iguais. Observe a figura: os lados e ângulos congruentes estão marcados de forma igual. Para construir uma pipa de papel de seda são colocadas duas varetas perpendiculares, nas diagonais do quadrilátero. Quantos centímetros de vareta, no mínimo, foram usados para construir a pipa representada na figura?

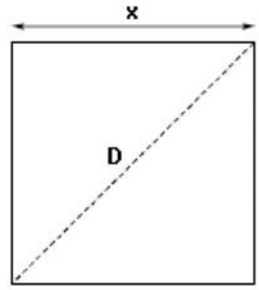


(A) 41
(B) 45
(C) $\sqrt{569}+24$
(D) $\sqrt{569}+10$

12) (saresp 2007). Um retângulo tem dimensões 6cm e 8cm. A diagonal desse retângulo, em centímetros, é

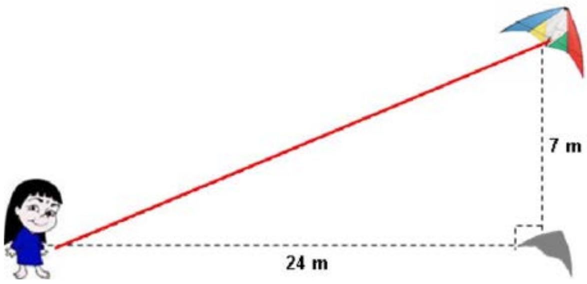
(A) 10
(B) 9,8
(C) 9,5
(D) 9

13) (Saresp 2007). A medida da diagonal D de um quadrado de lado x é



(A) $\frac{x}{2}$
(B) x
(C) $x\sqrt{2}$
(D) 3x

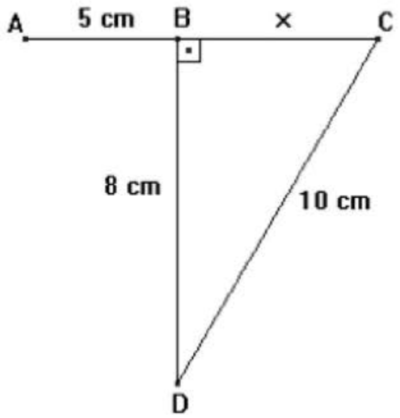
14) (GAVE). A Marta está a brincar com um papagaio.



Sabendo que o papagaio se encontra a 7 metros de altura e que a Marta está a 24 metros de distância da sombra do papagaio, indica quanto mede o fio que o segura.

(A) O fio mede 23 metros
(B) O fio mede 25 metros
(C) O fio mede 31 metros
(D) O fio mede 35 metros

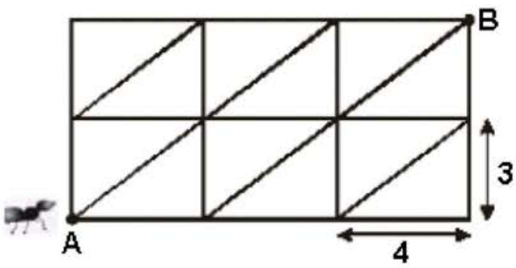
15) (Projeto con(seguir)). Brincando com um pedaço retilíneo de arame, João foi fazendo algumas dobras, até que o arame ficasse conforme mostrado na figura. Dobrou primeiramente no ponto B, em seguida no ponto C, e por último, no ponto D, formando o segmento DB.



Sabendo-se que após formar a figura não houve nenhuma sobra, pode-se afirmar que o comprimento desse pedaço retilíneo de arame é:

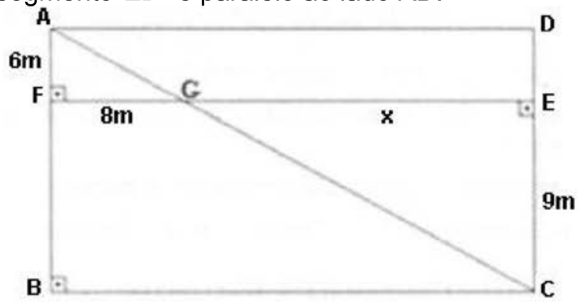
(A) 29 cm
(B) 25 cm
(C) 28 cm
(D) 23 cm

16) (OBMEP). Uma formiga está no ponto *A* da malha mostrada na figura.
A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de *A* até *B*?



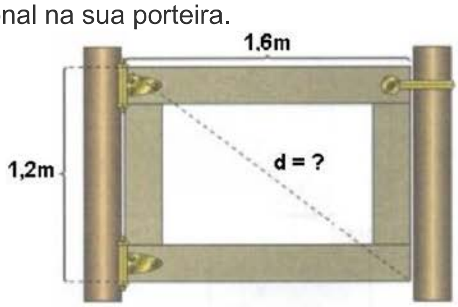
(A) 12 cm
(B) 14 cm
(C) 15 cm
(D) 18 cm

17) A figura ABCD abaixo é um retângulo e o segmento $\overline{EF}$ é paralelo ao lado AD.



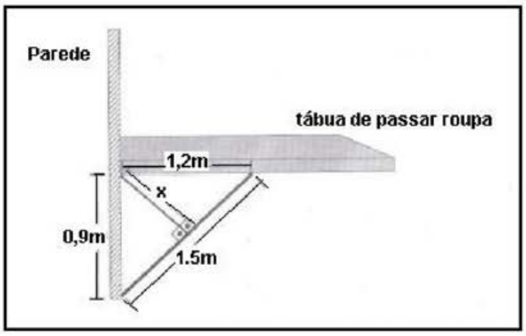
Qual é o comprimento do segmento $\overline{EG}$, indicado por x?
(A) 5 m
(B) 7 m
(C) 11 m
(D) 12 m

18) Um fazendeiro quer colocar uma tábua em diagonal na sua porteira.



Sabendo que a folha da porteira mede 1,2m por 1,6m. O comprimento Dessa tábua é:
(A) 2,8m
(B) 2 m
(C) 0,8 m
(D) 1,92m

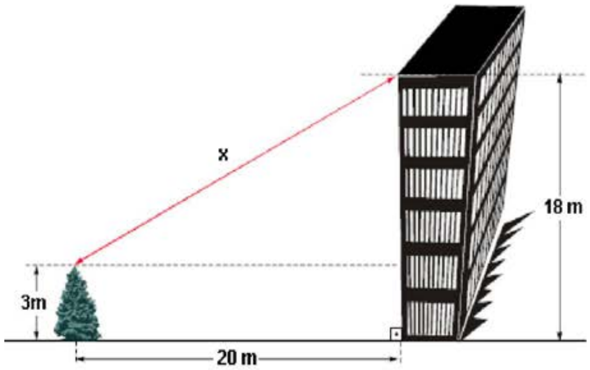
19) Um marceneiro fixou uma tábua de passar roupa perpendicular a uma parede, a 0,90 metros do chão. Para aumentar a resistência, ele colocou dois apoios, como mostra a figura abaixo.



O comprimento “x” do apoio menor é

A) 0,42
B) 0,48
C) 0,72
D) 0,75

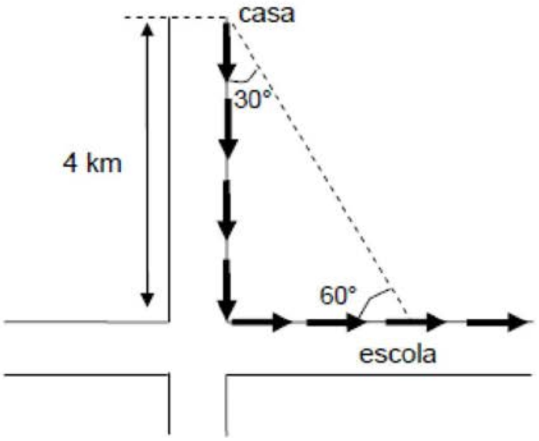
20) (Saresp 2007). A altura de uma árvore é 3 m e ela está a 20 m de um edifício cuja altura é 18 m.



A distância entre o ponto mais alto da árvore e o ponto mais alto do edifício é

(A) 15 m
(B) 18 m
(C) 20 m
(D) 25 m

21) Para se deslocar de sua casa até a sua escola, Pedro percorre o trajeto representado na figura abaixo.

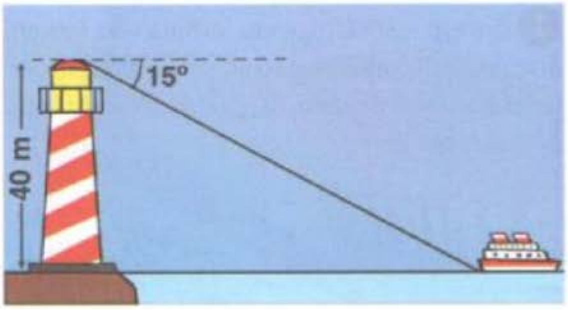


Sabendo que $tg(60^o) = \sqrt{3}$, a distância total, em km, que Pedro percorre no seu trajeto de casa para a escola é de:

(A) $4 + \frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $4 + \sqrt{3}$

(C) $4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (D) $4\sqrt{3}$

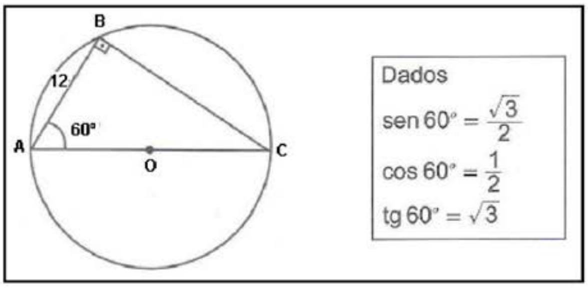
22) Do topo de um farol situado a 40 m acima do nível do mar, o ângulo de depressão de um barco (figura abaixo) é de 15º.



Sabendo que $tg(15^o) = 2 - \sqrt{3}$, a distância do barco ao farol é de:

(A) $20(1+\sqrt{3})$ m
(B) $20(2+\sqrt{3})$ m
(C) $40(2+\sqrt{3})$ m
(D) $40(2-\sqrt{3})$ m

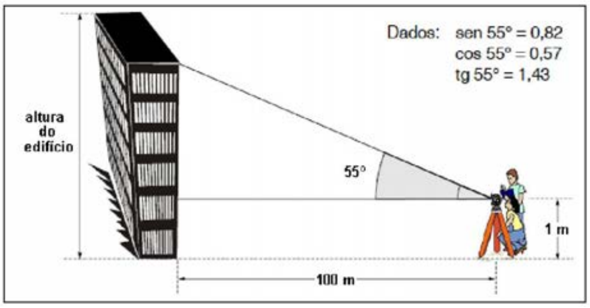
23) Um triângulo ABC está inscrito numa semicircunferência de centro O. Como mostra o desenho abaixo. Sabe-se que a medida do segmento AB é de 12 cm.



Qual é a medida do raio dessa circunferência?

A) 6 cm
B) $2\sqrt{3}$ cm
C) 12 cm
D) $8\sqrt{3}$ cm

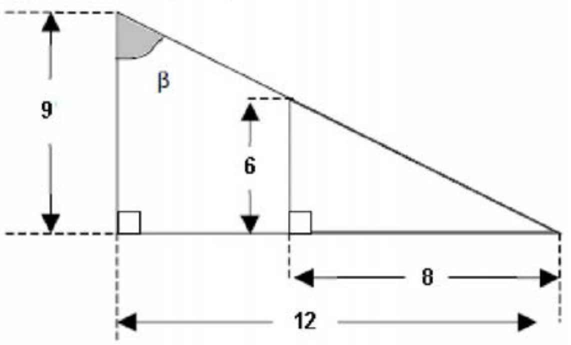
24) (Saresp 2001). O teodolito é um instrumento utilizado para medir ângulos. Um engenheiro aponta um teodolito contra o topo de um edifício, a uma distância de 100 m, e consegue obter um ângulo de 55º.



A altura do edifício é, em metros, aproximadamente:

(A) 58 m
(B) 83 m
(C) 115 m
(D) 144 m

25) (Saresp 2007). Nos triângulos retângulos representados na figura, qual é a medida da tangente do ângulo β?



(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

QUESTIONÁRIO DE PERCEPÇÃO DO TRABALHO DA PONTE DE ESPAGUETE

1) Este trabalho contribuiu para a mudança da sua visão sobre a importância da geometria no dia a dia?

( ) Sim ( ) Não

2) A metodologia utilizada neste trabalho contribuiu para sua aprendizagem?

( ) Sim ( ) Não

3) A competição de Pontes de Espaguete proporcionou a aplicação na prática dos conhecimentos sobre triângulos?

( ) Sim ( ) Não

4) Você gostaria de participar novamente de uma competição de Pontes de Espaguete?

( ) Sim ( ) Não

5) Que outra contribuição este trabalho, principalmente a construção da Ponte de Espaguete, lhe proporcionou?

____

____

____

____

APÊNDICE C

Teoria dos Triângulos

C.1 Classificação dos triângulos

Os triângulos são classificados sobre dois aspectos: quanto às medidas dos ângulos internos e quanto às medidas dos lados.

C.1.1 Quanto às medidas dos lados

Quanto às medidas dos lados, os triângulos classificam-se em:

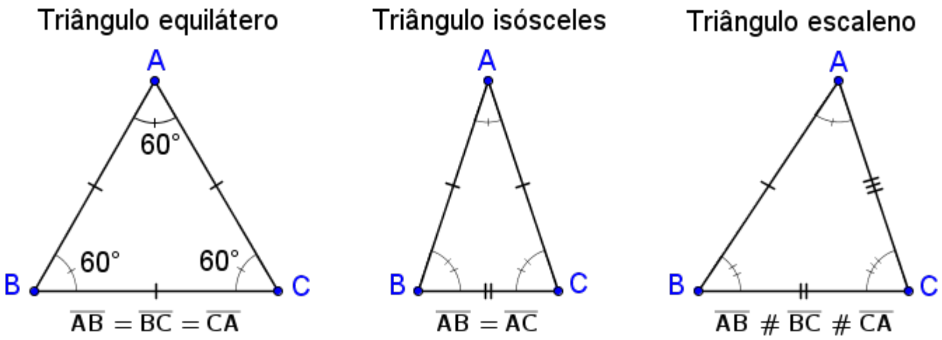
a) Equiláteros: são triângulos que possuem os três lados congruentes;

b) Isósceles: são triângulos que possuem dois lados congruentes;

c) Escalenos: são triângulos que não possuem lados congruentes.

Na figura 66 podemos observá-los:

Figura 66 – Classificação dos triângulos quanto a medida dos lados



Fonte:<http://www.centraldasformulas.com.br/matematica/geometria-triangulo>

Vale destacar que os triângulos equiláteros também são isósceles. Por isso, uma definição mais adequada dos triângulos isósceles seria: o triângulo que possui pelo menos dois lados congruentes.

C.1.2 Quanto às medidas dos ângulos internos

Quanto às medidas dos ângulos internos os triângulos podem ser classificados em:

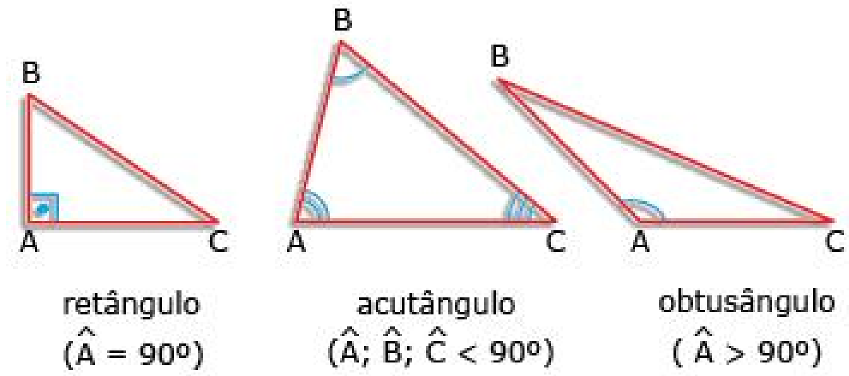
a) Retângulos: Triângulos que possuem um ângulo reto (90°);

b) Acutângulos: Triângulos que possuem todos os ângulos agudos, ou seja, menores que 90°;

c) Obtusângulo: Triângulos que possuem um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.

Na figura 67 podemos observá-los:

Figura 67 – Classificação dos triângulos quanto a medida dos ângulos



Fonte:<http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/1736?token=5%2f2Yd2%2bzzv%2f29umTApxi0Q%3d%3d>

C.1.3 Relação entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos

Existe uma relação entre a classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e a quantidade de ângulos congruentes de um triângulo. A quantidade de ângulos congruentes é igual a quantidade de lados congruentes, ou seja, um triângulo equilátero possui três lados e três ângulos congruentes, um triângulo isósceles possui pelo menos dois lados e dois ângulos congruentes e por fim, um triângulo escaleno não possui nenhum lado e nenhum ângulo congruente.

Diante desta informação, pôde ser levantado um questionamento pelo professor como forma de estimular o raciocínio dos alunos: É necessário o uso do transferidor para medir um ângulo interno de um triângulo equilátero?. Nenhum aluno teve dificuldade de fazer a relação e entender que não, pois basta dividir 180° (soma dos ângulos internos) por 3.

C.2 Congruência de triângulos

Para que dois triângulos sejam congruentes, estes devem atender a dois quesitos:

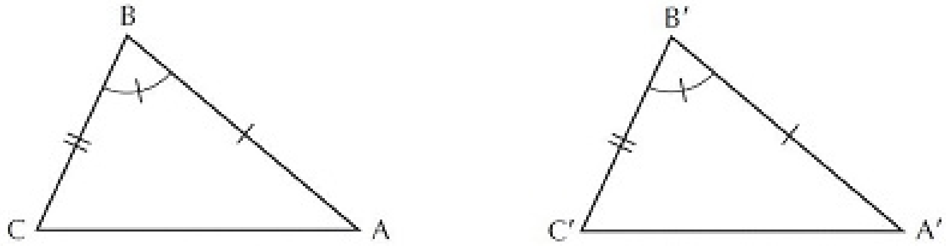
• Cada lado de um dos triângulos deve ser congruente a cada lado correspondente (ou homólogo) do outro triângulo;

• Cada ângulo de um dos triângulos deve ser congruente a cada ângulo correspondente (ou homólogo) do outro triângulo.

Conclui-se, então, que devem ocorrer seis congruências, três entre os lados e três entre os ângulos. Entretanto não há necessidade de se observar as seis congruências para determinar se dois triângulos são congruentes ou não. Através dos casos de congruência, pode-se afirmar se dois triângulos são congruentes observando apenas três congruências. Esses casos são os seguintes:

a) Caso LAL (Lado – Ângulo - Lado): Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo formado por entre eles, respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes. Vejam figura 68:

Figura 68 – Caso de semelhança LAL

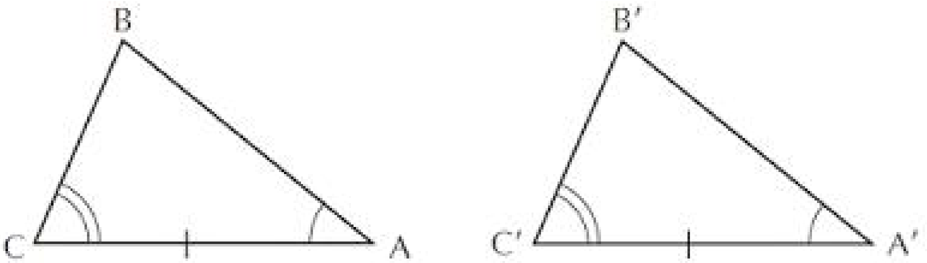


Fonte:<http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com.br/ 2014/08/geometria-plana-triangulos.html>

Observe que $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}; \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, logo:$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

b) Caso ALA (Ângulo – Lado – Ângulo): Se dois triângulos possuem um lado e os dois ângulos adjacentes a ele, respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes. Vejam figura 69:

Figura 69 – Caso de semelhança ALA

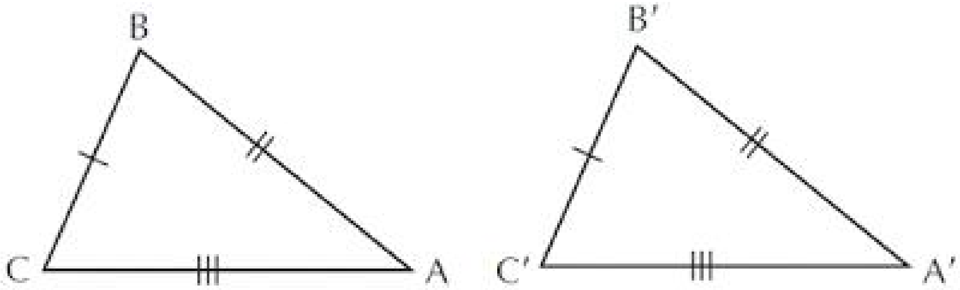


Fonte:<http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com.br/ 2014/08/geometria-plana-triangulos.html>

Observem que $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}; \widehat{C} \equiv \widehat{C'}; \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, logo:$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

c) Caso LLL (Lado – Lado – Lado): Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes, respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes. Vejam figura 70:

Figura 70 – Caso de semelhança LLL

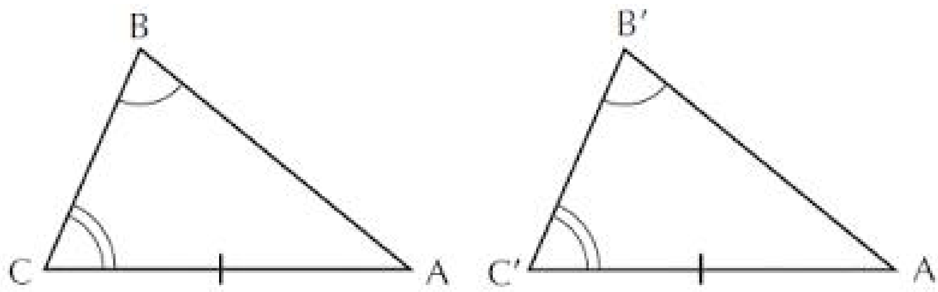


Fonte:<http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com.br/ 2014/08/geometria-plana-triangulos.html >

Observem que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, logo:$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

d) Caso LAAo (Lado – Ângulo – ângulo oposto): Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes. Vejam figura 71:

Figura 71 – Caso de semelhança LAAo



Fonte:<http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com.br/ 2014/08/geometria-plana-triangulos.html >

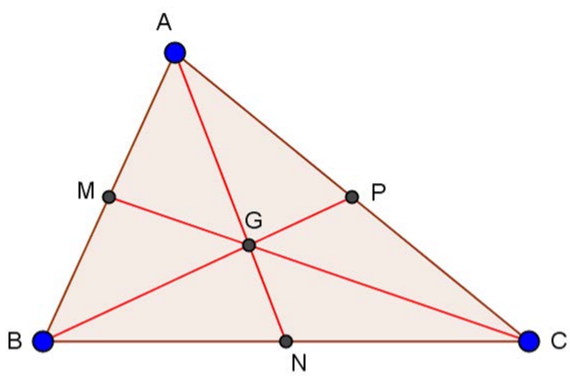
Observem que $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}; \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, logo:$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

C.3 Pontos notáveis dos triângulos

C.3.1 Baricentro – Medianas

As medianas são os segmentos de reta que ligam cada vértice do triângulo ao ponto médio do seu lado oposto. Na figura abaixo, as medianas são indicadas pelos segmentos $\overline{AN}, \overline{BP}$ e $\overline{CM}$. As três medianas intersectam-se num mesmo ponto, indicado na figura pelo ponto G. Vejam figura 72:

Figura 72 – Baricentro e medianas



Fonte: Autoria própria

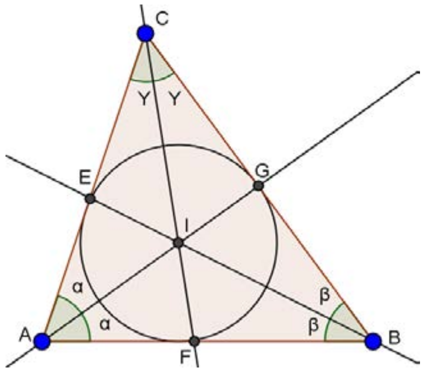
A partir do ponto G, as medianas são divididas em duas partes de forma que uma parte é o dobro da outra: $\overline{AG} = 2.\overline{NG}$; $\overline{BG} = 2.\overline{PG}$ e $\overline{CG} = 2.\overline{MNG}$.

O baricentro, que é o centro de gravidade do triângulo, indicado na figura pelo ponto G, é determinado pela intersecção entre as medianas, assim demonstrado:
$\overline{AN} \cap \overline{BP} \cap \overline{CM} = B$

C.3.2 Incentro - Bissetrizes

Bissetriz é a reta que divide um ângulo ao meio. Em qualquer triângulo pode-se traçar três bissetrizes internas, cada uma a partir de um de seus ângulos internos, indicados na figura pelos segmentos $\overline{CF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{AG}$. Vejam figura 73:

Figura 73 – Incentro e bissetrizes



Fonte: Autoria própria

O ponto de intersecção entre as bissetrizes, indicado pelo ponto I, está localizado a uma mesma distância em relação a cada lado do triângulo: $\overline{CF} \cap \overline{BE} \cap \overline{AG} = I$

O Incentro, determinado pelo ponto de intersecção entre as bissetrizes e indicado na figura pelo ponto I, é o centro da circunferência inscrita no triângulo, demonstrado na figura.

C.3.3 Circuncentro - Mediatrizes

As mediatrizes são as retas perpendiculares a cada lado de um triângulo, passando pelo ponto médio de cada lado, indicados na figura 41 pelos segmentos que passam pelos pontos $\overline{DC}, \overline{EC} e \overline{FC}$. Vejam figura 74:

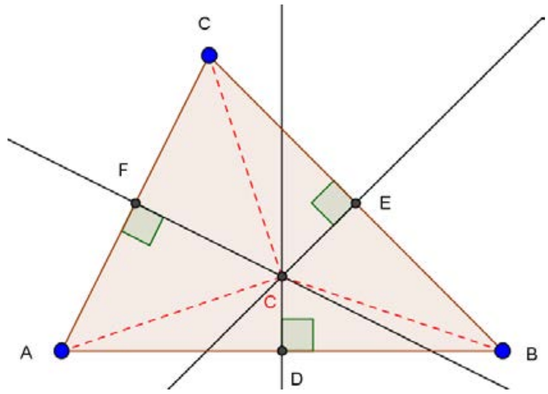
O ponto de intersecção das mediatrizes, indicado pelo ponto C, encontra-se a uma mesma distância de cada vértice do triângulo, desta forma pode-se afirmar que:

$$\overline{DC} \cap \overline{EC} \cap \overline{FC} = C$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CC}$$

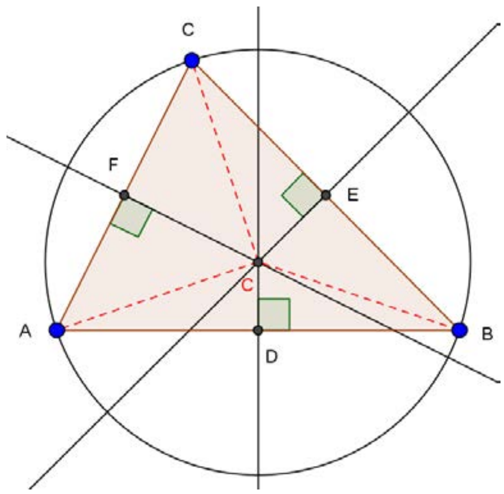
O circuncentro, indicado na figura pelo ponto C, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Vejam figura 75:

Figura 74 – Circuncentro e mediatrizes



Fonte: Autoria própria

Figura 75 – Triângulo inscrito



Fonte: Autoria própria

Na figura acima, o triângulo é acutângulo e pode-se observar que o circuncentro localiza-se na parte interna ao triângulo. Nas figuras abaixo é fácil observar que, se o triângulo for escaleno, o circuncentro localiza-se na parte externa do triângulo e, se for retângulo, o circuncentro localiza-se na hipotenusa do triângulo, ou seja, o circuncentro é pertencente à hipotenusa. Vejam figura 76:

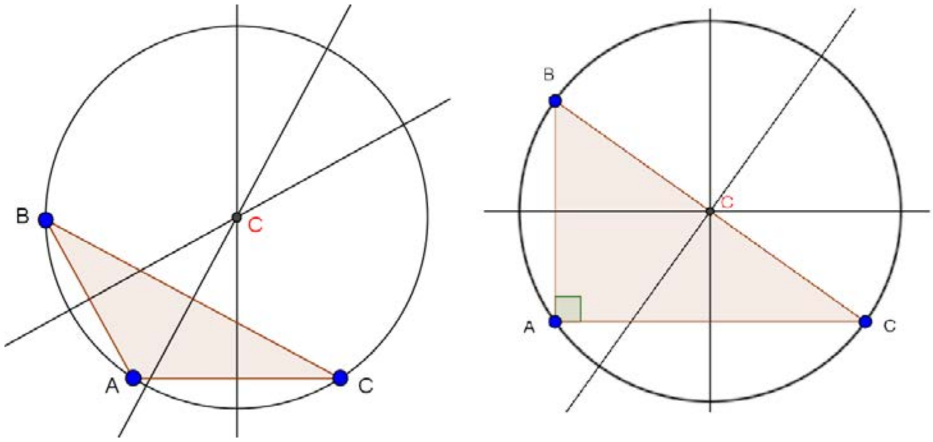
C.3.4 Ortocentro – Alturas

A altura relativa à cada lado de um triângulo, é a reta perpendicular à cada um desses lados, que passa pelos seus respectivos vértices opostos. As alturas estão representadas na figura abaixo pelos segmentos $\overline{CD}, \overline{AE}$ e $\overline{BF}$.

Ortocentro, indicado pelo ponto O, é o ponto de intersecção das alturas relativas a cada lado do triângulo. Vejam figura 77:

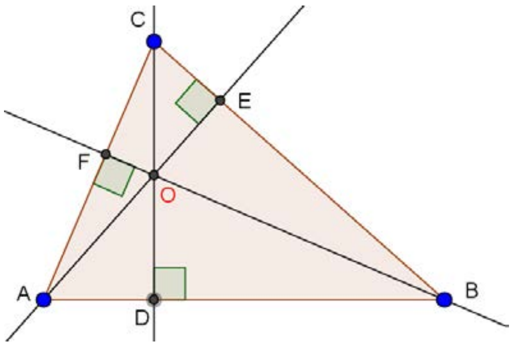
Traçando uma paralela a cada lado do triângulo ($\overline{AC}//\overline{A'C'}$; $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ e $\overline{BC}//\overline{B'C'}$) a partir de cada vértice, obtém-se um novo triângulo Δ A'B'C'. Dessa forma, as alturas

Figura 76 – Posicionamento do centro da circunferência circunscrita em relação ao triângulo.



Fonte: Autoria própria

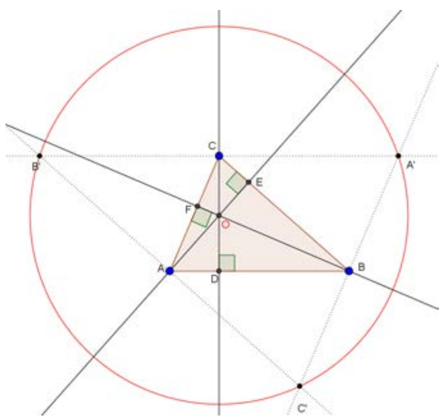
Figura 77 – Ortocentro e alturas



Fonte: Autoria própria

passam a ser as mediatrizes do novo triângulo e, assim sendo, o ortocentro passa a ser o circuncentro do novo triângulo. Vejam figura 78:

Figura 78 – Transformação de alturas em mediatrizes



Fonte: Autoria própria

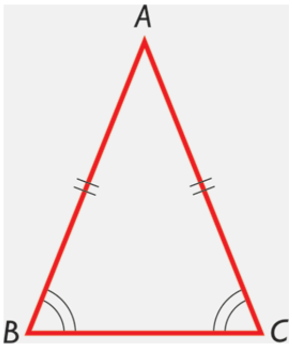
C.4 Triângulos Isósceles e Equiláteros

C.4.1 Triângulos Isósceles

Nos triângulos isósceles observam-se três propriedades importantes, considerando todo o estudo já realizado até aqui, são elas:

a) 1ª propriedade: em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Note na figura 79 que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$:

Figura 79 – Triângulo isósceles



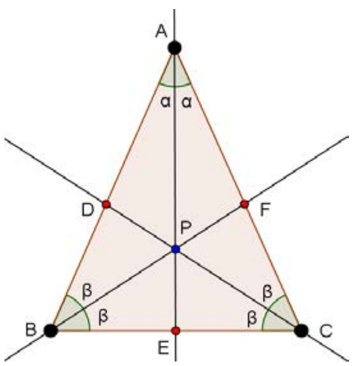
Fonte: Autoria própria

b) 2ª propriedade: em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto a base é também mediana relativa à base.

c) 3ª propriedade: em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto a base é também altura relativa à base.

Analisando a 2ª e 3ª propriedades, conclui-se que em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto a base, a altura relativa à base e a mediana relativa à base são coincidentes, ou seja, $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo Â,mediana e altura da base $\overline{BC}$. Assim como o ponto P é incentro, baricentro e ortocentro. Vejam figura 80:

Figura 80 – Triângulo isósceles e os pontos notáveis



Fonte: Autoria própria

C.4.2 Triângulos equiláteros

Sobre os triângulos equiláteros, se define três importantes propriedades:

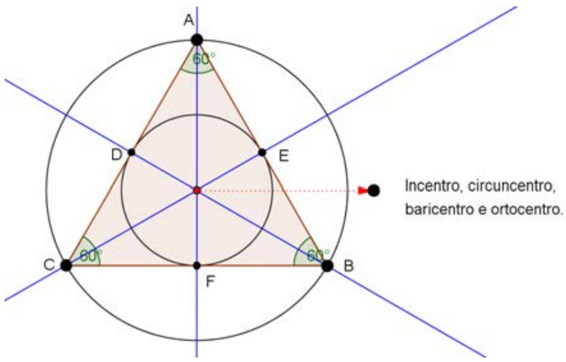
a) 1ª propriedade: todo triângulo equilátero é equiângulo (possui todos os ângulos com a mesma medida) e todo triângulo equiângulo é equilátero.

b) 2ª propriedade: em todo triângulo equilátero, as bissetrizes de qualquer ângulo e as alturas, medianas e mediatrizes de quaisquer lados são coincidentes.

c) 3ª propriedade: baseado na 2ª propriedade, conclui-se que os pontos notáveis baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro são coincidentes.

Na figura 81, podemos verificar que $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$; $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C}$, e que $\overline{AF}, \overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são bissetrizes, alturas, medianas e mediatrizes. Desta forma, o ponto de intersecção entre elas é incentro, ortocentro, baricentro e circuncentro.

Figura 81 – Triângulo equilátero e os pontos notáveis



Fonte: Autoria própria

C.4.3 Casos de semelhança de triângulos

Embora para que dois triângulos sejam semelhantes estes tenham que atender a dois quesitos, já vistos anteriormente, pode-se garantir que dois triângulos são semelhantes observando-se apenas parte destes quesitos. São os chamados casos de semelhança.

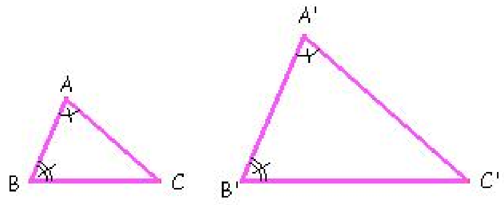
C.4.3.1 Caso A A (ângulo - ângulo

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então estes triângulos são semelhantes. Na figura 82 pode-se observar que:
$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, logo: ΔABC $\sim$ ΔA'B'C'.

C.4.3.2 Caso L A L (lado - ângulo - lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo formado por esses lados congruentes, os triângulos são semelhantes. Na figura observa-se

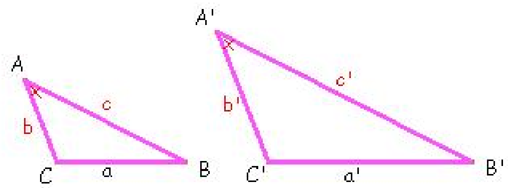
Figura 82 – Caso de semelhança AA



Fonte:<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/ moduloII/conteudos2_criterios1.html>

que b é proporcional b', c é proporcional a c' e $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, logo ΔABC $\sim$ ΔA'B'C'. Vejam figura 83:

Figura 83 – Caso de semelhança LAL

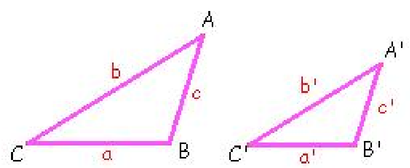


Fonte:<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/ moduloII/conteudos2_criterios1.html>

C.4.3.3 CASO L L L (LADO – LADO – LADO):

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, estes são semelhantes. Na figura observa-se que a e a', b e b' e c e c' são proporcionais, desta forma ΔABC $\sim$ ΔA'B'C'. Vejam figura 84:

Figura 84 – Caso de semelhança LLL



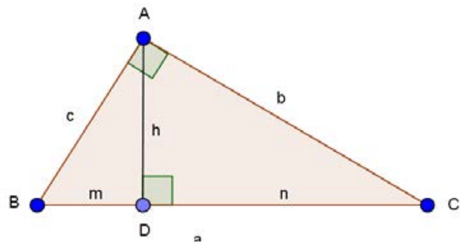
Fonte:<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/ moduloII/conteudos_criterios1.html>

C.5 Relações métricas no triângulo retângulo

Para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo é essencial que os alunos dominem o Teorema de Pitágoras e Semelhança de Triângulos. Dominando estes dois conteúdos, fica muito mais fácil para o aluno perceber de onde vieram as fórmulas que dão suporte às relações métricas no triângulo retângulo. Pois estas fórmulas têm origem na semelhança entre os três triângulos retângulos que se formam ao traçar no primeiro a altura relativa à hipotenusa e o Teorema de Pitágoras. Desta forma, os alunos podem perceber que não há necessidade de gravar fórmulas que parecem sem sentido, podem realizar o mesmo cálculo que fariam utilizando essas fórmulas, usando apenas semelhança de triângulos por meio do Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, duas ferramentas importantíssimas na matemática.

Limitar-se a indicar as variáveis que representam os lados do triângulo, sua altura e a projeção dos catetos sobre a hipotenusa e a escrever uma série de fórmulas, relacionando essas variáveis e exigir que os alunos as memorizem, sem que saibam suas origens, não parece ser um bom caminho. Vejam na figura 85:

Figura 85 – Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria

Originalmente tem-se o triângulo ΔABC de lados a, b e c. Nele é traçada a altura relativa à hipotenusa $\overline{AD}$, dividindo o lado a em dois segmentos de medidas m e n. Os segmentos m e n são, respectivamente, a projeção do cateto c sobre a hipotenusa e a projeção do cateto b sobre a hipotenusa. A relação entre todos estes segmentos geram várias fórmulas, que possuem origem no Teorema de Pitágoras ou no Teorema de Tales aplicado à semelhança de triângulos. Mostrar a origem dessas fórmulas, faz com que os alunos percebam que não há conteúdo isolado e que há sim, uma continuidade no estudo, sendo um o complemento do outro. Desta forma, separando-se o triângulo original ΔABC daqueles formados pela altura relativa à hipotenusa, ΔABD e ΔACD, pode-se demonstrar a origem das fórmulas. Vejam figura 86:

Origem das fórmulas:

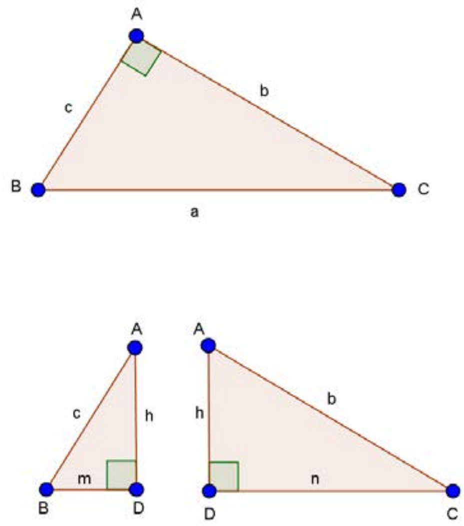
1°) cada cateto é a média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa. (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217)

$b^2 = an \Longrightarrow$ obtida pela semelhança entre ΔABC e ΔACD.

$c^2 = am \Longrightarrow$ obtida pela semelhança entre ΔABC e ΔABD.

2°) a altura relativa à hipotenusa é a média proporcional (ou média geométrica) entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217)

Figura 86 – Relações métricas e semelhança



Fonte: Autoria própria

$h^2 = mn \Longrightarrow$ obtida pela semelhança entre ΔABD e ΔACD.

3º) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217)

$ah = bc \Longrightarrow$ obtida pela semelhança entre ΔABC e ΔABD ou entre ΔABC e ΔACD.

4º) o produto de um cateto pela altura relativa a hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro cateto sobre a hipotenusa. (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 217)

$hb = cn \Longrightarrow$ obtida pela relação de semelhança entre ΔABD e ΔACD.

$hc = bm \Longrightarrow$ obtida pela relação de semelhança entre ΔABD e ΔACD.

5º) fórmulas com origem no Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow$ Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔABC.

$b^2 = h^2 + n^2 \Longrightarrow$ Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔACD.

$c^2 = h^2 + m^2 \Longrightarrow$ Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔABD.

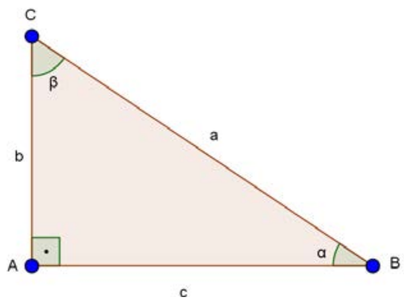
C.6 Trigonometria no triângulo retângulo - razões trigonométricas

Num triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto denomina-se hipotenusa. No estudo das razões trigonométricas, os catetos terão nomes distintos, um será o cateto oposto e o outro o cateto adjacente. O fator que determina se o cateto é oposto ou adjacente é o ângulo agudo de referência, o lado oposto a esse ângulo será o cateto oposto e o outro o cateto adjacente. Na figura 87, observa-se que:

a) Em relação ao ângulo β, a hipotenusa é o lado "a", o cateto oposto o lado "c"e o cateto adjacente o lado "b".

b) Em relação ao ângulo α, a hipotenusa é o lado "a", o cateto oposto o lado "b"e o cateto adjacente o lado "c".

Figura 87 – Triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria

As razões trigonométricas são denominadas seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, abreviadas respectivamente por sen, cos, tg, sec, cossec e cotg. Essas razões são determinadas por:

sen x = $\frac{catetooposto}{hipotenusa}$

cos x = $\frac{catetoadjacente}{hipotenusa}$

tg x = $\frac{catetooposto}{catetoadjacente}$

cossec x = $\frac{hipotenusa}{catetooposto}$

sec x = $\frac{hipotenusa}{catetoadjacente}$

cotg x = $\frac{catetoadjacente}{catetooposto}$

C.7 Trigonometria em triângulos quaisquer

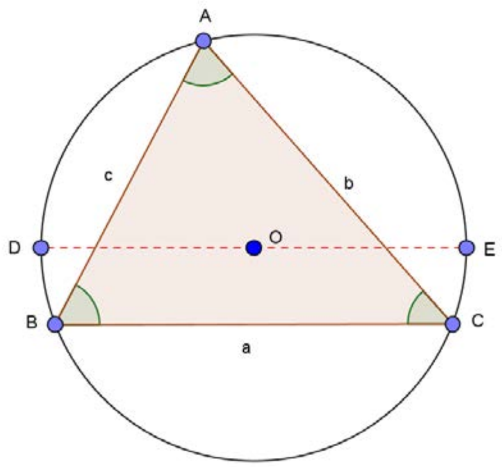
Para se trabalhar com triângulos retângulos, é importante dominar os conhecimentos de Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Mas se os triângulos não forem retângulos, deve-se trabalhar com triângulos quaisquer, cujas regras se aplicam a qualquer triângulo.

C.7.1 Lei dos Senos

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles e essa razão de proporcionalidade é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Lembrando que o diâmetro é o dobro do raio (r). Na figura 88, temos que:

$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}} = 2r$

Figura 88 – Lei dos Senos

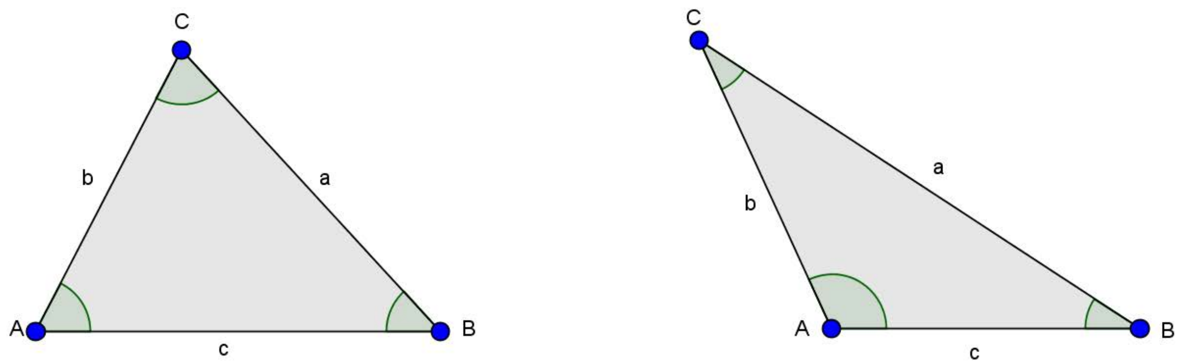


Fonte: Autoria própria

C.7.2 Lei dos Cossenos

Em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, ou seja, oposto ao primeiro lado. Vejam figura 89:

Figura 89 – Lei dos Cossenos



Fonte: Autoria própria

Temos então que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\widehat{C}$$

C.7.3 Reconhecimento da natureza de um triângulo

Conhecendo os lados de um triângulo e chamando o maior lado de a e os demais respectivamente de b e c, obtém-se:

$$\mid b - c \mid < a < b + c$$

Com isso, pode-se reconhecer a natureza de um triângulo conforme as seguintes equivalências:

$a^2 < b^2 + c^2 \Longrightarrow$ Triângulo acutângulo.

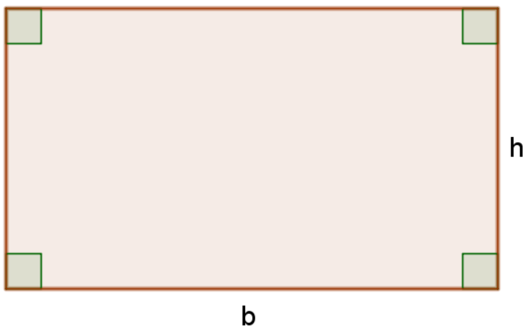
$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow$ Triângulo retângulo.

$a^2 > b^2 + c^2 \Longrightarrow$ Triângulo obtusângulo.

C.8 Áreas dos triângulos

O cálculo da área do triângulo pode ser trabalhado a partir da fórmula do cálculo da área do retângulo, isso facilita muito o entendimento da origem da fórmula. Em qualquer retângulo a área é determinada pelo produto entre o comprimento e a largura ou base pela altura. Vejam figura 90:

Figura 90 – Retângulo

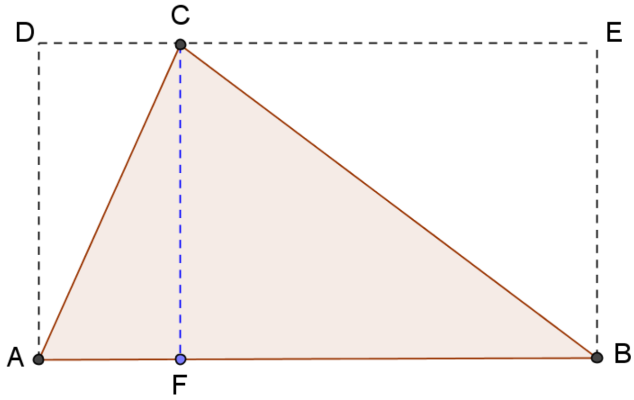


Fonte: Autoria própria

A área do retângulo é o produto da base pela altura $\Longrightarrow A = b.h$

A área de um triângulo é a metade da área do retângulo formado pela sua base e sua altura. Na figura 91, pode-se observar que a parte do ΔABC que se encontra dentro do quadrilátero ADCF, ocupa a metade deste quadrilátero. Assim como a parte do ΔABC que se encontra dentro do quadrilátero BECF, também ocupa a metade deste quadrilátero.

Figura 91 – Área do triângulo



Fonte: Autoria própria

Desta forma, a área do $\triangle$ABC é a metade da área do retângulo ABED. Logo, a fórmula da área do triângulo é:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Sendo esta a fórmula para calcular a área do triângulo mais conhecida.

C.8.1 Casos particulares

a) A área de um triângulo equilátero de lado "a", pode ser dada pela fórmula citada anteriormente ou pela fórmula demonstrada a seguir, derivada da primeira. Nota-se que $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e b = a, substituindo esses dados na fórmula, obtém-se:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

b) Num triângulo retângulo a área é a metade do produto dos dois catetos, pois os catetos são perpendiculares, sendo um a altura relativa ao outro.

C.8.2 Área dos triângulos em função dos lados

A área de um triângulo pode ser calculada em função das medidas de seus lados. A fórmula, conhecida como Fórmula de Heron, recebe este nome por ter sido desenvolvida por Heron de Alexandria, sendo muito útil para calcular área de triângulos que se desconhece a medida da altura, mas se conhece as medidas dos lados. Na fórmula, a, b e c são os lados do triângulo e p o semiperímetro.

$$A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Exemplo: Calcular a área de um triângulo de lados a = 5 cm, b = 7 cm e c = 10 cm:

$$A = \sqrt{11.(11-5).(11-7).(11-10)} \Longrightarrow A = \sqrt{11.6.4.1} \Longrightarrow A = 2\sqrt{66}cm^2$$

C.8.3 Área do triângulo em função dos lados e do raio da circunferência inscrita

Neste caso, a área é determinada pelo produto do semiperímetro pelo raio da circunferência inscrita.

$$A = p.r$$

C.8.4 Área do triângulo em função dos lados e do raio da circunferência circunscrita

Neste caso a área é determinada pela razão entre o produto dos lados e o quádruplo do raio da circunferência circunscrita.

$$A = \frac{a.b.c}{4.r}$$

C.8.5 Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo formado por eles

Através desta fórmula é possível calcular a área de um triângulo conhecendo apenas a medida de dois lados e o ângulo formado por eles. Pode-se atribuir uma fórmula análoga para cada ângulo do triângulo ou apenas uma fórmula, sabendo que os lados que formam o ângulo conhecido são respectivamente b e c e o ângulo formado por eles Â.

$$A = \frac{1}{2}.b.c.sen\widehat{A}$$

Exemplo: Calcular a área de um triângulo em que dois dos lados medem 4 cm e 8 cm e o ângulo formado por eles 60°:

$$A = \frac{1}{2}.4.8.sen60 \Longrightarrow A = \frac{32}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A = 8\sqrt{3}cm^2$$