JULIANA MARIA SOUZA RANGEL DOS SANTOS

A TEORIA DE VAN HIELE NO ESTUDO DE ÁREAS DE POLÍGONOS E POLIEDROS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2015

JULIANA MARIA SOUZA RANGEL DOS SANTOS

A TEORIA DE VAN HIELE NO ESTUDO DE ÁREAS DE POLÍGONOS E POLIEDROS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Liliana Angelina Leon Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
JULHO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **60/2015**

Santos, Juliana Maria Souza Rangel dos
A teoria de van Hiele no estudo de áreas de polígonos e poliedros / Juliana Maria Souza Rangel dos Santos. – Campos dos Goytacazes, 2015.
109 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.
Orientador: Liliana Angelina Leon Mescua.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 86-89.
1. GEOMETRIA 2. TEORIA DE VAN HIELE 3. ÁREAS DE POLÍGONOS E POLIEDROS 4. APRENDIZAGEM I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516

JULIANA MARIA SOUZA RANGEL DOS SANTOS

A TEORIA DE VAN HIELE NO ESTUDO DE ÁREAS DE POLÍGONOS E POLIEDROS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 24 de Julho de 2015.

Mônica Souto da Silva

Prof. Mônica Souto da Silva Dias
D.Sc. - IFF

Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esse trabalho ao meu Deus que caminha comigo sem nunca desistir de mim; ao meu pai José Carlos que é um anjo intercessor lá no céu; à minha mãe que amo infinitamente; ao meu marido que me apoia, ajuda e me faz uma pessoa melhor a cada dia; às minhas filhas que são as pérolas de Deus em minha vida; aos meus irmãos Rosane e Rogério que amo com toda a força;à minha sogra Beatriz que é a minha segunda mãe; aos meus afilhados queridos Arthur, Carlos Alexandre e Maria Clara; aos familiares e amigos que estão sempre torcendo por mim e me apoiando.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço àquele que me deu a vida, o Deus da minha vida; Aquele na qual coloco todos os dias a minha vida, minhas escolhas, pensamentos e atitudes.

À meu pai, que mesmo não estando mais aqui fisicamente, está no pensamento e no coração. Sempre me incentivou a buscar o caminho mais correto em todos os sentidos na minha vida. Agradeço a você, pai, pela pessoa que sou hoje.

À minha mãe, que me gerou e ensinou-me que devemos buscar a cada dia sermos pessoas melhores.

Ao meu marido José Mateus, que é muito mais que um marido. É um anjo companheiro, amigo, confidente. Sempre me ajudando, inclusive com este trabalho. Ele é um pouco seu meu amor.

Às flores mais lindas do meu jardim Ana Júlia e Ludmila, que por tantas vezes precisaram ficar com familiares para que eu pudesse concluir meus estudos. Te agradeço, filhas, por cada sorriso. Foram eles que me deram forças para não desistir.

Aos meus irmãos Rosane e Rogério, à minha cunhada Maria Goreth e meus sobrinhos Arthur e Raíssa por todo o incentivo e motivação. Amo vocês mais do que possam imaginar.

À minha sogra Beatriz Helena, se não fosse por toda sua ajuda, não teria chegado até aqui.

Aos meus familiares, que sempre estiveram junto de mim durante todo o período do mestrado. Nos churrascos, aniversários e comemorações quando eu levava meus livros e cadernos, vocês sempre se preocupavam em não atrapalhar meus estudos. Nunca esquecerei.

À minha orientadora Liliana, por confiar no meu trabalho e acreditar que seria possível realizá-lo. Agradeço pela ajuda não só neste trabalho mas também por todo o conhecimento adquirido durante o mestrado.

Agradeço aos mestres da UENF e em especial ao professor Oscar, pela incansável disponibilidade.

Aos colegas de curso, pela maravilhosa convivência e companhia.

Em especial, agradeço a minha amiga Schirlane por ter participado da realização deste trabalho. Obrigada amiga! Sem você, meu trabalho não seria o mesmo. Essa amizade foi constituída para a eternidade! Obrigada por todas as conversas e momentos de felicidade.

Agradeço também aos meus queridas amigos Renata, Ana Mary e Patrício pela amizade construída durante o curso. Ana Mary que já tive o prazer de ser sua aluna. Amo vocês.

Ào Colégio Estadual Doutor Barros Barreto pela recepção e contribuição dada a este projeto.

Aos alunos que participaram desta pesquisa. Sem eles nada disso teria sentido.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste.

"A educação é a arma mais poderosa que temos para mudar o mundo."
Nelson Mandela

Resumo

Este trabalho teve como fundamento a Teoria de Van Hiele. Propôs-se uma sequência de atividades, as quais foram realizadas pelos sujeitos da pesquisa, alunos do Ensino Fundamental, de uma escola pública. Os mesmos foram submetidos ao pré-teste, intervenção pedagógica e pós-teste. Os dados coletados foram agrupados e analisados à luz do referencial teórico consultado. A análise dos dados mostrou quais foram as contribuições que a proposta de atividades, na qual se implementaram estratégias que combinam materiais manipuláveis com softwares de geometria dinâmica, para a aprendizagem de Áreas de Polígonos e Poliedros e, consequentemente, para a aprendizagem de Geometria. Podemos citar como contribuições o aumento da capacidade argumentativa e dedutiva, o desenvolvimento da linguagem geométrica e o avanço nos níveis de pensamento geométrico. Tais fatos apontam para a efetiva possibilidade em se transmitir, de forma satisfatória, conceitos geométricos. Mas, para tanto, é fundamental que a proposta de trabalho pedagógico seja condizente com o nível do pensamento geométrico dos educandos.

Palavras-chaves: Geometria, Teoria de Van Hiele, Áreas de polígonos e poliedros, Aprendizagem.

Abstract

This work fundament was the Van Hiele Theory. It was proposed a sequence of activities which were done by the same people on the research, elementary school students from a public school. They were asked to do a pre-test, pedagogical intervention and a post-test. The data collected was divided and analyzed after the theoretical framework hecked. The data analysis showed which were the contributions gotten with the activities proposed, on which were initiated strategies matching manipulable materials with dynamic geometry software, in order to learn about the Polygon and Polyhedron Area – consequently, learning Geometry. We are able to mention as contributions the increase of argumentative and deductive capability, the geometrical language development and the progress on geometrical thought levels. Such facts point to an effective possibility of transmitting geometrical concepts on a satisfactory way. However, for this, it is fundamental that the pedagogical work proposed fits the students' geometrical thought level.

Key-words:Geometry, Van Hiele Theory, Areas of polygons and polyhedra, Learning.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de Quadros

Lista de abreviaturas e siglas

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação

Lista de símbolos

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor que ou igual a
$\geq$	Maior que ou igual a
$\equiv$	Congruente
$\in$	Pertence
$\approx$	Equivale

Sumário

Introdução

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (1997), a Geometria é um dos importantes campos de estudo, essencial para a construção e desenvolvimento do pensamento matemático. Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo do Ensino Fundamental, pois por meio deles, o aluno consegue compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive.

A construção do saber geométrico é o que vai auxiliar o aluno no processo de resolução de problemas, fazendo com que suas ações sejam respostas a constantes desafios. Porém, para Nasser e Santanna (1997, p. 6), “Nas últimas décadas, uma necessidade de modificações no ensino da geometria cresceu ao redor do mundo, devido às dificuldades encontradas e ao fraco desempenho mostrado por alunos secundários em geometria”. Apesar dos esforços no sentido de propor mudanças no ensino da Matemática nos últimos anos, esta disciplina continua sendo considerada a grande vilã dentre as áreas do conhecimento e a responsável pelos altos índices de reprovação dos alunos.

As observações anteriores e os problemas e dificuldades enfrentados durante a prática docente da autora nas séries finais do Ensino Fundamental e persistentes nas turmas do Ensino Médio motivaram a procura por métodos ou ações que auxiliem o aluno a elaborar um conceito geométrico a partir de uma experiência concreta ou de modo interativo em sala de aula.

Assim, elegeu-se como base deste trabalho, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo casal Van Hiele, para a construção do conhecimento no tema: *Áreas de Polígonos e Poliedros*. Formulou-se o problema da pesquisa representado por meio da seguinte questão: Que contribuições as Tic e materiais manipuláveis aliados à Teoria de Van Hiele oferecem ao estudo de áreas?

Os objetivos deste trabalho são:

- propor uma sequência didática no estudo de áreas de polígonos baseada nas fases de aprendizagem desenvolvidos pelos Van Hiele, visando auxiliar no estudo de áreas de poliedros;
- aliar a teoria a atividades práticas baseadas na Teoria de Van Hiele a serem desenvol-

vidas pelos alunos durante as aulas, com o uso de materiais manipuláveis e recursos tecnológicos (TIC) que estimulem os mesmos a pensar, deduzir, criar, escrever e construir os conceitos geométricos;

- contribuir para o avanço de perspectivas do trabalho pedagógico no Ensino Fundamental, sob o ponto de vista da construção do saber e do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Há alguns trabalhos realizados no Brasil que abordam o estudo de áreas segundo a Teoria de Van Hiele como "Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir dos estudos dos sólidos geométricos"Oliveira (2009), mas não trata especificamente do tema áreas e difere também quando trabalha com o Ensino Médio. E o trabalho intitulado "A Geometria no Ensino Médio: Um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume"Chiele (2007) que apresenta pontos distintos, quando não se utiliza materiais manipuláveis e tecnologias.

O projeto foi realizado com alunos do 9^o ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Doutor Barros Barreto, na cidade de Campos dos Goytacazes, RJ, escolhida por ser a escola na qual leciono e como uma forma de inserir os conceitos de áreas de poliedros. A sequência didática foi dividida em quatro etapas:

1^a Etapa: identificação por meio dos pré-testes dos Van Hiele, do nível de maturidade geométrica dos alunos;

2^a Etapa: aplicação dos pré-testes sobre áreas;

3^a Etapa: intervenção pedagógica;

4^a Etapa: aplicação dos pós-testes sobre áreas.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos:

O primeiro traz um pouco dos aspectos históricos da geometria, descrevendo um panorama geral do início de seu uso prático nas antigas civilizações e de sua sistematização através de Euclides. Destaca, também, as *Tic* e o uso de materiais manipuláveis como recursos didáticos.

No segundo, busca-se descrever a teoria de Van Hiele: origem, difusão e descrição. Faz-se uma explanação dos principais componentes dessa: níveis de raciocínio e as características de cada nível e fases de aprendizagem. Utiliza-se como referência os estudos de Lilian Nasser [1], entre outros.

[1] doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

No terceiro capítulo, apresentam-se as definições e os teoremas necessários ao estudo de áreas da superfície de um polígono e poliedro.

No quarto, abordam-se os aspectos metodológicos: descrição do tipo de pesquisa, escolha do campo, a caracterização dos participantes e a definição dos instrumentos e dos procedimentos para análise dos dados.

O último capítulo descreve o processo vivenciado junto aos alunos, a implementação da sequência didática constituída pelos testes e pelas atividades que foram aplicados aos sujeitos da pesquisa, detalhando cada tarefa de modo a evidenciar o contexto e com que dinâmica a mesma se desenvolveu. Procurou-se dar destaque às falas e comportamentos dos alunos, além de algumas respostas dadas por eles nas atividades desenvolvidas e traz a análise dos dados coletados a partir da aplicação desses instrumentos.

Nas considerações finais, revisa-se todo o processo vivido e, logo em seguida, apresentam-se as Referências, Apêndices e Anexos.

Capítulo 1

O Ensino de Geometria

Os alunos devem ser introduzidos ao ensino de geometria de uma forma natural, pois ela está presente em diversas situações da vida cotidiana do ser humano: na natureza, nos objetos que usamos, nas brincadeiras infantis, nas construções, nas artes (NASSER; LOPES, 1996).

Em nosso entorno, podemos observar as mais diferentes formas geométricas. Muitas delas fazem parte da natureza, outras já são resultados das ações do homem. Para Nasser e Lopes (1996, p. 15), “a linguagem matemática está de tal modo inserida no cotidiano que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a geometria faz parte da vida.”

A geometria como a conhecemos hoje, com todos os postulados e teoremas, não surgiu de uma vez só. Os primeiros conhecimentos geométricos foram desenvolvidos pela necessidade do homem. A seguir, é feito um breve relato de alguns dos principais acontecimentos que influenciaram diversas culturas na construção do conceito de área e volume.

1.1 Breve Histórico da Geometria

Segundo Calabria (2013, p. 5), “a geometria é uma das áreas da Matemática mais antigas e foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia para resolver problemas na medição de áreas de terras”. Provavelmente, vem daí a origem da palavra geometria que, em grego, significa medir terra (geo - terra / métron - medir).

Os gregos perceberam que os conhecimentos provenientes da geometria não tinham apenas utilidade prática, mas podiam ser compreendidos e demonstrados, utilizando-se o raciocínio lógico-dedutivo. Para isso, observaram a forma como as antigas civilizações abordavam alguns pensamentos geométricos (CALABRIA, 2013).

1.1.1 As Antigas Civilizações

As primeiras civilizações surgiram entre 3500 e 500 a.C., próximas a regiões de vales de rios. Podemos citar o Egito, a Mesopotâmia, a China e o Vale do Indo. Todas essas civilizações eram dependentes da agricultura, de sistemas de irrigação e da astronomia. Tais atividades influenciaram o surgimento da matemática nessas culturas (CALABRIA, 2013).

> "Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir as terras." (EVES, 2004, p. 57)

Constata-se a importância da matemática e, especialmente, da geometria nas antigas civilizações, uma geometria concebida bem antes da que foi elaborada pela cultura grega (CALABRIA, 2013).

1.1.2 Babilônia

A civilização mesopotâmica, talvez, a mais antiga do mundo, criou um tipo de escrita e a registrou em tábulas de argila. Em uma dessas tábulas, a Tábula Plimpton 322, 1900 - 1600 a.C., encontra-se o mais antigo registro do teorema de Pitágoras. Mesmo esse teorema tendo sido batizado com o nome de Pitágoras, percebe-se que os babilônicos já o conheciam e o utilizavam muito antes desse matemático grego. Os babilônicos possuíam um método sistemático para encontrar ternas pitagóricas, bem conhecidas na época, e as utilizavam nas soluções de problemas geométricos, (CALABRIA, 2013).

Segundo Eves (2004), a geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. Exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles, da área do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Os babilônios, também, sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais. A marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico, assim como a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais.

1.1.3 Egito

No Antigo Egito, a geometria foi se desenvolvendo a partir da necessidade de calcular áreas de terras, volumes de celeiros e pirâmides. Como os celeiros tinham a forma de cilindros circulares retos, os egípcios desenvolveram um método para determinar a área do círculo da base e, assim, calcular o volume (CALABRIA, 2013).

> "O conhecimento geométrico da civilização egípcia era grande: construíram grandes obras arquitetônicas, como as pirâmides, além de construírem barcos, barragens e canais. Também se encontra geometria nas construções de suas estátuas, pórticos, templos, muralhas e lagos"(CALABRIA, 2013, p. 6).

Investigações recentes mostram que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura. O papiro Rhind e o papiro Moscou são as principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. No papiro Moscou, encontra-se um exemplo da fórmula de volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas (EVES, 2004).

Eves (2004) aponta que o Papiro de Rhind,um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático de que se tem notícia, é um documento que apresenta os conhecimentos matemáticos dos antigos egípcios. Esse documento descreve as operações de adição, multiplicação e divisão, além de apresentar indícios do uso de frações pelos egípcios e seu emprego no método de falsa posição e na solução de problemas de determinação de áreas. Portanto, questões relacionadas às frações e ao cálculo de áreas eram importantes para a arrecadação de impostos, enquanto as relacionadas às medidas de capacidade essenciais ao controle dos depósitos. Conforme o papiro de Rhind, o *Problema* 49 refere-se ao cálculo da superfície de um retângulo de comprimento 10 e largura 2. O *Problema* 51 mostra o cálculo da área de um triângulo de altura 13 e de base 4. O *Problema* de número 52, mostra o cálculo da área de um trapézio,com base maior 6, a base menor 4 e a altura 20.

Figura 1 – Foto do *Rhind Mathematical Papyrus*, Números 51 e 52

Fonte: (SANTOS, 2010, p. 36)

1.1.4 China e Índia

Enquanto se dispõe de grande quantidade de informações sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, pouco se sabe sobre essa matéria, no que diz respeito à China e à Índia na mesma época. Isso ocorre porque os babilônios usavam tábulas de argila cozida e os egípcios usavam pedras e papiros. Mas os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvore e bambu. Por consequência, muito do nosso conhecimento sobre a matemática dos chineses e indianos baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de originais (EVES, 2004).

O mais influente livro chinês de matemática, Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nas obras chinesas, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos e trapézios (BOYER, 1996).

Na Antiga Índia, seus habitantes mostravam ter conhecimento de geometria pelo planejamento das cidades e pelas cerâmicas decoradas com círculos que se interceptavam, quadrados, triângulos unidos pelos vértices, etc (CALABRIA, 2013).

> "O conhecimento geométrico dos indianos também aparece para atender às necessidades dos rituais religiosos, sendo encontrado nos Sulbasutras (manuais sobre construção de altares), que continham regras para construção de altares de sacrifício. As figuras geométricas para formar os altares eram: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos e semicírculos"(CALABRIA, 2013, p. 6).

1.1.5 Euclides e Os Elementos

É desapontador, mas pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C., salvo que ele foi professor da escola de matemática de Alexandria. Desconhecem-se, também, a data e o local de seu nascimento, mas é provável que tenha se formado na escola platônica de Atenas (EVES, 2004).

Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão. A maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática, bem como à ciência em geral, foi a obra *Os Elementos*em que apresentou, sistematicamente, os conhecimentos de geometria plana de seu tempo - hoje chamada de geometria euclidiana -, muitos dos quais frutos de seu próprio trabalho. A importância dessa obra se deve ao fato de "ser o primeiro livro em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico-dedutivo bem definido"(NETO, 2012).

> *Os Elementos* de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 a.C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. A primeira versão impressa de *Os elementos* apareceu em Veneza em 1482, um dos primeiros livros de matemática impressos; calcula-se que desde então pelo menos mil edições foram publicadas, (BOYER, 1996, p. 82).

Os Elementos são praticamente tudo o que temos da matemática grega desde o seu início. Não sabemos se Euclides escreveu essa obra para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo, não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos. *Os Elementos* foram muito usados no aprendizado da matemática por mais de dois milênios (ÁVILA, 2001).

Para Eves (2004, p. 178), talvez mais importante que o conteúdo de *Os Elementos* seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. "De fato, *Os Elementos* de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna".

1.1.6 A Matemática Moderna e o Ensino de Geometria

Nos meados do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes começaram a chamar a atenção dos interessados em ensino da Matemática. Muitos entenderam que seria oportuno adaptar essas características ao ensino. Formaram-se "grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e modernizar a Matemática escolar. Nascia a *Matemática Moderna*" (EVES, 2004, p. 690).

O movimento de reforma do ensino da Matemática iniciou-se nos Estados Unidos, França e Bélgica em 1950, mas logo se espalhou por vários outros países. Segundo os reformistas, o currículo estava ultrapassado, pois limitava-se a conhecimentos adquiridos antes de 1700. Portanto, havia a necessidade de incluir conhecimentos mais recentes, "como álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e teoria dos conjuntos" nos currículos de matemática (ÁVILA, 2010, p. 5).

Os conteúdos deveriam ser apresentados, enfatizando os axiomas, os conceitos fundamentais e rigor nas demonstrações. Isso iria trazer a integração das várias parte da Matemática, enquanto no ensino tradicional essas partes eram ensinadas de forma isolada (ÁVILA, 2010).

Porém, segundo Soares (2001), no Brasil, a geometria ensinada continuou sendo a euclidiana, usando apenas a linguagem dos conjuntos defendida pelos modernistas, pois os professores não encontraram uma maneira de apresentar os fatos geométricos segundo os seus critérios de rigor e, ao mesmo tempo, inviável nas escolas do ponto de vista didático.

> “O formalismo da matemática acentuou-se nas décadas de 1960 e 1970, durante o Movimento da Matemática Moderna, e a geometria, ao revestir-se de uma concepção voltada à linguagem, ficou relegada a um segundo plano nos currículos e livros didáticos brasileiros. Isso acabou por gerar o seu abandono pela escola básica, como evidenciamos em inúmeras pesquisas na área de Educação Matemática, principalmente na década de 1980"(GRANDO; NACARATO; GONCALVES, 2008, p. 42).

A reforma não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior; criando assim, uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas a qual perdura até hoje.

Para Pavanello (1993), o ensino de geometria na abordagem tradicional já enfrentava problemas em relação ao conhecimento do professor, aos métodos utilizados, à passagem da geometria prática do ensino primário para a axiomática do ensino secundário. Com a proposta de que a geometria deveria ser ensinada focando nas transformações, problemas ainda maiores ocorreram. Por não dominar muito o assunto, professores passaram a deixar de ensinar a geometria sobre qualquer enfoque, apoiados na Lei de Diretrizes e Bases, a LDB 5692/71, a qual permitia que cada professor montasse seu programa de acordo com as necessidades da clientela.

Há de se considerar as razões pelas quais os professores ficam inquietos em relação ao abandono da geometria. Primeiramente, a ausência da geometria e a valorização da álgebra prejudicam a formação do aluno, uma vez que este não se desenvolve integralmente. É necessário desenvolver tanto o pensamento visual, proveniente da geometria, como o sequencial, predominante na álgebra, pois os dois são necessários à resolução de problemas. Em segundo lugar, a supervalorização da álgebra pode levar os alunos a executar as operações mecanicamente. Os indivíduos passariam a operar sem questionamento sobre as regras pré-estabelecidas. Já o trabalho efetuado com geometria pode proporcionar o desenvolvimento crítico e autônomo (PAVANELLO, 1993).

Kaleff (1994) explica que, nos dias atuais, ao trabalhar com a Geometria, a escola ainda sofre influências do Movimento da Matemática Moderna. Desconsidera o mundo tridimensional em que vivemos e enfoca, prioritariamente, os desenhos sobre superfícies planas, a repetição, a classificação e a memorização das nomenclaturas das figuras planas, relegando a um momento posterior a exploração e a manipulação dos sólidos geométricos.

Até hoje se percebe o reflexo do formalismo no estudo da geometria, a qual está praticamente ausente nas escolas, ficando em segundo plano no planejamento dos professores(RABAIOLLI; STROHSCHOEN, 2013).

1.2 Materiais Manipuláveis e o Ensino de Geometria

Segundo Nasser e Lopes (1996, p. 7), "o manuseio e a observação de objetos desperta na criança a curiosidade para os elementos geométricos quando devidamente explorados." Quando o aluno se depara com uma situação desconhecida, o uso de um material que possa ilustrar o que está sendo discutido, pode ser indispensável. Diante do exposto, é necessário que o aluno tenha acesso a atividades e materiais convenientes com cada nível de pensamento geométrico no qual ele se encontra.

Conforme Nacarato (2005, p. 1):

> "O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920."

Após os anos de 1990, muitos recursos didáticos para o ensino de Matemática têm sido sugeridos. Além dos materiais manipuláveis, ressalta-se também o uso de tecnologias (TIC), apesar que esses recursos ainda estão distantes da maioria salas de aula (NACARATO, 2005).

Para Pais (2006), o uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito. Mas vale lembrar que utilizar o material concreto por si só, não garante aprendizagem.É fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização. Para ter sucesso nas atividades, envolvendo materiais manipuláveis, devemos apresentá-los previamente aos nossos alunos, assim como planejar e definir exatamente o objetivo que queremos atingir com a sua utilização; para que, no decorrer da atividade, os alunos consigam chegar a fórmulas matemáticas que ainda lhes são abstratas.

1.2.1 Geoplano

Segundo Knijnik, Basso e Klüsener (2004), o criador do geoplano foi o Dr. Caleb Gattegno em 1961, na Inglaterra. A palavra geoplano vem do inglês "geoboards" ou do francês "geoplans" em que "geo" vem de geometria e "plano" de tábua ou tabuleiro ou superfície plana dando origem à palavra. É um recurso didático que auxilia no ensino de geometria plana elementar e frações, dentre outros.

Os geoplanos são tabuleiros quadrados, retangulares ou circulares que levam pregos formando uma malha, podendo ser confeccionados em madeira natural ou pintados. Para utilizá-lo, são necessários elásticos, de preferência coloridos, do tipo de borrachas de prender dinheiro, usadas pelos bancos, que servirão para a construção dos polígonos.

O geoplano é um instrumento didático que oferece um apoio à representação mental que auxilia na construção e consolidação de conceitos e na abstração, proporcionando uma experiência geométrica aos estudantes. Não devendo ser esquecido que a utilização de um recurso didático por si só não representa todo o ensino, devendo o professor no decorrer dos trabalhos ir questionando, complementando, assessorando o processo de descoberta (COSTA; PEREIRA; MAFRA, 2011).

Segundo Costa, Pereira e Mafra (2011), o Geoplano Retangular é um material didático concreto que possibilita aos alunos uma melhor visualização das formas de figuras planas, como também auxilia nos cálculos de áreas e de perímetros de diversos tipos de polígonos regulares e irregulares, permitindo uma participação ativa dos alunos. Esse fato mostra um maior envolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem o que, consequentemente, propiciará uma melhor compreensão dos conceitos, tornando-os mais significativos.

Nessa mesma direção, (NASSER; LOPES, 1996, p. 137) afirmam:

> "O uso do geoplano pode ser observado nas várias regiões do país, na confecção de artesanato (pulseira, rede de pesca, etc.). Sendo assim, as atividades com o geoplano são também um ótimo meio para a integração das aulas de matemática com as aulas de arte."

A construção do geoplano pode ser feita com materiais trazidos pelos próprios alunos. É um material didático de baixo custo, que pode ser facilmente construído. No presente trabalho, utilizou-se o *Geoplano Retangular*.

1.3 TIC e o Ensino de Geometria

No processo ensino-aprendizagem, visualizar é uma habilidade importantíssima para o desenvolvimento do aluno. Contudo, quando se trata de conceitos da geometria espacial na maioria das vezes, um professor dispõe apenas do livro didático como ferramenta didática para o ensino deste assunto, pois mídias bidimensionais, a página de um livro ou o quadro-negro não são os instrumentos mais adequados para se treinar visualização de objetos tridimensionais. O emprego de materiais concretos pode ser uma excelente alternativa para explorar esses conceitos (BRAGA; PAULA, 2010).

Outra abordagem interessante é o uso de recursos audiovisuais: modelos tridimensionais que podem ser modificados virtualmente na tela de um computador; construindo assim, uma relação entre a representação no plano (quando o sólido está representado na tela do computador) e o modelo concreto (quando o usuário interage com um modelo tridimensional do sólido). Abordar atividades matemáticas com recursos tecnológicos enfatiza um aspecto fundamental da disciplina, que é a experimentação (BRAGA; PAULA, 2010).

Para Nacarato e Passos (2003, p. 78):

> “A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis.”

Nesse contexto, pretendeu-se desenvolver habilidades visuais sobre os sólidos, apresentando suas propriedades matemáticas, sua aplicabilidade e modelos virtuais interativos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam uma perspectiva educacional positiva, sobre os recursos tecnológicos:

> “em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática”, (BRASIL, 1997, p. 43).

Figuras geométricas, quando trabalhadas de forma lúdica, faz o aprendiz ter contato físico e visual, permitindo assim um melhor entendimento do que lhe é proposto. Não é o caso de descartar os recursos ditos tradicionais, nem de substituir parte deles por tecnologias. Deve-se integrar esses recursos. Segundo (OLIVEIRA, 2009, p. 4):

> "A amplitude desta estratégia permite compreender as chamadas tecnologias “tradicionais” (uso de sólidos, giz e lousa, lápis e papel, régua e compasso etc) como outras abordagens, igualmente válidas, e que podem, em dados momentos, apresentar maior pertinência, de acordo com o cenário, os sujeitos, as disponibilidades de infra – estrutura tecnológica, entre outros elementos."

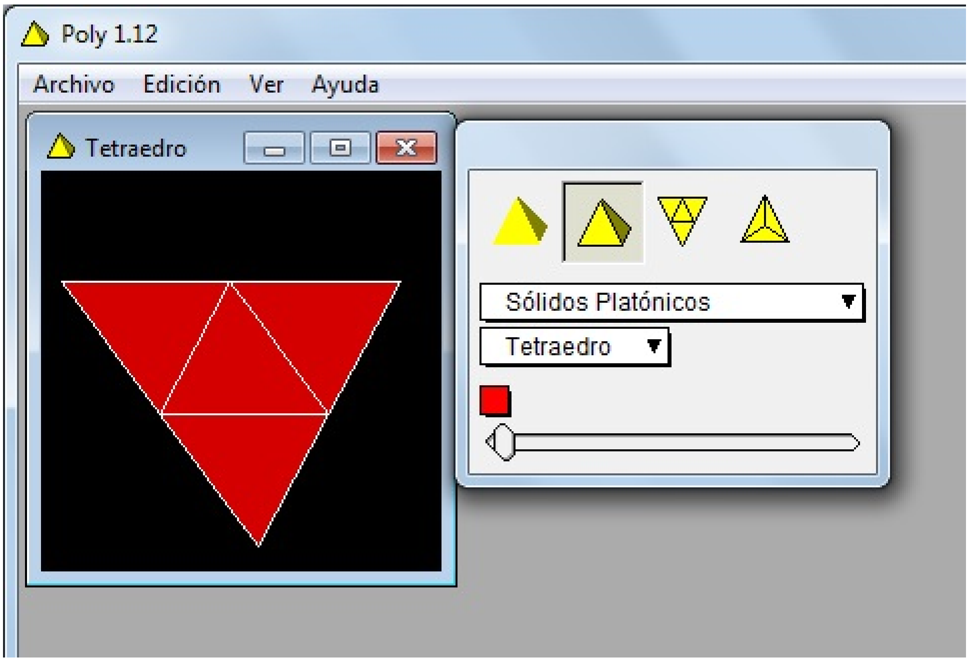
Ainda de acordo com Oliveira (2009), o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, com o aporte de tecnologias digitais, incorpora amplas perspectivas de interação, inseridas nas dinâmicas da prática pedagógica. O uso crítico das diversas interfaces mediadoras é absolutamente essencial, o que conduz à argumentação em favor das estratégias como elementos reguladores. Ao preparar sua estratégia pedagógica com o uso das TIC(Tecnologias de Informação e Comunicação), o professor agrega a dimensão transformadora da intervenção dos alunos que experimentam, trocam e modificam os objetos de saber.

No presente trabalho, utilizou-se o software *Poly* e um *apllet* do geogebratube.

1.3.1 Poly

Além do material concreto, a utilização de softwares que contribuem para o estudo dos poliedros, como o software Poly[1]de planificação e rotação de poliedros de diferentes formas, que planificados; são identificados, também elementos da Geometria Plana e, que analisados e relacionados com os sólidos, induzme-nos à conclusão de fórmulas utilizadas nos cálculos de área destes, apoiada na Teoria de Van Hiele a qual nos indica a partir do tridimensional para o bidimensional (NASSER; SANTANNA, 1997).

Figura 2 – Poly 1.12 - Demonstração



Fonte: Elaboração própria

Esse software permite explorar diferentes famílias de poliedros convexos, dentre eles os platônicos, aqueles cujas faces são polígonos regulares, sempre do mesmo tipo, e em cada vértice tem-se o mesmo número de arestas; os arquimedianos, que têm como faces polígonos regulares, não necessariamente todos iguais entre si.

1.3.2 Geogebratube

GeoGebra é um software livre que permite combinar conceitos de geometria e álgebra em um mesmo ambiente. O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de retas, segmentos de reta, pontos, polígonos, dentre outros objetos. Possui uma página de compartilhamento de seus arquivos, possibilitando que outras pessoas

[1] 1 Poly é um programa para exploração e construção de poliedros. Com ele, é possível manipular os sólidos poliédricos no computador em uma variedade de formas. Versões planificadas (redes) de poliedros podem ser impressas e, em seguida, cortado, dobrado e colado, para produzir modelos tridimensionais.Disponível em:<http://www.peda.com/poly/>

usufruam dos materiais criados pelos seus colaboradores. Chama-se GeoGebraTube. Nele, podem ser encontrados materiais de diversas áreas da Matemática como, por exemplo, geometria espacial, geometria analítica, área de figuras planas e espaciais, parábolas, equações, trigonometria, funções, dentre tantas outras possibilidades(JúNIOR, 2013).

Em geometria, essa possibilidade de variar medidas, animar, movimentar, arrastar uma construção geométrica é o que se entende por experimentação. Tendo em vista as possibilidades das TIC neste processo, em que criam novas formas de investigação, a geometria pode ser considerada uma área propícia para um ensino que enfatize a exploração de situações matemáticas a partir de uma abordagem experimental com o uso de novas tecnologias (SANTOS, 2006).

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentaremos o modelo geométrico de Van Hiele, sua origem, implementação e difusão em diversos países, assim como as propriedades centrais desta teoria muito utilizadas para avaliar as habilidades do aluno e facilitar a compreensão de conteúdos em geometria.

2.1 A Teoria de Van Hiele e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

É comum professores de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, apontarem falhas no desempenho de seus alunos nas aulas de Geometria. Os professores se lamentam de uma série de problemas, como a dificuldade de levar os alunos a aprender algum conceito novo ou a de aplicar os conceitos aprendidos em exemplos semelhantes, pelo fato de estarem presos a fórmulas. Essa problemática ocorre não só no Brasil, mas em todo o mundo e vem sendo enfrentada por muitos anos (PAVANELLO, 1993).

Foi a preocupação diante desse problema enfrentado por dois professores holandeses, que davam aula de Matemática no curso secundário, que os levou a estudar profundamente a situação com o objetivo de encontrar uma solução. Esses professores são Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, que, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, pesquisaram o ensino de Geometria com alunos de 12 e 13 anos, enfatizando a manipulação de figuras. O resultado dessa pesquisa foi publicado após concluírem o doutorado na Universidade de Utrecht. Dina faleceu logo depois de terminar a tese, então foi Pierre quem esclareceu, aperfeiçoou e promoveu a teoria de Van Hiele, como é conhecida (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

A aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de Van Hiele, também considerada um modelo de aprendizagem, é uma possível estratégia para a reversão da problemática no ensino da geometria, pois, por ter sido originada em sala de aula, a teoria aliou os aspectos cognitivo e pedagógico do ensino da geometria (NASSER; SANTANNA, 1997).

O modelo Van Hiele só não ficou totalmente no obscurantismo porque a União Soviética o adotou nos anos 60, após a reformulação do currículo de geometria em suas escolas. O modelo demorou a merecer atenção internacional. Nos Estados Unidos, somente na década de 1970, motivados por encontrar soluções para os problemas com o ensino de geometria na escola secundária, muitos pesquisadores tomaram como base de estudos a teoria dos Van Hiele. Em 1973, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado “Mathematical as an Task Educational” no qual citava o trabalho dos Van Hiele e, em 1976, o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país. O interesse pelas contribuições dos Van Hiele tornou-se cada vez maior após as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuls e Tisher. De modo geral, tais pesquisas objetivavam testar a validade do modelo, a viabilidade, as vantagens de sua aplicação (CROWLEY, 1996).

No Brasil, um dos trabalhos pioneiros foi apresentado pelo professor Nilson José Machado no livro “Matemática e Língua Materna” da editora Cortez publicado em 1990, e em 1992, uma aplicação do modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, numa apostila chamada “Proposta de Geometria segundo a teoria da Van Hiele” (KALEFF et al., 1994).

Andrade e Nacarato (2004), em pesquisa produzida no Brasil sobre as tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria a partir de trabalhos apresentados nos *Encontros Nacionais de Educação Matemática* no período de 1987 a 2001, apontam que, teoricamente, os trabalhos produzidos vêm se pautando pelo modelo Van Hiele, pela didática da Matemática Francesa e pelos construtos epistemológicos relativos à visualização e representação.

O modelo de Van Hiele tem servido de base para trabalhos desenvolvidos no Ensino Fundamental e Médio como "O Ensino do conceito de área no sexto ano do Ensino Fundamental: uma proposta didática fundamentada na Teoria de Van Hiele"(ARAUJO, 2012) e "Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir do estudos de sólidos geométricos"(OLIVEIRA, 2012) abordando, principalmente, os níveis iniciais do mesmo. Os autores destacam que o modelo tem influenciado, também, pesquisas desenvolvidas em ambientes computacionais, envolvendo a Geometria.

2.2 Descrição da Teoria de Van Hiele

O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos Van Hiele propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Ressalta-se que, mais do que a maturidade, é o ensino o fator que contribui significativamente para esse modelo. A teoria de Van Hiele propõe que o desenvolvimento do pensamento em Geometria seja dividido em níveis. A composição desses níveis se deu por influência da Teoria Piagetiana, identificando quatro fatores atuantes no processo de desenvolvimento cognitivo: maturação, experiência com o mundo físico, experiências sociais e equilibração.Na teoria de Van Hiele, contudo, atenção maior é dada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo este um meio através do qual o estudante atinge certo nível de desenvolvimento (SAMPAIO; ALVES, 2010).

O modelo criado pelo casal Van Hiele é sequencial e hierárquico, subdividido em cinco níveis que descrevem o desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria (BRAGA; DORNELES, 2011).

Para Villiers (2010), a distinção desses cinco níveis de raciocínio é a principal característica do modelo. Cada nível envolve a compreensão e utilização de conceitos geométricos de uma maneira diferente, o que se reflete na forma de interpretá-los, defini-los, classificá-los e fazer demonstrações. Os níveis são sequenciais e ordenados de tal forma que não se pode pular nenhum. Portanto, há uma relação hierárquica entre os cinco níveis, uma vez que o aluno só atinge um nível superior após passar por todos os níveis anteriores.

A passagem de um nível para o seguinte se dá pela vivência de atividades adequadas e ordenadas, passando por cinco fases de aprendizagem. Conclui-se, então, que o progresso de níveis relaciona-se mais com a aprendizagem do que com a idade ou a maturação do aluno. Para Van Hiele, um nível mais elevado é alcançado à medida que as regras do nível precedente tornam-se explícitas, a fim de se obterem novas estruturas. Considera-se também a maturação do sujeito durante o processo (NASSER; LOPES, 1996).

> "É evidente que o alcance de um nível é resultado de um processo de aprendizagem. (...) De qualquer modo, seria um deplorável erro supor que um nível é alcançado como resultado de uma maturação biológica que o professor ajuda a influenciar"(HIELE, 1986, p. 65).

O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico pode ser utilizado para orientar a formação assim como para avaliar as habilidades dos alunos.

2.2.1 Os Níveis de Raciocínio

De acordo com o modelo original da Teoria de Van Hiele, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico conforme cinco níveis, enumerados de 0 a 4. Respeitando as críticas dos pesquisadores americanos sobre a relevância do nível zero, em 1986, Pierre M. Van Hiele escreveu o livro "Structure e Insight: A Theory of Mathematics Education", propondo uma simplificação do modelo original, com os níveis enumerados de 1 a 5, descritos em termos gerais e comportamentais (OLIVEIRA, 2012).

Segundo Crowley (1996), os níveis de raciocínio podem ser descritos como segue no Quadro 2.1:

Nível 0	Visualização	Neste nível, os alunos reconhecem as figuras geométricas por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, não conseguindo identificar suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas e aprender um vocabulário geométrico básico.
Nível 1	Análise	É onde se inicia a análise dos conceitos geométricos. Neste nível, os alunos começam a discernir as características e propriedades das figuras, mas não conseguem ainda estabelecer relações entre essas propriedades e nem entendem as definições ou vê inter-relações entre figuras.
Nível 2	Dedução informal	Aqui o aluno começa a estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. Agora, a definição já tem significado; todavia, o aluno ainda não entende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas nas provas formais.
Nível 3	Dedução formal	Neste estágio, o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado. Agora, ele já consegue construir demonstrações e desenvolvê-las de mais de uma maneira, também faz distinções entre uma afirmação e sua recíproca.
Nível 4	Rigor	Agora, o aluno já é capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos; analisa e compreende geometrias não euclidianas. A geometria é entendida sob um ponto de vista abstrato.

Quadro 2.1 – Níveis de raciocínio da teoria de Van Hiele

2.2.2 Propriedades da Teoria de Van Hiele

Junto com as características particulares de cada nível de raciocínio, faz-se necessário mencionar algumas propriedades globais da teoria de Van Hiele. Para Crowley (1996), "essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino". São elas:

1. **Sequencial**

   O aluno deve, necessariamente, passar por todos os níveis, uma vez que não é possível atingir um nível posterior sem dominar os anteriores.

2. **Avanço**

A progressão ou não de um nível para outro depende mais dos métodos de ensino e do conteúdo do que da idade ou maturação biológica. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns acentuam o progresso, mas há alguns que retardam.

3. **Intrínseco e Extrínseco**

   Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

4. **Linguística**

   Cada nível tem sua própria linguagem e um conjunto de relações interligando-os. Assim, uma relação que é correta em um certo nível, pode se modificar em outro nível.

5. **Combinação inadequada**

   O professor e o aluno precisam raciocinar em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

2.2.3 Fases de Aprendizagem

Para completar a descrição da teoria, vamos expor a proposta de Van Hiele sobre os passos que o professor deve seguir para ajudar seus alunos a avançar nos níveis de raciocínio. Como já foi mencionado, os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno.

> “Portanto o método e a organização do curso, assim como o conteúdo e o material usados, são importantes áreas de preocupação pedagógica"(CROWLEY, 1996, p. 6).

Dessa forma, os Van Hiele propuseram uma sequência didática de cinco fases de aprendizagem: interrogação informada, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

As fases não são, por conseguinte, associada para um determinado nível, mas cada nível de raciocínio começa com atividades da primeira fase e continua com as atividades das fases seguintes. No final da quinta fase, os alunos devem ter atingido o próximo nível de raciocínio.

As principais características das fases de aprendizagem são:

1. **Interrogação informada**

   Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos de estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.

2. **Orientação dirigida**

   Atividades são desenvolvidas para explorarem as características de um nível e isso deve ser feito com o uso de material selecionado e preparado pelo professor.

3. **Explicação**

   Agora, o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores, os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

4. **Orientação livre**

   Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.

5. **Integração**

   Nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. Assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

Para Crowley (1996, p. 19):

> "Agora são necessários professores e pesquisadores para aprimorarem as fases de aprendizagem, desenvolver materiais baseados no modelo Van Hiele e implementar o uso desses materiais e essa filosofia no contexto da sala de aula. O raciocínio geométrico pode ser acessível a todas as pessoas."

2.3 Testes para Identificação dos Níveis de Raciocínio

Professores e pesquisadores que trabalham com o modelo Van Hiele utilizam testes para determinar o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Esses testes são necessários tanto para iniciar um trabalho apoiado no modelo Van Hiele, como para avaliar a evolução dos alunos.

O teste pode ser oral, que consiste de entrevistas individuais entre professor e aluno, ou escrito. Pode ser elaborado com questões de múltipla escolha ou com questões de respostas livres. O de múltipla escolha, além da facilidade de aplicação, apresenta a vantagem da agilidade na organização dos dados. Obviamente, a entrevista individual é a que proporciona resultados mais confiáveis sobre o nível de raciocínio geométrico de uma pessoa. Porém, esse método não é muito viável à nossa realidade, pois consome muito tempo não podendo ser aplicado a grupos muito grandes (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

Para Jaime e Gutierrez (1990), em qualquer caso, ao se preparar um questionário para avaliar o nível de raciocínio dos alunos, é conveniente seguir algumas normas para torná-lo o mais confiável possível. São elas:

1. as atividades devem ser selecionadas de tal forma que os estudantes possam expressar suas ideias e sua forma de raciocinar por meio das respostas;

2. não se deve confundir o questionário para conhecer o nível de raciocínio com um exame tradicional que se trata de avaliar o nível de conhecimento dos alunos. Para determinar o nível de raciocínio, a coisa mais importante não é saber se os alunos responderam de forma certa ou errada, mas como e porque eles responderam assim;

3. mesmo que o professor tenha alguma ideia prévia sobre o nível de raciocínio dos alunos, para fazer a seleção dos exercícios é conveniente que estes sejam selecionados de tal forma a cobrir todos os níveis ou, pelo menos, os níveis de 1 a 3, no caso de alunos de séries menos avançadas.

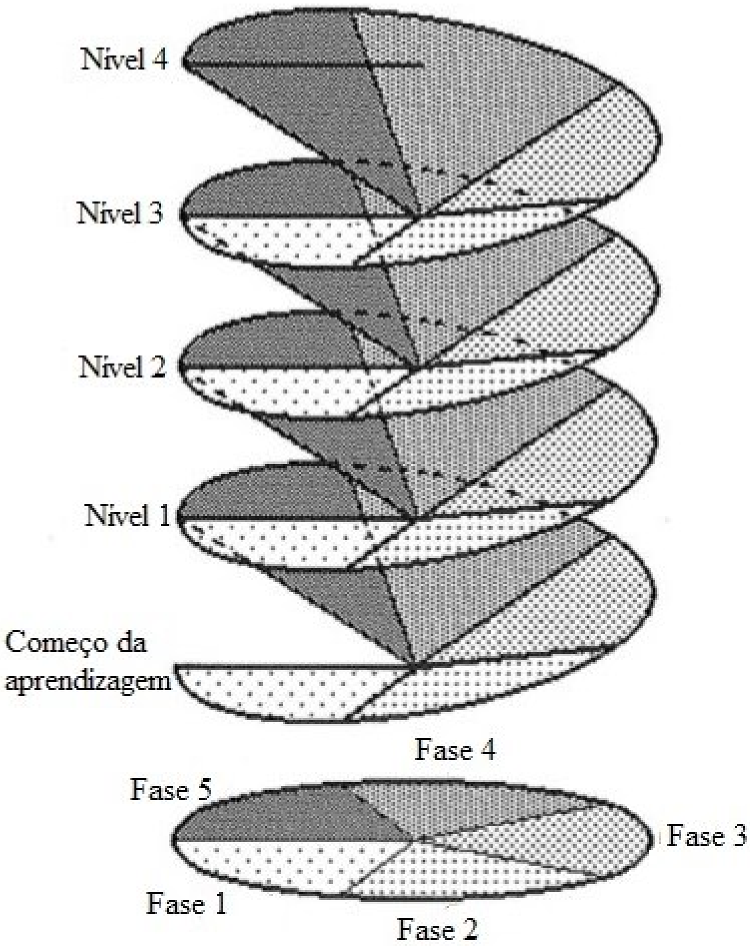
Uma importante contribuição para a realização de testes para avaliar os níveis de raciocínio da teoria de Van Hiele no Brasil vem de um projeto da professora Lílian Nasser do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Testes aplicados por esse projeto, conhecido como Projeto Fundão em alunos brasileiros confirmaram que o nível de aprendizado em geometria é muito baixo (SAMPAIO; ALVES, 2010).

A busca por testes para definir o nível de raciocínio em que um aluno se encontra ajudou na evolução do modelo. Inicialmente, Van Hiele considerava que a passagem de um nível para o seguinte ocorria de forma brusca. Mas, foi notado pelos pesquisadores que, nas entrevistas, as respostas oscilavam entre dois níveis, levando-os a considerar que a evolução dos níveis ocorre de maneira contínua. Por esse motivo, para Jaime e Gutierrez (1990), na prática, nenhum salto brusco ocorrerá quando você terminar de trabalhar em um nível e começar o seguinte. Isso pode ser representado na Figura 3.

Para (DAMBRóSIO, 2008, p. 80),

> “O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Pôr em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber fazer acumulado ao longo de tempos passados, ao presente.”

Figura 3 – Níveis de Van Hiele



Fonte: (JAIME; GUTIERREZ, 1990, p. 336)

Capítulo 3

Áreas de Polígonos e Poliedros

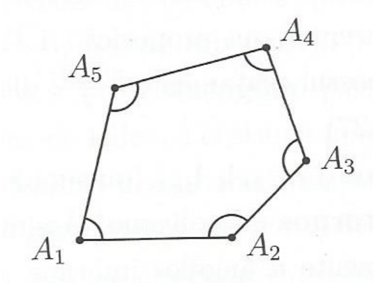
Neste capítulo, apresenta-se as definições e teoremas necessários ao estudo de áreas de polígonos e poliedros, retratamos a visão dos gregos de que o conceito de área de polígonos relacionava-se com o conceito de equivalência. Será baseado nessa perspectiva que deduziremos e demonstraremos as áreas das principais figuras planas uma vez que tal ideia é relativamente de fácil compreensão para os jovens, como será abordado no capítulo 5.

3.1 Polígonos

Conforme Neto (2012, p. 23):

Definição 3.1 *Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um polígono convexo se para $1 \leq i \leq n$, a reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).*

Figura 4 – Um polígono convexo de cinco vértices (e lados).



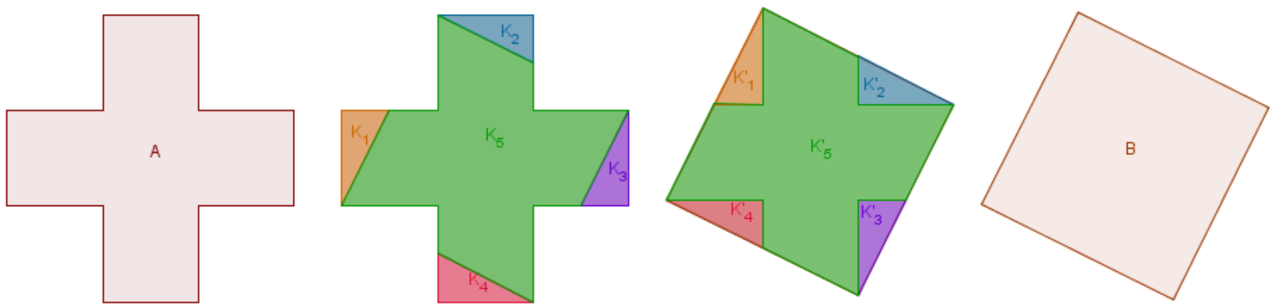
Fonte:(NETO, 2012, p. 23)

3.1.1 Polígonos Equivalentes

Definição 3.2 *Dois polígonos são equivalentes ou equicompostos se é possível decompor um deles num número finito de partes, e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor o outro.*

Ou seja, dois polígonos são equivalentes ou equicompostos se ambos forem somas de um mesmo número de polígonos e se esses polígonos forem dois a dois congruentes entre si (DOLCE; POMPEO, 2002, p. 301).

Figura 5 – Polígonos A e B equivalentes.



Fonte: Elaboração própria

Note que, no exemplo da Figura 5, A e B são a soma de 5 polígonos tais que cada polígono parcela K_i de A é congruente a um polígono parcela K_i de B. Logo, A e B são equivalentes, simbolicamente, A $\sim B$.

Conforme (MORGADO; WAGNER, 2002), a área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de tal forma que:

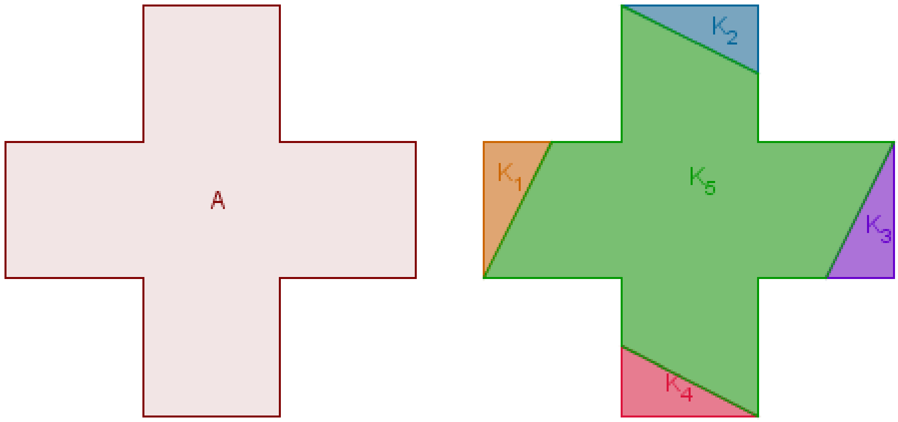
1. Associamos a superfícies equivalentes uma mesma área;
2. Associamos a uma soma de superfícies uma área que é a soma das superfícies parcelas.

Área (A) = $A(K_1)$ + $A(K_2)$ + $A(K_3)$ + $A(K_4)$ + $A(K_5)$ Segundo (DOLCE; POMPEO, 2002, p. 303):

Teorema 3.1 *Se dois paralelogramos possuem bases e alturas respectivamente congruentes, então eles são equivalentes.*

Demonstração 3.1 *Consideremos, sem perda de generalidades, que os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ possuem a mesma base AB e as alturas de mesma medida.*

Figura 6 – Superfícies Equivalentes



Fonte: Elaboração própria

No paralelogramo $ABCD$*, temos:* $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ *e* $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$*.*

No paralelogramo $ABC'D'$*, temos:* $\overline{AB} \equiv \overline{C'D'}$ *e* $\overline{AD'} \equiv \overline{BC'}$*.*

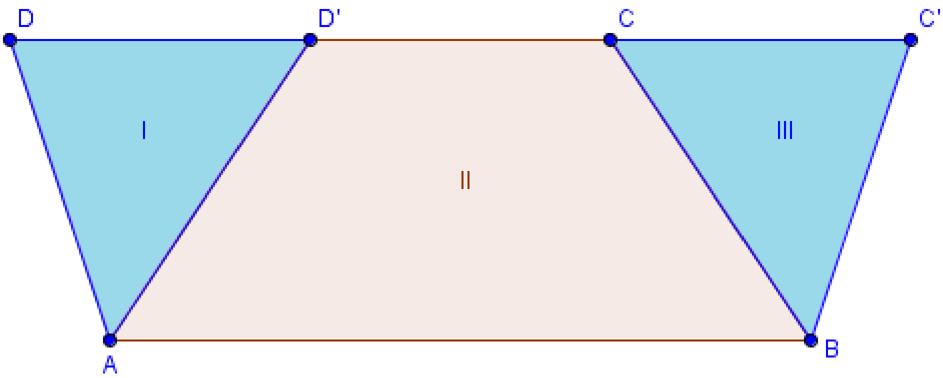
Por transitividade da relação de congruência, temos: $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$

Temos 3 casos a verificar:

Caso 1: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ possuem um segmento em comum $D'C$

Assim como mostra a Figura 7:

Figura 7 – Caso 1



Fonte: Elaboração própria

$\overline{CD} = \overline{DD'} + \overline{D'C}$ (I)

$\overline{C'D'} = \overline{CC'} + \overline{D'C}$ (II)

De (I) e (II), temos que $\overline{DD'} = \overline{CC'}$, e com isso, os triângulos ADD' e BCC' são congruentes.

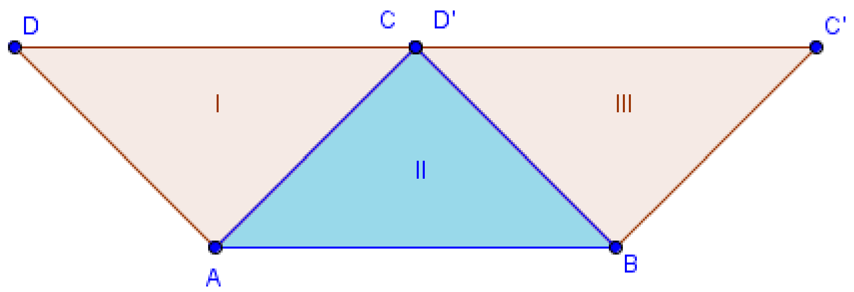
$$\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{BC} \\ \overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \\ \overline{AD'} \equiv \overline{BC'} \end{cases}$$

E, portanto, os paralelogramos ABCD e ABC'D' são equivalentes.

Caso 2: $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ possuem um único ponto em comum, $C = D'$

Assim como mostra a Figura7:

Figura 8 – Caso 2



Fonte: Elaboração própria

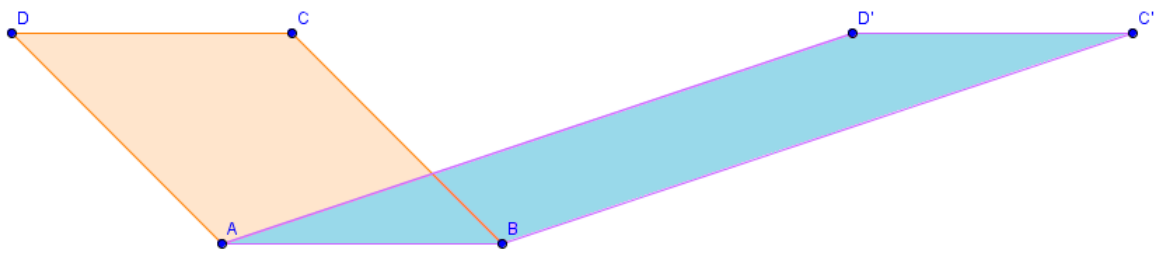
Os triângulos ACD e $BC'D'$ são congruentes. $\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{BC} \\ \overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \\ \overline{AD'} \equiv \overline{BC'} \end{cases}$

E, portanto, os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ são equivalentes.

Caso 3: CD e $C'D'$ não possuem pontos em comum.

Assim como mostra a Figura 9:

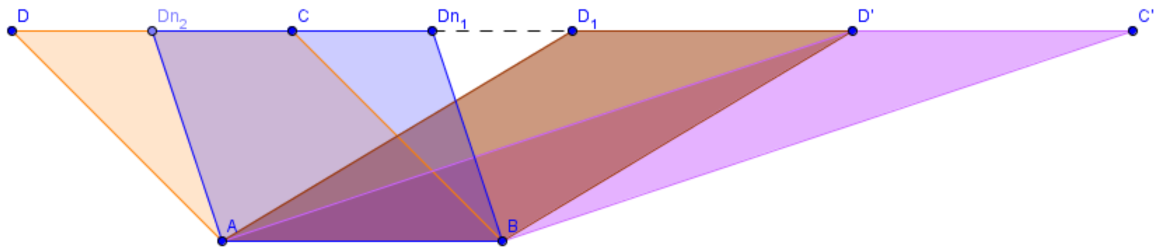
Figura 9 – Caso 3



Fonte: Elaboração própria

Pelo Postulado de Arquimedes, temos que, "dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro". Assim, determinando múltiplos do segmento $C'D'$, a partir de D', teremos $C'D' \equiv D'D_1 \equiv D_1D_2 \equiv ... \equiv D_{n1}D_{n2} \equiv CD$ e, desta forma, temos a equivalência entre paralelogramos $ABC'D' \approx ABD'D_1 \approx ABD_1D_2 \approx ABD_{n1}D_{n2} \approx ABCD$, comprovada pelos casos anteriores, conforme mostra a Figura 10:

Figura 10 – Equivalência de Paralelogramos

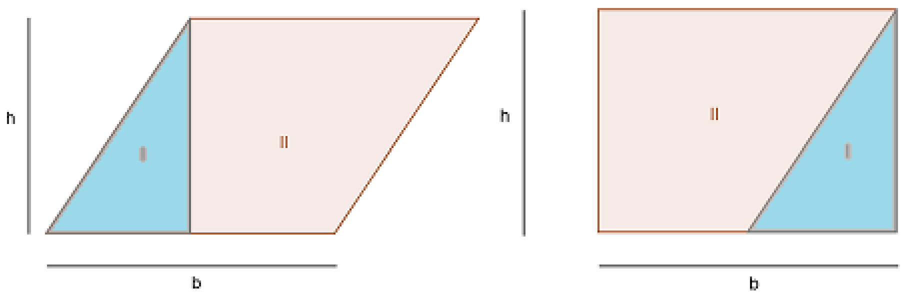


Fonte: Elaboração própria

Segundo (DOLCE; POMPEO, 2002, p. 305):

Corolário 3.1 *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes as do paralelogramo. Como mostra a Figura 11 abaixo:*

Figura 11 – Um paralelogramo equivalente a um retângulo



Fonte: Elaboração própria

Segundo (DOLCE; POMPEO, 2002, p. 305):

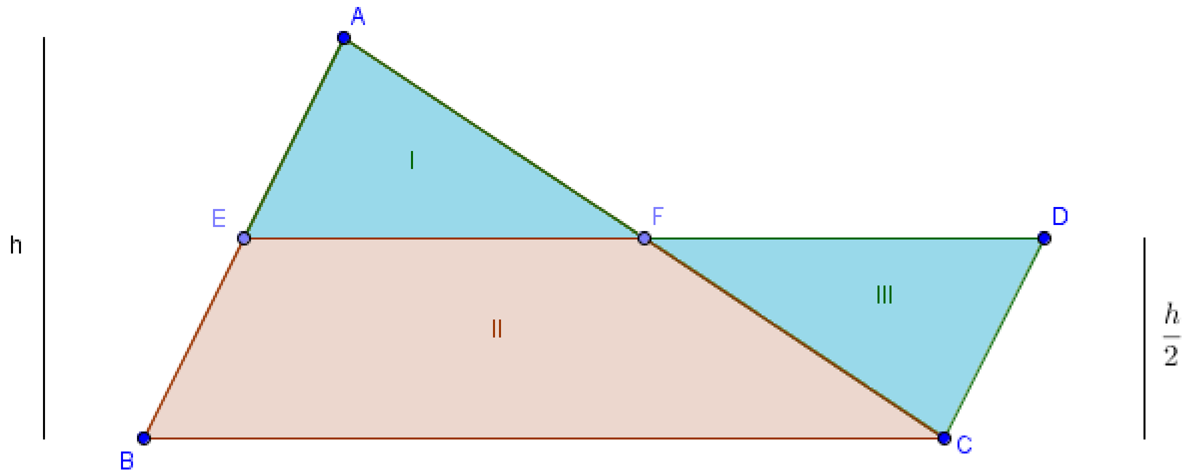
Teorema 3.2 *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo cuja base é congruente à do triângulo e cuja altura é a metade da altura do triângulo.*

Demonstração 3.2 *Consideremos o triângulo ABC, como na Figura 12.*

Se, pelo ponto médio E de $\overline{AB}$, conduzimos $\overline{EF}$ paralela a $\overline{BC}$, passando por F, o ponto médio de $\overline{AC}$ (Teorema da Base Média) [1]

[1] Teorema da Base Média: Se pelo ponto médio de um lado do triângulo traçarmos uma paralela a um segundo lado, então necessariamente esta paralela corta o terceiro lado no seu ponto médio

Figura 12 – Triângulo ABC equivalente ao Paralelogramo BCDE



Fonte: Elaboração própria

Se, pelo ponto C conduzimos $\overline{CD}$ paralela a $\overline{AB}$, sendo D o ponto de interseção com $\overline{EF}$, completamos o paralelogramo $BCDE$.

Mais ainda, pelo Teorema da Base Média, temos que

$$\overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Logo, no paralelogramo $BCDE$, os lados ED e BC são congruentes. Daí

$$\overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{ED}}{2} \tag{3.1}$$
$$= \frac{\overline{EF} + \overline{FD}}{2} \tag{3.2}$$

Temos então que os triângulos AEF e CFD são congruentes.

$$\overline{EA} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{CD}$$

$$\overline{EF} \equiv \overline{FD}$$

$$\overline{AF} \equiv \overline{FC}$$

E, portanto, o triângulo ABC é equivalente ao paralelogramo $BCDE$.

Teorema 3.3 *Traçando-se diagonais internas que não se cortam, podemos decompor qualquer polígono em triângulos justapostos.*

Demonstração 3.3 *Vamos supor, por absurdo, que tal afirmação não seja verdade, ou seja, temos um polígono P, com n lados, que não pode ser decomposto em triângulos na forma descrita no enunciado.*

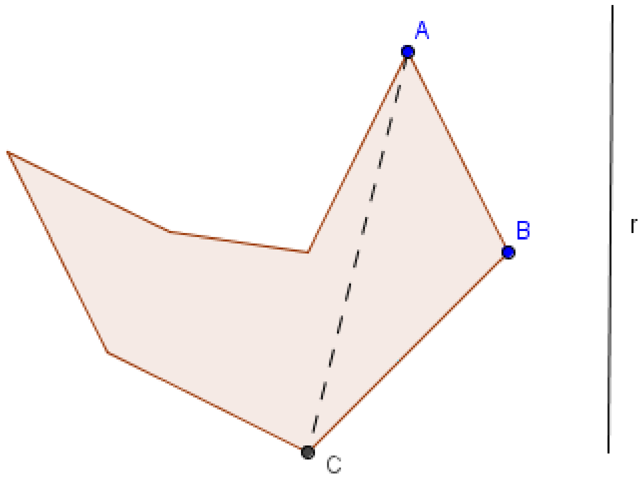
Escolhemos o polígono P de modo que o número n de lados seja o menor possível. A seguir, tomamos uma reta r que não corte P.

Chamamos de B o vértice de P situado à menor distância de r (A reta r intervém nesta demonstração apenas para detectar um vértice "saliente" do polígono).

Se A e C são os vértices adjacente a B. Há dois casos possíveis:

***Caso 1:** Se A, B e C são os únicos vértices do polígono P contidos no triângulos ABC, conforme mostra a Figura 13:*

Figura 13 – Caso 1



Fonte: Elaboração própria

Como o triângulo ABC não contém nenhum outro vértice de P, começamos a decomposição de P em triângulos traçando-se AC.

Assim, determinamos um novo polígono P' com $n-1$ lados, obtido a partir de P substituindo-se os lados AB e BC, por AC.

Como n é o menor número de lados para o qual o teorema não vale, temos então que P' pode ser decomposto em triângulos na forma do enunciado.

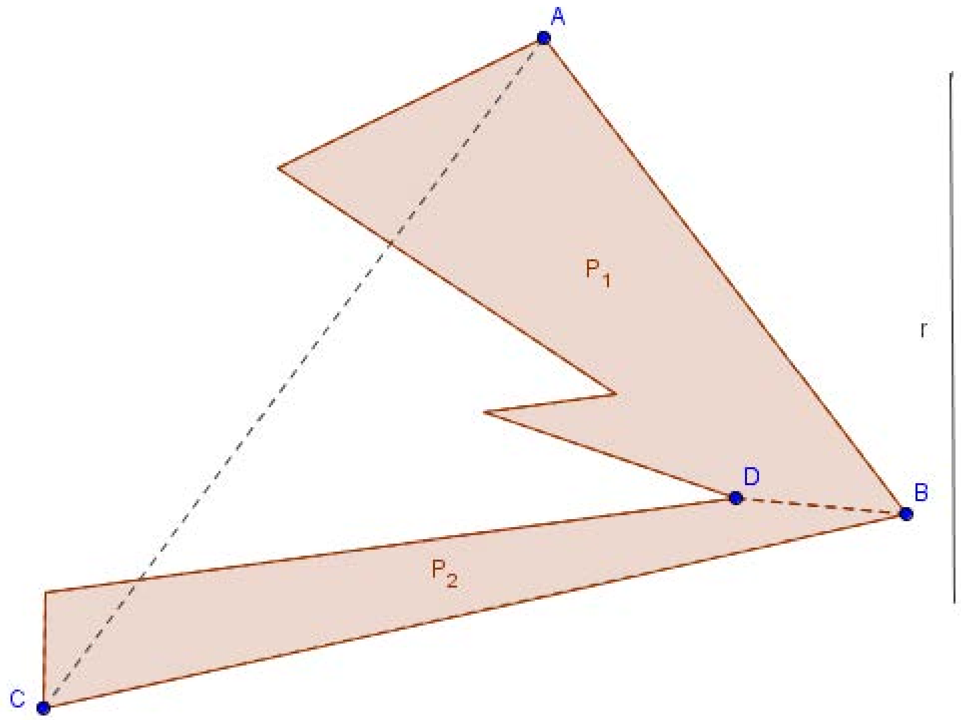
Acrescentando a P' o triângulo ABC, obtemos uma decomposição de P da forma requerida. Isto contradiz que o teorema seja falso para P e conclui a demonstração deste caso.

***Caso 2:** O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P além de A, B e C, como vemos na Figura 14:*

Seja D o vértice de P contido no triângulo ABC, mais afastado de AC, onde DB não contem outros vértices de P.

A diagonal DB, decompõe P em dois polígonos adjacentes $P1$ e $P2$, ambos com

Figura 14 – Caso 2



Fonte: Elaboração própria

menos lados do que P.

O teorema vale, então, para $P1$ e $P2$, que se decompõem em triângulos justapostos, na forma do enunciado. Juntando essas decomposições com DB, obtemos uma decomposição de P. Contradição. Isto prova o segundo caso.

3.2 Área de uma Figura Plana

O cálculo de áreas tem relevante aplicação em diferentes momentos, seja em atividades puramente cognitivas, ou até mesmo no trabalho. Um exemplo de profissional que faz uso dessa ferramenta para tornar possível o desempenho do seu trabalho é o pedreiro. É através do conhecimento de área que é possível estimar a quantidade de cerâmica necessária para pavimentar um determinado cômodo de uma casa.

Para (NETO, 2012), a noção intuitiva de área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço ocupado por ela.

Calcular a área de uma figura plana F é medir a porção do plano ocupada por esta figura. Para isso, compararemos F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área, (LIMA, 1991).

Este trabalho pretende dar um significado mais preciso a esta ideia e estabelecer as fórmulas para as áreas dos polígonos mais conhecidos.

Para (LIMA, 1991):

Definição 3.3 *Quadrado é o quadrilátero que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos.*

Convencionamos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado de quadrado unitário.

Definição 3.4 *Qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá área igual a 1.*

3.2.1 Área do Retângulo

Para (LIMA, 1991):

Definição 3.5 *Retângulo é o quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.*

Caso 1: Se os lados de um retângulo R têm como medidas os números inteiros m e n, então mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter área de $R = mn$.

Caso 2: Se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b, podemos escrever estes números como duas frações $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, com o mesmo denominador q. Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$.

O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $\frac{1}{q}$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $\frac{1}{q}$.

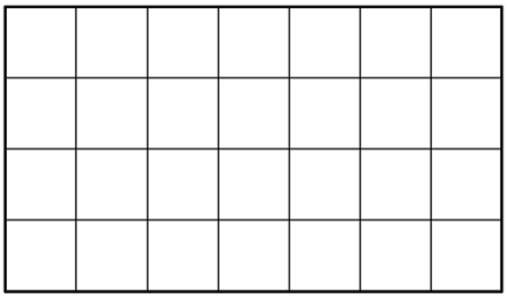
Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido por uma malha de pr quadrados, cada um deles de lado $\frac{1}{q}$. A área desses quadradinhos é $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$. Logo, a área de R será igual a:

$$pr\left(\frac{1}{q^2}\right) = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q}.\frac{r}{q}.$$

ou seja, a área do retângulo é $R = ab$.

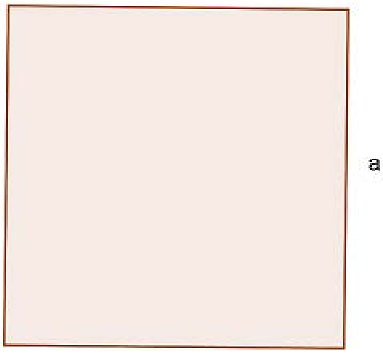
Diz-se, então, que a área do retângulo é o produto da base pela altura.

Figura 15 – Retângulo R, com lados $a = 4$ e $b = 7$, subdividido em $4 \times 7 = 28$ quadrados unitários. Tem área $R = 7 \times 4 = 28$



Fonte: Elaboração própria

Figura 16 – Quadrado de lado *a*



Fonte: Elaboração própria

3.2.2 Área do Quadrado

Como o quadrado é um caso particular do retângulo (ver Figura 16), temos que a área de um quadrado de lado a é

$$A_Q = a.a, \qquad \text{ou seja} \qquad A_Q = a^2$$

(DOLCE; POMPEO, 2002, p. 316)

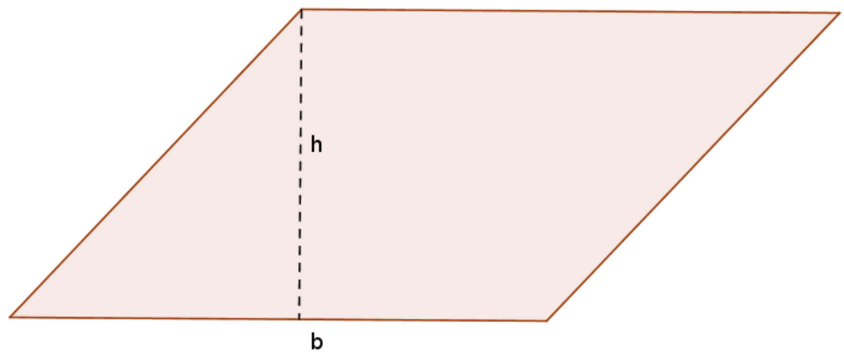
3.2.3 Área do Paralelogramo

Definição 3.6 *O paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.*

Observe a figura a seguir:

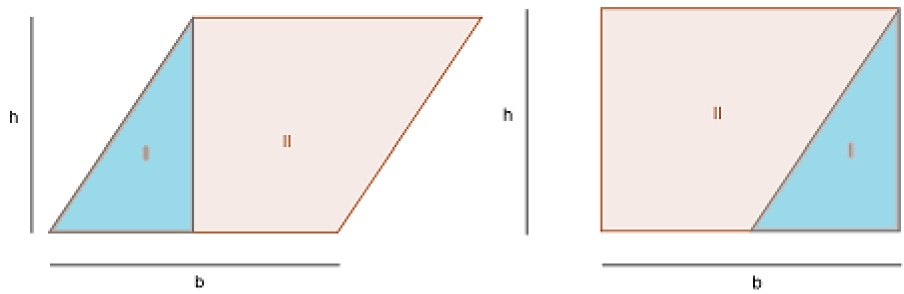
O segmento h que foi destacado no desenho é a altura do paralelogramo, ele representa a menor distância entre dois lados opostos, sendo sempre perpendicular a estes lados. Com h representando a medida da sua altura e com b representando a medida da sua base, a área do paralelogramo pode ser obtida multiplicando-se b por h, tal como na fórmula abaixo: $A_p = b.h$ (DOLCE; POMPEO, 2002)

Figura 17 – Paralelogramo



Fonte:Elaboração própria

Figura 18 – Retângulos de base b e altura h



Fonte: Elaboração própria

3.2.4 Área do Triângulo

Como de acordo Teorema 3.2, todo triângulo de base b e altura h é equivalente a um paralelogramo de base b e altura $\frac{h}{2}$(DOLCE; POMPEO, 2002).

Logo, conforme a Figura 19 :

$$A_T = \frac{b.h}{2}$$

3.2.5 Área do Trapézio

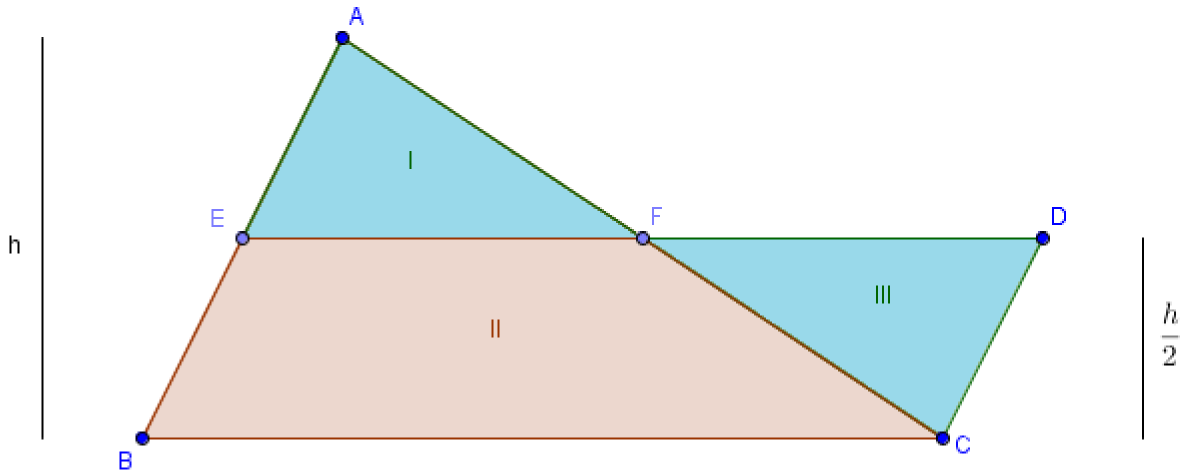
Definição 3.7 *Trapézio é o quadrilátero que possui dois lados paralelos.*

Dado o trapézio $Trap$ de base maior B, base menor b e altura h. A área do trapézio é a soma dos triângulos T_1 (de base B e altura h) e T_2 (de base b e altura h). Portanto, a área do trapézio é a soma das superfícies parcelas (ver Figura 20),

Assim,

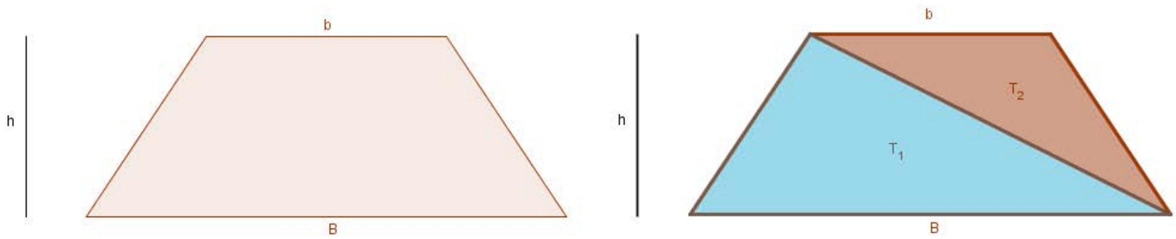
$$A_{Trap} = A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Figura 19 – Triângulo de base b e altura h



Fonte: Elaboração própria

Figura 20 – Trapézio T de base maior B, base menor b e altura h



Fonte: Elaboração própria

(DOLCE; POMPEO, 2002)

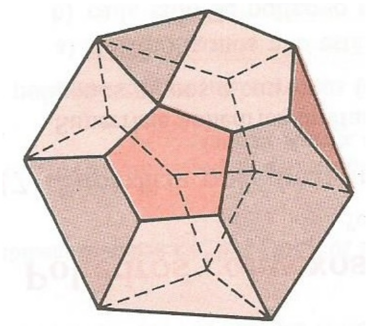
3.3 Poliedros

Conforme (LIMA; CARVALHO; MORGADO, 2006)

Definição 3.8 *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos chamados faces onde:*

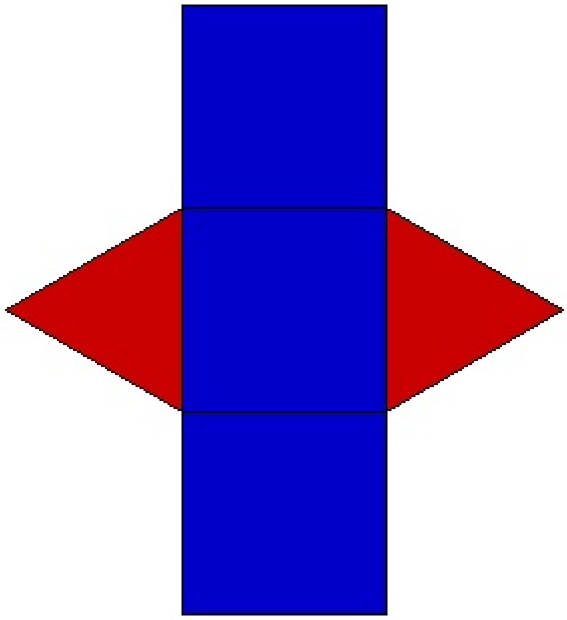
1. *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
2. *A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.*
3. *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice(ou seja cruzando apenas arestas).*

Figura 21 – Exemplo de poliedro convexo



Fonte:(DOLCE; POMPEO, 2002, p. 124)

Figura 22 – Prisma triangular



Fonte:Elaboração própria

Um poliedro convexo possui: faces, que são os polígonos convexos; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices que são os vértices dos polígonos. A reunião das faces é a superfície do poliedro. Neste trabalho calculamos área da superfície poliédrica através de sua planificação, ou seja, com a soma das áreas dos polígonos das faces.

Capítulo 4

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos do estudo: descrição do tipo de pesquisa, apresentação do campo no qual a pesquisa ocorre, caracterização dos sujeitos e definição dos instrumentos e dos procedimentos para análise dos dados da pesquisa.

Para Neves e Domingues (2007), a metodologia deve ser entendida como um conjunto de etapas dispostas de forma lógica que devem ser vencidas na investigação de um fenômeno.

4.1 O Contexto da Pesquisa

A sequência de atividades foi aplicada no Colégio Estadual Doutor Barros Barreto, localizado no município de Campos dos Goytacazes, no estado do Rio de Janeiro. Trata-se de um distrito com características rurais, distante aproximadamente 30 km do centro da cidade, que possui acesso à tecnologia, com sala de vídeo, *datashows* e laboratório de informática.

A escola selecionada para a pesquisa funciona em três turnos. Tendo, nesse ano de 2014, 9 turmas do Ensino Médio, com 194 alunos matriculados, no turno matutino. No turno vespertino, há 2 turmas do Ensino Fundamental, com 36 alunos matriculados, e 2 turmas do Ensino Médio, com 41 alunos matriculados. No turno noturno, há 6 turmas de Educação de Jovens e Adultos (EJA), com 143 alunos matriculados, e 3 turmas de Ensino Médio, com 68 alunos matriculados, totalizando 482 matrículas.

A escolha da escola foi feita pelos seguintes motivos:

- a pesquisadora atuava como professora nessas turmas;
- o quantitativo de alunos permite que seja realizado um trabalho no qual todos poderão se manifestar.

4.2 Instrumentos utilizados na Pesquisa

4.2.1 Teste de Van Hiele

Foi utilizado o teste dos níveis de Van Hiele (Anexo A) elaborado pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997). Consta de 15 questões, distribuídas em três blocos, cada um deles correspondente a um dos níveis de van Hiele. Tem por objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno, como descrito no Capítulo II.

O primeiro bloco de questões pauta-se no nível básico. Esse nível caracteriza-se pela capacidade de identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas com base em sua aparência global. Com essas cinco questões, busca-se verificar as habilidades dos alunos em identificar, comparar e nomear figuras geométricas.

As questões de 6 a 10 referem-se ao nível 1, que tem como característica a análise dos componentes de uma figura geométrica, o reconhecimento de suas propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas.

O terceiro bloco de questões procura avaliar habilidades pertinentes ao nível 2, segundo a teoria de Van Hiele. Esse nível caracteriza-se pelas seguintes capacidades: percepção da necessidade de uma definição precisa, percepção de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.

4.2.2 Teste sobre Áreas

Um instrumento de valor inestimável para responder à pergunta da pesquisa foi o teste contendo 13 questões sobre áreas denominado primeiramente pré-teste e, posteriormente, pós-teste, pois, foi aplicado também ao final da realização das atividades (Apêndice A). Esse instrumento foi elaborado pela pesquisadora para comprovar se, de fato, as atividades propostas e realizadas contribuíram para a aprendizagem do conteúdo Áreas de Polígonos e Poliedros.

4.2.3 Atividades experimentais

Além dos testes já citados, propõe-se uma intervenção pedagógica por meio da aplicação de cinco atividades sobre áreas (Apêndices), focando o uso de materiais manipuláveis e tecnologias, de acordo com as fases de aprendizagem segundo a Teoria de Van Hiele. O objetivo principal dessa intervenção pedagógica é favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades, promovendo o avanço em relação ao conhecimento geométrico dos sujeitos da pesquisa.

Como relatado no Capítulo II, o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno. O modelo de pensamento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidos pelos Van Hiele, além de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro, sendo o ensino, o fator que contribui mais significativamente para esse desenvolvimento (CROWLEY, 1996).

Outro instrumento utilizado foi o Geoplano, descrito no Capítulo I. Também foram utilizados outros materiais concretos, descritos nos itens relativos às atividades em que foram empregados.

Finalmente, também, foram utilizados o software Poly e um applet do Geogebratube, também descrito no Capítulo I.

4.3 Sujeitos da pesquisa

Partindo do pressuposto que, “a escolha dos informantes ou sujeitos do estudo deve ser baseada na procura por indivíduos sociais que tenham uma vinculação significativa com o objeto de estudo” (NEVES; DOMINGUES, 2007, p. 57), os testes e a intervenção pedagógica propostos neste trabalho foram submetidos a alunos do 9^o ano do Ensino Fundamental, visto que o tema sobre áreas de polígonos é parte integrante do currículo mínimo para este ano de escolaridade.

A pesquisa foi realizada nas turmas 901 e 902 do Colégio Estadual Doutor Barros Barreto, no turno da manhã. Na turma 901, estão matriculados 24 alunos, porém cinco não frequentavam. Na 902, são 23 matriculados com apenas 17 frequentando. Totalizando 36 alunos como sujeitos desta pesquisa, com idades entre 16 e 19 anos.

Neste trabalho, cada sujeito da pesquisa foi identificado em ordem alfabética, por A_1 a J_2, respectivamente.

4.4 Tipo de pesquisa

Este estudo foi desenvolvido utilizando a pesquisa exploratória, que, segundo (GIL, 2002), tem por objetivo o esclarecimento de ideias, que são desenvolvidas de forma a proporcionar uma maior familiaridade com o problema, a fim de melhor explicitá-lo, construindo uma visão geral acerca de determinado fato, envolvendo levantamento bibliográfico; entrevistas, análise de exemplos que auxiliem sua compreensão.

A pesquisa exploratória é utilizada quando o pesquisador se depara com temas pouco estudados, o que torna difícil a formulação de hipóteses precisas, assumindo, geralmente, as formas de Pesquisas Bibliográficas e Estudos de Caso (GIL, 2002). De acordo com Godoy (1995, p. 58), uma pesquisa qualitativa possui como características seu caráter descritivo, considerando:

> O ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o produto; a análise dos dados é realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, tem como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados.

Godoy (1995) assinala a existência de, pelo menos, três possibilidades distintas proporcionadas pela abordagem qualitativa: a pesquisa documental, o estudo de caso e a etnografia. Neste estudo, a metodologia adotada para o desenvolvimento da pesquisa foi o Estudo de Caso.

As evidências para um estudo de caso, de acordo com Yin (2005), podem ser obtidas por meio de seis fontes principais: documentos, registros em arquivo, entrevistas, observação direta, observação participante e artefatos físicos, sendo essencial que o pesquisador saiba como usá-las, pois são complementares umas às outras, não existindo uma que possua vantagens indiscutíveis sobre as outras.

4.4.1 Os procedimentos da pesquisa

Como já foi dito, o tema áreas de polígonos é parte integrante do currículo mínimo do 9º ano do Ensino Fundamental, portanto, realizou-se uma intervenção pedagógica priorizando-se este assunto.

A sequência didática foi realizada em quatro etapas:

1. aplicação dos testes de Van Hiele;
2. pré-testes específico sobre áreas;
3. intervenção pedagógica com atividades sobre áreas;
4. aplicação do pós-teste sobre áreas.

A investigação deu-se a partir das informações coletadas no período de outubro a dezembro do ano de 2014. Ao todo, foram 7 encontros de 2 horas/aula cada um, com os alunos conforme Quadro 4.1:

Quadro 4.1 – Cronograma dos encontros com os alunos

Data	**Tarefa**	**Participantes**
24/10	Aplicação do teste de Van Hiele	35 alunos
31/10	Aplicação do teste sobre áreas	36 alunos
07/11	Atividade I- estudo dos poliedros com o auxílio do software Poly;	35 alunos
14/11	Atividade II - Deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano	36 alunos
21/11	Atividade III - Triângulos com bases congruentes e alturas congruentes e Atividade IV - Calculando a quantidade de papelão necessária para produção de embalagens	34 alunos
28/11	Atividade V - Calculando a área dos ambientes da escola e Confecção do cartaz	35 alunos
05/12	Reaplicação do teste sobre áreas	36 alunos

Vale ressaltar que até mesmo os alunos que faltaram em algum encontro, não deixaram de realizar nenhuma atividade, pois a mesma foi feita em dia posterior, em intervalos ou aula vaga, para que não afetasse o resultado da pesquisa.

Capítulo 5

Sequência Didática Aplicada em Sala de Aula

Este capítulo descreve a implementação da sequência didática constituída pelos testes e pela intervenção pedagógica com atividades sobre áreas baseadas na teoria de Van Hiele.

5.1 Testes de Van Hiele

Neste item, é descrito a aplicação do teste de Van Hiele:

Tempo previsto: 2 horas/aulas

Público Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: investigar o nível de pensamento geométrico de cada participante, através do teste dos níveis de Van Hiele, elaborado pela equipe do Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro(anexo A).

Desenvolvimento:

A pesquisadora realiza uma conversa com os sujeitos da pesquisa a respeito do desenvolvimento do projeto e a determinação conjunta de regras de boa convivência que deveriam prevalecer em todos os encontros.

A seguir, é aplicado o teste dos níveis de Van Hiele (anexo A) aos participantes, que utilizaram todo o tempo do primeiro encontro para essa atividade, já que o referido teste contém 15 questões, sendo 9 delas fechadas e 6 discursivas. Convém ressaltar, também, que esse teste não é específico sobre áreas, que é o foco dessa pesquisa. Ele contém questões que envolvem conhecimentos básicos de geometria e foi utilizado com o objetivo de investigar o nível de pensamento geométrico de cada participante, em relação a esses conhecimentos básicos. Por meio da análise do resultado do teste de Van Hiele, seria possível decidir se os sujeitos da pesquisa já tinham ou não condições para desenvolver as atividades referentes ao tema da pesquisa: áreas de polígonos e poliedros.

Análise do Teste dos Níveis de Van Hiele:

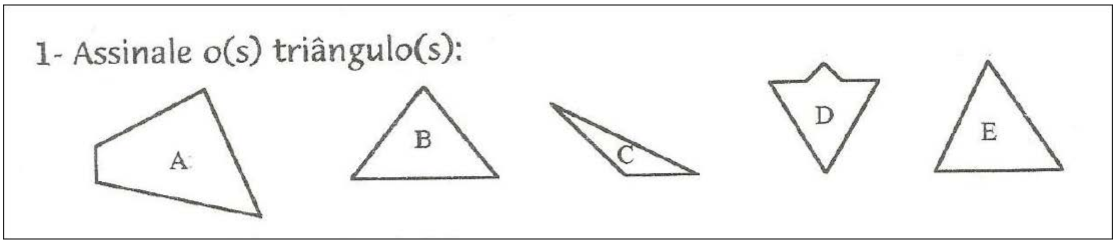
A seguir, apresentamos uma análise das respostas que os sujeitos da nossa pesquisa deram às quinze questões do teste de Van Hiele para os níveis 0,1 e 2.

Em princípio, foi feita a correção das questões, usando-se apenas o critério de certo e errado. Questões incompletas foram consideradas erradas. Optamos por esse tipo de correção inicial com o objetivo de obter uma visão global dos conhecimentos dos sujeitos frente aos conteúdos de Geometria.

Resultados da questão 1:

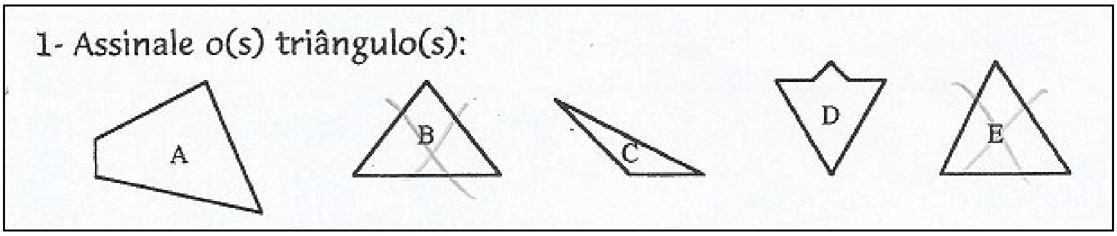
Nessa questão, dos 36 sujeitos da pesquisa 18 assinalaram as figuras B e E como triângulos, mas não assinalaram a figura C. Dois marcaram todas as figuras como sendo triângulos, inclusive a figura D, pois consideraram apenas os segmentos grandes, desconsiderando que os dois segmentos pequenos acrescentavam dois novos lados ao desenho, Figura 24. Um sujeito marcou apenas a figura B.

Figura 23 – Questão 1 do teste de Van Hiele



Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Figura 24 – Resposta de um aluno a questão 1



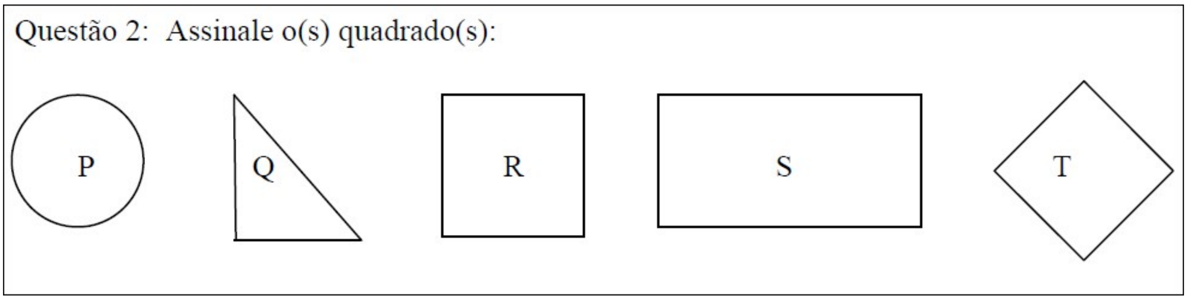
Fonte: Dados da pesquisa

Esses sujeitos da pesquisa compreenderam as formas geométricas como um todo (aparência física), não pelas suas propriedades ou partes. Os outros 15 acertaram a resposta.

Resultados da questão 2:

Na segunda questão (Figura 25), 17 sujeitos da pesquisa (em 36) marcaram apenas a figura R como sendo um quadrado, desconsiderando a figura T, que não estava com os lados paralelos às bordas da folha.

Figura 25 – Questão 2 do teste de Van Hiele



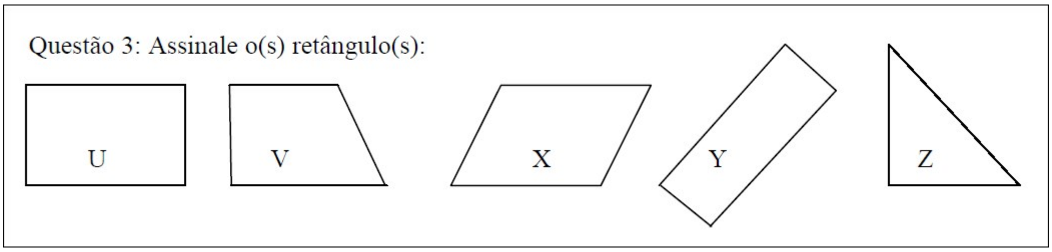
Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Dois sujeitos da pesquisa erraram, marcando R e S, sem justificativa; e 17 acertaram a resposta.

Resultados da questão 3:

Na questão 3, ocorreu com os retângulos (Figura 26) o mesmo fato que havia acontecido com os quadrados na questão anterior. Dos 36 sujeitos da pesquisa, só 21 marcaram a figura U e 6 marcaram a Figura X como retângulo. Os outros 9 sujeitos da pesquisa acertaram a resposta.

Figura 26 – Questão 3 do teste de Van Hiele



Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

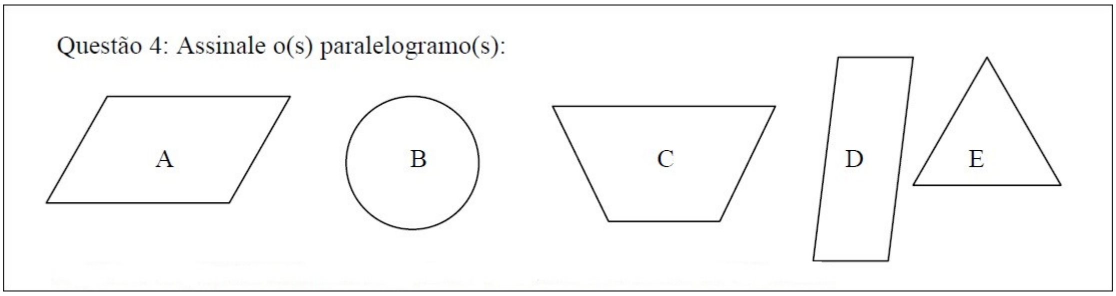
Resultados da questão 4:

Na quarta questão (Figura 27), ocorreram 16 acertos, porém sem justificativa. Outros 3 sujeitos da pesquisa não assinalaram e justificaram que não sabiam o que era paralelogramo.

Dos 17 sujeitos que erraram a resposta, 9 marcaram a Figura C como paralelogramo, sem conseguir justificar o que haviam marcado e 8 marcaram apenas a Figura A.

Resultados da questão 5:

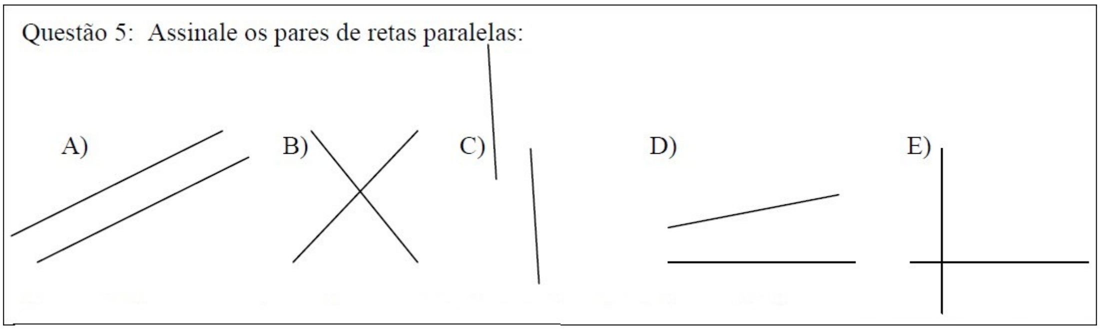
Figura 27 – Questão 4 do teste de Van Hiele



Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Na quinta questão (Figura 28), 25 sujeitos da pesquisa acertaram os pares de retas paralelas, marcando A e C, 6 marcaram as retas concorrentes B e E, confundindo os conceitos de paralelismo e concorrência.

Figura 28 – Questão 5 do teste de Van Hiele



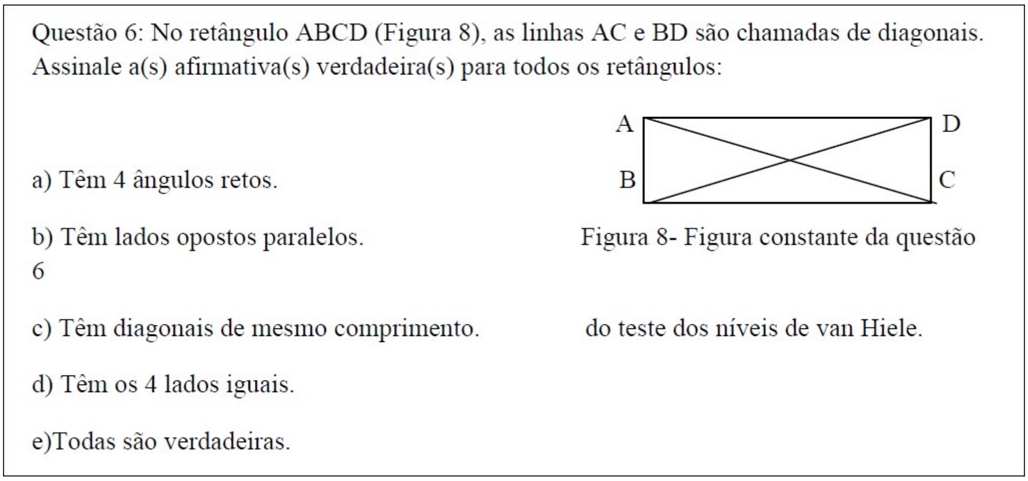
Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Cinco sujeitos da pesquisa marcaram A, C e D e justificaram que "retas paralelas não se cruzam", esquecendo-se, porém desenho D representa apenas parte das retas que, prolongadas, se cruzariam.

Resultados da questão 6, figura 29:

Na questão 6, quinze sujeitos da pesquisa erraram e, como justificativa, disseram que não compreenderam o termo "diagonais", 12 sujeitos da pesquisa acertaram e justificaram corretamente.

Figura 29 – Questão 6 do teste de Van Hiele



Questão 6: No retângulo ABCD (Figura 8), as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.

b) Têm lados opostos paralelos.

Figura 8- Figura constante da questão 6 do teste dos níveis de van Hiele.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os 4 lados iguais.

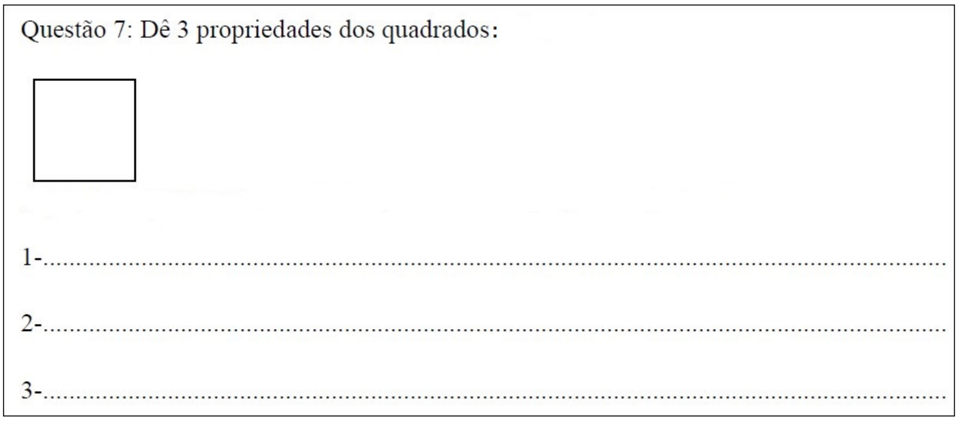
e)Todas são verdadeiras.

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Resultados da questão 7:

Dois sujeitos da pesquisa acertaram sem justificativa e 7 marcaram a opção A, que diz que "tem 4 ângulos retos", a única afirmativa verdadeira em relação aos retângulos, figura 30.

Figura 30 – Questão 7 do teste de Van Hiele



Questão 7: Dê 3 propriedades dos quadrados:

1-...

2-...

3-...

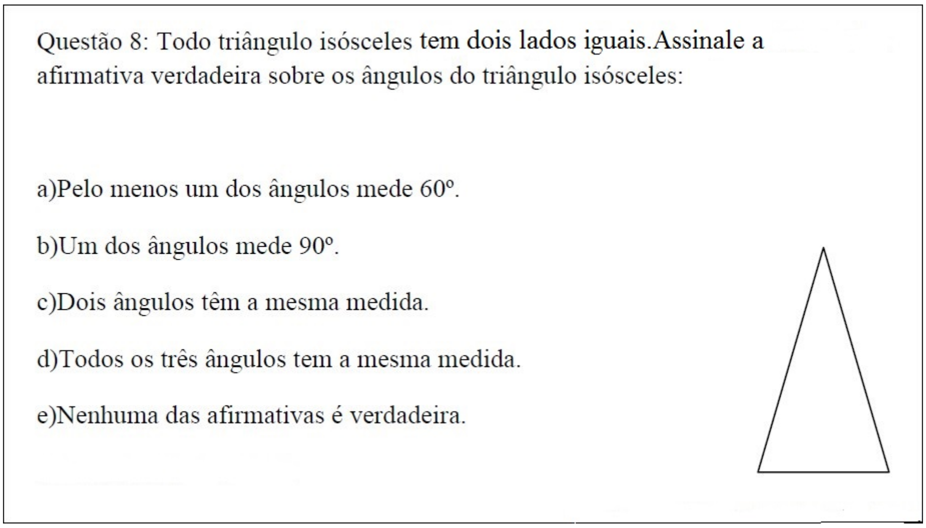
Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Treze sujeitos da pesquisa não responderam a essa questão, justificando que não sabiam o que era o termo "propriedades". Dez acertaram duas propriedades: "tem 4 lados iguais" e "tem 4 ângulos retos". 3 acertaram somente uma propriedade: "tem 4 lados iguais", e 10 acertaram as três propriedades.

Resultados da questão 8:

Na questão 8 (figura31), 16 sujeitos da pesquisa (em 36) conseguiram acertar a alternativa correta (C), que afirmava que dois ângulos de um triângulo isósceles têm a mesma medida, e justificaram que conseguiram fazer usando o desenho como referência. Talvez, sem a figura não tivessem acertado.

Figura 31 – Questão 8 do teste de Van Hiele


Questão 8: Todo triângulo isósceles tem dois lados iguais.Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

a)Pelo menos um dos ângulos mede 60º.

b)Um dos ângulos mede 90º.

c)Dois ângulos têm a mesma medida.

d)Todos os três ângulos tem a mesma medida.

e)Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

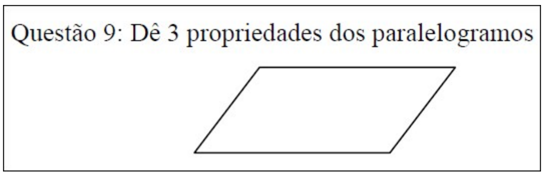
Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Os outros 20 sujeitos da pesquisa erraram a resposta e deram justificativas que não fizeram sentido.

Resultados da questão 9(figura32):

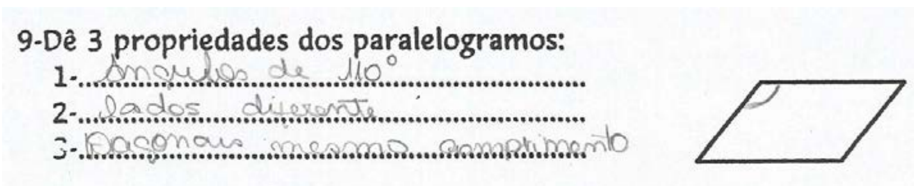
Vinte cinco sujeitos da pesquisa não responderam à questão 9 , pois disseram que não sabiam o que era o termo "propriedades".

Figura 32 – Questão 9 do teste de Van Hiele


Questão 9: Dê 3 propriedades dos paralelogramos

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Figura 33 – Resposta de um aluno à questão 9


9-Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1-Ângulos de 110°

2-lados diferente

3-Diagonais mesmo comprimento

Fonte: Dados da pesquisa

Outros 8 sujeitos da pesquisa escreveram como propriedade: “tem lados diferentes” e apenas 3 sujeitos da pesquisa citaram duas propriedades corretas, apesar de não conseguirem usar termos adequados. Eles colocaram da seguinte forma: “tem ângulos iguais (dois a dois)” e “tem lados iguais (dois a dois)”.

Resultados da questão 10(figura34):

Apenas 12 sujeitos da pesquisa tentaram responder a questão, porém apenas 5 acertaram. Os outros 24 sujeitos da pesquisa (em 36) não fizeram, alegando que não conheciam o termo “diagonais”.

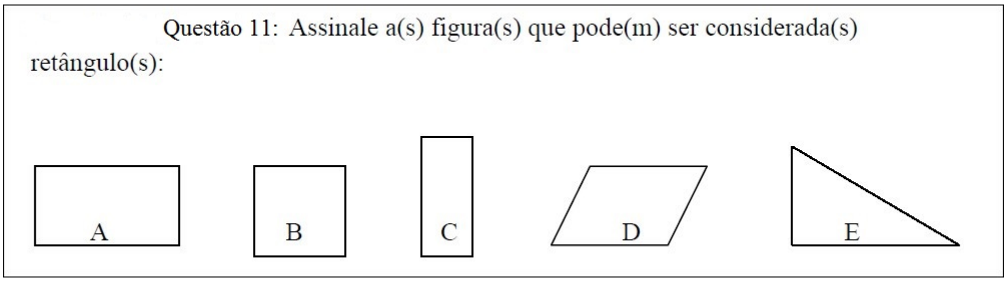
Figura 34 – Questão 10 do teste de Van Hiele

Questão 10: Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não tem o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero:

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Resultados da questão 11(figura 35):

Figura 35 – Questão 11 do teste de Van Hiele



Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Nessa questão, 24 sujeitos da pesquisa marcaram apenas as figuras A e C como sendo retângulos e justificaram que um retângulo é uma figura que “possui lados de medidas diferentes” e 7 marcaram corretamente as letras A, B e C, sendo que só 5 deles justificaram corretamente. Outros 5 marcaram somente a letra A e não justificaram.

Resultados da questão 12(figura 36):

Relativo a essa questão, dos 36 sujeitos da pesquisa, 13 responderam corretamente aos três itens e 8 deixaram o item “b” e “c” em branco, 5 apenas o item “a”, sem justificar corretamente o item “b”, nem souberam classificar o quadrilátero no item “c”. 10 sujeitos da pesquisa deixaram a questão toda em branco.

Resultados da questão 13(figura 37):

Dos 36 sujeitos da pesquisa, 19 não responderam a essa questão, sendo que 17 deles novamente justificaram que não sabiam o que era paralelogramo (assim como na

Figura 36 – Questão 12 do teste de Van Hiele

Questão 12: Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.
a)Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?...
b)Por quê? ....
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

questão 4). Outros 4 responderam "sim", mas não justificaram ou o fizeram de maneira

Figura 37 – Questão 13 do teste de Van Hiele

Questão 13:
13-Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?..............................
Por quê?...
....

Fonte:(NASSER; SANTANNA, 1997)

equivocada.Os 13 restantes responderam "não", sendo que 4 tentaram justificar, mas não conseguiram fazê-lo. A maioria justificou da seguinte forma:"Sim, porque possui ângulos iguais"

Resultados da questão 14 (figura 38):

Figura 38 – Questão 14 do teste de Van Hiele

Questão 14: Considere as afirmativas:

I)A figura X é um retângulo.
II)A figura X é um triângulo.
Assinale a afirmativa verdadeira:

a)Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c)I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d)I e II não podem ser ambas falsas.
e)Se II é falsa, então I é verdadeira.

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Nessa questão, apenas 11 sujeitos da pesquisa marcaram a opção correta (C), 25 erraram e alegaram não entenderem o enunciado da questão.

Resultados da questão 15 (figura 39):

Nessa questão, 9 sujeitos da pesquisa acertaram a opção correta (C). Outros 19 erraram e os outros 8 não a fizeram.

Figura 39 – Questão 15 do teste de Van Hiele

Questão 15: Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a)Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

b)Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.

c)Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

d)Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

e)Nenhuma das afirmativas anteriores.

Fonte: (NASSER; SANTANNA, 1997)

Análise Final do Primeiro Encontro:

De uma forma mais geral, percebe-se que, ao justificar várias respostas do teste, aproximadamente 86 % dos sujeitos da pesquisa apresentou um vocabulário geométrico pouco desenvolvido, com muitas dificuldades de justificar suas resoluções. Alguns sujeitos da pesquisa, aproximadamente 14 % apresentaram um vocabulário melhor, usando termos como “paralelo”, “lado”, “ângulos retos” e “oposto” de forma correta, mas representam uma minoria dentro do grupo.

A verificação dos níveis de pensamento geométrico de cada participante que fez o teste foi feita a partir do esquema montado no Quadro 2.1, de acordo com os seguintes critérios:

Nível 0 Corresponde às questões 1 a 5. Para considerar que um sujeito atingiu o nível básico (0), é necessário que ele acerte, no mínimo, três das referidas questões.

Nível 1 Corresponde às questões 6 a 10. Para considerar que um sujeito atingiu esse nível, é necessário que ele acerte, no mínimo, três das referidas questões.

Nível 2 Corresponde às questões 11 a 15. Para considerar que um sujeito atingiu o nível 2, é necessário que ele acerte, no mínimo, três das referidas questões.

Conforme foi dito anteriormente, o objetivo da aplicação do teste dos níveis de Van Hiele era diagnosticar em que nível de pensamento geométrico os participantes se encontravam (0-1-2), para saber se eles já teriam condições de desenvolver as atividades específicas sobre áreas.

Quadro 5.1 – Nível de pensamento geométrico dos participantes no início da pesquisa, de acordo com o teste dos níveis de Van Hiele (NASSER, 1997).

Questões Sujeito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
A	X	X	X	X	X		X			X		X				0
B		X		X	X	X									X	0
C		X			X			X				X		X		-
D	X				X	X										-
E		X						X			X	X				-
F	X		X	X	X							X			X	0
G		X	X	X		X	X								X	0
H			X	X	X			X						X		0
I		X	X	X	X						X					0
J		X						X				X			X	-
K	X										X					-
L	X	X	X		X		X			X						0
M				X	X			X				X		X		-
N	X	X		X	X											-
O		X		X	X	X	X			X					X	1
P		X		X				X				X				-
Q	X				X			X								-
R	X	X	X		X	X						X		X		0
S		X	X					X							X	-
T				X	X	X										-
U	X		X		X		X							X		0
V	X	X		X	X	X	X					X				0
X		X			X			X			X				X	-
Y		X						X				X		X		-
Z	X	X		X	X	X	X			X						0
W		X			X			X						X		-
A_2		X		X				X				X			X	-
B_2	X					X	X									-
C_2	X	X		X	X			X						X		0
D_2		X			X	X	X					X				-
E_2								X			X				X	-
F_2	X	X			X		X	X						X		0
G_2					X	X					X			X		-
H_2	X				X						X	X				-
I_2		X		X	X	X	X			X					X	0
J_2						X		X				X		X		0

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 5.2 – Legenda do Quadro 5.1

X	Indica que o aluno acertou a questão.1
	Indica que o aluno errou a questão.
0	Indica que o aluno atingiu o nível 0 (básico).
1	Indica que o aluno atingiu o nível 1.
2	Indica que o aluno atingiu o nível 2.
-	Indica que o aluno não atingiu nenhum dos níveis.

Fonte: Elaboração própria

O resultado obtido, conforme Quadro 5.1, mostra que, dos 36 alunos, 20 não atingiram nem mesmo o nível 0 (básico), 15 alunos atingiram o nível básico 0, 1 aluno atingiu o nível 1 e nenhum aluno atingiu o nível 2.

Como o resultado demonstrou níveis muito baixos, foram desenvolvidas, no segundo e terceiro encontros, com cada grupo, atividades que poderiam possibilitar o avanço nos níveis de raciocínio geométrico dos participantes e a obtenção de melhores condições para desenvolver as atividades que seriam propostas, sobre Áreas de Polígonos e Poliedros.

5.2 Aplicação dos Pré-Testes sobre Áreas

Tempo presvisto: 2 horas/aula

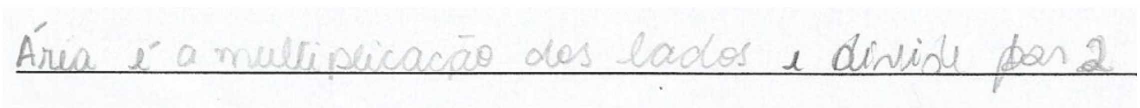
Público Alvo: 9°ano do Ensino Fundamental

Objetivo: investigar o conhecimento específico sobre Áreas de Polígonos e Poliedros, através da aplicação de um pré-teste elaborado pela pesquisadora (veja Apêndice A).

Desenvolvimento:

Questão 1: Quando foram perguntados sobre o conceito de área, alguns erros nas respostas chamaram nossa atenção, a seguir algumas delas, como mostram as figuras 40 e 41 abaixo :

Figura 40 – Resposta do sujeito K à questão 1

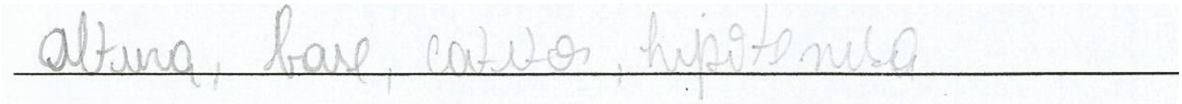


Fonte: dados da pesquisa

O que se pode perceber é que o conceito de área não está claramente definido para a maioria dos sujeitos da pesquisa, aproximadamente 84%.

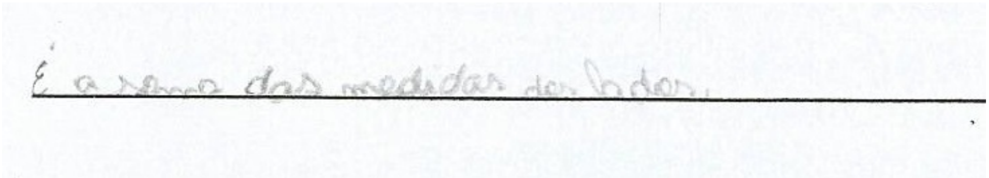
Questão 4

Figura 41 – Resposta do sujeito N à questão 1



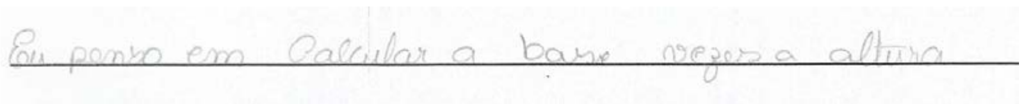
Fonte: dados da pesquisa

Figura 42 – Resposta do sujeito R à questão 1



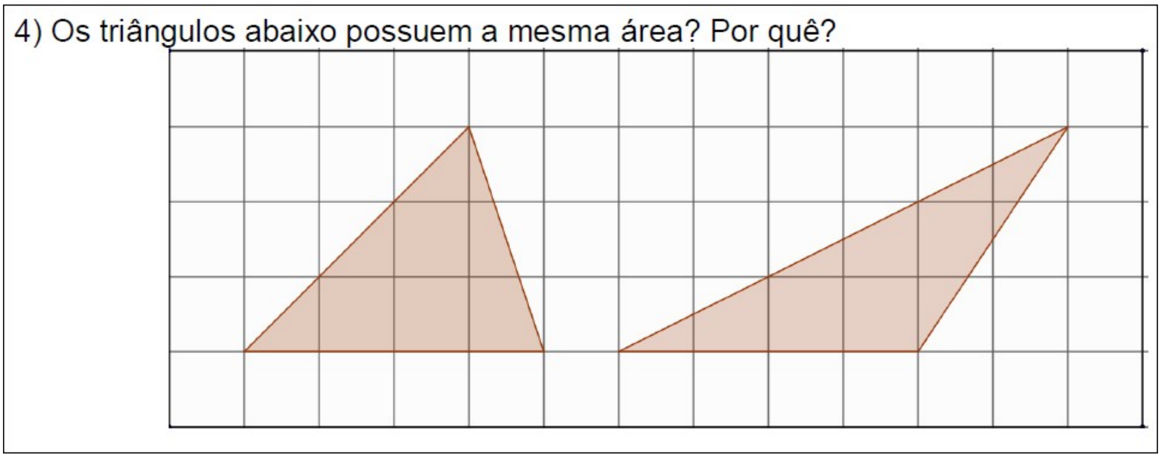
Fonte: dados da pesquisa

Figura 43 – Resposta do sujeito Z à questão 1



Fonte: dados da pesquisa

Figura 44 – Questão 4 do teste sobre áreas



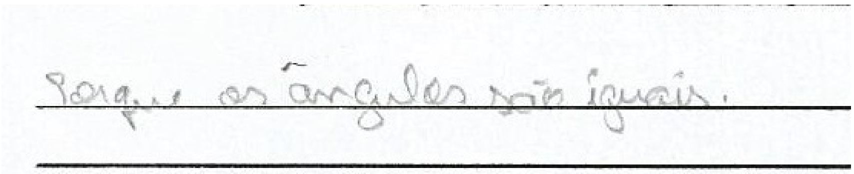
Fonte: dados da pesquisa

Algumas respostas dadas a esta questão, também, chamaram nossa atenção, como mostra as figuras seguintes, 45 e 46:

Os participantes realizaram, individualmente, as atividades propostas no pré-teste. A pesquisadora pôde observar que o resultado não foi bom, conforme explicitado no Tabela 1.

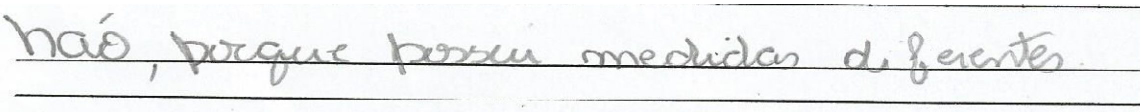
Ressaltamos que, apesar de o resultado não ter sido satisfatório o que mostra uma carência no ensino-aprendizagem de áreas, os participantes demonstraram interesse em

Figura 45 – Resposta do sujeito T à questão 4



Fonte: dados da pesquisa

Figura 46 – Resposta do sujeito Y à questão 4



Fonte: dados da pesquisa

Tabela 1 – Relatório de Acertos, Erros e Omissões no pré-teste sobre Áreas.

Questões	acertos	erros	em branco
1	6	25	5
2	13	23	0
3	17	19	0
4	0	29	7
5	14	14	8
6	9	24	3
7	0	27	9
8	2	28	6
9	19	15	2
10	21	10	5
11	7	23	6
12	3	25	8
13	4	23	9

Fonte: dados da pesquisa

tentar resolver as questões do teste, fato que pôde ser percebido pelo número de questões que foram deixadas em branco (apenas 15%).

Como pode ser observado na Tabela 1, nenhum sujeito da pequisa acertou a Questão 4 do referido teste, o que mostrou a necessidade de uma intervenção pedagógica mais aprofundada sobre triângulos que possuem mesma base e altura. Com isso, atividades foram especialmente pensadas e selecionadas pela pesquisadora.

Transcorrido todo o processo de intervenção, os alunos foram submetidos a um pós-teste, com o objetivo de verificar a evolução quantitativa da aprendizagem sobre o conceito de área, visto que era notória, no discurso, a evolução qualitativa da aprendizagem. O pós-teste aplicado apresentou as mesmas questões do pré-teste.

5.3 Intervenção Pedagógica

Em seguida, após a análise dos resultados do teste de Van Hiele e o pré-teste sobre áreas (Anexo A), elaborou-se e aplicou-se uma intervenção pedagógica com atividades que favoreçam o desenvolvimento de habilidades e competências permitindo aos alunos transitar de um nível para o nível seguinte, sempre em consonância com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele, pois, segundo ele, o aluno precisa ser estimulado por determinadas atividades que propiciem a aprendizagem.

Foram realizados 4 encontros que duraram em média 100 minutos cada. É importante ressaltar que em todas as atividades desenvolvidas buscou-se priorizar o uso de materiais manipuláveis e tecnologias com o objetivo de tornar o trabalho mais dinâmico.Foram realizadas em grupos ou duplas e utilizavam-se sempre materiais e recursos didáticos, tais como software, geoplano, embalagens e fita métrica, visando além do conteúdo matemático, ao reconhecimento da necessidade do cálculo de área em diversas situações problemas.

A cada encontro havia um primeiro momento no qual os grupos eram formados e os materiais distribuídos. Em seguida, os alunos realizavam a atividade de investigação com a mediação do professor que interagia com toda a classe sempre que alguma dúvida surgia. Todas as atividades foram elaboradas e executadas de acordo com as fases de aprendizagem da Teoria de Van Hiele, como mostra o quadro 5.3 abaixo:

Fase 1	Interrogação/Informação	Atividades com Poly. Quais são os polígonos das faces? O que é um retângulo? O que é um paralelogramo?
Fase 2	Orientação Dirigida	Atividades com o Geoplano.
Fase 3	Explicação	Demonstração da área do retângulo na lousa.
Fase 4	Orientação Livre	Cálculo de superfície de embalagens e ambientes da escola.
Fase 5	Integração	Organização do cartaz com as fórmulas de área dos principais polígonos.

Quadro 5.3 – Atividades de acordo com as fases de aprendizagem

5.3.1 Atividade 1: estudo dos poliedros com o auxílio do software Poly

Tempo previsto: 2 horas aulas

Público alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Recursos utilizados: Software *Poly*

Objetivo: conhecer o software *Poly*, identificar a planificação de alguns poliedros, reconhecer que os sólidos geométricos são formados pela composição de figuras planas, exercitar a visão geométrica tridimensional representada no plano, identificar faces, vértices e arestas de um poliedro, desenvolver habilidades, visuais, verbais, lógicas, de desenho de percepção e de representação dessas figuras.

Desenvolvimento: no início da aula, a professora explicou os objetivos da pesquisa e entregou as atividades, que seriam trabalhadas, aos alunos. Perguntou-se aos mesmos se já tinham ouvido falar em no software *Poly*. Todos disseram que nunca tinham estudado com o auxílio desse software, mas quando se iniciou a atividade, alguns alunos se lembraram de que já haviam estudado com o auxílio deste software com a própria pesquisadora em anos letivos anteriores.

Seguindo as fases de aprendizagem da Teoria de Van Hiele, após ter sido aplicado o teste para identificação dos níveis de raciocínio, e identificadas várias falhas no reconhecimento de figuras, propomos para a primeira fase de aprendizagem, a Interrogação informada conforme, o capítulo 2, um estudo dos poliedros com auxílio do software *Poly*, que foi escolhido devido as possibilidades de mover e observar de vários ângulos os poliedros, além deste utilizar alguns recursos de animação.

Para Nasser e Santanna (1997, p. 6):

> Partimos dos sólidos geométricos porque vivemos em estruturas tridimensionais. É mais natural para o aluno reconhecer nos sólidos, gradativamente, os elementos que serão objeto de seu estudo em Geometria Plana.

Foram apresentadas, de forma dialogada, aos alunos algumas definições como quadrado, retângulo, triângulo , paralelogramo e poliedros. Antecedendo à resolução das atividades, foi ressaltado que, à medida que sentissem necessidade, poderiam solicitar ajuda da mediadora.

Alguns problemas surgiram, dos 14 computadores do laboratório que deveriam estar funcionando, infelizmente, apenas 6 estavam em perfeitas condições de uso. Por esse motivo, alguns sujeitos da pesquisa trabalharam, em duplas e até trios, quando necessário, para que todos tivessem acesso às atividades.

Primeiramente, a pesquisadora explicou como entrar no programa. Após todos terem iniciado, foi pedido que cada participante fizesse experiências livremente.

Nesse momento da pesquisa, foram sendo descobertas, com a ajuda da pesquisadora, planificações de vários sólidos, como rotacionar os sólidos e suas planificações. Muitos ficaram encantados com a diversidade de sólidos disponíveis para serem explorados. Alguns comentavam “este aqui é a nossa bola”,principalmente quando rotacionavam diziam “que legal!”

Os grupos responderam à ficha de atividades (apêndice B) e era notável, o entusiasmo por se tratar de uma aula diferente, com o auxílio do software.

5.3.2 Atividade 2: deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano

Tempo previsto: 2 horas/aulas

Publico alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Recursos utilizados: Geoplano retangular e elásticos coloridos.

Objetivo: investigar as contribuições de materiais concretos, especificamente o Geoplano, para a aprendizagem do conteúdo áreas de polígonos e poliedros, avaliadas segundo a teoria de Van Hiele. Espera-se que, ao final desta aula, o aluno seja capaz de calcular áreas de polígonos e deduzir informalmente as fórmulas dos principais.

Desenvolvimento:

Primeiramente, a pesquisadora os dividiu em grupos de três alunos e entregou-lhes a cada grupo participante um geoplano retangular e elásticos coloridos, falou o nome do objeto, o qual não era conhecido pelos sujeitos da pesquisa, e explicou um pouco sobre sua utilização. Depois, pediu a cada participante que, utilizando os elásticos, construísse no geoplano os desenhos que quisessem, usando sua criatividade, considerando a fase I de aprendizagem.

Num segundo momento, entregou aos sujeitos da pesquisa uma folha de atividades(apêndice C) para serem realizadas com o uso do Geoplano a fim de realizar a fase II de aprendizagem. Em seguida, propõe- se aos alunos a utilização de uma unidade de área conveniente para calcular áreas de figuras no geoplano.

- Unidade de medida de área (u.a.): superfície quadrada delimitada por quatro pontos.
- Unidade de comprimento (u.c.): a distância entre dois furos ou pregos na horizontal ou vertical.
- Usualmente, chama-se um dos lados de um retângulo de comprimento (ou base) e o outro de largura (ou altura).

Seguindo a fase 2 de aprendizado do modelo de Van Hiele, os alunos fizeram o item 1 dessa atividade e, realizada essa questão a pesquisadora interviu, questionando os alunos sobre o que é área de uma figura. Algumas respostas dadas foram: área é um espaço; área é um lugar; área é um terreno; área é base vezes altura. Após essa discussão, partiu-se para a definição de área: "Área de uma figura plana é o número que expressa a medida da superfície dessa figura, numa certa unidade."A partir daí, explicou-se da seguinte forma: contando a quantidade de quadrados de 1 cm que foram necessários para cobrir toda a região retangular encontramos um número, o qual é chamado de área do retângulo desenhado. O quadrado de 1 cm de lado é chamado de unidade de área. Por definição, a área desse quadrado é 1 cm². Foram necessários 15 quadrados de lado 1 cm para cobrir o retângulo do item 1 dessa atividade, sendo que cada um tem área 1cm². Assim, a área do retângulo é 15cm².

No caso de uma figura plana F qualquer, a área é a medida da porção do plano ocupada por F. Para calcular essa medida, tomamos uma certa unidade de área, a qual é comparada com F, verificando quantas vezes a figura F contém a unidade de área. O número assim obtido é a medida conhecida como área da figura F.

Os alunos tiveram dificuldade para entender que, no paralelogramo, alguns quadradinhos seriam divididos. Muitos alunos, ao serem questionados sobre as conclusões, erraram o nome da figura, confundindo por alguma razão com o paralelepípedo, sendo corrigidos posteriormente. Percebemos, por meio das conclusões, que os alunos conseguiram melhorar a sua redação na hora de chegar à fórmula da área da figura. Muitos alunos confundiram a figura com o retângulo.

A atividade 2 foi resolvida com afinco, visto que todos participaram ativamente, o que reforça a afirmação de (KNIJNIK; BASSO; KLüSENER, 2004) que materiais manipuláveis são grandes fontes de entusiasmo para os alunos.

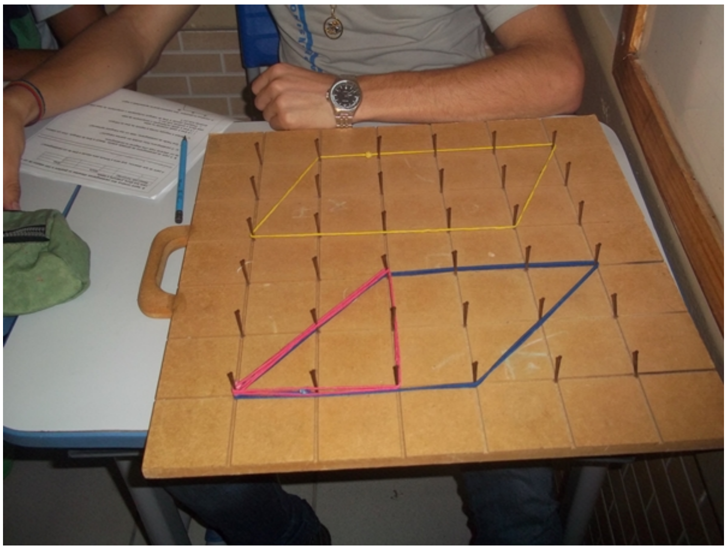


Figura 47 – Alunos em atividades com Geoplano
Fonte: elaboração própria

Essa atividade tem por objetivo principal permitir que o aluno perceba que, dado um paralelogramo qualquer, é sempre possível decompô-lo e recompô-lo de forma a transformá-lo em um paralelogramo retângulo. Consequentemente, pode-se concluir a fórmula do paralelogramo a partir da fórmula do retângulo.

Os sujeitos da pesquisa, ao realizarem essa atividade, demonstraram estar num nível intermediário entre o nível 2 (dedução informal) e o 3 (dedução formal). Isso se justifica pelo fato de grande parte dos participantes da pesquisa terem conseguido chegar

Figura 48 – Alunos em atividades com Geoplano
Fonte: elaboração própria

Figura 49 – Alunos em atividades com Geoplano
Fonte: elaboração própria

à generalização das fórmulas, o que pôde ser considerado um início de dedução formal (nível 3). Porém, é característica do nível 2 os sujeitos da pesquisa ainda não terem um total domínio de linguagem, por exemplo, de modo que os significados das deduções não são compreendidos como um todo.

Sobre a sequência didática, a autora observou que, nas duas primeiras atividades, houve certo entusiasmo pelos alunos acerca do material e da técnica utilizada. No entanto, quando os alunos tinham que apresentar suas resoluções por escrito, esse entusiasmo decaía, ocorrendo, assim, exercícios incompletos e em branco. Apesar de ter ocorrido a não resolução dos exercícios por alguns alunos, a autora considerou a participação dos alunos

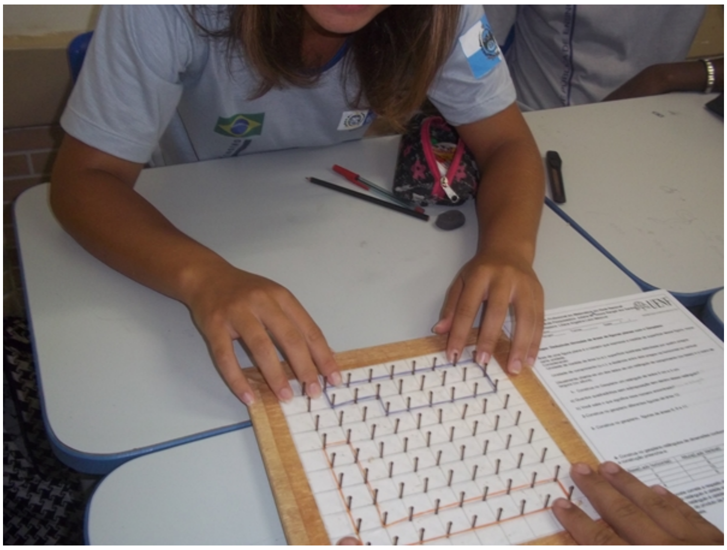


Figura 50 – Figuras construídas pelos participantes, no Geoplano.
Fonte: elaboração própria

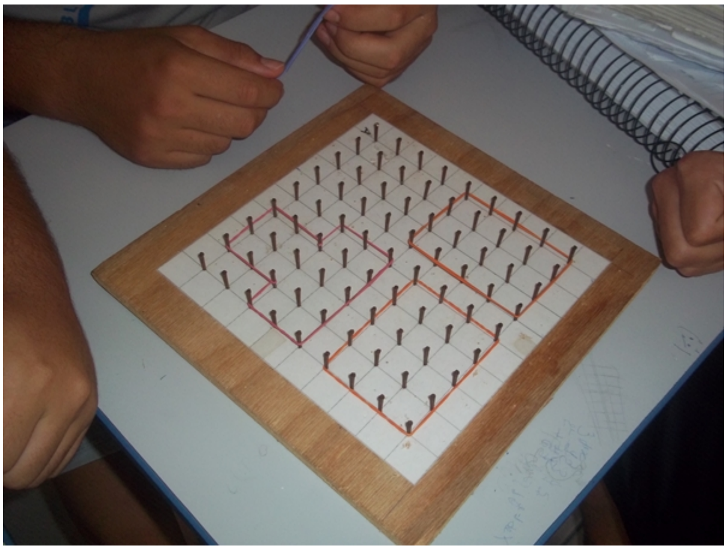


Figura 51 – Figuras construídas pelos participantes, no Geoplano.
Fonte: elaboração própria

significativa.

5.3.3 Atividade 3: calculando áreas dos ambientes da escola

Tempo previsto: 2 horas/aula

Público alvo: 9° ano do Ensino Fundamental

Recursos utlilizados: Fita métrica e cartolina.

Objetivo: esta atividade tem por objetivo principal permitir que o aluno aplique o conceito de área e perceba a sua importância no cotidiano.

Figura 52 – Atividade de dedução da fórmula de área do paralelogramo.
Fonte: elaboração própria

Desenvolvimento: nesta etapa, os alunos foram divididos em grupos ou duplas, cada grupo escolheu um ambiente da escola para calcular sua área com o auxílio da fita métrica,instrumento que a escola o possui em quantidade suficiente para todos os grupos. Pode-se perceber a empolgação dos sujeitos da pesquisa, talvez por se tratar de uma tarefa em que podiam sair da sala e trabalhar em grupo. Nesse momento, houve um pouco de dificuldade para realização dos cálculos, por se tratar, na maioria das vezes, de números decimais. Porém, com a mediação da pesquisadora isso foi resolvido, sem prejudicar a pesquisa.

Após ter calculado a área de alguns ambientes da escola, a pesquisadora fez a correção dos cálculos na lousa e a partir daí, os sujeitos da pesquisa montaram um cartaz com todas as áreas calculadas e um outro cartaz com as fórmulas dos principais polígonos que haviam deduzido anteriormente, fase V de aprendizagem.

5.3.4 Atividade 4: calculando a quantidade de papelão necessária para fabricar embalagens

Tempo previsto: 1 hora/aula

Público alvo: 9ºano do Ensino Fundamental

Recursos utlilizados: embalagens e régua.

Objetivo: calcular a área da superfície de diferentes embalagens.

Desenvolvimento:

Cada dupla recebeu da pesquisadora duas embalagens de formatos diferentes, duas

Figura 53 – Sujeitos da pesquisa em ação

Fonte:elaboração própria

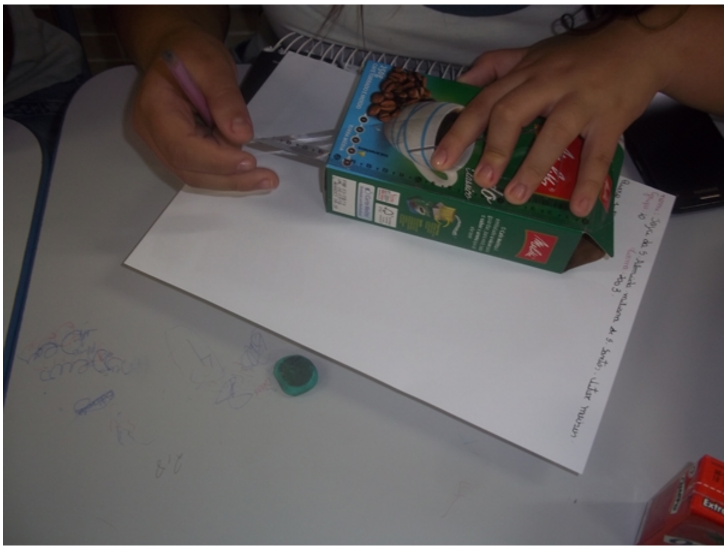
Figura 54 – Exemplos de embalagens

Fonte: elaboração própria

réguas, a folha de atividades (Apêndice D) e papéis para anotações. Os sujeitos da pesquisa deveriam, então, identificar o polígono de cada face, usar a régua para medir as arestas e, com o uso do Geoplano, calcular a área de cada polígono e, posteriormente, a área total da superfície da embalagem. Por considerar imprescindível o contato com as Figuras Espaciais,mesmo que, por uma questão de tempo, esse contato tenha sido pequeno, foi possível observar a empolgação dos sujeitos da pesquisa na realização dessa atividade. Não houve tempo para que os sujeitos da pesquisa chegassem à generalização de fórmulas, como ocorreu nas atividades com Geometria Plana, mas todos conseguiram, pelo menos, chegar à área total pela soma das áreas de cada face. Isso possibilita a inclusão dos sujeitos da pesquisa no nível 2, conforme Quadro2.1, durante a realização dessa atividade, pois novamente pôde ser percebido o uso de propriedades e de deduções simples.

Nessa etapa do processo, utilizando as medidas obtidas com a régua os participantes foram descobrindo a área de cada face. Depois, somando as áreas obtidas, conseguiram descobrir a área da superfície total de cada embalagem.

Figura 55 – Alunos calculando áreas de embalagens



Fonte: elaboração própria

5.3.5 Atividade 5: triângulos com bases congruentes e alturas congruentes.

Tempo previsto:1 hora/aula

Público alvo: 9ºano do Ensino Fundamental

Recursos utlilizados: *Aplet* do geogebratube.

Objetivo: compreender que triângulos com bases congruentes e alturas congruentes possuem a mesma área.

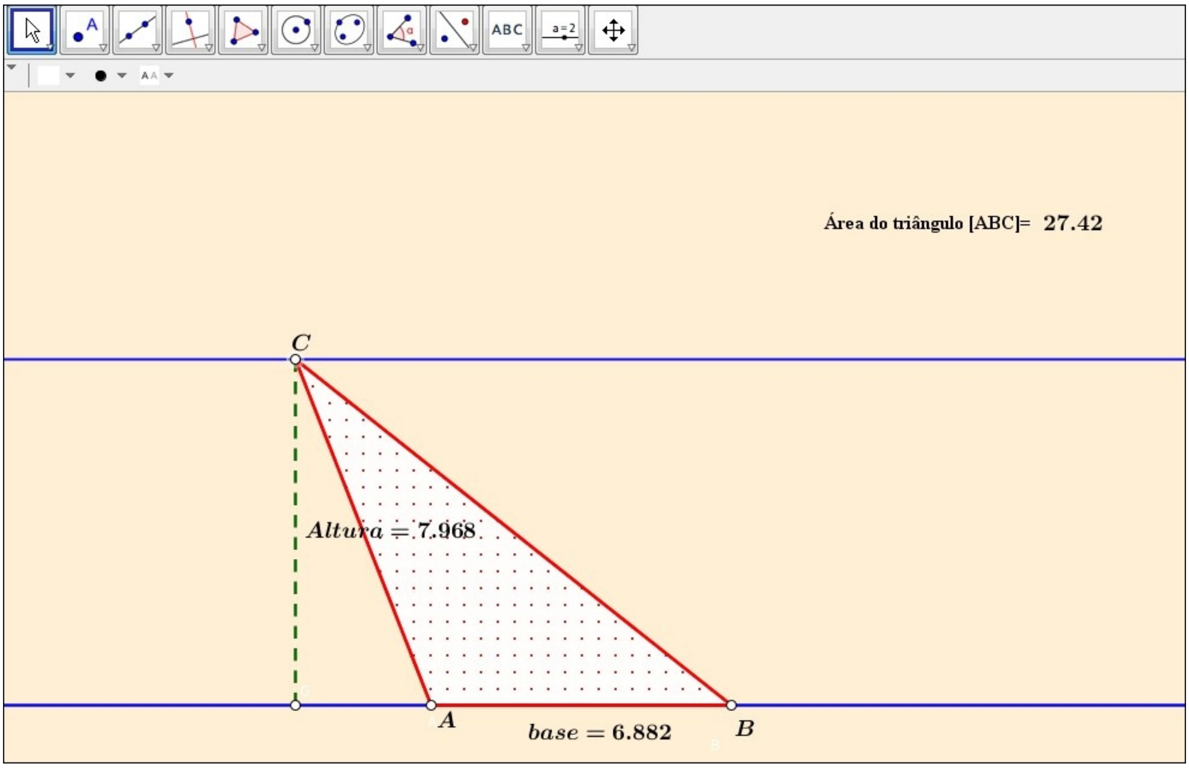
Foi planejado pela autora deste trabalho que essa atividade fosse aplicada no laboratório de informática da instituição,para que os próprios participantes construíssem este Applet[1], porém devido a um problema nos computadores desse laboratório, essa

[1] Applets(applets Java) são programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML ((DEITEL; DEITEL, 2003)). Esses recursos, em geral,visam a adicionar interatividade a aplicações Web.

parte da aula foi realizada em uma sala de multimídia. O applet, já pronto, foi apresentado por meio de um projetor de multimídia, e as atividades foram resolvidas com o auxílio da pesquisadora. Considera-se que, mesmo com esse empecilho, o objetivo da atividade foi alcançado, pois os alunos compreenderam o Teorema. Pois,

"o uso de applets permite experimentações e investigações, o que possibilita o estabelecimento de conjecturas sobre determinado conceito e a construção do mesmo, de forma consistente".(SANTOS, 2008)apud (BARCELOS et al., 2009)

Figura 56 – Applet sobre área de triângulos com bases congruentes e alturas congruentes



Fonte: o applet em questão, pode ser encontrado no link:https://tube.geogebra.org/material/show/id/161838

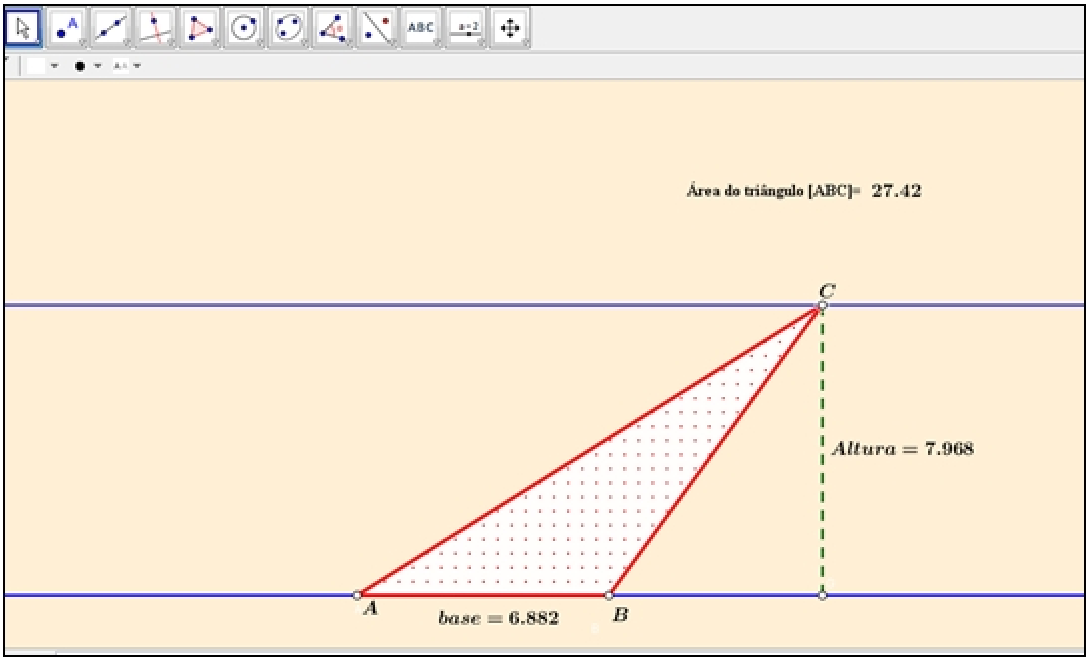
5.3.6 Aplicação e análise dos pós-testes sobre áreas

Objetivo: investigar o conhecimento específico sobre Áreas de Figuras Planas e Espaciais, através da aplicação de um pós-teste elaborado pela pesquisadora (apêndice A).

Desenvolvimento:

Para que fosse possível aplicar um pós-teste para os participantes da pesquisa e para que estes o fizessem com atenção, após a autorização da direção da escola, o teste foi aplicado como avaliação do 4^o bimestre, uma vez que áreas faz parte do currículo mínimo do 9^o ano do Ensino Fundamental da rede estadual. Então, o teste foi realizado individualmente com cada participante.

Figura 57 – Aplet sobre área de triângulos com mesma base e altura



Fonte: o applet em questão pode ser encontrado no link:https://tube.geogebra.org/material/show/id/161838

Além do desempenho nas resoluções dos testes, também foram analisados os seguintes fatores, que foram considerados relevantes pela pesquisadora: a participação efetiva do sujeito em cada atividade proposta e a linguagem utilizada nas respostas escritas e nas argumentações orais. Também foram analisadas algumas habilidades, tais como habilidades visuais, verbais, de desenho, lógicas e aplicadas que permitiram concluir se o sujeito teve avanço ou não. É muito importante ressaltar que não seria possível observar o desenvolvimento dessas habilidades apenas nas respostas dos dois testes.

A observação constante da pesquisadora durante a execução das atividades foi imprescindível para que isso pudesse ser percebido e avaliado como critério de avanço de nível de pensamento geométrico. Quando possível, isto é, quando o tempo demandado para orientação aos alunos permitiu, as anotações foram feitas no caderno de campo durante a realização das atividades, caso contrário, eram registradas ao final de cada Encontro.

Tabela 2 – Índice de acertos no pré e pós-teste sobre áreas.

Questões	Pré-teste	Pós-teste
1	27,7%	77,7%
2	36,1%	52,7%
3	47,2%	88,9%
4	0%	63,9%
5	38,9%	80,5%
6	25 %	33,3%
7	0 %	44,4%
8	5,6%	25%
9	52,8%	83,4%
10	58,4%	94,4%
11	19,4 %	44,4%
12	8,3 %	19,4%
13	11,1%	47,2 %

Fonte: dados da pesquisa

De acordo com todos esses critérios de avaliação e os dados da tabela 2, podemos concluir que os sujeitos analisados demonstraram, no pós-teste, progresso em relação ao pré-teste específico de áreas, que foi o segundo teste aplicado. É muito importante lembrar que, mesmo entre os participantes cujo resultado foi insatisfatório, ocorreram avanços em alguns itens do teste e, também, na linguagem geométrica que esses participantes passaram a utilizar.

Considerações Finais

A elaboração e aplicação das atividades propostas neste trabalho são uma tentativa de melhorar o cenário do ensino-aprendizagem de Geometria, em especial o estudo de áreas.

O principal objetivo foi alcançado, que era tornar significativo o aprendizado sobre áreas, propiciando um aluno participativo na construção de conceitos, utilizando-se de linguagem adequada, software e materiais concretos. Todas as atividades elaboradas respeitaram uma ordem.

No estudo de caso realizado nas turmas do Ensino Fundamental, pôde-se perceber o bom desempenho dos alunos na resolução das atividades. Mesmo com as dificuldades que alguns tiveram com o geoplano e com o Poly, os participantes permaneceram persistentes, apresentando determinação e real desejo de aprender. Pôde-se perceber a motivação e a curiosidade durante todo o tempo de aula, além de uma forte integração de todo o grupo.

As discussões surgidas e o comportamento dos educandos demonstraram que o uso de técnicas que utilizam as TIC e materiais manipuláveis como instrumento pedagógico é bem sucedido no que tange ao ensino de Geometria, pois proporciona trocas de experiências enriquecedoras. Sendo assim, pode-se responder à questão de pesquisa proposta de modo afirmativo, ou seja, pode-se afirmar que, por meio das atividades propostas,com a utilização do modelo Van Hiele para desenvolvimento do pensamento geométrico, os alunos puderam explorar propriedades geométricas, contribuindo significativamente para o processo de ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos pertinentes ao conteúdo de áreas de polígonos e poliedros.

O trabalho colaborativo proporcionou momentos de trocas de experiências entre os envolvidos, podendo assim ser corroborado que o modelo Van Hiele é um método de trabalho capaz de envolver alunos em sua própria aprendizagem, bem como no trabalho em grupo. Assim sendo, atividades com materiais manipuláveis e software favorecem o aumento do conhecimento sobre os elementos geométricos, além de estimular a participação, a criatividade e a motivação, tornando as aulas mais prazerosas e produtivas.

Vale salientar que as conclusões aqui apresentadas, não são únicas e nem definitivas, como é característico em pesquisa qualitativa. A proposta apresentada nessa pesquisa pode ser considerada uma oportunidade de testar novos modos de ensinar e aprender. O surgimento de novas possibilidades pode auxiliar na resolução de problemas matemáticos e possibilitar uma melhor aprendizagem, voltada para a autonomia.

Essa proposta utilizou como recurso pedagógico, o geoplano para construção do conceito de área e dedução das fórmulas que favoreceu a visualização de propriedades. No entanto, propõe-se o uso de outros recursos, tais como, o uso de geoplanos online, outros applets e jogos matemáticos para a exploração destas propriedades. Vale ressaltar que o Brasil possui realidades muito distintas. Assim, a sugestão de outros materiais é pertinente no que tange à oferta desse trabalho, mesmo que adaptado às diversas situações.

Espera-se que este trabalho possa sinalizar para a importância de novas abordagens na aquisição de conceitos matemáticos. Em particular, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de áreas. Nesse caso, utilizando a Teoria de Van Hiele.

Referências

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências didaticopedagógicas no Ensino de Geometria: Um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista. Recife, PE*, v. 11, n. 17, p. 61–70, 2004. Citado na página 34.

ARAUJO, W. R. de. *O Ensino do conceito de área no sexto ano do ensino fundamental: uma proposta did*
'atica fundamentada na teoria de Van Hiele. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2012. Citado na página 34.

ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 45, 2001. Citado na página 26.

ÁVILA, G. Reflexões sobre o Ensino de Geometria. *Revista do Professor de Matemática*, n. 71, p. 3–8, 2010. Citado na página 26.

BARCELOS, G. T. et al. Applets em ambientes de geometria dinâmica:: Ações para a formação de professores de matemática. *CINTED-UFRGS*, v. 7, n. 3, dezembro 2009. Citado na página 82.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, SP: Edgard Blucher LTDA, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 2, p. 273–289, 2011. Citado na página 35.

BRAGA, M.; PAULA, R. M. O ensino de matemática mediado pelas tecnologias de informação e comunicação uma caracterização do elemento visualização segundo uma concepção fenomenológica. *Revista Tecnologias na Educação*, n. 1, Julho 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

BRASIL, M. da Educação do. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF: MEC/SE, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 30.

CALABRIA, A. R. A geometria fora da Grécia. *Revista do Professor de Matemática*, n. 81, p. 5–9, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 25.

CHIELE, J. N. *A Geometria no Ensino Médio: Um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Luterana do Brasil, 2007. Citado na página 20.

COSTA, D. E.; PEREIRA, M. J.; MAFRA, J. R. e S. Geoplano no ensino de Matemática: Alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *AMAZÔNIA - Revista de Educaçao em Ciências e Matemáticas*, v. 7, n. 14, dez-jan 2011. Citado na página 29.

CROWLEY, M. L. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo, SP: Atual, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 34, 35, 36, 37, 38 e 57.

DAMBRóSIO, U. *Educação Matemática da teoria à prática*. 16. ed. SP: Papirus, 2008. Citado na página 39.

DEITEL, P.; DEITEL, H. *Java, como programar*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003. Traduçao de Carlos Arthur Lang Lisboa. Citado na página 81.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 42, 45, 50, 51, 52 e 53.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 26.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 57.

GODOY, A. S. Introdução a pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57–63, Abril 1995. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONCALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Caderno Cedes*, v. 28, n. 74, p. 39–56, jan./abr. 2008. Citado na página 27.

HIELE, P. M. van. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Nova York: Academic Press, 1986. Citado na página 35.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria: El modelo de van Hiele*. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 39 e 40.

JúNIOR, G. L. *Geometria Dinâmica com o Geogebra no ensino de algumas funções.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2013. Citado na página 32.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. *Educação Matemática em Revista*, n. 2, p. 19–25, 1994. Citado na página 27.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. *Bolema*, v. 10, p. 21–30, 1994. Citado na página 34.

KNIJNIK, G.; BASSO, M. V. de A.; KLüSENER, R. *Aprendendo e ensinando matemática com geoplano*. RS: UNIJUI, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 76.

LIMA, E. L. *Medida e forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, E. W. A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado na página 53.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Geometria II: métrica plana.* Rio de Janeiro: F.C. Araújo da Silva., 2002. Citado na página 42.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, v. 9, n. 9-10, p. 1–6, 2005. Citado na página 28.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. *A Geometria nas séries iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.* São Carlos, SP: USFCar, 2003. Citado na página 30.

NASSER, L.; LOPES, M. L. M. L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 22, 28, 29 e 35.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997. Citado 13 vezes nas páginas 19, 31, 34, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68 e 74.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matematica Elementar: geometria euclidiana plana*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 26, 41 e 48.

NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. *Manual da Metodologia da Pesquisa Científica*. Rio de Janeiro, RJ: ESAO, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 57.

OLIVEIRA, G. P. de. Estratégias didáticas em educação matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. *IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.

OLIVEIRA, M. de Castro e. *Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir dos estudos dos sólidos geométricos*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

PAIS, L. C. *Ensinar e Aprender Matemática*. 1. ed. São Paulo: Autêntica, 2006. Citado na página 28.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 33.

RABAIOLLI, L. L.; STROHSCHOEN, A. A. G. A formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental e o ensino da geometria. *Revemat*, v. 8, n. Edicao Especial, p. 63–78, Dezembro 2013. Florianopolis (SC). Citado na página 27.

SAMPAIO, F. F.; ALVES, G. de S. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, n. 5, p. 69–76, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 39.

SANTOS, L. M. S. dos. *Calculo de área na vida e na escola: Possíveis diferenças conceituais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, 2010. Citado na página 24.

SANTOS, S. C. *A Produção Matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2006. Citado na página 32.

SANTOS, V. C. P. ao. *Mathlets: Possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. Citado na página 82.

SOARES, F. S. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanco ou retrocesso.* Dissertação (Mestrado) — PUCRJ, 2001. Citado na página 26.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. *Educacao Matemática Pesquisa*, v. 12, n. 3, p. 400–431, 2010. Citado na página 35.

YIN, R. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. Citado na página 58.

Apêndices

APÊNDICE A

Pré-testes e pós-testes sobre áreas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:_________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

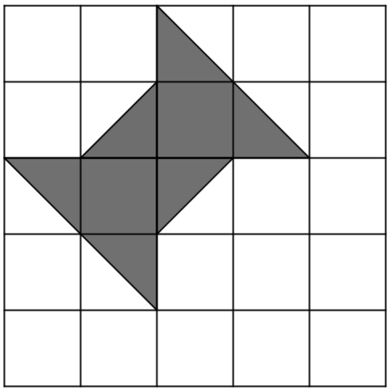
PRÉ- TESTE E PÓS-TESTE SOBRE ÁREAS

1) Para você, o que é área de uma figura?

____

____

2) A figura mostra um quadrado dividido em 25 quadradinhos iguais. A área sombreada corresponde a que fração do quadrado?



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{6}$

3) Identifique a figura que possui a mesma área da figura dada:

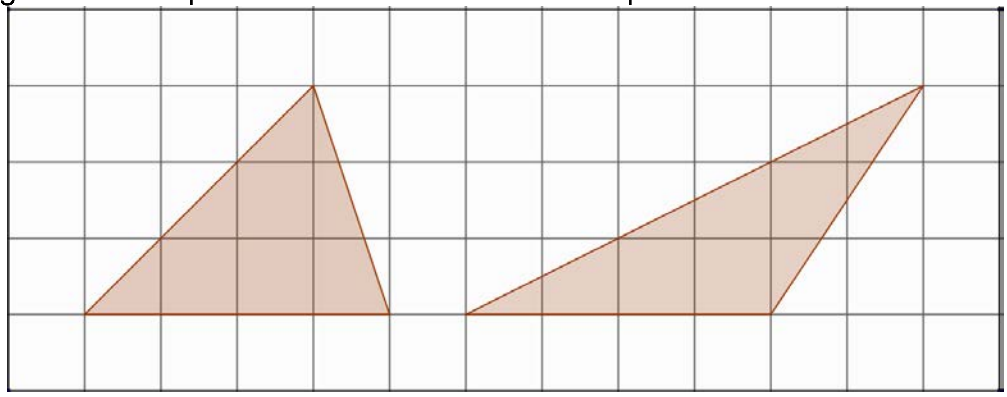
a)

b)

c)

d)

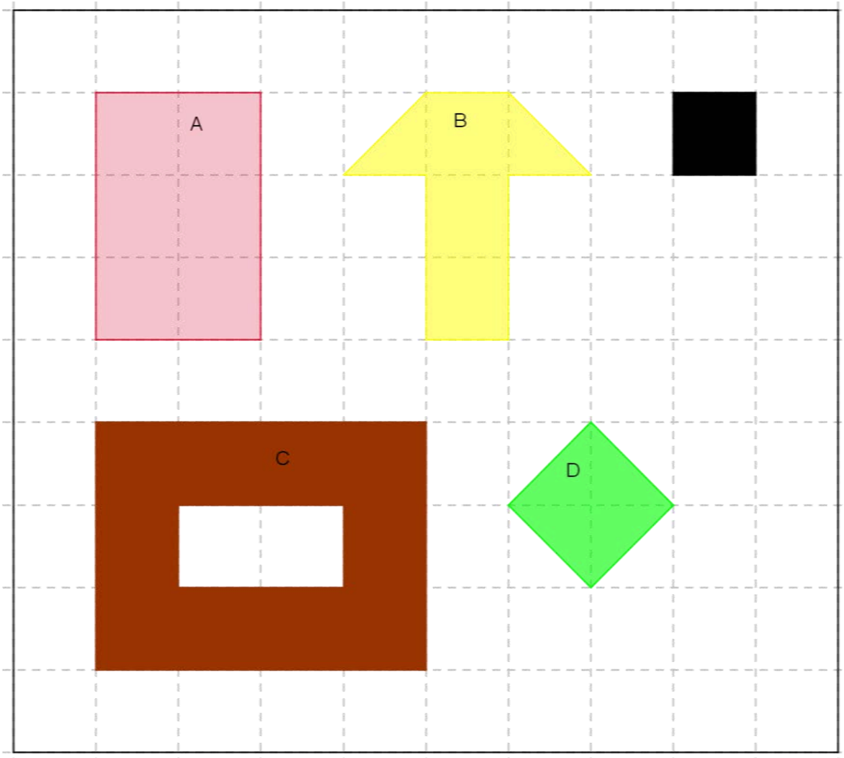
4) Os triângulos abaixo possuem a mesma área? Por quê?



____

____

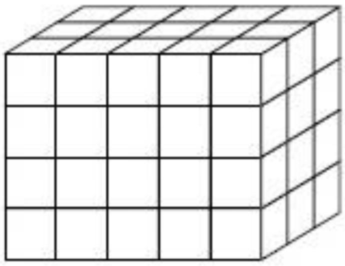
5) Considerando o quadradinho menor como unidade de área,calcule a área das figuras abaixo:



Polígono	Área
A	
B	
C	
D	

6) Marque V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas:
A)( )Todo quadrado é um retângulo.
B ( )Todo quadrado é um losango.
C)( )Todo paralelogramo é um retângulo.
D)( )Todo triângulo equilátero é isósceles.

7)Um paralelepípedo é formado por vários cubos empilhados, conforme a figura abaixo.



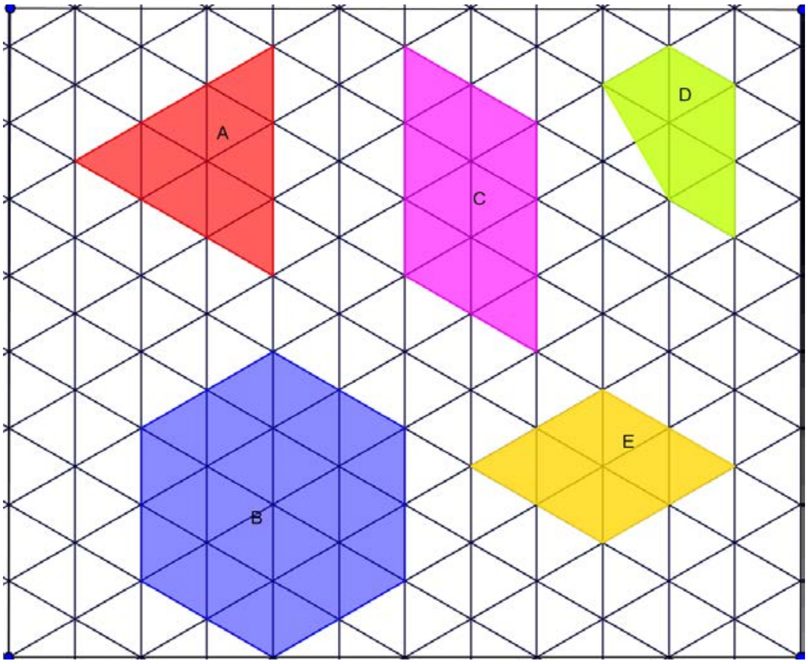
Responda:

a) Se pintarmos de vermelho esse paralelepípedo, quantas faces dos cubos serão pintadas?

b) Se cada cubinho tem uma aresta medindo 1 cm, qual a área da superfície pintada de vermelho?

8) Uma caixa de sapatos tem a forma de um paralelepípedo retângulo e dimensões iguais a 15cm, 17 cm e 12 cm. Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para se construir essa caixa? Admita que se utilize 10% a mais de material para que seja possível fazer colagens e dobraduras necessárias à confecção da caixa.

9) Observe o desenho de alguns polígonos na malha triangular. Usando o triângulo menor como unidade de área, complete a tabela:



Polígono	Nome	Área
A		
B		
C		
D		
E		

10) Agrupe as figuras abaixo em PLANAS ou ESPACIAIS

CUBO – PENTÁGONO – PRISMA – PIRÂMIDE – QUADRADO – RETÂNGULO – PARALELEPÍPEDO - TRIÂNGULO	
PLANAS	ESPACIAIS

11) Uma caixa em formato retangular tem dimensões, 8 cm , 10 cm e 5 cm, calcule a área total dessa caixa.

(A) 170
(B) 300
(C) 340
(D) 360

12) Numa cozinha de 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2,90 m de altura, as portas e janelas ocupam uma área de 3 m^2. Para azulejar as paredes, o pedreiro aconselha a comprar de 10% a mais de metragem a ladrilhar. Calcule a metragem de ladrilhos que se deve comprar.

13)Um arquiteto tem dois projetos para construção de uma piscina retangular com 2 m de profundidade:
Projeto 1: dimensões do retângulo: 15 m x 25m
Projeto 2: dimensões do retângulo: 10m x 30m.
Qual dos dois projetos fica mais economicamente viável para o proprietário da piscina?

APÊNDICE B

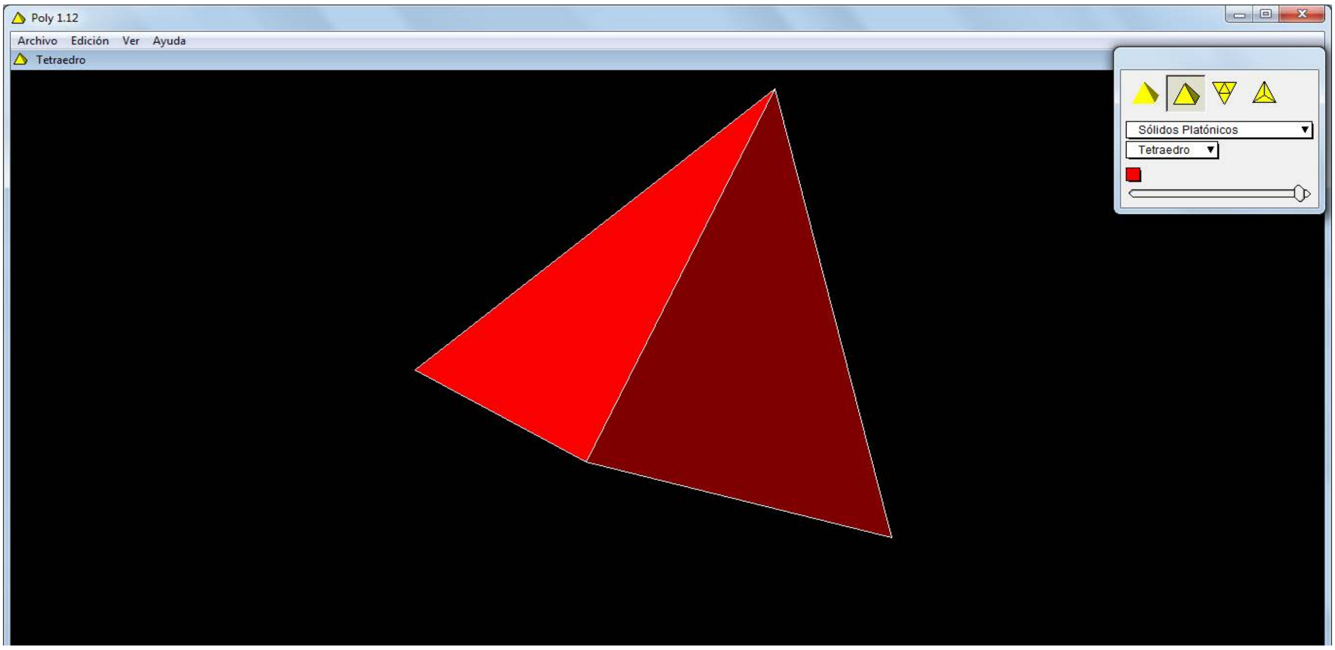
Estudo dos poliedros com auxílio do software Poly

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:___________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

Estudo dos poliedros com auxílio do software Poly

1. Explore livremente o software Poly.

2. Clique no botão que permite visualizar **Sólidos Platônicos.** Na tela já aparecerá um **tetraedro** (tetraedro regular). Com o botão direito (ou esquerdo) do mouse pressionado, movimente o sólido e:



a)Determine:
Número de faces(F)____
Polígono das faces____

b) Planifique o sólido utilizando os recursos do software, e confira suas respostas.

c) Dê um exemplo de algum objeto do espaço físico em que vivemos, no qual tenha o formato de um tetraedro.
____

3. Repita a atividade 2 para :
3.1- Cubo:
a)Determine:
número de faces (F)____
polígono das faces____

b) Planifique o sólido utilizando os recursos do software, e confira suas respostas.

c) Dê um exemplo de algum objeto do espaço físico em que vivemos, no qual tenha o formato de um cubo.____

3.2 Octaedro:
a) Determine:
número de faces (F)____
polígono das faces____

b) Planifique o sólido utilizando os recursos do software, e confira suas respostas.

c) Dê um exemplo de algum objeto do espaço físico em que vivemos, no qual tenha o formato de um octaedro.____

4- Clique em **Prismas e Antiprismas**.
4.1-Na tela aparecerá um **prisma triangular**. Observe o sólido e determine:

Número de faces	Polígono da face

4.2- Selecione **prisma hexagonal**.
a)Observe o sólido e determine:

Número de faces	Polígono da face

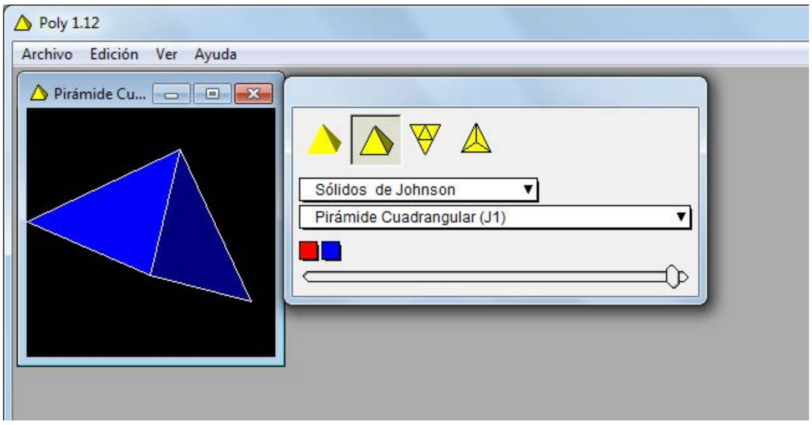
b)Planifique o sólido utilizando os recursos do software, e confira suas respostas.

c) Dê um exemplo de algum objeto do espaço físico em que vivemos, no qual tenha o formato de um prisma hexagonal.____

5. Clique em **Sólidos de Arquimedes.** Na tela aparecerá um **tetraedro truncado**. Determine:

Número de faces	Polígono da face

6. Clique em **Sólidos de Jhonson**, na tela aparecerá uma **pirâmide quadrangular**. Observe o sólido e determine:



Número de faces	Polígono da face

7- A partir das relações estabelecidas anteriormente, identifique o poliedro que possui:
2 faces hexagonais e 6 retangulares ____________________________________
1 face quadrangular e 4 faces triangulares______________________________
2 faces triangulares e 3 retangulares____________________________________

APÊNDICE C

Deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:_________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

Deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano

Área de uma figura plana é o número que expressa a medida de superfície dessa figura, numa certa unidade.
Considerando:
-Unidade de medida de área (u.a.): superfície quadrada delimitada por quatro pregos.

-Unidade de comprimento (u.c.): a distância entre dois pregos na horizontal ou vertical.

Usualmente chama-se um dos lados de um retângulo de comprimento (ou base) e o outro de largura (ou altura).

1-Construa no Geoplano um retângulo de lados 5 cm e 3 cm.

a) Quantos quadradinhos sem sobreposição têm dentro desse retângulo?

b) Você sabe o que significa esse número encontrado?

2-Construa no geoplano, diferentes figuras de área 12.

3- Construa no geoplano, figuras de áreas 6, 8 e 11.

4- Construa no geoplano retângulos de dimensões conforme a tabela. Após a construção preencha-a:

Base(Lado horizontal)	Altura(Lado Vertical)	Área
7	3	
5	8	
2	10	
4	6	

Marque a resposta correta a respeito da área do retângulo:
a) ( ) A área do retângulo é obtida somando os lados.
b) ( ) A área do retângulo é obtida multiplicando o comprimento da base pela medida da altura.
c) ( ) Os valores do produto da base pela altura na tabela não são os mesmos que os da área mostrados na tabela.

5- Agora construa dois paralelogramos diferentes no geoplano e com elástico de cor diferente, trace sua altura, preencha a tabela.

Base(Lado horizontal)	Altura	Área

A partir do que observou, qual seria a fórmula para calcular a área de um paralelogramo?

____

____

6- A partir do paralelogramo da atividade anterior, deduzir a área do triângulo. Com um elástico de cor diferente trace uma diagonal no paralelogramo.

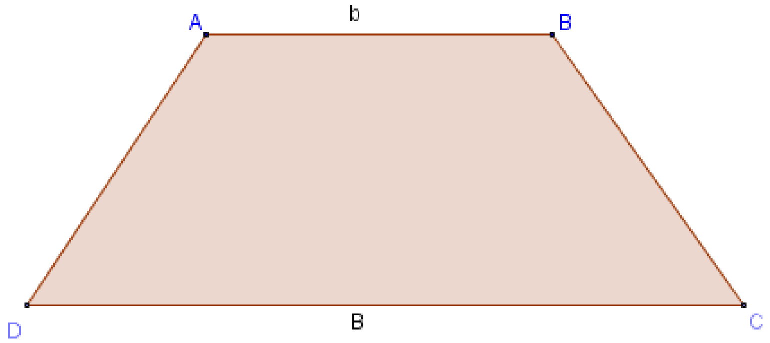
a) O paralelogramo ficou dividido em quantos triângulos?

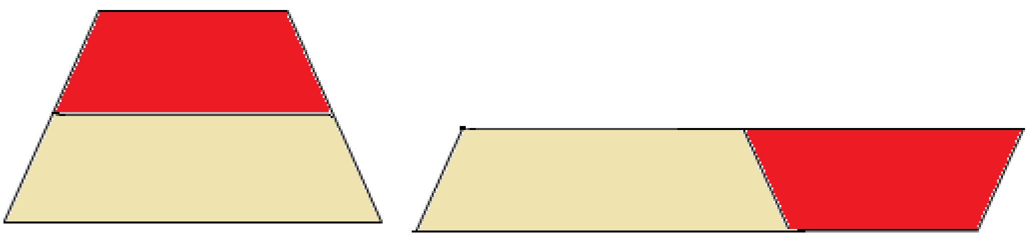
b) Que fração do paralelogramo, cada um dos triângulos representa?

c) Marque a resposta correta a respeito da área do triângulo.

( ) A área é obtida somando os lados.
( ) A área é obtida multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por 2.
( )Podemos calcular a área do triângulo multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por 3.

7- Construa no geoplano, dois trapézios como o apresentado a seguir:





a) Com os dois trapézios, monte um polígono que você já sabe calcular a área. Que polígono você formou?

b) Marque a resposta correta a respeito da área do trapézio.

( ) A área é obtida somando as medidas das bases.
( ) A área é obtida multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por 2.
( ) A área é obtida multiplicando a soma das bases pela altura e dividindo o resultado por 2.

APÊNDICE D

Calculando a quantidade de papelão necessária para produção de embalagens

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:_________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

CALCULANDO A QUANTIDADE DE PAPELÃO NECESSÁRIA PARA PRODUÇÃO DE EMBALAGENS

1) Observe cada embalagem recebida:

2) Identifique o polígono de cada face da embalagem:

3) Com a régua, meça cada aresta da embalagem e registre:

4) Calcule a área de cada um dos polígonos:

5) Encontre a área total da superfície da embalagem:

APÊNDICE E

Calculando a área dos ambientes da escola

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:_________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

CALCULANDO ÁREAS DOS AMBIENTES DA ESCOLA

A diretora da nossa escola pretende trocar o piso de todas as salas, mas para isso precisa saber quantos metros quadrados aproximadamente de ladrilho é necessário comprar, vamos ajudá-la?

Utilizando o que você aprendeu sobre áreas, reúna-se com o seu grupo, com o auxílio da fita métrica e lápis, escolha um ambiente da escola e mãos à obra.

Registre aqui, o ambiente escolhido e sua área:

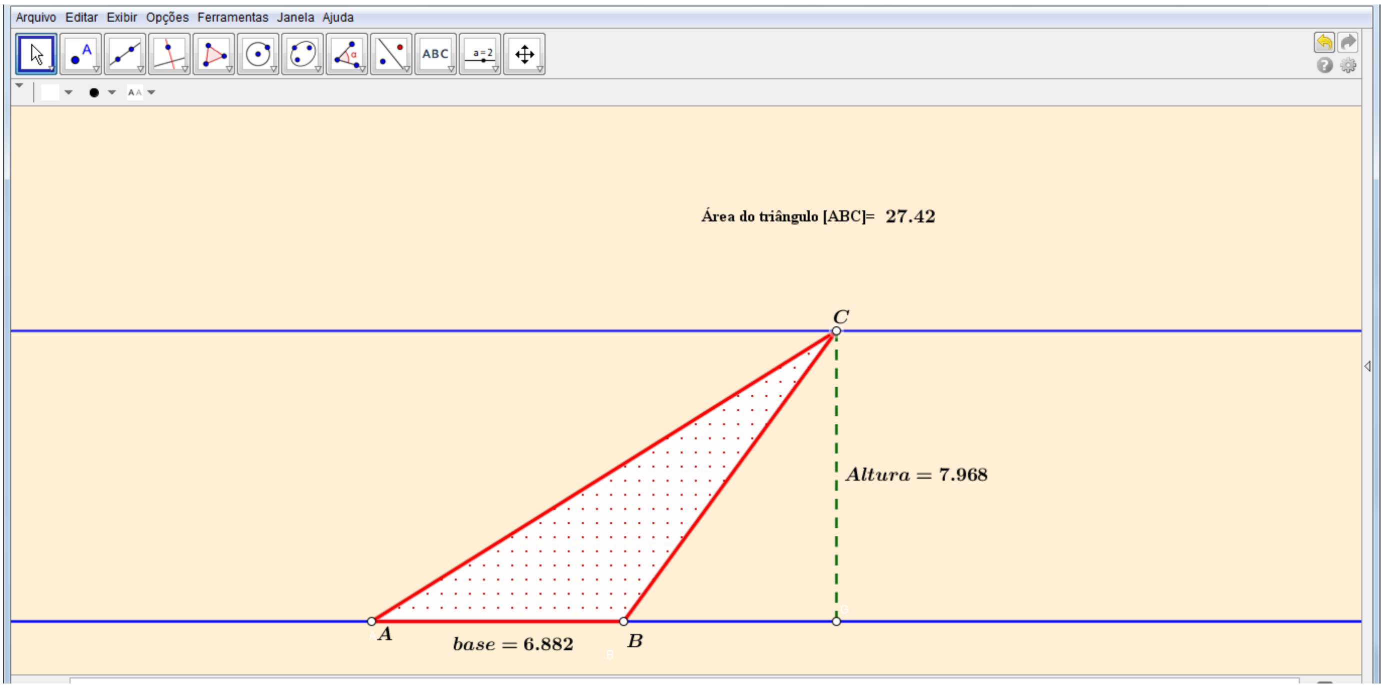
APÊNDICE F

Triângulos com bases congruentes e alturas congruentes.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Juliana Mª Souza Rangel dos Santos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:_________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

TRIÂNGULOS DE MESMA BASE E MESMA ALTURA

1) Observe com atenção a animação deste triângulo com o auxílio do aplet, para responder às próximas questões:



2) Mantendo-se a medida da base, e deslocando o ponto C sob a reta paralela à reta AB, o formato do triângulo permaneceu ou modificou? A área modificou-se?

3) O que podemos concluir em à área de triângulos que possuem a mesma base e altura?

Anexos

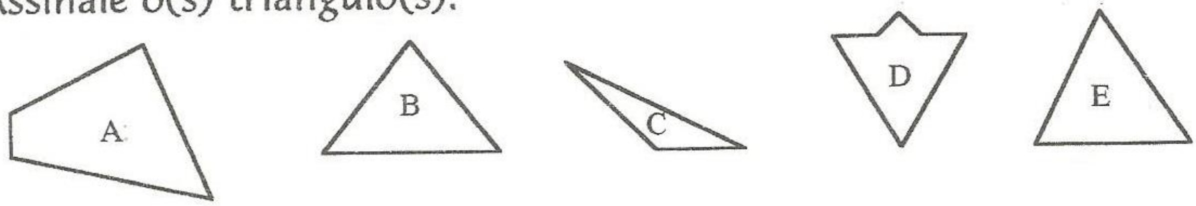
ANEXO A

Testes de Van Hiele

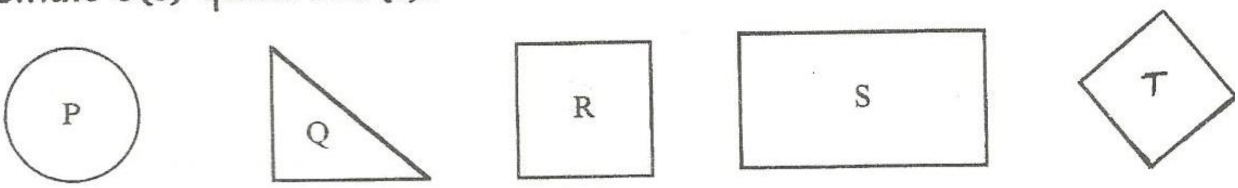
TESTE DE VAN HIELE

Nome: .... Turma:......... Idade: ....

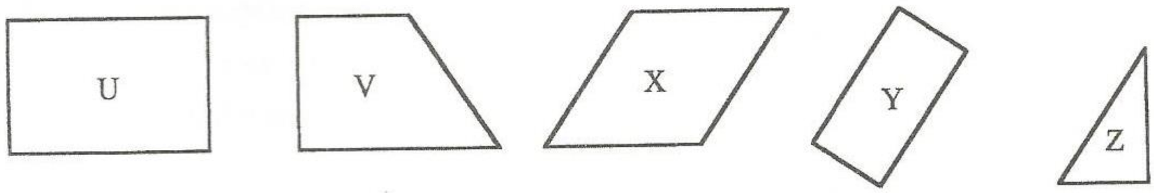
1- Assinale o(s) triângulo(s):



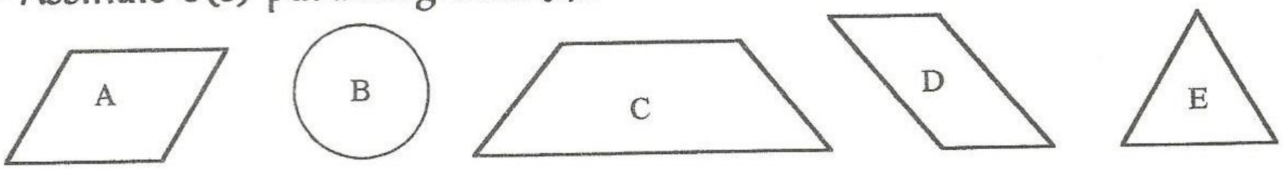
2- Assinale o(s) quadrado(s):



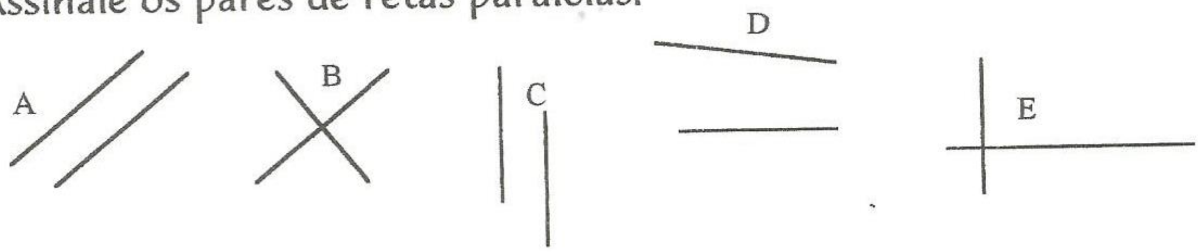
3- Assinale o(s) retângulo(s):



4- Assinale o(s) paralelogramo(s):



5- Assinale os pares de retas paralelas:

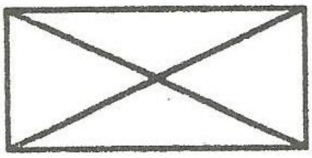


Básico:	S N

Nome: .... Turma: .... Idade:.........

6- No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

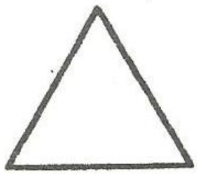


7- Dê 3 propriedades dos quadrados:

1-...
2- ....
3- ....

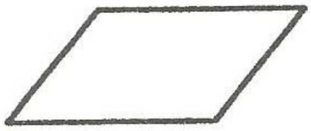
8- Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 90°.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



9-Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1-...
2-...
3-...



10-Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	S N

Nome:... Turma:................ Idade:............

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:

12- Os quatro ângulos A,B,C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

(a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ....

(b) Por que?..

(c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

13- Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?
.... Por que? ....

14- Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.

(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.

(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.

(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.

(d) I e II não podem ser ambas falsas.

(e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15- Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;

(a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

(b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.

(c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

(d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados

(e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

	S
Nível 2:	
	N