ISABELA RAMOS DA SILVA DE SOUSA

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2016

ISABELA RAMOS DA SILVA DE SOUSA

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **24/2017**

Sousa, Isabela Ramos da Silva de
Relação entre função exponencial e progressão geométrica / Isabela Ramos da Silva de Sousa. – Campos dos Goytacazes, 2016.
73 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.
Orientador: Rigoberto Gregório Sanabria Castro.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 65-67.
1. FUNÇÕES (MATEMÁTICA) 2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS 3. SEQUÊNCIAS 4. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 515.7

ISABELA RAMOS DA SILVA DE SOUSA

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 24 de Novembro de 2016.

Prof^{a}. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFFluminense
Campos - Centro

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof^{a}. Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e a minha família que incentivaram, apoiaram e compreenderam os momentos de ausência.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre me conceder sabedoria nas escolhas dos melhores caminhos, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção para me amparar.

Aos meus pais Rubens e Rosangela e meu irmão Felipe que me ensinaram o carinho, o respeito e a admiração. Que sempre me incentivaram a estudar. Referências em minha formação.

Ao meu marido Jonathan pelo amor, apoio, confiança e motivação incondicional, que sempre me impulsionam em direção às vitórias dos meus desafios.

Ao meu orientador Rigoberto Sanabria pela competência, dedicação, apoio e inúmeros ensinamentos. Agradeço não só por cada detalhe que me orientou neste trabalho, mas também pelas aulas ministradas.

Aos professores pelos ensinamentos e colaboração.

Aos meus colegas de Mestrado, pelos momentos maravilhosos que pudemos compartilhar e pela força nas situações difíceis, principalmente durante a preparação para o ENQ onde com os grupos de estudos pudemos cultivar nossas amizades.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste curso.

"Determinação
Coragem
Autoconfiança
São valores decisivos para o sucesso.
Se estamos possuídos
Por uma inabalável determinação
Conseguiremos superá-los.
Independentemente das circunstâncias,
Devemos ser humildes,
Recatados e
Despidos de Orgulho. "

(Dalai Lama)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica e a importância de se trabalhar de forma integrada esses dois conceitos. Esse trabalho justifica-se pelo fato de que essa relação, no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, é esquecida e não é apresentada aos alunos na sua vida escolar. Foram apresentados os aspectos metodológicos e a pesquisa qualitativa que foi utilizada, assim como a sequência didática aplicada. Para alcançar o nosso objetivo foi aplicada a sequência didática com os alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso - RJ, onde foi realizada uma atividade de revisão sobre Função Exponencial e Progressão Geométrica, trabalhando os dois conteúdos separadamente. Posteriormente foi trabalhada uma atividade em que os alunos conseguiram estabelecer a relação entre os dois conteúdos e puderam resolver as questões da forma que eles achassem mais conveniente. Nessa última atividade temos exemplos de situações nas quais uma Progressão Geométrica pode ser trabalhada como Função Exponencial e vice versa. Os dados coletados foram analisados e os resultados constataram que a utilização da relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica pode, realmente, contribuir para um avanço significativo no rendimento dos alunos.

Palavras-chaves: Funções, Função Exponencial, Sequências, Progressão Geométrica.

Abstract

This work aims to show the relationship between Exponential Function and Geometric Progression and the importance of working in an integrated way of these two concepts. This work is justified by the fact that this relationship, in the Minimum Curriculum of the State of Rio de Janeiro, is forgotten and is not presented to students in their school life. We presented the methodological aspects and the qualitative research that was used, as well as the didactic sequence applied. In order to achieve our objective, we applied the didactic sequence with the students of the 3rd year of High School of the Colónio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso - RJ, where a review activity on Exponential Function and Geometric Progression was carried out„ working the Two contents separately. Subsequently an activity was worked out in which students were able to establish the relationship between the two contents and were able to solve the questions in the way that they found most convenient. In this last activity we have examples of situations in which a Geometric Progression can be worked as an Exponential Function and vice versa. The data collected were analyzed and the results showed that the use of the relation between Exponential Function and Geometric Progression can really contribute to a significant improvement in students' performance.

Key-words: Functions, Exponential Function, Sequence, Geometric Progression.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

SEEDUC	Secretária de Estado de Educação do Rio de Janeiro

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos Números Reais positivos.
$>$	maior
$<$	menor
$\in$	Pertence
$\neq$	diferente
$\forall$	Para todo

Sumário

Introdução

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática sofreu mudanças significativas ao longo das últimas décadas. Segundo Silva (2005) no seu artigo, o ensino da Matemática passou por diversas mudanças significativas. Nas décadas de 40 e 50 do século passado o ensino da matemática se caracterizava pelo mecanização e memorização, nos anos 60 tivemos o reflexo da Matemática Moderna, na década de 70 foi evidenciado o abstrato e o formal. Nos anos 80 buscou-se a valorização da aprendizagem matemática e na década de 90; quando se verificou que não era nas tarefas de cálculo que os alunos tinham os piores resultados, mas sim nas tarefas de ordem mais complexa, que exigiam algum raciocínio, o uso da linguagem algébrica, a flexibilidade e espírito crítico.

Porém, apesar dessas mudanças, a Matemática continua tendo um forte desinteresse por parte dos alunos e em consequência disso se torna responsável pelos altos índices de retenção dos alunos na educação básica.

É fato que, apesar de algumas mudanças já ocorridas, a Matemática continua sendo considerada a grande vilã da vida escolar dos alunos, responsável pelos altos índices de retenção. Essa situação vem trazendo resultados visíveis, como aponta o relatório PISA: Programme for International Student Assessment – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (BRASIL, 2013), que coloca o Brasil em uma das últimas posições entre os países avaliados quanto ao aprendizado de Matemática.

Além do Pisa (BRASIL, 2013), temos os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (BRASIL, 2011), onde constata que apenas 10,3% dos jovens brasileiros terminam o terceiro ano do Ensino Médio com um conhecimento satisfatório em Matemática.

Os resultados encontrados mostra que é necessário repensar o processo de aprendizagem e ensino da matemática, e a forma, muitas vezes empobrecida, com que a Matemática é apresentada nos livros didáticos.

De acordo com os Parâmetros Nacionais Curriculares (BRASIL, 2002), "a Matemática no ensino médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência com suas características estruturais específicas".

> É importante que o aluno perceba que as definições, as demonstrações e

> os encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2002, p.40)

Os Parâmetros Nacionais Curriculares (BRASIL, 2002) recomendam a contextualização, interdisciplinaridade e competências do conhecimento escolar, reconhecendo que a partir destas habilidades podem ocorrer aprendizagem significativas, resultante da mobilização cognitiva do educando, envolvendo-o em suas dimensões de vida pessoal, social e cultural, o que o leva a requisitar competências cognitivas já adquiridas.

No que diz respeito a matemática:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2002, p.43).

Os autores Locatelli e Mallmann (2009) afirmam que muitas vezes, as dificuldades encontradas por alunos na aprendizagem de conteúdos matemáticos são decorrentes da adoção de estratégias de ensino inadequadas por parte dos professores e que não propiciam resultados positivos na construção do conhecimento dos alunos. Podemos citar como exemplo o estudo de Funções, na maioria das vezes o seu ensino isolado, por parte de muitos professores e proposto por vários currículos, não permite explorar a sua integração com os conceitos de Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Matemática Financeira, por exemplo .

Os PCNs (BRASIL, 2002), afirmam que assuntos aparentemente diferentes, porém relacionados, devem ter suas conexões ressaltadas para um melhor entendimento dos alunos. Os PCNs (BRASIL, 2002) e os autores Moura (2004) e Lima (2001) defendem que ao associar os problemas de Função Exponencial com os de Progressão Geométrica, promove-se a construção de conceitos algébricos de forma contextualizada e significativa para o aluno, permitindo que estes estabeleçam as devidas conexões entre os conceitos matemáticos e aproveitando ao máximo as relações existentes entre eles. "Podemos observar que as sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que casos particulares funções..."(BRASIL, 2002, p.43).

Porém um dos vários problemas encontrados nos livros didáticos é que, na sua maioria, não é apresentada explicitamente a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica, pelo contrário, os conceitos são apresentados de forma fragmentada, como se não possuíssem nenhuma relação. À ausência da relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica no Ensino Médio, é ratificado pelo Professor Elon Lima (LIMA, 2001), que ressalta que essa conexão não é feita, nem de forma superficial.

Outro fato importante que devemos ressaltar é que no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RJ, 2012) apresenta os conteúdos de Função Exponencial e Progressão Geométrica em anos distintos, sem apresentar qualquer relação entre eles. O conteúdo de Função Exponencial é apresentado no 1º ano do Ensino Médio (RJ, 2012, p.18) enquanto que o conteúdo de Progressão Geométrica é um assunto abordado no 2º Ano do Ensino Médio (RJ, 2012, p.19).

A motivação desse trabalho está relacionada à ausência da Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica no Ensino Médio. Ausência essa que podemos ver na maioria dos livros didáticos, como observa o autor Lima (2001) e no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RJ, 2012), apresentados pelas Unidades Públicas Escolares. Pode-se observar nas Competências e Habilidades do Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RJ, 2012) que em nenhum momento é citado a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

Nesta mesma concepção destaca-se outros trabalhos. Dentre eles as dissertações de Sena (2014) "Progressão Geométrica integrada à Função Exponencial: Uma abordagem ao Ensino Médio", Soares (2015) "Inter-relação entre Progressão Geométrica e Função: Aplicada ao Ensino Médio"e a Monografia de Conclusão de Curso de Cardoso (2012) "Um estudo de Progressões Geométricas e Funções Exponenciais, relacionando-as através da conversão dos registros de representação semiótica, com o auxílio de um objeto de aprendizagem".

Sena (2014) apresenta apenas uma proposta didática, onde não houve aplicação das atividades propostas em sala de aula. Ele verificou oito livros didáticos oferecidos pelas editoras às escolas públicas do Pará, para serem utilizados em 2015, e observou que sete adotam situações-problemas semelhantes no estudo de função exponencial e progressão geométrica, mas apenas quatro deles fazem a associação entre os dois conteúdos. Sua tese foi trabalhada com base em três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicações.

A proposta de Soares (2015) é uma abordagem do tema de Sequências e Funções de uma forma integrada, em especial as Progressões Geométricas, trabalhando o tema de diversas formas. Utilizando a história da Matemática, resolução de problemas, interdisplinaridade e, até mesmo curiosidades relacionadas à matemática financeira e à música, com o intuito de proporcionar ao aluno motivação ao introduzir ou desenvolver o assunto.

A Monografia de Cardoso (2012) apresenta uma analise dos processos de construção do conhecimento do aluno, relacionando conceitos de Progressão Geométrica e Função Exponencial, por meio das transformações entre os registros de representação semiótica, durante sua interação com um Objeto de Aprendizagem e mediações pelo professor.

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo relacionar os conceitos de Função

Exponencial e Progressão Geométrica, para tal será feita uma intervenção pedagógica e uma sequência didática com atividades propostas e mostrar a importância de se trabalhar de forma integrada esses dois conceitos .

Como objetivos específicos podemos destacar que:

1) Melhorar a compreensão do aluno com relação a esses dois conceitos já que os problemas em que se aplicam Funções Exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam Progressões Geométricas.

2) Mostrar para o professor a importância de trabalhar com esses conteúdos de forma integrada, apesar do currículo mínimo proposto pela SEEDUC apresentar esses conteúdos em anos distintos.

O diferencial entre o meu trabalho, do Sena (2014) e do Soares (2015) é que não apresento apenas uma proposta didática. As atividades aqui propostas foram aplicadas em sala de aula e apresentada a análise dos resultados, similarmente a monografia de Cardoso (2012). Porém Cardoso (2012) teve como base a utilização de Registros de Representação Semiótica, onde houve a aplicação do Objeto de Aprendizagem, porém em uma sala informatizada.

Este trabalho foi desenvolvido com os alunos do 3º ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso, no município de Campos dos Goytacazes RJ, escola essa que leciono desde 2010. Foram aplicadas atividades que favoreçam um melhor aprendizado desses conteúdos para que o aluno entenda essa relação e o aplique corretamente quando surgirem os problemas que as utilizam.

A escolha do 3º ano do Ensino Médio para o desenvolvimento deste trabalho se deu pelo fato de que os alunos já haviam estudado Função Exponencial e Progressão Geométrica, nos anos anteriores, porém sem visualizar qualquer relação entre eles.

Para descrever o desenvolvimento deste trabalho a estruturação dos capítulos é feita da seguinte forma:

No primeiro capitulo é apresentado um breve histórico sobre Funções, Função Exponencial, Sequências e Progressão Geométrica.

O segundo capitulo aborda a parte teórica. Nesta é apresentada algumas definições e demonstrações importantes para o desenvolvimento do trabalho, tais como a de Função, Função Exponencial e Progressão Geométrica.

No terceiro capítulo, encontra-se a metodologia utilizada, por meio da descrição do tipo, do campo, dos sujeitos, dos instrumentos e dos procedimentos da pesquisa.

No quarto capítulo, encontra-se a implementação da sequência didática que foi desenvolvida.

O quinto capítulo refere-se as Considerações Finais do trabalho.

Finalmente, é apresentada a lista de referências bibliográficas e os apêndices contendo as Atividade 1 e Atividade 2.

Capítulo 1

Parte Histórica

Começaremos esse capítulo falando um pouco da história da Função e como se deu a sua evolução, para depois, chegarmos na Função Exponencial propriamente dita.

1.1 Função

A ideia de Função está presente em vários ramos da ciência e o seu conceito originou-se na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e buscar formas que permitissem estudar e descrever fenômenos naturais. De acordo com Caraça (1989), a realidade em que vivemos apresenta duas características fundamentais: a interdependência, que faz com que todas as coisas estejam relacionadas umas com as outras e a fluência, que faz com que tudo no mundo esteja em permanente mudança.

O conceito de Função segundo Caraça (1989) foi sendo desenvolvido e aprimorado no decorrer de vários séculos. A ideia de dependência provavelmente teve origem há cerca de 6000 anos, porém somente nos três últimos séculos que houve o desenvolvimento do conceito formal de Função, interligando com problemas relacionados ao Cálculo e à Análise.

De acordo com Youschkevitch (1976), o desenvolvimento da noção de Função pode ser dividido em três partes principais: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno. Os três períodos descritos abaixo foram classificados por Youschkevitch (1976).

Na Antiguidade que compreende desde os Babilônios a Nicole Oresme, ainda não se destaca a noção de variáveis e Funções mas podemos verificar alguns casos de dependência entre quantidades.

Na Idade Média, que seria entre Da Vinci, Descartes a Newton. Nesse período começa a aparecer a noção de Função sob a forma geométrica e mecânica, ainda em descrições gráficas e verbais.

E por último o Período Moderno, a partir de Leibniz, aparecem as expressões analíticas de Função, revolucionando a Matemática devido a sua eficácia, assegurando a esta noção um lugar de destaque nas ciências exatas.

Antiguidade

A ideia de Função pode ser encontrada segundo Caraça (1989) de forma implícita nas regras de medidas de áreas de figuras simples, como retângulos e círculos, e também nas tabelas de adição, multiplicação e divisão, que eram usadas para facilitar o cálculo. Entretanto não havia, nesse período, nenhuma ideia geral de Função. Há apenas o estudo de diferentes casos de dependência entre quantidades, encontrado entre os babilônios, os egípcios e os gregos, mas não há o isolamento de quantidades variáveis e de Funções. Cada problema exigia uma nova análise, pois não existiam procedimentos ou regras aplicáveis a outras situações semelhantes.

Segundo os autores Vázquez, Rey e Boubée (2008), juntamente com Youschkevitch (1976) localizam as raízes da noção de função no contexto do desenvolvimento do conceito de número. Enunciam que as quatro operações aritméticas elementares são funções de duas variáveis, argumentam que o conceito de função está implícito na matemática babilônica. As tabelas matemáticas eram instrumentos usados para facilitar cálculos e não registros da variação concomitante entre quantidades variáveis nem qualquer indício dos elementos básicos do conceito histórico de função.

Na Grécia Antiga, podemos mencionar a contribuição de Ptolomeu ao tratar de relações funcionais, na sua obra fundamental, o *Almagesto*, escrita no século II. Ele desenvolveu as tabelas trigonométricas, que exibe os valores do seno, cosseno e tangente para alguns ângulos notáveis. Porém, como menciona Youschkevitch (1976), todas essas relações são apenas respostas a certas necessidades da situação matemática que eles se deparavam na época, e que eles não tinham noção nenhuma de função.

Idade Média

De acordo com CAMPITELI e CAMPITELI (2006) o matemático e filósofo francês Nicole Oresme (1323-1382) em sua publicação de 1931 "Latitudinibus"(latitude das Formas), fez a primeira representação gráfica de Funções, em que seu primeiro exemplo foi traçar o gráfico da velocidade de um objeto em constante aceleração.

> a distância percorrida por um objeto em movimento com velocidade variável, associava os instantes de tempo dentro do intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal (chamado linha de longitudes) e para cada um desses pontos ele erguia, num plano, um segmento de reta vertical (latitude), cujo cumprimento representava a velocidade do objeto no tempo correspondente. Conectando as extremidades dessas perpendicularidades ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo. (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p.19-20)

A partir da noção de variação conseguiram a de movimento, acabando com a ideia do mundo estático. No Renascimento, tivemos vários trabalhos que trouxeram o conceito de Função de forma implícita, entre esses trabalhos podemos citar:o trabalho de Leonardo Da Vinci (1452-1519) que apareceram indícios do surgimento de leis quantitativas para o entendimento dos fenômenos da natureza, expressas por meio da matemática e de suas ferramentas, Johannes Kepler (1571-1630) desenhou uma versão primitiva da representação gráfica de certos fenômenos naturais, com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias e Galileu Galilei (1564-1642) com o estudo da queda dos corpos e da relação entre espaço e tempo. Esses dois últimos introduziram o quantitativo nas representações gráficas e a relação entre duas grandezas envolvidas, expressadas matematicamente por intermédio da experimentação. (BOYER, 1991)

Os matemáticos René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) apresentaram de forma independente o método analítico para definir Funções (porém sem ser conceituada dessa forma). Descartes usou as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas, do mesmo modo como fazemos até hoje. (BOYER, 1991)

Com explicações detalhadas sobre geometria algébrica, Descartes proporcionou um avanço em relação à geometria grega. Contudo, a análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, e estas eram vistas apenas como uma materialização da relação x e y e não necessariamente como o gráfico de uma função. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003)

Período Moderno

O primeiro a mencionar o conceito de Função foi o inglês Isaac Newton (1642-1727), porém ele não usou o nome que conhecemos hoje e sim nomes um pouco confusos para as suas ideias, nomes esses como: “fluentes” e “fluxões”. Foi ele quem introduziu o termo “variável independente”. (EVES, 1995)

Segundo Youschkevitch (1976) foi Gottfried Leibniz (1646-1716) que tomou para si as teorias de Newton e usou pela primeira vez, em 1673, a palavra “Função” para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, tais como tangentes e normais. No manuscrito, em latim, “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus”, Leibniz inseriu também a terminologia de constante, variável e parâmetro, e chamando de Função, os segmentos de retas obtidos por construção de retas correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada.

Johann Bernoulli (1667-1748) usa a palavra com um significado mais próximo do uso moderno, ele chega a definição de Função como "uma quantidade composta de um modo qualquer de uma variável e algumas constantes".(SÁ; SOUZA; SILVA, 2003)

O grande matemático, físico suíço e aluno de Bernoulli, Leonhard Paul Euler (1707-1783), em 1748, fundamentou e acrescentou a notação $f(x)$, tal qual conhecemos hoje. Segundo Boyer (1991):

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes.

A interpretação do conceito de Função como transformação, onde cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$, foi dada por George Boole, segundo Ruthing (1984, 72-77):

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$.

Richard Dedekind (1831-1916) dá o conceito de função que usamos até hoje:

> Uma aplicação ψ de um sistema S é uma lei, que associa a cada elemento s de S certa coisa, que é chamada imagem de s e que escrevemos $\psi(s)$, onde o domínio e contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente de número, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções. Ruthing (1984, 72-77).

É possível notar que o conceito de Função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Várias representações podem ser observadas na evolução do conceito de Função: Função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

1.2 Função Exponencial

Por volta de 1937, o matemático René Descartes foi o responsável pela utilização de numerais como expoente de uma determinada base.

Podemos observar em diversas situações na história que as descobertas e por consequência as suas conclusões, dependem de experimentos, erros e acertos realizados por várias pessoas. No caso da Função Exponencial não foi diferente; segundo Ifrah (1989) há registro da utilização de potências aproximadamente em 1000 a.C., em algumas tabelas babilônicas. Por volta de 1360, o matemático e filósofo francês Nicole Oresme deixou manuscritos com notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais e regras sistematizadas para operar com potências. Ainda na França, em 1484, o médico Nicolas Chuquet utilizou potências com expoente zero. Vários outros matemáticos também contribuíram para o desenvolvimento da notação exponencial, até que Descartes nos deixasse a notação de potência utilizada hoje. (BOYER, 1991)

No nosso sistema de numeração atual, os números podem ser expressados na forma polinomial, sendo nela que ele se estrutura, levando em conta a sua base de agrupamento e reagrupamentos. Observamos que, no nosso sistema de numeração de base é 10, o número 2016 na verdade é a expressão: $2.10^3 + 0.10^2 + 1.10^1 + 6.10^0$, assim como sua representação no sistema babilônico, de base 60, seria a expressão $33.60^1 + 36.60^0$. (IFRAH, 1989)

O estudo da Exponencial como Função foi desenvolvido pelo matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748), que publicou em 1697 a obra *Principia Calculi Exponentialum seu Percurrentium*, onde apresenta diversos cálculos envolvendo a Função que apresenta uma variável como expoente.

A Função Exponencial possui diversas aplicações em matemática e está presente em diferentes situações da natureza. Pode expressar um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza, bem como o funcionamento dos juros compostos, importantes na matemática financeira. Outro exemplo é a curva descrita por uma corda suspensa por seus dois extremos, sujeita somente à ação de seu próprio corpo, que Christiaan Huygens (1629-1695) denominou de curva catenária. Um exemplo prático dessa curva são os cabos usados pelas companhias elétricas para transmitir a corrente de alta tensão de centrais elétricas para centros de consumo. Essa curva aparece ainda em pontes suspensas como a ponte Golden Gate em São Francisco ou a ponte Brooklyn em Nova York.

1.2.1 Função Exponencial e os Elementos Radioativos

Ao estudar fósseis, os cientistas encontram neles elementos radioativos, ou seja, elementos químicos que emitem energia, na forma de liberação de partículas (fenômeno de radiação). A unidade de medida da radiação é a **meia-vida** que é o intervalo de tempo necessário para que a massa de uma amostra radioativa se reduza à metade através de desintegrações. A meia-vida independe da quantidade de massa inicial da amostra radioativa.

O urânio - 238 , cuja meia-vida é de 4,6 bilhões de anos, foi usado para avaliar a idade da terra. O tório-230 serve para o estudo de objetos com centenas de milhares de anos. O Carbono-14 é bastante preciso em datações de objetos com no máximo 50 mil anos, o primeiro cientista a utilizá-lo para datar fósseis foi o americano Willard F. Libby, que recebeu o prêmio Nobel de Química em 1959.

1.3 Progressão Geométrica

Foram encontrados vários problemas envolvendo diversos tipos de padrões e sequências em documentos de civilizações antigas, isso deve-se ao fato que as Sequências Numéricas estão ligadas aos processos de contagem e a evolução dos sistemas de numeração.

A cerca de 3000 anos atrás, os egípcios observaram os períodos em que ocorria a enchente do rio Nilo, afim de poderem plantar na época certa. Para isso precisou-se estabelecer padrões desse acontecimento. Eles observavam que o rio subia logo depois que a estrela Sírius aparecia a leste, um pouco antes do Sol. Observando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses *Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys*. Esses doze meses forma divididos em três estações de quatros meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período de colheita. (COSTA, 2008)

Segundo (BOYER, 1991), várias tabletas babilônicas apareceram na Mesopotânia, mas a que mereceu mais destaque foi a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.) porém em outras tabelas babilônicas há muitas coisas interessantes. Em uma dessas tabletas, a progressão geométrica

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$$

que na verdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2.

Em outra tabela foi encontrada a seguinte soma de quadrados

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$$

Mesmo a matemática no Egito antigo não tendo se desenvolvido como a matemática babilônica, os egípcios foram os grandes responsáveis pela preservação de muitos papiros que ajudaram para o conhecimento da matemática atual. Em um papiro de 1950 a. C. podemos encontrar alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. (COSTA, 2008)

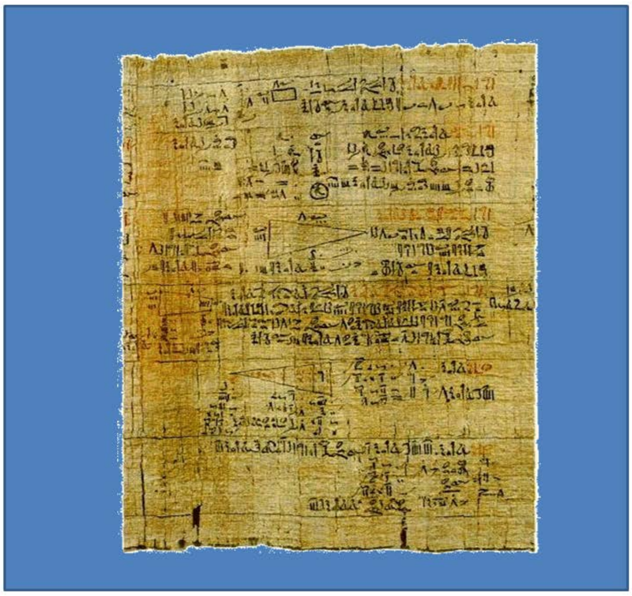
Ainda segundo Boyer (1991) o povo babilônico (em torno de 2000 a.C) utilizava tábuas de cálculo nas quais era comum encontrar sequências de quadrados e cubos de números inteiros. Nessa mesma época, os egípcios empregavam Sequências Numéricas para decompor frações em somas de outras frações, como mostram os registros encontrados no papiro de Rhind ou Ahmes (cerca de 1650 a.C.).

Esse papiro Rhind (ou Ahmes) (Figura 1) é um texto matemático na forma de manual prático que contem 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes. Esse papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga.

Um dos problemas envolvendo progressões que se encontra no papiro Rhind:

“Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”.

Figura 1 – Papiro de Rhind

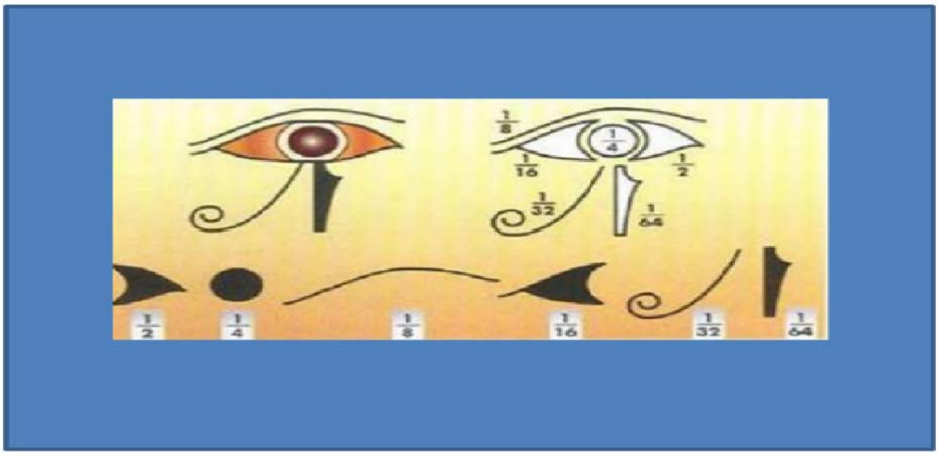


Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

Outro problema interessante é o de número 79, que traz a seguinte escrita: “sete casa, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares” a pergunta do problema em questão seria a soma da quantidade de casas, gatos, ratos, espigas e hectares. Sua solução é 19607.

O Papiro de Rhind, segundo Costa (2008), também contém uma Progressão Geométrica importante formada pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ ligadas à unidade de volume usada para medir a quantidade de grãos, conhecida como Hekat. Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus. (Figura 2)

Figura 2 – Olho de Hórus



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

Segundo Boyer (1991) em uma tábua de Louvre, com data de 300 a.C., foram encontrados 2 problemas que constata o conhecimento sobre Sequências Geométricas pelos babilônios. Um deles afirma que:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^8 + 2^9 = 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^8 + 2^9$$

Eles fizeram a soma dos 9 primeiros termos, de $1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^8$ que resulta em $2^9 - 1$ e somaram com 2^9. Encontraram então:

$$1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^8 + 2^9 = (2^9 - 1) + 2^9 = 2^{10} - 1$$

Os responsáveis pela criação da teoria da Aritmética são Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e os sábios gregos que viveram depois dele, pois os Pitagóricos conheciam as Progressões Aritméticas, as Geométricas, as Harmônicas e Musicais, as Proporções, os Quadrados de uma soma ou de uma diferença. (COSTA, 2008)

Os hindus também tiveram grandes habilidades em aritmética e deram contribuições significativas à álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente. Os problemas de aritmética hindus sempre envolviam Irracionais Quadráticos, o teorema de Pitágoras, Progressões Aritméticas e Permutações.

O grego Euclides de Alexandria também teve grande sucesso na história da matemática, produzindo a obra *Os Elementos*. Segundo Boyer (1991, p.82) a primeira edição desse trabalho surgiu em 1482 e depois desta data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria. *Os elementos* estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre comensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Dentre outras abordagens sobre Sequências em *Os elementos*, destacam-se os livros VIII e IX.

O problema 21 do livro IV diz: "Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado". Segundo o autor do problema a resposta é $\frac{81}{7}$, $\frac{144}{7}$ e $\frac{256}{7}$. (BOYER, 1991)

A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma fórmula, muito elegante mas pouco usada, para a soma de números em "Progressão Geométrica":

> Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem.(BOYER, 1991)

Esse enunciado, segundo Garbi (2009), é equivalente à fórmula:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Que é equivalente a:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

onde $a = a_1$ é o primeiro termo da Progressão Geométrica e q é a proporção continuada, ou seja a razão da Progressão Geométrica, em que $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Ainda de acordo com (BOYER, 1991), o Matemático hindu mais importante do século doze foi Bhaskara (1114 - 1185). Ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra teve influência de todos os hindus anteriores. O seu tratado mais conhecido foi o “lilavati”. Porém tanto esse tratado quanto o “vija-ganita”, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, “Progressões Aritméticas e Geométricas”. Um deles cita o seguinte problema:

“Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas [1] no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

Em 1202, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, matemático e comerciante da idade média, escreveu um livro denominado *Liber Abacci*, (BOYER, 1991, p.173-175). Um dos problemas que pode ser encontrado nas páginas 123-124 deste livro é o problema dos pares de coelhos (paria coniculorum), que provavelmente é o mais conhecido.

> Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada para gerar um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Pode-se perceber que a Sequência Numérica, conhecida como a Sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Segundo Costa (2008) no desenvolvimento da Matemática na Europa podemos citar Michael Stifel (1486- 1567) que é considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é *Aritmética Integra* (1944) e dividida em três partes: números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte, Stifel ressalta as vantagens de se relacionar uma “Progressão Aritmética” a uma “Geométrica”.

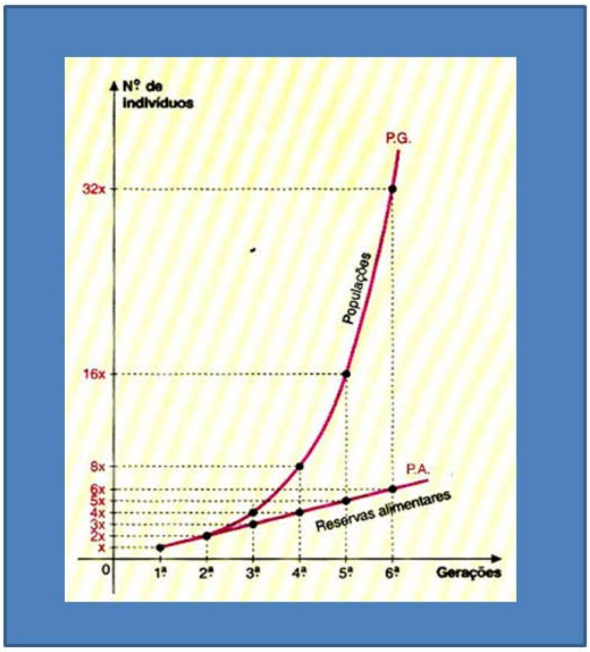
[1] É uma medida de distância usada na antiga India, que equivale a cerca de 12-15 km

Na matemática moderna, por volta de 1590, John Napier(1550-1617) revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre Progressões Aritméticas e Geométricas, e por consequência a descoberta dos logaritmos e a construção das suas tabelas. Outra contribuição desse matemática é que com os logaritmos conseguimos reduzir as longas multiplicações e divisões em simples operações de adição e subtração. (COSTA, 2008)

Na doutrina de Darwin, estudada na Biologia e criada por Charles Robert Darwin, também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. De acordo com Costa (2008), num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, podemos encontramos uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das idéias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz o item: "As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A." Em consequência deste item, Darwin afirmou que "devido a tal desproporção, os indivíduos empenhariam -se numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros".

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares (Figura 3) não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande. (COSTA, 2008)

Figura 3 – Crescimento Populacional



Fonte: Costa (2008)

Observar e explorar regularidades em padrões numéricos, o levantamento , a investigação e validação de conjecturas e generalização devem fazer parte do estudo do alunado, para que desta forma, com esta visão , possam desenvolver ideias que são essenciais para o desenvolvimento da ciência na atualidade.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimentos de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações. (LIMA, 1999, p.2)

O objetivo deste Capítulo é apresentar os conceitos de Função Exponencial e Progressão Geométrica segundo as orientações dos PCNs. Todas as definições apresentadas nesse capítulo foram retidas do livro Número e Funções Reais do Professor Elon Lage Lima (LIMA, 2013):

2.1 Alguns Conceitos Importantes

Antes de apresentar uma definição formal para a Função Exponencial e a Progressão Geométrica, será feita uma breve revisão de algumas definições. Denotaremos, durante esse capítulo, o conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

2.1.1 Potências de Expoente Racional

Definição 2.1 *Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, definimos a n-ésima potência de a, como sendo os números:*

Se $n \geq 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = (a^{n-1})a, n \geq 1$$

Se $n < 0$

$$a^n = (a^{-n})^{-1} = \frac{1}{a^{-n}}$$

Propriedades 2.1 *Seja* $a > 0$ *número real positivo, temos:*

a) $a^m.a^n = a^{m+n}$

b) $(a^m)^n = a^{mn}$

c) Se $a > 1$ então $a^n < a^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, onde $n > 0$

Se $0 < a < 1$ então $a^{n+1} < a^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, onde $n > 0$.

Observação 2.1 *Para* $m_1, m_2, ..., m_k$ *quaisquer em* $\mathbb{Z}$*, então*

$$a^{m_1}.a^{m_2}...a^{m_k} = a^{m_1+m_2+...+m_k}$$

Em particular, se $m_1 = ... = m_k = m$*, temos* $(a^m)^k = a^{mk}$*.*

Definição 2.2 *Seja* a, b *números reais positivos e* $n \in \mathbb{N}$*. Dizemos que* b *é a raiz n=ésima de* a *se* $b^n = a$

Notação: $b = a^{\frac{1}{n}}$

Definição 2.3 *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *positivo e* $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *então* $a^r = a^{\frac{m}{n}}$*.*

2.1.2 Função

Vamos fixar alguns conceitos importantes:

Definição 2.4 *Sejam* X *e* Y *conjuntos não vazios. Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é uma lei que associa cada elemento* $x \in X$ *a um, e somente um, elemento* $y = f(x) \in Y$*. O conjunto* X *é chamado de domínio de* f *e o denotaremos por* $Dom(f)$*. O conjunto* Y *é dito contradomínio de* f*.*

Definição 2.5 *Definimos a imagem de* f *,* $Im(f)$*, ao conjunto de valores* $y \in Y$ *tais que* $y = f(x)$*, para algum* $x \in X$*. Usamos a notação* $x \longmapsto f(x)$ *para indicar que a função* f *transforma* x *em* $f(x)$*, onde* $f(x)$ *é a imagem de* x

2.1.3 O Ensino de Sequências

Definição 2.6 *Uma sequência numérica é a imagem de uma função cujo domínio é um subconjunto ou o próprio conjunto $\mathbb{N}$. Se o domínio for $\mathbb{N}$ a sequência será infinita, se o domínio for um subconjunto de $\mathbb{N}$ com n termos, a sequência será finita.*

Exemplo 2.1 *Em 2016, os Jogos Olímpicos foram realizados na cidade do Rio de Janeiro (Brasil), e o time masculino brasileiro de vôlei conquistou a medalha de ouro.*

Veja na tabela abaixo os países que ficaram nas quatro primeiras posições nessa categoria.

Tabela 1 – Classificação de vôlei masculino - Olimpíadas 2016

Posição	País
1	Brasil
2	Itália
3	Estados Unidos
4	Rússia

Fonte:Dados da Pesquisa

Observe que a classificação é apresentada associando-se cada número natural de 1 a 4 ao nome do país. Essa associação determina uma sequência, em que:

O número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;

O número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;

O número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;

O número 4 corresponde ao quarto elemento da sequência;

A função associada a essa sequência relaciona o domínio $\mathbb{N}$ ao nome do país Brasil, Itália, Estados Unidos, Rússia.

Exemplo 2.2 *Considere uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela relação $f(x) = \sqrt{x}$, onde o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ e a imagem é um subconjunto dos números reais.*

$$(a_1, a_2, ..., a_n, ...) = (1, \sqrt{2}, ..., \sqrt{n}, ...)$$

onde $f(1) = a_1, f(2) = a_2, ..., f(n) = a_n$ e n indica a posição do elemento na sequência.

Definição 2.7 *Se n é um número natural qualquer não nulo, temos que a_n representa o n-ésimo termo da sequência, que é chamado termo geral da sequência, pois a partir dele conseguimos calcular qualquer termo da sequência, de acordo com a posição atribuída para n, onde $n \in \mathbb{N}$. Usaremos $f(n) = a_n$ para designar uma sequência qualquer.*

Exemplo 2.3 *Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde $f(n) = 2n$.*

$$f(1) = 2.1, f(2) = 2.2, ..., f(n) = 2.n, ...$$

Portanto o conjunto $Im(f) = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ representa a sequência infinita

$$(2, 4, ..., 2n, ...)$$

. Podemos concluir então que o termo geral da sequência é

$$a_n = 2n$$

.

2.2 Função Exponencial

(Adaptado (IEZZI, 2013)) Os dados do último censo demográfico (2010) indicara, que, naquele ano, a população brasileira era de 190 755 799 habitantes e estava crescendo à taxa de aproximadamente de 12,5 % ao ano. A taxa de crescimento populacional leva em consideração a natalidade, mortalidade, imigrações, etc. (IBGE, 2010).

Suponha que tal crescimento seja mantido para a década seguinte, isto é, de 2011 a 2020. Nessas condições, qual seria a população brasileira ao final de x anos $(x = 1, 2, ..., 10)$, contados a partir de 2010?

Para facilitar os cálculos, vamos aproximar a população brasileira em 2010 para 191 milhões de habitantes. Passado 1 ano a partir de 2010 (em 2011), a população, em milhões, seria:

Em 2011: $191 + 12,5\%$ de $191 = 1(191) + 0,125(191) = (1 + 0,125)(191) = 1,125(191) = 214,875$ milhões de habitantes.

Passados 2 anos a partir de 2010, a população em milhões, seria:

População de 2011 + aumento

$1,125(191) + 12,5\%$ de $1,125(191) = 1,125(191)(1 + 0,125) = (1,125)^2(191) = 241,73$ milhões de habitantes.

Passados 3 anos a partir de 2010, a população em milhões, seria:

População de 2012 + aumento

$(1,125)^2(191)+12,5\%$ de $(1,125)^2(191) = (1,125)^2(191)(1+0,125) = (1,125)^3(191) = 271,95$ milhões de habitantes.

Passados x anos, contados a partir de 2010, $(x = 1, 2, ..., 10)$, a população brasileira, em milhões de habitantes seria:

$$1,125^x(191)$$

A função que associa a população y, em milhões de habitantes, ao número de anos x, transcorridos a partir de 2010, é:

$$y = 1,125^x(191)$$

Definição 2.8 *Seja um número real positivo a (com $a \neq 1$). A função exponencial de base a, f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ indicada pela notação $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Propriedades:

1) $a^x.a^y = a^{x+y}$.

2) $a^1 = a$.

3) Se $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Essa propriedade diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

4) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Esta propriedade diz que se $a > 1$, então a^x torna-se cada vez maior quando x positivo e vai ficando cada vez maior.

Por outro lado, se $0 < a < 1$, então a^x torna-se cada vez maior quando x negativo e vai ficando cada vez maior em módulo.

5) A função exponencial é contínua.

Ser contínua significa que $\lim\limits_{x \to 0} a^x = a^{x_0}$.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = a^{x_0}$.

Essa afirmação pode ser provada da seguinte forma:

Escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0} - a^x| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Como podemos tomar a^h bem próximo de 1, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Deste modo a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim\limits_{x \to 0} a^x - a^{x_0} = 0.$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = a^{x_0}$.

6) A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$ é sobrejetiva.

Essa propriedade ressalta o fato que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$.

2.2.1 Gráfico da Função Exponencial

É incontestável a importância dos gráficos no desenvolvimento de qualquer ciência ou tecnologia. Nas atividades experimentais, muitas vezes, precisamos estudar como uma propriedade ou quantidade depende ou varia com relação à outra propriedade ou quantidade.

Desta maneira, o gráfico deve permitir visualizar imediatamente o comportamento de uma grandeza em relação à outra. A imagem que o gráfico apresenta vale muito, e um gráfico é uma maneira muito eficiente de resumir e apresentar os seus dados.

Outro ponto importante é que além do apelo visual, favorecem a observação de determinados comportamentos que, em outras representações (numéricas, algébricas e por tabelas), são difíceis de serem percebidos.

Em relação ao gráfico da função exponencial podemos fazer as seguintes observações:

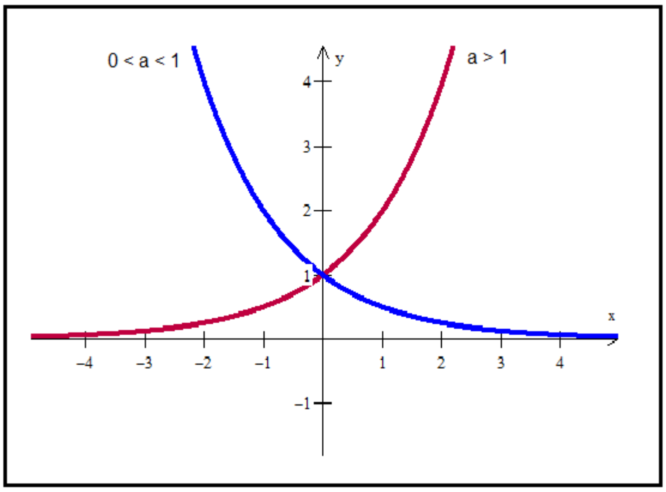
1) A curva representativa do gráfico da função exponencial está toda acima do eixo das ordenadas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

3) Se $a > 1$ é o de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o gráfico de uma função decrescente.

Observamos o aspecto geral da Função Exponencial, para os casos da função crescente $a > 0$ e função decrescente $0 < a < 1$. (Figura 4)

Figura 4 – Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$

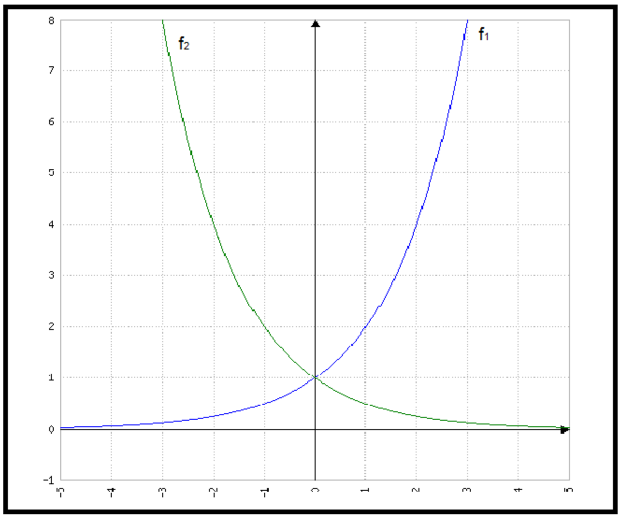


Fonte:Autoria Própria

Vamos colocar dois exemplos particulares.

Sendo $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x$. (Figura 5)

Figura 5 – Gráfico da Função Exponencial



Fonte:Autoria Própria

2.2.2 Caracterização da Função Exponencial

As Funções Afins, Funções Quadráticas e Funções Exponenciais são os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares.

Quando se decide qual o modelo matemático mais adequado para resolver um determinado problema, não se tem mais dificuldades para fazer o tratamento matemático da questão. As dúvidas que possam surgir acontecem geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Abaixo temos as propriedades que caracterizam as Funções Exponenciais.

Teorema 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguinte afirmações são equivalentes:*

(1) *$f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;*

(2) *$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;*

(3) *$f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Para mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2) devemos observar que pela hipótese (1) todo número racional $r = \frac{m}{n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Portanto, como $nr = m$, podemos escrever:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

,

logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Porém, se usarmos $f(1) = a$, termos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Suponhamos agora que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponha, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$, como por exemplo, que seja $f(x) < a^x$, para o caso de $f(x) > a^x$ é análogo. Então existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3)

Tem-se que $f(x + y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$

(3) $\Rightarrow$ (1)

$f(nx) = f(x + x + ... + x)$, onde x aparece n vezes.

$f(nx) = f(x).f(x)...f(x)$, onde $f(x)$ aparece n vezes.

$f(nx) = f(x)^n$

2.2.3 Função Tipo Exponencial

Definição 2.9 *Uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.*

Se a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$$

e

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x.

2.2.4 Caracterização da Função Tipo Exponencial

Teorema 2.2 *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Suponha que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ não depende de x. Fazendo $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue então que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.

2.3 Progressão Geométrica

(Adaptado (IEZZI, 2013)) Alguns gases utilizados na indústria, como os clorofluorcarbonetos (CFC), têm efeito devastador na camada de ozônio que protege a Terra contra um tipo nocivo de radiciação solar. Esses gases provocam falhas nessa camada, conhecidas como "buracos da camada de ozônio".

O protocolo de Montreal, realizado em 1987, estabeleceu acordos para a eliminação do uso das substâncias que destroem a camada de ozônio. Cerca de 190 países já assinaram esse tratado.

Supondo que o Protocolo de Montreal tenha sido respeitado pelos países, o buraco na camada de ozônio deverá ter uma redução média de 30% a cada década, a partir de 2005, portanto a extensão do buraco da camada de ozônio será de 70% do valor da década anterior. A extensão do buraco na camada de ozônio era de 27 milhões de km²,em 2005, então estima-se que em 2015 a extensão do buraco seria de 27 000 000 (0,7) = 18,9 milhões de km². Então a estimativa do tamanho do buraco na camada de ozônio era obtida multiplicando-se o tamanho da camada, em 10 anos antes, pela constante 0,7. A sequência formada por esses valores é um exemplo de Progressão Geométrica.

Definição 2.10 *Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior, por uma constante q chamada razão da progressão geométrica.*

Exemplo 2.4 *Em uma experiência de laboratório, um frasco recebe, no primeiro dia do mês, 3 gotas de um determinado líquido; no segundo dia recebe 9 gotas; no terceiro dia recebe*

27 gotas; e assim por diante.

Podemos representar a sequência: $(3, 9, 27, ...)$ *como uma PG crescente de razão 3.*

Para classificarmos as Progressões Geométricas devemos considerar o primeiro termo (a_1) e a razão q.

1) Se $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$ a PG é crescente.

2) Se $a_1 \in \mathbb{R}$ e $q = 1$ a PG é constante.

3) Se $a_1 < 0$ e $q > 1$ ou $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ a PG é decrescente.

4) Se $a_1 \in \mathbb{R}$ e $q < 0$ a PG é alternante ou oscilante.

Podemos escrever os termos da Progressão Geométrica

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$$

em função do termo anterior multiplicado pela razão ou em função do primeiro termo e da razão q. Sendo assim temos:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3$$
$$\ddots$$
$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Portanto a lei de formação de qualquer sequência que siga as definições de uma PG pode ser escrita por:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Segundo Morgado e Carvalho (2014) em muitos casos podemos numerar os termos a partir do zero, nesse caso, $a_n = a_0.q^n$.

2.4 Comparação entre a Função Exponencial e a Progressão Geométrica

O Professor Elon lage Lima, Lima (2001), relaciona a função exponencial e a progressão geométrica da seguinte forma:

> Uma progressão geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial, $f(x) = b.a^x$, se consideram apenas valores $f(n) = b.a^n$, $n \in \mathbb{R}$. Por isso é que os problemas em que se aplicam funções exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam progressões geométricas. Lima (2001).

2.4.1 Funções Exponenciais e Progressões

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, ..., f(x_n) = ba^{x_n}, ...,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}).a^h = f(x_n).a^h$$

Como o $(n+1)$ -ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

Teorema 2.3 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n = f(x_n)$. Se $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Fazendo $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, transformando progressões aritméticas em progressões geométricas sendo $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética de razão $r = -x$, pois $r = a_2 - a1 = -x$, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Portanto $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, ..., nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), ..., g(nx)$ é uma progressão geométrica cuja razão é $g(x)$. Então seu $(n+1)$ -ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um termo negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Podemos concluir utilizando o Teorema 2.2, Teorema da Caracterização da Função do Tipo Exponencial, que $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5 *Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente que transforma a Progressão Aritmética (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...) na Progressão Geométrica (10, 80, 640, 5120, 10 960, ...) sendo $f(0) = 5$ e $f(1) = 10$. Determine essa função f.*

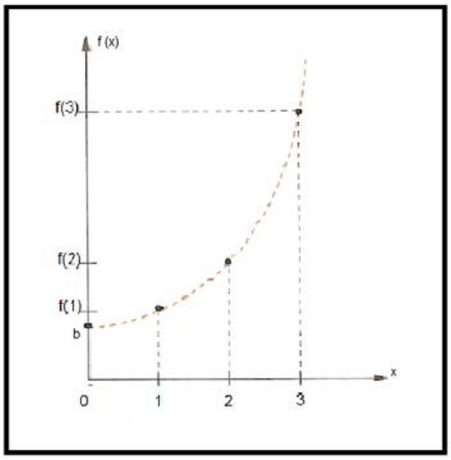
Fazendo $b = f(0) = 5$, temos $a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{10}{5} = 2$, ou seja, $a = 2$. Nesse caso, a função exponencial $f(x) = b.a^x$ é dada por $f(x) = 5.2^x$. Observe que a razão da Progressão aritmética é $r = 3$ e, portanto, a razão da Progressão Geométrica é $a^r = 2^3 = 8$.

2.4.2 Comparando os Gráficos da Função Exponencial e Progressão Geométrica

Como já vimos anteriormente o termo geral da Progressão Geométrica é dado por $a_n = a_0.q^n$. Nesse caso, podemos pensar na Progressão Geométrica como uma função que associa a cada número natural positivo n o valor dado por $a_n = a_0.q^n$. Essa função é a restrição aos números naturais positivos da função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$. Portanto, podemos concluir que a progressão geométrica é função do tipo exponencial pode ser escrita com $f(n) = b.a^n$, onde $n = 0, 1, 2, ...$.

O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função tipo exponencial. Ver figura 6

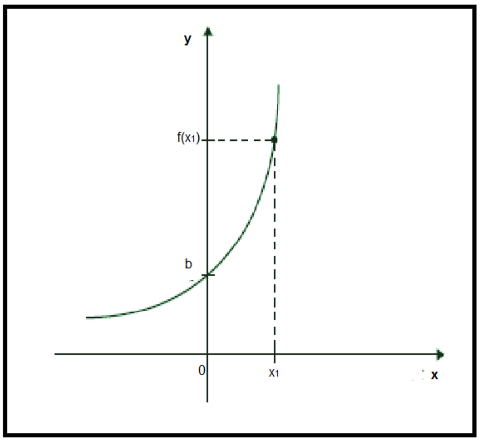
Figura 6 – Gráfico da Progressão Geométrica



Fonte:Autoria Própria

O gráfico da função exponencial apresenta um domínio em todo R.Ver figura 7

Figura 7 – Gráfico da Função Tipo Exponencial



Fonte:Autoria Própria

Capítulo 3

Aspectos Metodologicos

Metodologia é uma palavra derivada de “método”, do Latim “methodus” que significa “caminho ou a via para realização de algo”. Método é o processo usado para chegar a um objetivo ou a um conhecimento. Metodologia é o campo em que se estuda os melhores métodos praticados em determinada área para a produção do conhecimento. (MINAYO, 2007)

Então podemos concluir que a metodologia vai além da descrição dos procedimentos (métodos e técnicas a serem utilizados na pesquisa), indicando a escolha teórica realizada pelo pesquisador para abordar o objeto de estudo. Mas uma coisa temos que deixar clara, mesmo não sendo a mesma coisa, teoria e método são dois termos inseparáveis, segundo Minayo (2007, p.44) “devendo ser tratados de maneira integrada e apropriada quando se escolhe um tema, um objeto, ou um problema de investigação”.

Minayo (2007) define metodologia de forma abrangente e concomitante.

> (...) a) como a discussão epistemológica sobre o “caminho do pensamento” que o tema ou o objeto de investigação requer; b) como a apresentação adequada e justificada dos métodos, técnicas e dos instrumentos operativos que devem ser utilizados para as buscas relativas às indagações da investigação; c) e como a “criatividade do pesquisador”, ou seja, a sua marca pessoal e específica na forma de articular teoria, métodos, achados experimentais, observacionais ou de qualquer outro tipo específico de resposta às indagações específicas.

Neste capítulo serão abordados os aspectos metodológicos do presente estudo: descrição do tipo de pesquisa, apresentação do campo onde a pesquisa ocorreu, caracterização dos sujeitos e definição dos instrumentos e dos procedimentos de pesquisa usados no desenvolvimento desse trabalho.

O objetivo deste capítulo é descrever todas as estratégias e ações da sequência didática, cuidadosamente planejada, com a finalidade de obter informações para observar se o nosso objetivo foi alcançado. Serão apresentadas a descrição do tipo de pesquisa, a apresentação do campo onde a pesquisa ocorreu, a caracterização dos sujeitos e a definição dos instrumentos e dos procedimentos da pesquisa.

3.1 Tipo de Pesquisa

Para se desenvolver este estudo, foi utilizada a abordagem qualitativa. A metodologia de Pesquisa Qualitativa não se preocupa com relação aos números, mas sim com relação ao aprofundamento e de como ela será compreendida pelas pessoas. Os pesquisadores que utilizam este método procuram explicar o porquê das coisas, explorando o que necessita ser feito sem identificar os valores que se reprimem a prova de dados, porque os dados analisados por este método não estão baseados em números.

Segundo Minayo (2007) a pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas. O desenvolvimento da pesquisa é imprevisível. O conhecimento do pesquisador é parcial e limitado. O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações.

A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais. Para Minayo (2007), a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Por outro lado, quanto aos objetivos, este trabalho adota a pesquisa exploratória. Este tipo de pesquisa tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses.

Segundo Gil (2002) a pesquisa exploratória tem por objetivo principal aprimorar ideias ou descobrir intuições, que são desenvolvidas de forma a proporcionar uma maior familiaridade com o problema, a fim de melhor explicitá-lo, construindo uma visão geral acerca de determinado fato, envolvendo levantamento bibliográfico, entrevistas e análise de exemplos que estimulem sua compreensão.

3.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa foi realizada no Colégio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso situada na zona urbana de Campos dos Goytacazes,pertencente à SEEDUC - Secretaria de Estado de Educação e Cultura. Fica localizado na R. Silvino Canela - Goytacazes, Campos dos Goytacazes - RJ, 28000-000 no Estado do Rio de Janeiro.

3.3 Sujeitos da Pesquisa

Os testes e a intervenção pedagógica que este trabalho propõem foram submetidos a alunos do 3º ano do Ensino Médio no Colégio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso. A princípio o trabalho seria aplicado na turma do 2º ano, visto que nesse ano os alunos possuem conhecimento dos dois conteúdos abordados. O tema sobre Função Exponencial é apresentado no 1º ano e Progressão Geométrica é parte integrante do currículo do 2º ano de escolaridade. Com o intuito de não atrapalhar ainda mais o andamento desse ano letivo, o trabalho foi aplicado na turma de 3º ano, visto que eles ja conhecem os dois conteúdos e estão se preparando para a prova do ENEM.

Na turma estão matriculados 30 alunos. Apesar das atividades terem sido aplicadas para todos os alunos, nem todos os alunos participaram de todas as atividades. Assim os dados colhidos se referem apenas aos participantes de todas as etapas da pesquisa, ou seja, 20 alunos. Essa atitude foi tomada com o objetivo de dar qualidade aos dados apurados.

Neste trabalho, cada aluno da pesquisa foi identificado da seguinte forma:

Turma 3000: de A01 a A20.

Figura 8 – Turma 3000

Fonte: Registro da Pesquisadora

3.4 Instrumentos de Coleta de Dados

A Sequência Didática, nesta pesquisa, é composta entre outros itens, de atividades denominadas por Atividade 1 (Apêndice A) e Atividade 2 (Apêndice B). Todas com a finalidade de observar situações de aprendizagem listadas abaixo:

1) Conteúdo:

Função Exponencial

Progressão Geométrica

2) Competências:

Identificar as relações existentes entre a Função Exponencial e Progressão Geométrica

3) Habilidades:

1. Revisar Função Exponencial; 2. Revisar Progressão Geométrica; 3. Entender as relações entre a Função Exponencial e Progressão Geométrica

4) Material necessário

Apostila com as atividades, quadro branco e data show.

3.4.1 Atividade 1: Revisão de Função Exponencial e Progressão Geométrica

O início da intervenção pedagógica se deu por meio da aplicação da Atividade 1, de revisão de Função Exponencial e Progressão Geométrica (Apêndice A) no qual se pretendia verificar o nível de conhecimento dos alunos e relembrar conceitos importantes.

A Atividade 1 deve ocorrer em duas aulas (100 minutos) com o objetivo de desenvolver uma revisão de Função Exponencial e Progressão Geométrica. A atividade 1 deve ser distribuída individualmente a cada um dos alunos. Para sua aplicação usaremos o conceito de aula investigativa para dar autonomia ao aluno e não comprometer a sua autoria no estudo. Nessa Atividade 1 o aluno irá relembrar os conceitos de Função exponencial: Gráfico de uma função, Crescimento e Decrescimento da Função, Equação Exponencial e Problemas envolvendo Função Exponencial. Deve-se também revisar a lei de formação da Progressão Geométrica, reconhecimento de razão, calculo do termo geral e a representação gráfica de uma Progressão Geométrica. Ao final, todas as atividades devem ser recolhidas e arquivadas para análise. Antes de aplicar a Atividade seguinte, a pesquisadora deve analisar as respostas para sanar possíveis dúvidas.

3.4.2 Atividade 2: Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica

O objetivo principal dessa parte da intervenção pedagógica é favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades, promovendo o avanço na aprendizagem dos conceitos sobre a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica pelos sujeitos da pesquisa.

A Atividade 2 deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de trabalhar com os alunos a relação entre os dois conceitos revisados na atividade 1. Essa parte tem por objetivo fornecer ao aluno o reconhecimento dessa relação e fazer com que ele observe que esses dois conteúdos apresentam conceitos e propriedades semelhantes. Antes de começar a atividade deve se comentar com os alunos sobre essa relação e sua importância. Apresentar um exemplo onde pode se resolver da duas formas, como Função Exponencial e depois como Progressão Geométrica. A pesquisadora deve dar esclarecimentos apenas quando solicitada, onde o objetivo é dar autonomia ao aluno para não comprometer a sua autoria no estudo. Ao final, todas as atividades devem ser recolhidas e arquivadas para análise.

3.4.3 Análise das Atividades Aplicadas

Esse último momento deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de verificar as dúvidas. Devemos discutir as respostas das questões da Atividade 2, por meio de questionamentos orais, e apresentando as respostas das questões propostas.

3.5 Procedimentos da Pesquisa

A sequência didática foi planejada para ser realizada em três aulas de 100 minutos denominados Aula 1, Aula 2 e Aula 3, ocorridos nos dias 08 de setembro (Aula 1), 12 de setembro (Aula 2) e 15 de setembro (Aula 3). As aulas ocorreram sempre às segundas e quintas no horário da aula de Matemática onde a pesquisadora ministra aula com a turma.

Aula 1 - Foi aplicada a Atividade 1 sobre Revisão de Função Exponencial e Revisão de Progressão Geométrica;

Aula 2 - Houve uma intervenção pedagógica com os alunos, onde foi apresentada a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

Figura 9 – Registro feito pela pesquisadora ao fazer intervenção pedagógica

Fonte: Registro da Pesquisadora

Um exemplo foi mostrado aos alunos onde foi resolvido primeiramente usando conceitos de Função Exponencial e depois foi desenvolvido com os conceitos de Progressão Geométrica. Nesse momento foi enfatizado aos alunos que os problemas em que se aplicam Funções Exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam Progressões

Geométrica. Construímos o gráfico da Função Exponencial e em seguida comentado que os pontos do gráfico, onde $x = 0, 1, 2, ...$ formam a sequência de uma Progressão Geométrica.

Posteriormente foi aplicada a Atividade 2 sobre a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica;

Aula 3 - Foi feita uma Conclusão das atividades aplicadas.

Antecedendo os encontros, algumas convenções foram estabelecidas, tais como:

1. os alunos trabalharam individualmente em todas as atividades;

2. o projetor multimídia foi utilizado para ilustrar as resoluções em todos os encontros;

3. os encontros forma registrados por meio de uma máquina fotográfica;

4. todos os encontros e as atividades aplicadas nessa turma forma instrumento de avaliação do professor de Matemática da turma;

5. foram realizadas anotações/registros no diário de campo;

6. ao final de cada encontro, as atividades forma recolhidas e identificadas para a análise de dados.

Ciente da importância do papel da observadora/pesquisadora no processo de aplicação da sequência didática, optou-se pelo equilíbrio de uma aula investigativa, ou seja, dar autonomia ao aluno para não comprometer a sua autoria no estudo e, garantir a fluidez dos trabalhos e do processo de significação dos conceitos a serem apreendidos, privilegiando uma postura interrogativa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

A gestão da sequência didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos no estudo, foi um aspecto considerado de forma a garantir que os objetivos estabelecidos para cada atividade fossem atingidos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Em todos os encontros, foi fundamental garantir a motivação dos alunos para a realização das atividades, propondo tarefas e elaborando questões que constituíssem desafios para os alunos.

A análise dos dados levou em consideração as soluções apresentadas pelos alunos às questões da sequência didática, procurando entender as formas como estes produzem a resposta, certa ou errada, de modo a contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento (CURY, 2007). .

Capítulo 4

Sequência Didática e Análise de Dados

Este capítulo descreve a implementação da sequência didática constituída das atividades aplicadas.

4.1 Atividade 1: Revisão de Função Exponencial e Progressão Geométrica

Neste item, é descrita e analisada a aplicação da atividade 1 de Revisão de Função Exponencial e Progressão geométrica (Apêndice A).

Este instrumento foi aplicado na Turma 3000 no dia 08/09/2016 com duração de 100 minutos e a participação de 20 alunos.

Inicialmente a pesquisadora realiza uma conversa com os sujeitos da pesquisa explicando todos os detalhes do desenvolvimento da Atividade 1. Essa Atividade 1 é constituída de 6 questões discursivas e ocorreu em um encontro de 100 min, onde os alunos deveriam tentar resolver as questões sozinhos e sem a intervenção da pesquisadora.

É apresentada, a seguir, uma análise das respostas dos alunos para cada uma das cinco questões.

Questão 1:

Seja f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3^x$. Represente graficamente essa função.

O objetivo desta questão era apenas verificar se o aluno sabe construir o gráfico de uma Função Exponencial crescente.

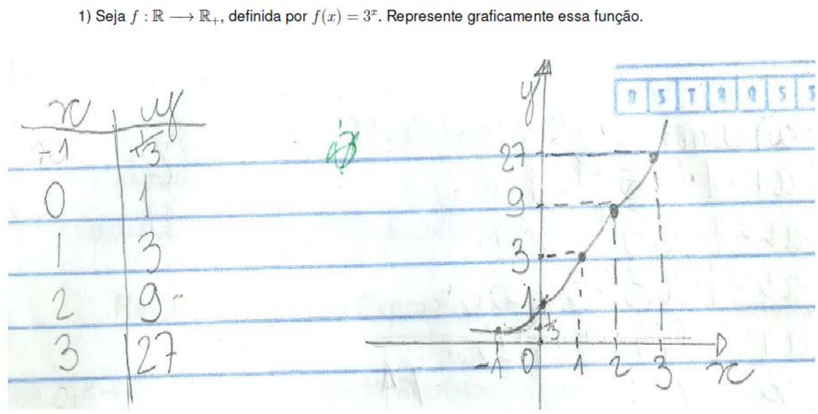
Tabela 2 – Resultado da Questão 1

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	8	12	40%

Fonte:Dados da Pesquisa

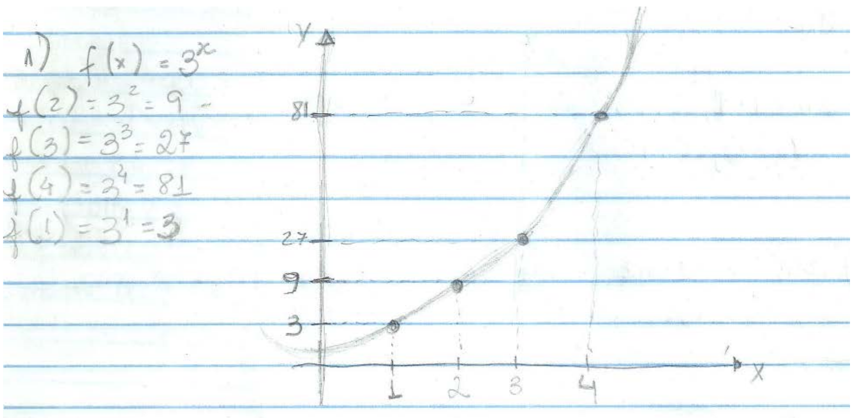
Dos 20 alunos pesquisadas na turma, 8 construíram o gráfico de forma correta, com escala adequada e curva correta. Dos outros alunos, 7 não construíram a escala do gráfico de forma correta (Figura 10) e 5 alunos trocaram a localização dos eixos ou não apresentaram a curva da forma adequada (Figura 11).

Figura 10 – Resposta do Sujeito A10 para a Questão 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 11 – Resposta do Sujeito A09 para a Questão 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 2)

Construa o gráfico da função $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

O objetivo desta questão era apenas verificar se o aluno sabe construir o gráfico de uma Função Exponencial decrescente.

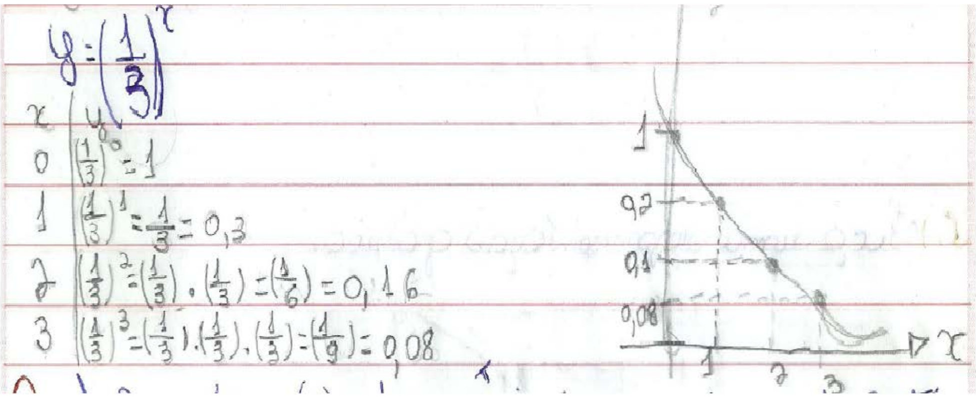
Tabela 3 – Resultado da Questão 2

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	5	15	25%

Fonte:Dados da Pesquisa

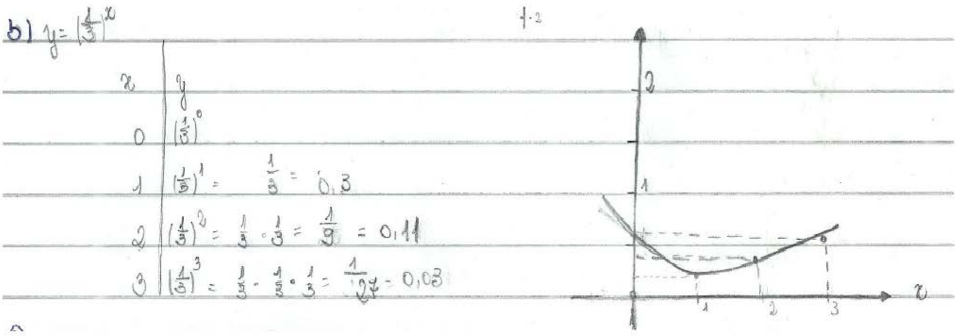
Os alunos apresentaram uma maior dificuldade em trabalhar com a função decrescente, dos 20 alunos pesquisadas na turma, 5 construíram o gráfico de forma correta, com escala adequada e curva correta. Dos outros alunos, 7 não construíram a escala do gráfico de forma correta (Figura 12) e 8 alunos erraram ao localizar os números decimais no gráfico ou não apresentaram a curva da forma adequada (Figura 13).

Figura 12 – Resposta do Sujeito A16 para a Questão 2



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 13 – Resposta do Sujeito A13 para a Questão 2



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 3:

A função $n(t) = 1000.2^t$ *indica o número de bactérias existentes em um recipiente, em que* t *é o número de horas decorridas. Determine:*

a) Quantas bactérias havia no experimento inicialmente?

b) Quantas bactérias haverá no recipiente após 5 horas do início do experimento?

c) Em quanto tempo após o início do experimento haverá 16 000 bactérias no recepiente?

O objetivo dessa questão era trabalhar com a Função Exponencial de uma forma contextualizada.

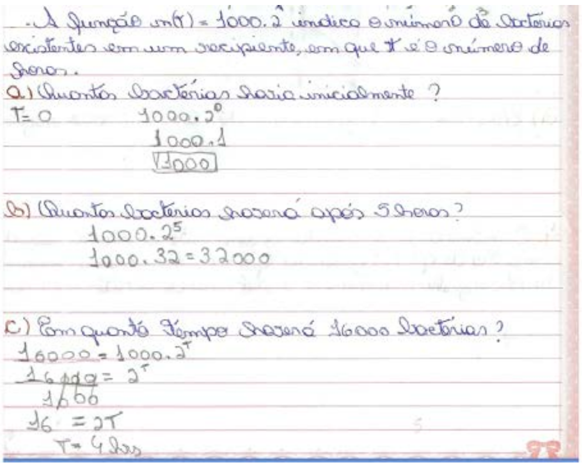
Tabela 4 – Resultado da Questão 3

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	20	0	100%

Fonte:Dados da Pesquisa

Dos 20 alunos pesquisados, todos conseguiram resolver a questão de forma satisfatória. A única observação que gostaria de ressaltar seria que alguns alunos resolveram a **letra c** usando os conceitos de função exponencial (Figura 14). Porém outros alunos trabalharam com o conceito de Progressão Geométrica. Mesmo não havendo feito mostrado, aos alunos, a relação entre função exponencial e progressão geométrica podemos observar, pelas suas respostas, que mesmo intuitivamente os alunos ja relacionam esses dois conceitos e resolvem uma mesma questão de maneira distinta (Figura 15).

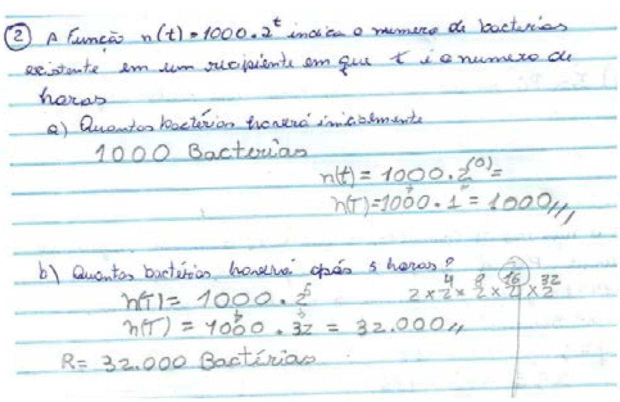
Figura 14 – Resposta do Sujeito A04 para a Questão 3



A função n(t) = 1000.2^t indica o número de bactérias existentes em um recipiente, em que t é o número de horas.
a) Quantas bactérias havia inicialmente?
T=0 1000.2^0
1000.1
$\boxed{1000}$
b) Quantas bactérias haverá após 5 horas?
1000.2^5
1000.32=32000
c) Em quanto tempo haverá 16000 bactérias?
16000 = 1000.2^T
16000/1000 = 2^T
16 = 2^T
T= 4 hrs

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 15 – Resposta do Sujeito A09 para a Questão 3



2) A função n(t)=1000.2^t indica o numero de bacterias existente em um recipiente em que t é o numero de horas
a) Quantas bactérias haverá inicialmente
1000 Bacterias
n(t) = 1000.2^(0) =
n(T)=1000.1 = 1000
b) Quantas bactérias haverá após 5 horas?
2x2x2x2x2 4 8 16 32
n(T)= 1000.2^5
n(T) = 1000 . 32 = 32.000
R= 32.000 Bactérias

Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 4:

Considere a progressão geométrica $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$ *responda:*

a) Qual a lei de formação da progressão?

b) Faça a representação gráfica dessa progressão.

c) Qual é o décimo termo desta progressão?

d) Esta progressão em algum momento terá um termo menor ou igual a zero?

O objetivo dessa questão é fazer uma revisão dos conceitos básicos de Progressão Geométrica.

Queremos observar se o alunos lembram como calcular o termo geral, determinar a razão, achar a lei de formação da Progressão Geométrica e construir a sua representação gráfica.

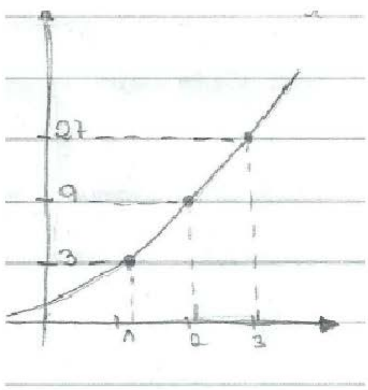
Tabela 5 – Resultado da Questão 4

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	13	7	65%

Fonte:Dados da Pesquisa

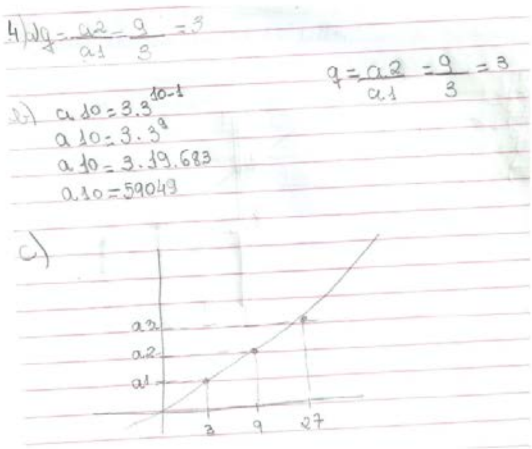
Dos alunos que erraram, 5 construíram a escala do gráfico de forma errada (Figura 16), 2 trocaram os eixos coordenados. Desses 7 alunos, seis colocaram o gráfico da Progressão Geométrica como uma curva, e não como pontos (Figura 17). Podemos observar que a maior dificuldade dos alunos é visualizar que o gráfico da Progressão Geométrica é formada apenas pelos pontos ordenados (n, a_n). Grande parte dos alunos construíram o gráfico da Progressão Geométrica como se fosse uma curva contínua, assim com a Função Exponencial.

Figura 16 – Resposta do Sujeito A08 para a Questão 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 17 – Resposta do Sujeito A12 para a Questão 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 5:

O número de consultas a um site aumenta segundo uma Progressão Geométrica de razão 3. Sabendo que na 6ª semana foram registradas 1 458 visitas, determine o número de visitas ao site na 3ª semana.

O objetivo era apresentar a Progressão Geométrica de uma forma contextualizada e sem o primeiro termo da sequência.

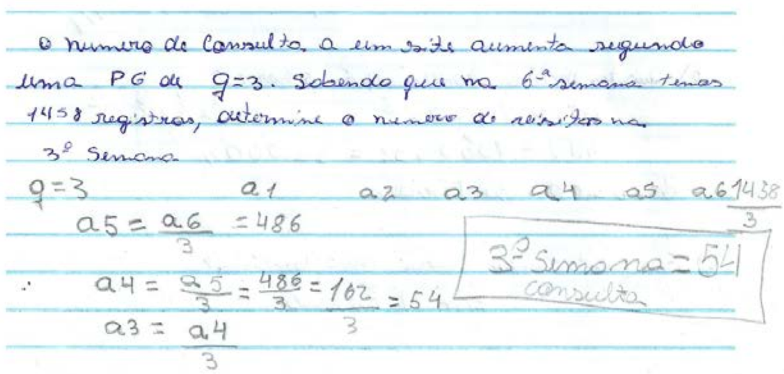
Tabela 6 – Resultado da Questão 5

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	20	0	100%

Fonte:Dados da Pesquisa

Todos os alunos resolveram a questão de forma satisfatória. Alguns usaram a fórmula da Progressão Geométrica, outros completaram a sequência para descobrir o valor desejado (Figura 18).

Figura 18 – Resposta do Sujeito A01 para a Questão 5



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 6:

Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

Tabela 7 – Pilhas

1ª Pilha	2ª Pilha	3ª Pilha	4ª Pilha
1 tábua	2 tábuas	4 tábuas	8 tábuas

Fonte:Dados da Pesquisa

Determine a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha

O objetivo dessa questão era trabalhar com a Progressão Geométrica de uma forma contextualizada.

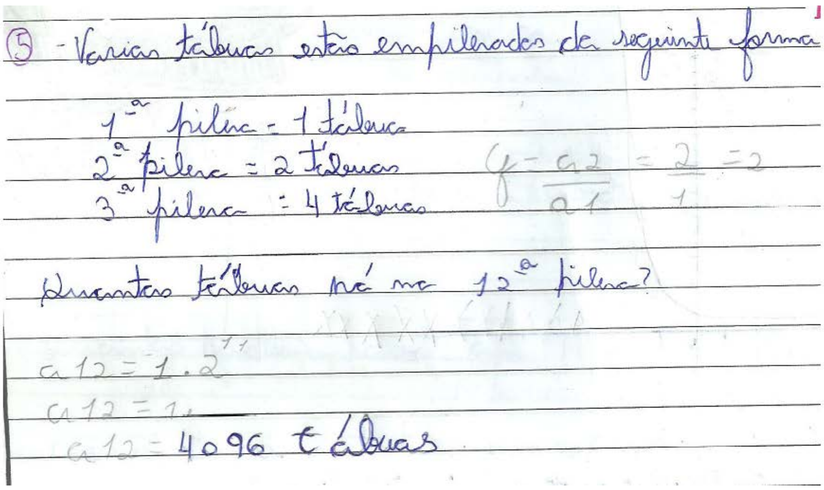
Tabela 8 – Resultado da Questão 6

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	20	0	100%

Fonte:Dados da Pesquisa

Todos os alunos conseguiram resolver a questão de forma satisfatória. Como na questão anterior, alguns alunos usaram a fórmula da Progressão Geométrica (Figura 19), outros completaram a sequência.

Figura 19 – Resposta do Sujeito A02 para a Questão 6



Fonte: Dados da Pesquisa

4.2 Atividade 2: Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica

Nesta subseção, é descrita e analisada a Atividade 2 sobre a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica (Apêndice B).

Este instrumento foi aplicado na turma 3000, no dia 12/09/2016, com duração de 100 minutos e a participação de 20 alunos. Essa atividade é constituída de 5 questões discursivas e foi realizada individualmente.

É apresentada, a seguir, uma análise das respostas dos alunos. Vale relembrar que antes da aplicação dessa atividade foi feita uma intervenção pedagógica com o intuito de apresentar aos alunos a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

Questão 1:

1) No estudo de radioatividade o deslocamento radioativo de um elemento segue uma expressão exponencial. Nesse sentido, denomina-se meia vida ou período de semidesintegração o tempo necessário para que certa massa se reduza à metade. Considere uma substância que tenha uma massa inicial de 100g e meia vida de 5 minutos, determine:

a) A sua massa em 15 minutos?

b) a representação gráfica

O objetivo dessa questão é trabalhar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma contextualizada.

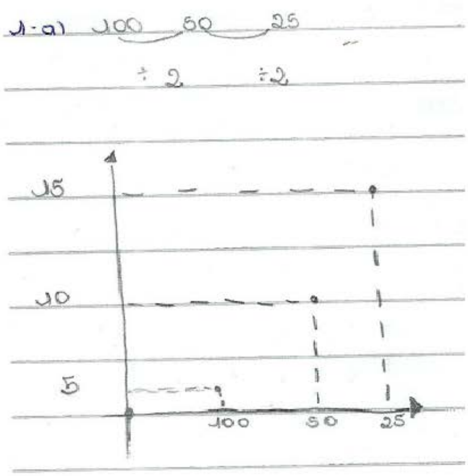
Tabela 9 – Resultado da Questão 1

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	15	5	75%

Fonte:Dados da Pesquisa

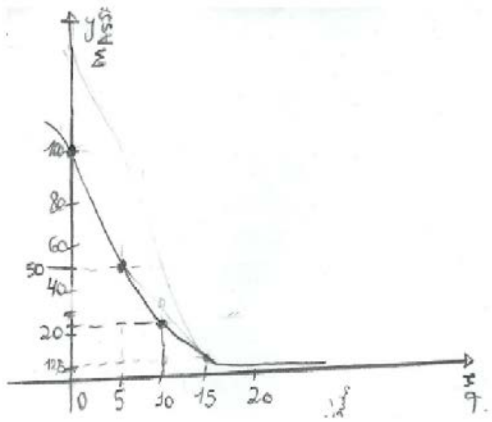
Dos alunos que erraram, o motivo de 2 alunos foi a construção da escala do gráfico de forma errada e por trocar os eixos ordenados (Figura 20). Três alunos representaram a Progressão Geométrica como uma curva (Figura 21).

Figura 20 – Resposta do Sujeito A10 para a Questão 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 21 – Resposta do Sujeito A01 para a Questão 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 2:

Sob condições ótimas de crescimento, ou seja, condições físicas, químicas e nutricionais adequadamente balanceadas, muitas espécies bacterianas apresentam um tempo de geração médio de 1 hora, ou seja, a cada 1 hora uma nova geração de indivíduos é produzida. Essa nova geração mantém as mesmas características da geração anterior. Estas se dividirão produzindo quatro novas células, as quais, dividindo-se, produzirão oito novas células e assim por diante. Este tipo de crescimento é denominado crescimento exponencial ou logarítmico, no qual o número de indivíduos dobra a cada geração.

Certa cultura com 1 000 bactérias tem a característica de dobrar seu número a cada 1 hora. Determine:

a) A lei de formação da função exponencial e a expressão geral da Progressão Geométrica que representa o número de bactérias em função do tempo em horas.

b) O número de bactérias após 2 horas.

c) O instante em que o número de bactérias é 10 vezes o inicial.

d) O esboço gráfico da função exponencial e da Progressão Geométrica.

O objetivo dessa questão é trabalhar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma contextualizada.

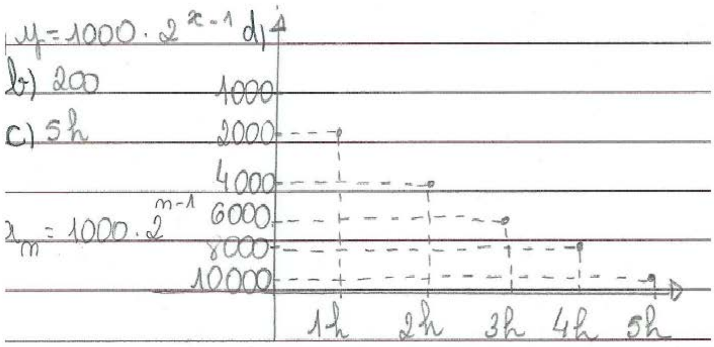
Tabela 10 – Resultado da Questão 2

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	15	3	75%

Fonte:Dados da Pesquisa

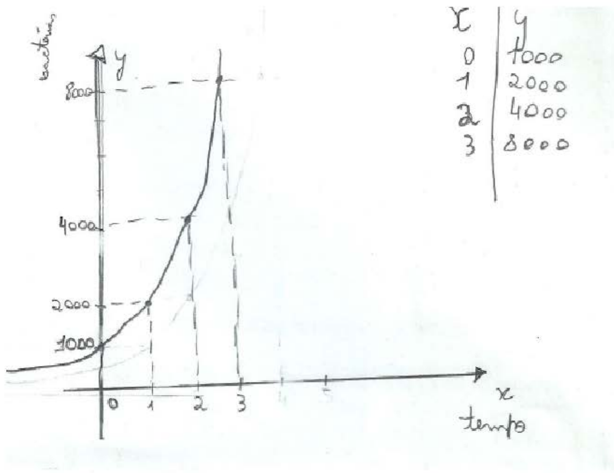
Dois alunos não conseguiram visualizar que a lei de formação da Função Exponencial e a expressão geral da Progressão Geométrica são semelhantes (Figura 22) e três alunos representaram o gráfico da Progressão Geométrica como uma curva contínua e não como uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico da função exponencial. Eles representaram o gráfico da Progressão Geométrica igual ao gráfico da Função Exponencial. (Figura 23).

Figura 22 – Resposta do Sujeito A07 para a Questão 2



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 23 – Resposta do Sujeito A08 para a Questão2



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 3:

Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $n(t) = 100.2^{\frac{t}{3}}$. Nessas condições:

a) o gráfico

b) Após quanto tempo a população será de 51 200 bactéria?

O objetivo dessa questão é trabalhar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma contextualizada, pois o exercício começa apresentando o problema como uma Progressão Geométrica e depois mostra a Função Exponencial relacionada ao problema.

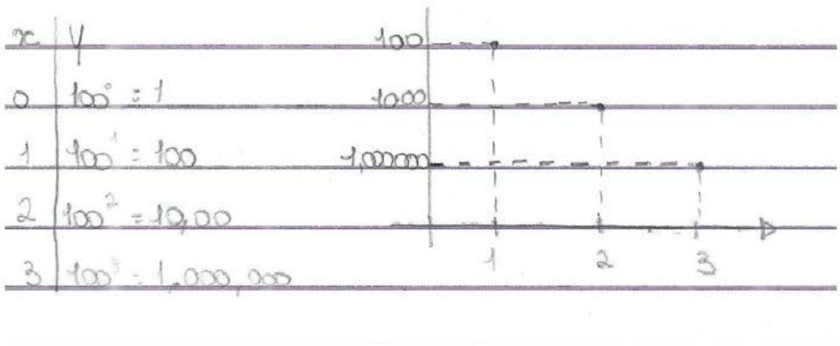
Tabela 11 – Resultado da Questão 3

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	18	2	90%

Fonte:Dados da Pesquisa

Os alunos não apresentam dificuldade em resolver essa questão, isso se deu pelo fato que a expressão da Função já foi apresentada na questão, quando não é apresentada a lei da Função, os alunos apresentam uma maior dificuldade em resolver o problema de Função Exponencial. Os dois que apresentaram erros foi em relação ao gráfico.

Figura 24 – Resposta do Sujeito A04 para a Questão 3



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 4:

Um casal elaborou um plano para saldar as suas dívidas, estimadas hoje em 1 200,00. O seu objetivo, era a cada mês deveriam reduzir, em 10%, o valor da dívida do mês anterior.

a) Represente a sequência dos valores mensais da dívida do casal.

b) Qual será a divida do casal depois de pagar a 5ª parcela?

c) Qual a representação gráfica dessa situação?

O objetivo dessa questão é trabalhar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma contextualizada.

Os alunos não apresentam dificuldade em resolver essa questão. Eles conseguiram representar a sequência e através dessa sequência eles encontraram o valor referente a

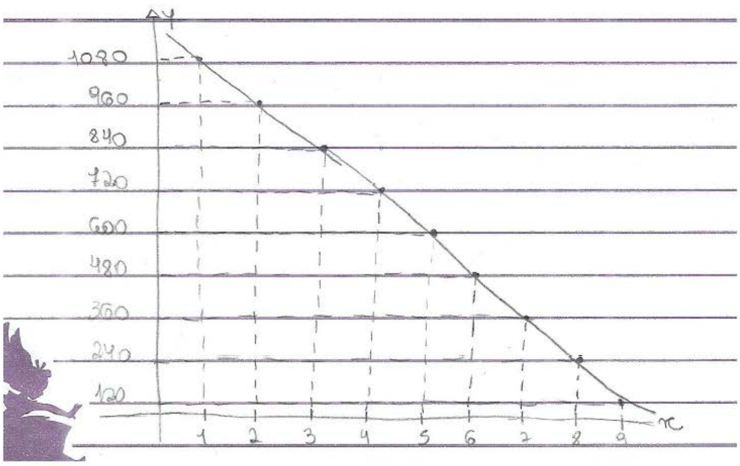
Tabela 12 – Resultado da Questão 4

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	18	2	90%

Fonte:Dados da Pesquisa

5ª parcela. Os dois que apresentaram erros foi, novamente, em relação ao gráfico e ao fato que esqueceram que o desconto seria em relação a dívida do mês anterior, ou seja, aplicaram a ideia de juros simples.

Figura 25 – Resposta do Sujeito A04 para a Questão 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Questão 5:

Um dos perigos da alimentação humana são os microorganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Certo microorganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população de 100 microorganismos a cada 20 minutos, determine:

a) a lei da função

b) a fórmula que representa o termo geral da PG

c) em quanto tempo a população de microorganismo será de 3 200?

O objetivo dessa questão é trabalhar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

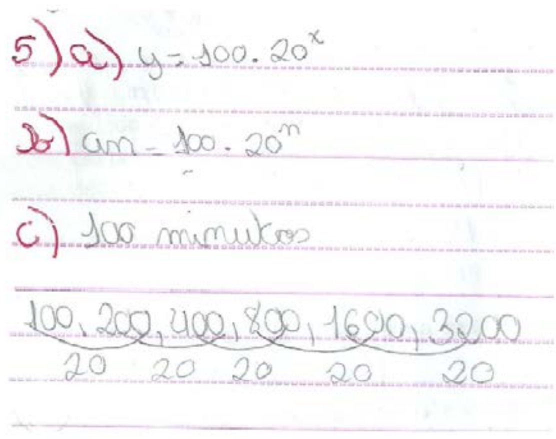
Tabela 13 – Resultado da Questão 5

Turma	Acertos	Erros	Aproveitamento
3000	18	2	90%

Fonte:Dados da Pesquisa

Os alunos, em geral, não apresentaram dificuldade em resolver essa questão. Porém 2 alunos não encontraram a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica.

Figura 26 – Resposta do Sujeito A08 para a Questão 5



Fonte: Dados da Pesquisa

4.3 Análise das atividades aplicadas

Depois de concluída essas duas atividades, tivemos um encontro cujo objetivo foi verificar as dúvidas. Esse encontro ocorreu no dia 15/09/2016 com a turma.

Nesse momento foram discutidas as respostas das questões da Atividade 2, por meio de questionamentos orais, e sendo apresentada as respostas das questões propostas. Porém também achei necessário discutir alguns pontos da Atividade 1, tais como a construção dos gráficos, já que muitos alunos ainda apresentaram dificuldades.

Pude observar que houve evolução no entendimento da relação entre esses conteúdos. Vários alunos nem imaginavam que houvesse ligação entre esses conteúdos. Consegui concluir também que a aceitação do trabalho foi muito satisfatória, os alunos apresentaram bastante interesse em responder as atividades e participar desse debate final. Todos os alunos tiveram alguma contribuição nessa discussão, ou por meio de dúvidas ou de observações. Alguns alunos comentaram que não sabiam a diferença entre o gráfico da Função Exponencial e a Representação gráfica da Progressão Geométrica, para o gráfico da Função Exponencial era igual ao gráfico da Progressão Geométrica. Outra observação de vários alunos foi o fato de conseguirem resolver problemas de Função Exponencial apenas construindo a sequência de Progressão Geométrica, o que para eles foi bem mais simples. Outro ponto que alguns alunos discutiram foi a questão da base da Função Exponencial ser a razão da Progressão Geométrica.

Durante o desenvolvimento da sequência didática, alguns alunos me chamavam para tirar dúvidas, como fazem de costume, porém a minha interferência foi a mínima possível, de modo que os alunos passaram a ter um comportamento autônomo, como era de se esperar.

Tive receio de que alguns alunos se comportassem de maneira semelhante a quando fazem trabalhos ou atividades individualmente ou em grupo em uma aula normal, deixando de fazer alguma questão ou fazendo sem comprometimento, mas isso não aconteceu, os alunos se dedicaram e tentaram fazer as atividades com muita responsabilidade.

Em virtude dos números e de tudo o que foi exposto, pode-se afirmar: o objetivo foi atingido.

Capítulo 5

Considerações Finais

São notórias as dificuldades dos alunos em lidar com a Matemática, e da maioria dos professores em orientar o aprendizado de vários assuntos sem fugir da sua formalidade. Isso faz com que o aluno se distancie mais da compreensão do objetivo principal.

Foi muito viável a oportunidade de compreender a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica, relação essa que ficaria esquecida ou não seria trabalhada no nível médio. Seria de importante valia que o conteúdo de Progressão Geométrica fosse apresentado para os alunos no 1º ano do Ensino Médio, posteriormente ao Conteúdo de Função Exponencial, facilitando assim mostrar a relação entre eles.

Podemos ressaltar que com esse trabalho os alunos observaram que apesar das definições serem distintas, a Função Exponencial e a Progressão Geométrica possuem comportamentos semelhantes e por isso poderíamos relacioná-las através de suas representações algébricas e gráficas. Outro ponto importante foi que os alunos conseguiram entender, em algumas situações, um mesmo problema pode ser resolvido usando qualquer um dos dois conceitos, de Função Exponencial ou Progressão Geométrica.

Portanto, mostrar a Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica deve fazer parte do currículo escolar. É claro que não devemos deixar de lado as aulas expositiva, onde apresentamos as definições de cada conteúdo separadamente, porém as situações didáticas e inter relação entre conteúdos, podem e devem ser utilizadas de modo a estabelecer uma aprendizagem completa.

Fazendo um breve paralelo dos resultados desta proposta com os três estudos citados na introdução desta trabalho, conclui-se que como (CARDOSO, 2012) o uso dessa relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica amplia o campo de conhecimento dos alunos proporcionando uma aprendizagem significativa. Porém o trabalho de (CARDOSO, 2012) propõe o uso de registros de representação semiótica e recursos digitais. De forma distinta dos trabalhos de (SENA, 2014) e (SOARES, 2015), que contemplam apenas uma proposta didática, não havendo aplicação das atividades.

A partir de tudo que observei pode-se afirmar que o principal objetivo do trabalho foi alcançado, mostrar a relação entre esses dois conceitos e visualizar a importância de se trabalhar os dois conteúdos de maneira integrada.

Vale destacar que, ao longo dessa pesquisa, outras questões foram se apresentando, alimentando, assim, o processo de pesquisa e por este motivo, devem ser destacadas como sugestões para um futuro prosseguimento do trabalho:

1. trabalhar com a Relação entre Função Afim e Progressão Aritmética, já que foi um questionamento levantado pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

2. experimentar e analisar a sequência didática em anos que apresentem os conteúdos de de Função Exponencial e Progressão Geométrica de forma sequenciada.

3. usar recursos digitais e gráficos para apresentar a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.

4. o trabalho foi desenvolvido no Ensino Médio, numa futura aplicação, poderia ser estendida para alunos do Ensino Superior de forma que se evidenciem as relações existentes entre ambos, contribuindo para a construção do conhecimento.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática. Editora Edgar Blücher Ltda., Sao Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: A History of Mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1991. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 26, 27, 28 e 29.

BRASIL. Ensino médio–orientaçoes educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

BRASIL. *INEP*. Acesso em 15/09/2016: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/resultados>. Citado na página 16.

BRASIL, P. Saeb. *INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*, 2011. Citado na página 16.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. Funções. *Ponta Grossa: Editora UEPG*, 2006. Citado na página 22.

CARAÇcA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* [S.l.]: 9. edição, Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

CARDOSO, R. N. *Um estudo de Progressões Geométricas e Funções Exponenciais, relacionando-as através da conversão dos registros de representação semiótica, com o auxílio de um objeto de aprendizagem.* [S.l.]: Monografia de Conclusão de Curso - Instituto Federal Fluminense, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 64.

COSTA, A. B. D. *História das Sequências e Progressões.* Acesso em 15/12/2016: [s.n.], 2008. Disponível em: <www.geocities.ws/ailton_barcelos/historia.sequencias_progres.doc>. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 28, 29 e 30.

CURY, H. N. *Análise dos erros o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. [S.l.]: 1. edição, Belo Horizonte: Autêntica, 2007. Citado na página 49.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995. Citado na página 23.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. [S.l.]: 3.edição, São Paulo:Editora Livraria da Física, 2009. Citado na página 29.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: 4. edição. São Paulo: Atlas., 2002. Citado na página 45.

IBGE. *Sinopse do Censo Demográfico*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2010. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2010/tabelaspdf/Brasiltab14.pdf>. Citado na página 35.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmo*. [S.l.]: Atual, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 40.

IFRAH, G. *Os números*. [S.l.]: Globo Livros, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

LIMA, E. L. Revista do professor de matematica. *Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática*, 1999. Citado na página 32.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. [S.l.]: 1. edição, Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado na página 32.

LIMA, E. lage. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.* [S.l.]: 1. edição, Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 41.

LOCATELLI, O. C.; MALLMANN, E. M. O potencial dos mediadores tecnológicos na mediaçâo pedagógica: Temas transversais e formação de professores. *Revista Digital da CVA, Ricesu, v.5, n. 19, Fev*, 2009. Citado na página 17.

MINAYO, M. C. *O desafio do Conhecimento - Pesquisa Qualitativa em Saúde*. [S.l.]: 1. edição, São Paulo: Hucitec, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

MORGADO, A.; CARVALHO, P. C. *Matemática Discreta*. [S.l.]: 1. edição, Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Mateática., 2014. Citado na página 41.

MOURA, M. A. L. *Investigando Padrões em PA e PG*. Belo Horizonte - MG, 2004. Citado na página 17.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2003. v. 7. Citado na página 49.

RJ. *Governo do Estado do Rio de Janeiro. Secretaria de Estado de Educaçâo. Currículo Mínimo de Matemática.* 2012. Disponível em: <http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=759820>. Citado na página 18.

RUTHING, D. Some definitions of the concept of function from bernoulli, joh. to bourbaki, n. *Mathematical Intelligencer*, SPRINGER VERLAG 175 FIFTH AVE, NEW YORK, NY 10010, v. 6, n. 4, p. 72–77, 1984. Citado na página 24.

SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. A construção do conceito de função: alguns dados históricos. *Traços*, v. 11, p. 81–94, 2003. Citado na página 23.

SENA, A. S. *Pogressão Geométrica Integrada a Função Exponencial: Uma Abordagem ao Ensino Médio*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 64.

SILVA, J. A. F. da. *Refletindo sobre as Difivuldade de Aprendizagem na Matemática: Algumas Considerações*. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Católica de Brasília, 2005. Citado na página 16.

SOARES, I. J. *Inter-Relação entre Progressão Geométrica e Função: Aplicada ao Ensino Médio*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 64.

VÁZQUEZ, P. S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a través de la historia. *Junta de Gobierno de la FISEM*, p. 141, 2008. Citado na página 22.

YOUSCHKEVITCH, A. P. *The Concept of Function*. Archive for History of Exact Sciences, 1976. Página 6:9. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

Apêndices

APÊNDICE A

Atividade 1

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando Pesquisador: Isabela Ramos da Silva de Sousa
Orientador: Rigoberto Sanabria
Aluno:___________________________________
Turma:_______ Data:____/____/___

Atividade 1 - Revisando Função Exponencial e Progressão Geométrica

1) Seja $f : R \to R_+$, definida por $f(x) = 3^x$. Represente graficamente essa função.

2) Construa o gráfico da função $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

3) [**FMJ-SP, adaptada**] A função $n(t) = 1000.2^t$ indica o número de bactérias existentes em um recipiente, em que t é o número de horas decorridas.

a) Quantas bactérias havia no experimento inicialmente?

b) Quantas bactérias haverá no recipiente após 5 horas do início do experimento?

c) Em quanto tempo após o início do experimento haverá 16 000 bactérias?

4) Considere a progressão geométrica $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ...\right)$, responda:

a) Qual a lei de formação da progressão?

b) Faça a representação gráfica dessa progressão.

c) Qual é o décimo termo desta progressão?

d) Esta progressão em algum momento terá um termo menor ou igual a zero?

5) [Gelson Iezzi, 2013, p.216] O número de consultas a um site de comércio eletrônico aumenta semanalmente(desde a data em que o portal ficou acessível), segundo uma Progressão Geométrica de razão 3. Sabendo que na 6ª semana foram registradas 1 458 visitas, determine o número de visitas ao site registrado na 3ª semana.

6) [VUNESP-SP, adaptada] Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
1 tábua	2 tábuas	4 tábuas	8 tábuas

Determine a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha

APÊNDICE B

Atividade 2

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestrando Pesquisador: Isabela Ramos da Silva de Sousa
Orientador: Rigoberto Sanabria
Aluno:_________________________________
Turma:_______ Data:____/____/___

Atividade 2 - Relacionando Função Exponencial e Progressão Geométrica

1) [UFJF, adaptada] No estudo de radioatividade, especificamente em cinética das emissões, o deslocamento radioativo de um elemento segue uma expressão exponencial.

Nesse sentido, denomina-se meia vida ou período de semidesintegração o tempo necessário para que certa massa se reduza à metade. Considere uma substância que tenha uma massa inicial de 100g e meia vida de 5 minutos, determine:

a) A sua massa em 15 minutos?

b) a representação gráfica

2) Sob condições ótimas de crescimento, ou seja, condições físicas, químicas e nutricionais adequadamente balanceadas, muitas espécies bacterianas apresentam um tempo de geração médio de 1 hora, ou seja, a cada 1 hora uma nova geração de indivíduos é produzida. Essa nova geração mantém as mesmas características da geração anterior. Estas se dividirão produzindo quatro novas células, as quais, dividindo-se, produzirão oito novas células e assim por diante. Este tipo de crescimento é denominado crescimento exponencial ou logarítmico, no qual o número de indivíduos dobra a cada geração.

Certa cultura com 1 000 bactérias tem a característica de dobrar seu número a cada 1 hora. Determine:

a) A lei de formação da função exponencial e a expressão geral da Progressão Geométrica que representa o número de bactérias em função do tempo em horas.

b) O número de bactérias após 2 horas.

c) O instante em que o número de bactérias é 10 vezes o inicial.

d) O esboço gráfico da função exponencial e da Progressão Geométrica.

3) [PUC-MG, adaptada] Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $n(t) = 100.2^{\frac{t}{3}}$ Nessas condições:

a) o gráfico

b) Após quanto tempo a população será de 51 200 bactéria?

4) [**UFPE, adaptada**] Um casal elaborou um plano para saldar as suas dívidas, estimadas hoje me R$ 1 200,00. A cada mês deveriam reduzir, em 10%, o valor da dívida do mês anterior.

a) Represente a sequência dos valores mensais da dívida do casal.

b) Qual será a divida do casal depois de pagar a 5ª parcela?

c) Qual a representação gráfica dessa situação?

5) Um dos perigos da alimentação humana são os microorganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a Salmonella. Atitudes simples, como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microorganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população de 100 microorganismos a cada 20 minutos, determine:

a) a lei da função

b) a fórmula que representa o termo geral da PG

c) em quanto tempo a população de microorganismo será de 3 200?