GILBERTO JARDIM COELHO

INEQUAÇÃO POLINOMIAL: UM MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

NOVEMBRO DE 2016

GILBERTO JARDIM COELHO

INEQUAÇÃO POLINOMIAL: UM MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Nelson Machado Barbosa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2016

Coelho, Gilberto Jardim

C968i Inequação polinomial : um método alternativo de resolução / Gilberto Jardim Coelho. — Campos dos Goytacazes - Rio de Janeiro: UENF, 2016.

54 f.: il. (alguns color.), forms. ; 30 cm

Orientador : Nelson Machado Barbosa.

Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2016.

1. Inequação polinomial. 2. Soluções numéricas – Afastamento. 3. Método alternativo - matemática. 4. Livros didáticos. 5. Equações polinomiais. I. Barbosa, Nelson Machado. II. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. III. Título.

CDD 512.9422

GILBERTO JARDIM COELHO

INEQUAÇÃO POLINOMIAL: UM MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mes-tre em Matemática."

Aprovada em 25 de Novembro de 2016.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFFluminense

Profª. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF

Prof. Mikhail Petrovich Vishnevsvii
D.Sc. - UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a minha família, aos meus amigos, aos meus alunos, aos meus professores, enfim, a todos quantos deixaram um pedacinho de si comigo, neste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço ao criador da Matemática, bem como de toda a ciência e que do nada trouxe tudo à existência. Primeiro pelo dom da vida, segundo pela sua imensa Graça e terceiro por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

Aos meus Mestres do PROFMAT-UENF, por acreditarem em mim, me mostrarem o caminho da matemática, fazerem parte da minha vida nos momentos bons e ruins, por serem exemplos de profissional.

Ao meu orientador Prof.º Doutor Nelson Machado Barbosa por acreditar em mim, quando nem mesmo eu acreditava, sua ajuda nos momentos mais críticos, contribuiu para o meu crescimento profissional, e por ser também um exemplo a ser seguido. Sua participação foi fundamental para a realização deste trabalho.

À minha mãe, Maria de Lourdes Abreu Jardim, que sempre acreditou em mim e consegue ressaltar meus pontos positivos e me fazer acreditar que tudo posso. À minha irmã, Gilcilane Jardim Coelho, com quem sempre posso contar, em qualquer situação. E a todos os familiares que de uma forma ou de outra me incentivaram nesta jornada.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando.

A todos os meus colegas de mestrado, que eu nunca vou esquecer e que são fonte de inspiração para mim. Em especial, alguns que realmente me carregaram no colo: José Renato Paveis Coelho, Humberto Silveira Gonçalves Filho, Eduardo Correa dos Santos e Guilherme Coelho Machado. Esta turma foi única, pela amizade, entrosamento, empatia e solicitude. Enfim, nos tornamos irmãos.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.

(Hermann Hankel)

Resumo

O fim único deste trabalho é analisar um Método Alternativo de resolução de inequações polinomiais, mais simples que o tradicional encontrado nos livros didáticos. Tal método foi compilado de diversas fontes não oficiais, porém, à luz da matemática, ele foi demonstrado. Para enriquecer esta pesquisa bibliográfica, foram acrescentadas fórmulas de resolução de equações polinomiais a fim de se encontrar as raízes, também com suas devidas demonstrações, bem como a proposição de atividade para sala de aula. Auxiliando, assim, a todos quantos fizerem uso deste.

Palavras-chaves: Inequação, Método Alternativo, Afastamento.

Abstract

The unique purpose of this work is to analyze an alternative method of solving polynomial inequalities, simpler than the traditional one found in textbooks. This method was compiled from several unofficial sources, but in the light of mathematics it was demonstrated. In order to enrich this bibliographical research, formulas were added to solve polynomial equations in order to find the roots, also with their due demonstrations, as well as the proposition of activity for the classroom. He thus helps all who make use of it.

Key-words:Inequality, Alternative Method, Expulsion.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Dentre as dificuldades apresentadas pelos alunos do 9º ano que fizeram a Prova Brasil em 2011, uma delas aponta para as inequações polinomiais de 1º grau (SCAPATICIO, 2012). Fato este, que me despertou curiosidade, pois desde que terminei o curso de Licenciatura em Matemática (UFRJ), década de 1990, já no estágio supervisionado no Cap-UFRJ, percebi uma certa aversão dos alunos com relação à Álgebra. Em parte pela dificuldade que eles tem em transformar linguagem formal em linguagem algébrica (FALCÃO, 1993) e no aumento da distância da matemática escolar com a matemática do cotidiano.

Nos anos que se seguiram, em minha vida docente, este quadro não tem apresentado melhora. Em especial, o estudo das inequações, relacionadas ao domínio das funções, por exemplo, tem chamado minha atenção. Com relação especificamente às inequações, Beltrão (1999) verificou que as dificuldades dos alunos são ainda maiores e começou a pesquisar as causas da ocorrência desse fenômeno. Entretanto, o autor descobriu poucos estudos disponíveis, tendo encontrado como resultado quatro dissertações: A pesquisa de Marinho (1999), *Inequação: a construção de seu significado*, investiga, à luz da Teoria de Gerard Vergnaud (1991), onde verifica se os alunos são capazes de construir o conceito de relação de ordem e se apropriam do estudo da variação do sinal da função, de forma que a interpretação do gráfico ajude na solução de inequações. Traldi Júnior (2002), em seu trabalho, *Sistemas de Inequações do 1º grau – uma abordagem no processo de ensino-aprendizagem focando Registros de Representação*, investiga, utilizando-se da teoria de Raymond Duval Pontes e Kluppel (2011), como os alunos identificam os sinais de desigualdade... FONTALVA (2006), propõe o seguinte tema *Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio*, focado nas inequações de 1º, 2º e 3º graus, utilizando-se das noções da Dialética ferramenta-objeto e Interação entre domínio de Régine (1984). Clara Clara et al. (2007), realiza seu estudo, *Resoluções de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção dos alunos*, também voltado à luz da teoria de Régine (1984), investigando e apontando as dificuldades dos alunos ao resolver problemas de desigualdade ou inequações logarítmicas.

Dessa forma, passei a pesquisar, há algum tempo, recolhendo informações e “dicas” de colegas e algumas poucas em livros. Fui compilando tais informações e buscando formalizar matematicamente a demonstração para tais “dicas”.

A contribuição deste trabalho, diferentemente dos citados até agora, não é voltada para a pesquisa de campo, investigando as dificuldades do aluno, mas sim, na proposta de um Método Alternativo de resolução de inequações, contrapondo-se ao Método tradicional encontrado nos livros didáticos de Ensino Fundamental e Ensino Médio, como por exemplo em (IEZZI et al., 2013).

Vale ressaltar que, algumas dificuldades dos alunos com relação à aprendizagem da matemática estão relacionadas às ideias de linguagem e simbolismo, D'Amore (2007). Uma das propostas deste Método Alternativo é reduzir os simbolismos, na área em questão.

Os PCN's, Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) salientam a importância da resolução de problemas, uma vez que as inequações são utilizadas na maioria das situações como mais uma dessas ferramentas. O objetivo geral deste trabalho é formalizar um Método, que se propõe ser mais objetivo, rápido e com menos etapas a serem desenvolvidas, para se resolver inequações polinomiais, apenas. Os objetivos específicos são, dar subsídio à resolução destas inequações através da apresentação e demonstração de fórmulas que encontrem as raízes das equações. Assim, esta dissertação foi organizada em introdução, quatro capítulos e as considerações finais.

No primeiro capítulo, Continuidade das funções Polinomiais, será oferecida toda a base matemática para o estudo das funções polinomiais. Principalmente no que concerne à continuidade destas funções e ao teorema do valor intermediário, que serão de suma importância para o Método Alternativo.

No segundo capítulo, Equações, serão descritas e demonstradas, todas as fórmulas, aqui utilizadas na resolução de polinômios, ou seja, fórmulas que podem ser usadas para encontrar as raízes dos polinômios. É óbvio que este assunto não está esgotado no primeiro capítulo deste trabalho, mas acreditamos que as sugestões ali descritas sejam suficientes para resolver os problemas que se apresentam no Ensino Fundamental e Médio.

No terceiro capítulo, Método Tradicional de Resolução de Inequações, será apresentado o método tradicional, tal como ele se apresenta nos livros didáticos, com uma breve análise dos pontos de conflito para os alunos, durante a aprendizagem.

No quarto capítulo, Método Alternativo de Resolução de Inequações, passamos a descrever o Método Alternativo de resolução de inequações polinomiais, utilizando o devido rigor matemático, bem como apresentando exemplos de cada caso.

No quinto capítulo, Proposta de Atividade para a Sala de Aula, será proposta uma atividade para ressaltar a diferença entre o Método Tradicional e o Método Alternativo, e também, exercitar o Método proposto.

Por fim, serão apresentadas as considerações finais, destacando os pontos significativos desta pesquisa, bem como sua relevância no meio educacional. Em seguida, as referências bibliograficas e o apêndice.

Capítulo 1

Continuidade das Funções Polinomiais

Sendo o objetivo deste trabalho analisar as inequações polinomiais, e somente elas, é mister que sejam apresentadas aqui as definições básicas das funções polinomiais. Assim daremos embasamento ao desenvolvimento proposto nos próximos capítulos.

1.1 Um pouco da História do cálculo

O surgimento do cálculo diferencial e integral foi palco de uma grande controvérsia sobre a paternidade da descoberta. A discussão envolveu dois grandes gênios: Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1642-1716).

Atualmente considera-se que os dois matemáticos descobriram o cálculo de forma independente e, assim, o crédito é dado a ambos. No entanto, à época o debate de quem merecia o reconhecimento foi acalorado, com defensores aguerridos de ambos os lados.

É importante observar também que uma descoberta matemática importante não aparece do nada. É o resultado do trabalho de muitas pessoas ao longo de séculos. Newton reconheceu este fato por meio de sua famosa frase "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Newton e Leibniz tiveram abordagens diferentes do Cálculo e tomaram caminhos distintos em suas descobertas. Newton tentava resolver problemas na Física e seguiu um caminho mais prático voltado à solução destes problemas. Leibiniz era um filósofo e tomou um caminho mais abstrato.

Foi Leibniz que criou a notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada de y em relação a x. Ele imaginava um "triângulo infinitesimal"formado pelo incremento $\triangle x$ e o incremento correspondente $\triangle y$. A razão $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ se aproxima do coeficiente angular da tangente quando $\triangle x$. Leibiniz via este limite como a divisão de duas quantidades "infinitesimais".

Newton descobriu os fundamentos do Cálculo diferencial e integral muitos anos antes de Leibniz, mas publicou seus trabalhos mais tarde. Newton chamou o cálculo de "métodos de fluxões". Usando diferenciação, Newton produziu métodos que resolviam problemas do cálculo da área, tangentes, comprimento de curvas e máximos e mínimos de funções.

Newton também percebeu o fato crucial de que a integração de uma função é a operação inversa da diferenciação, o que hoje é chamado Teorema Fundamental do Cálculo.

História retirada do Livro Fundamentos de Cálculo de Antonio Caminha Muniz Neto, Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, localizada na Unidade 09 página 21. cite

1.2 Função Polinomial

São funções descritas desta forma:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde x é a variável única e $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1$ e a_0 são os coeficientes.

1.3 Domínio

Como não há restrições para x, ou seja, x pode assumir qualquer valor, então o domínio são todos os Complexos.

$$D(f(x)) \subset C$$

1.4 Imagem

Também não há restrições para f(x), ou seja, f(x) pode assumir qualquer valor, então a imagem são todos os Complexos.

$$Im(f(x)) \subset C$$

1.5 Número de Raízes

Para sabermos quantas raízes um polinômio tem, basta usarmos um teorema bem simples que é o Teorema dos Fatores.

1.5.1 Teorema dos Fatores

Um número x_1 é um zero de um polinômio P se e somente se $P(x)$ tem um fator da forma $(x - x_1)$. Como um polinômio de grau n possui n fatores, concluímos que ele possui n raízes.

1.6 Número de Raízes Complexas

Zeros (ou raízes) complexas (ou imaginárias) aparecem quando temos raízes de índice par (raízes quadradas, quartas, sextas, etc.) de números negativos. Sendo assim, elas sempre ocorrem aos pares.

Ex: $x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9}$

$x = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1}$, chamamos $\sqrt{-1}$ de unidade imaginária i

$x = \pm 3i$

Seja $p : R \longrightarrow R$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com n um número inteiro ímpar e $a_n \neq 0$. Então $p(x)$ possui uma raiz real.

1.7 Continuidade

Condição ou estado do que é contínuo, sem interrupções: a continuidade do barulho da tempestade. Insistência, persistência ou prosseguimento das características próprias de um determinado contexto, fato ou circunstância.Conjunto dos procedimentos que conservam a unidade visual e sonora de uma filmagem.[Eletricidade] Ligação do que faz parte de um circuito elétrico.Radiologia. Ação de passar de um programa para outro sem interrompê-lo.(Etm. do latim: continuitas.atis)

Continuidade é sinônimo de: perpetuidade, ininterrupção, perenidade.

Sejam f, g:$D \longrightarrow R$ e $a \in R$ tal que todo intervalo aberto contendo a intesecte $D\backslash\{\mathtt{a}\}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$

a) $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = l_1 + l_2$

b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = l_1 l_2$

c) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ e $l_2 \neq 0$ tem-se que $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$

d) Se $f(x) = g(x)$ então $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a}(ff)(x) = \lim_{x\to a}(f(x))^2 = (l_1)^2$

Sejam $f, g : D \longrightarrow R$:

a) Se $c \in R$, então $\lim_{x\to a} cf(x) = c(\lim_{x\to a} f(x)) = cl_1$

b) $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = l_1 - l_2$

Se p é um polinômio qualquer, então, para todo $a \in R$,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

Sejam $f : D \longrightarrow R$ uma função definida no domínio $D \subset R$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D\backslash\{\texttt{a}\}$. Dizemos que a função f é contínua em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Seja f uma função definida em um intervalo I. Se f é derivável em $x_0 \in I$ então f é contínua em x_0.

Polinômios são funções contínuas uma vez que são deriváveis em todos os pontos do seu domínio e

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

1.8 Teorema do Valor Intermediário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow R$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = d$$

Por esta razão, o valor numérico do polinômio entre as raízes, terá sempre o mesmo sinal, ou só positivo ou só negativo.

Capítulo 2

Equações

Neste capítulo, veremos as fórmulas necessárias para se obter as raízes das funções polinomiais encontradas nos exercícios voltados ao Ensino Fundamental e Médio, com as suas devidas demonstrações. Este capítulo é importante para o estudo das inequações pois, para encontrar as raízes destas, é necessário primeiramente decompor as inequações em produtos e/ou quocientes de equações. Em seguida, utilizando os métodos descritos neste capítulo, encontramos as raízes destas equações. A conclusão é que as raízes da inequação, são também raízes da equação. Não apresentamos neste capítulo as equações do 1° grau por serem de fácil resolução e por estarem bem detalhadas no capítulo 3.

2.1 Equação do 2º Grau

No capítulo 2 estudaremos equações do 1° grau. Entendemos que por ser muito simples, não há necessidade de acresentarmos um capítulo sobre elas. É possível, da mesma maneira como será feito no capítulo 2, estudar a variação de sinal e resolver inequações de expressões envolvendo produtos e quocientes de trinômios do 2° grau, desde que se possa fatorar esses trinômios em binômios do 1° grau. Neste capítulo, porém, veremos que, sendo possível ou não fatorar os trinômios do 2° grau em binômios, será possível resolver inequações produto e quociente.

2.1.1 Fórmula resolutiva da equação do 2º grau

Neste tópico, a fórmula deduzida é conhecida como a Fórmula de Bhaskara, entretanto a fórmula foi deduzida pelo matemático hindu Sridhara, apesar de Bhaskara ter contribuído significativamente com o estudo de equações algébricas. “...o fundamento utilizado para a dedução da fórmula foi buscar uma forma de reduzir a equação do 2° grau a uma do 1° grau, através da extração de raízes quadradas de ambos os membros da mesma.” (BOYER, 1996) Adiante vemos a dedução clássica da fórmula resolutiva da equação do 2° grau.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\div a)$$
$$x + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(+\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \left(-\frac{b}{2a}\right)$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.1.2 Soma e Produto das raízes – Relações de Girard

Como técnica de resolução da equação do 2º grau podemos destacar também a soma e o produto das raízes derivadas da fórmula de Bhaskara e das Relações de Girard:

$$S = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\tfrac{2b}{2a} = -\tfrac{b}{a}$$
$$P = (\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) = \tfrac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} = \tfrac{c}{a}$$

Assim, teremos

$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Ou, simplesmente

$x^2 - Sx + P = 0$

2.1.3 Produto de binômios do 1º Grau

No conjunto dos reais o resultado do trinômio $ax + bx + c$ só é positivo quando o discriminante $\triangle \geq 0$ e, no caso real, é dada pela fórmula também derivada de Bhaskara e das Relações de Girard:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

onde x_1 e x_2 são raízes da equação associada $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (\frac{-bx}{a}) + \frac{c}{a})$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$
$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)$$
$$= a(s(x - x_1)(x_2(x - x_1))$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

2.1.4 Análise das raízes pelo discriminante $\triangle$

Para representarmos a equação do 2º grau como produto de binômios, precisamos reconhecer suas raízes. Vejamos como fazer isto. Há três casos a considerar conforme se tenha $\triangle > 0$, $\triangle = 0$, ou $\triangle < 0$. Lembrando que $\triangle$

Caso 1: $\triangle > 0$

Se $\triangle > 0$, então as raízes são reais e distintas e o trinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado como se segue. Identificaremos as fórmulas encontradas, como Fórmula 1 e Fórmula 2, para que possamos utilizá-las posteriormente.

Fórmula (1): $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ com $x_i \in \mathbb{R}$ e podemos aplicar o processo descrito no item 2.1.3.

Caso 2: $\triangle = 0$ então as raízes são reais e iguais e o trinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado como se segue:

Se $\triangle = 0$, **Fórmula (2):** $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, Onde x_0 é o valor comum das duas raízes e podemos aplicar o processo descrito no item 2.1.3.

Caso 3: $\triangle < 0$ então as raízes não são reais e o trinômio $ax^2 + bx + c$ não pode ser fatorado em binômios do tipo $x - x_i$ com $x_i \in \mathbb{R}$. Todavia o sinal encontrado para os valores numéricos do trinômio é sempre igual ao sinal de c como se conclui do argumento que se segue.

Seja o trinômio $ax^2 + bx + c$ no qual $\triangle < 0$.

Admitindo-se que a representação gráfica do trinômio seja uma curva contínua (isto é, uma curva na qual não haja interrupções no seu traçado, vide capítulo 1) e, na verdade, este é o caso, então a curva não intercepta o eixo dos x pois as abscissas dos pontos de interseção são as raízes reais do trinômio. Assim, a curva está situada totalmente acima ou totalmente abaixo do eixo dos x. Se pudermos determinar a ordenada de um ponto qualquer da curva, todas as ordenadas (valores numéricos do trinômio) terão o mesmo sinal da 1ª ordenada determinada. Ora, a ordenada mais fácil de se determinar é a ordenada correspondente a abscissa zero, isto é, a ordenada do ponto (0, c). Por conseguinte, podemos concluir que:

Se $\triangle < 0$, o sinal do trinômio (isto é, o sinal de seus valores numéricos) é sempre igual ao sinal de c. Vale lembrar também que, o valor de c nunca será 0, pois senão $b^{2\smile}4ac$ se reduziria apenas a b^2 que será sempre positivo, sendo assim, $\triangle \geq 0$.

Se $\triangle < 0$, então sinal y = sinal c para todo $x \in R$ (1)

Mas $\triangle < 0 \rightarrow b^2 < 4ac \rightarrow ac > 0$

$\rightarrow sinal(a) \ = \ sinal(c)$ (2)

(1) e (2) $\rightarrow sinal(y) \ = \ sinal(a) \ \ \forall x \in R$

2.1.5 Raízes Fracionárias

É possível considerarmos uma equação polinomial do segundo grau com coeficientes inteiros, $ax^2 + bx + c = 0$, com discriminante maior que zero e tal que b/a ou c/a (ou ambos) não seja um inteiro. Para isso, observemos o seguinte:

Se r_1 e r_2 são dois números racionais, escritos de forma que tenham o mesmo denominador d, então

$r_1 = \dfrac{m}{d}$, $r_2 = \dfrac{n}{d}$, $r_1 + r_2 = \dfrac{m+n}{d}$, e $r_1 \times r_2 = \dfrac{m \times n}{d^2}$

Essa observação fornece um método de reduzir soma e produto de frações em soma e produto de inteiros:

Escreva S e P como frações de forma que o denominador de P seja o quadrado do denominador de S, digamos $S = \dfrac{S'}{d}$ e $P = \dfrac{p'}{d^2}$. Encontre números inteiros m e n com soma S' e produto P'. Então, m/d e n/d têm soma S e produto P.

Exemplo 2.1 *Raízes Fracionárias*

$$13x^2 - 170x + 13 = 0$$

$$S = \frac{170}{13},\ P = \frac{13}{13} = \frac{169}{13^2}$$

Então, $S' = 170$ *e* $P' = 169$*, que leva a* $m = 1$ *e* $n = 169$*. Assim, as raízes da equação são* $r_1 = 1/13$ *e* $r_2 = 13$*.*

Exemplo 2.2 *Raízes Fracionárias*

$$6x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$S = \frac{5}{6},\ P = \frac{-4}{6} = \frac{-24}{36}$$

Então, $S' = 5$ *e* $P' = -24$*, que leva a* $m = -3$ *e* $n = 8$*. Assim, as raízes da equação são* $r_1 = -3/6 = -1/2$ *e* $r_2 = 8/6 = 4/3$*.*

Pela analise do discriminante, podemos estudar a variação de sinal de expressões envolvendo produtos e quocientes de quaisquer polinômios do 1º e 2º graus (com uma variável “independente”, x).

2.2 Equação do 3º grau

Resolver equações do 3º grau não é tarefa fácil. Prova disto é que, só no século XVII foi encontrada uma fórmula para se resolver tais equações

2.2.1 História da Fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano

Para resolvermos as equações do 3º grau e encontrarmos suas raízes, podemos usar o método de Tartaglia-Ferro-Cardano. Frasson (2009) chama de Fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano o método de resolução de equações do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0$. Apesar de durante séculos ter sido conhecida como a Fórmula de Cardano, não foi este quem a demonstrou primeiramente. Antes, apropriando-se dos cálculos dos grandes matemáticos italianos da Idade Média, Tartaglia e Ferro, tornou pública tais soluções. Depois de publicada descobriu-se que tais fórmulas já eram conhecidas há pelo menos 30 anos.

A solução algébrica por meio de radicais é um pouco sofisticada e envolve habilidade em resolução de equações

As fórmulas de Cardano são fórmulas para a solução de equações cúbicas (equações do terceiro grau) reduzidas. Foram publicadas (juntamente com outras fórmulas para a solução de equações quárticas (equações do quarto grau) pela primeira vez em 1545 pelo matemático Girolamo Cardano em seu livro *Ars magna*. As fórmulas para a solução de equações cúbicas reduzidas foram descobertas por Niccolò Tartaglia, e segundo Cardano ainda antes por Scipione del Ferro. A contribuição de Cardano foi o método para a redução da equação geral do terceiro grau para o caso especial (LIMA, 1987).

As fórmulas de Cardano foram uma motivação fundamental para a introdução dos números complexos, pois no *casus irreducibilis*, pela extração da raiz quadrada de um número negativo, pode-se chegar a uma solução real. Este caso somente foi resolvido em 1600 por François Viète mediante trigonometria.

As fórmulas de Cardano atualmente não tem significação prática para uma solução puramente numérica da equação cúbica, pois a solução pode ser determinada pela programação do método de Newton em computadores. Mas continuam atuais quando se idealiza sua solução simbólica (BOYER, 1974).

2.2.2 Poesia na Equação do 3º Grau

A título de curiosidade, foi transcrito um trecho da história da fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano, mais especificamente a forma como foi passada de Tartaglia para Cardano.

Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta por meio de versos. Tal ideia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia. (KLINE, 1972)

A seguir, reproduzimos os versos na sua forma traduzida para a língua portuguesa, extraído diretamente de sua versão original na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti* [6]:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
   Se igualam a qualquer número discreto
   Acha dois outros diferentes nisso

2. Depois terás isto por consenso
   Que seu produto seja sempre igual
   Ao cubo do terço da coisa certo

3. Depois, o resíduo geral
   Das raízes cúbicas subtraídas
   Será tua coisa principal

4. Na segunda destas operações,
   Quando o cubo estiver sozinho
   Observarás estas outras reduções

5. Do número farás dois, de tal forma
   Que um e outro produzam exatamente
   O cubo da terça parte da coisa

6. Depois, por um preceito comum
   Toma o lado dos cubos juntos
   E tal soma será teu conceito

7. Depois, a terceira destas nossas contas
   Se resolve como a segunda, se observas bem
   Que suas naturezas são quase idênticas

8. Isto eu achei, e não com passo tardo
   No mil quinhentos e trinta e quatro
   Com fundamentos bem firmes e rigorosos
   Na cidade cingida pelo mar

(TARTAGLIA, 1959)

2.2.3 Fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano

Demonstração da fórmula de resolução da equação do terceiro grau, ou fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano.

Seja a equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$.

Cardano demonstrou que realizando a substituição $x = y - \dfrac{a}{3}$ elimina o termo x^2 da equação.

Mas nós desejamos ver isso na prática. Então, vamos realizar a substituição de variáveis considerando $y = x + m$ uma variável de x. Temos portanto que $x = y - m$.

Substituindo na equação do terceiro grau:

$$a(y-m)^3 + b(y-m)^2 + c(y-m) + d = 0$$

$$ay^3 - 3ay^2m + 3aym^2 - am^3 + by^2 - 2bym + bm^2 + cy - cm + d = 0$$

$$ay^3 - 3ay^2m + by^2 + 3aym^2 - 2bym + cy - am^3 + bm^2 - cm + d = 0$$

$$ay^3 + (-3am + b)y^2 + (3am^2 - 2bm + c)y - am^3 + bm^2 - cm + d = 0$$

Desejamos que o termo y^2 seja nulo. Então, fazemos:

$$-3am + b = 0 \Rightarrow m = \frac{b}{3a}$$

Substituindo m:

$$ay^3 + \left[3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - 2b\left(\frac{b}{3a}\right) + c\right]y - a\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{b}{a}\right)^2 - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{3ab^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right) = 0$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir toda a equação por a.

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

Fazendo: $-\dfrac{b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a} = p$ e $\dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = q$, temos uma equação na incógnita y simplificada do tipo:

$$y^3 + py + q = 0$$

Se $y = u + v$, ou seja, estamos dizendo que y pode ser expresso na forma de uma soma de dois números os quais são raízes da equação. Logo:

$$(u+v)^3 + (u+v)p + q = 0$$

$u^3 + 3uv^2 + 3u^2v + v^3 + pu + pv + q = 0$

$v^3 + u^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$

$(v^3 + u^3) + (3uv + p)(u + v) + q = 0$

A equação é verdade para:

$v^3 + u^3 = -q$ e

$3uv + p = 0 \Rightarrow uv = -\dfrac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$

Observando o resultado anterior, vemos que u^3 e v^3 são raízes de uma equação do tipo $w^2 - Sw + P = 0$, onde S e P são respectivamente a soma e o produto das raízes. Logo, podemos escrever tal equação como:

$w^2 + qw - \dfrac{p^3}{27} = 0$

Usando a Fórmula de Bhaskara $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, chegamos à conclusão que:

$w = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$

Como u^3 e v^3 são raízes dessa equação, então:

$u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$

$v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$

Para concluir. Dado que $y = u + v$, então:

$y = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$

Essa fórmula fornece as raízes da equação de 3^0 grau do tipo $x^3 + px + q = 0$.

É claro que existe uma forma de fazer esta equação ainda mais relacionada com a original, porém é resultado de modificações algébricas muito entediantes e cansativas. Além do mais, o cálculo de p e q não é difícil: é só substituir os valores originais na equação.

2.2.4 Fatoração

Usar a fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano, no dia a dia, não é tarefa muito fácil. Podemos utilizar de outros recursos para encontrarmos as raízes das equações do 3º grau. Temos, por exemplo, o recurso da fatoração. Neste caso, depende da percepção de quem está resolvendo. Observe os exemplos:

Exemplo 2.3 *Fatoração*

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

Colocando x^2 e -1 em evidência, temos:

$x^2(x+3) - 1(x+3) = 0$ $(x^2-1)(x+3) = 0$

Lembrando que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$$(x+3)(x+1)(x-1) = 0$$

Concluímos então que as raízes são -3, -1 e 1

Exemplo 2.4 *Fatoração*

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$x^2(x-2) - 1(x-2) = 0$ $(x^2-1)(x-2) = 0$

$$(x-2)(x+1)(x-1) = 0$$

Assim teremos as raízes -1, 1 e 2

Caso o termo independente seja 0, a solução fica muito simplificada, veja:

$ax^3 + bx^2 + cx = 0$ *($d = 0$), neste caso, basta colocar x em evidência*

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

Assim, teremos, $x = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$ (e esta, é uma equação do 2º grau).

Se nossa percepção não estiver tão apurada assim, temos outro método mais objetivo.

2.2.5 Teorema das raízes racionais no 3º Grau

Podemos achar as raízes da função polinomial do 3º grau, utilizando uma técnica mais simples e muito difundida no ensino médio. Consiste em encontrarmos uma das raízes pelo Teorema das raízes racionais. Este método serve para polinômios de qualquer grau.

Se uma função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com coeficientes inteiros $a_n,\ a_{n-1},\ ..., a_1,\ a_0$, tem zeros racionais, isto é, se $x = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros e $\frac{p}{q}$ na forma irredutível é um zero de $f(x)$, então a_0 é divisível por p e a_n é divisível por q.

O Teorema das raízes racionais nos permite fazer uma lista de todos os possíveis zeros racionais de uma dada função polinomial com coeficientes inteiros. Daí, podemos testá-los e verificar quais dos possíveis candidatos são realmente zeros da função, por exemplo:

Exemplo 2.5 *Utilizaremos o Teorema das Raízes Racionais para achar os zeros do polinômio*

$P(x) = 3x^4 + 8x^3 - 72x^2 - 127x + 50$

1º Passo) Encontrar os divisores (positivos e negativos) de 50 e de 3

Como este é um polinômio de quarto grau, ele tem no máximo quatro raízes reais. Se $x = \frac{p}{q}$ é uma raiz racional de $P(x) = 0$, então os possíveis valores de p são os fatores inteiros de 50, que são $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25 \; e \; \pm 50$.

Os possíveis valores de q são os fatores inteiros de 3, que são $\pm 1 \; e \pm 3$.

2º Passo) Se x é da forma $\frac{p}{q}$, ambos inteiros e irredutíveis, então p divide d e q divide a. Assim encontramos os possíveis valores de x, como vemos adiante. I $x = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{25}{3}, \pm \frac{50}{3}$.

3º Passo) substituir esses valores na equação de 4º grau, até encontrar uma raiz x_1.

Após, uma rápida inspeção, podemos concluir que $x = -2$ é um zero de $P(x)$, ou seja:

$$P(-2) = 0$$

4º Passo) dividimos $P(x)$ por $(x + 2)$ (pelo dispositivo de Briot-Ruffini), encontrando o quociente $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, e como -2 é raiz, o resto é 0 (Teorema de D'Alembert).

Desse modo, dividindo $P(x)$ por $(x + 2)$ obtemos:

$$P(x) = (x + 2)(3x^3 + 2x^2 - 76x + 25)$$

Utilizando novamente o Teorema das Raízes Racionais, em $3x^3 + 2x^2 - 76x + 25$.

Da mesma forma, podemos verificar que $x = 1/3$ é um outro zero de $P(x)$, então

$$P(x) = (x + 2)(x - 1/3)(3x^2 + 3x - 75)$$

Os demais zeros são as raízes da equação quadrática $3x^2 + 3x - 75$ que podem ser encontrados, sem dificuldade, usando uma das fórmulas citadas no item 2.1.

2.3 Equação do 4º Grau

No Ensino Fundamental e Médio, não é comum encontrarmos funções quárticas completas. Porém, estudaremos e demonstraremos este caso, bem como os mais simplificados.

2.3.1 Casos Simplificados

São casos em que uma breve análise superficial da função já nos remete a uma simplificação da função.

2.3.1.1 Quando o termo independente é 0

Assim teríamos a seguinte situação

$P(x) = x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 9x$ colocando x em evidência.

$P(x) = x(x^3 + 7x^2 - 3x + 9)$ deste modo, basta resolver a função do terceiro grau.

2.3.1.2 Fatoração

Neste caso, é possível fatorar a função do 4° grau, transformando-a em duas de grau menor.

$P(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 15x$ fatorando:

$P(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 5x)$ basta, então, resolver as duas funções do 2° grau.

Este método, como já foi dito no ítem 2.2.4, depende da "visão", sensibilidade de cada um.

2.3.1.3 Teorema das Raízes Racionais no 4º Grau

Este caso já foi visto no item 2.2.5. Sua aplicação em equações do 4° grau é idêntica.

2.3.2 Equação Biquadrada

Equações biquadradas são equações escritas da seguinte forma geral: $ax^4+bx+c = 0$. Para resolvê-la é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau.

Para melhor compreensão veja no exemplo (abaixo) como essa transformação acontece e como chegamos às raízes da equação biquadrada.

Exemplo 2.6 $y^4 - 10y^2 + 9 = 0 \quad \longrightarrow$ *equação biquadrada.*

$(y^2)^2 - 10y + 9 = 0 \quad \longrightarrow$ *também pode ser escrita assim.*

Substituindo variáveis: $y^2 = x$, *isso significa que onde for* y^2 *iremos colocar* x.

$x^{2\,\breve{}}10x + 9 = 0 \quad \longrightarrow$ *agora resolvemos essa equação do 2º grau encontrando* x_1 *e* x_2.

Por soma e produto das raízes, encontramos

x_1 *= 9*

x_2 *= 1*

Essas são as raízes da equação $x^{2\,\breve{}}10x + 9 = 0$, *para encontrarmos as raízes da equação biquadrada* $y^{4\,\breve{}}10y^2 + 9 = 0$ *devemos substituir os valores de* x_1 *e* x_2 *em* $y^2 = x$.

Para x = 9

$y^2 = x$

$y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{9}$

$y = \pm 3$

Para x = 1

$y^2 = x$

$y^2 = 1$

$y = \pm\sqrt{1}$

$y = \pm 1$

Portanto, a solução da equação biquadrada será: $S = \{-3, -1, 1, 3\}$.

2.3.3 Fórmula Geral

Demonstração da fórmula de resolução da equação quártica.

Demonstração da fórmula de resolução da equação quártica Tomemos a seguinte equação quártica:

$$a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

Dividindo por a_4 (como sempre, para gerar uma equação mônica), temos

$$z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

Fazendo $z = x - \frac{b}{4}$, obteremos um polinômio da forma

$$x^4 + px^2 + q = rx$$

Agora, para simplificarmos a equação quádrica reduzida acima, temos que obter uma equação da forma $(x^2 + A^2) = (Bx + C)$,

que ficará fácil de resolver pela fórmula quadrática. Primeiro, temos alguns passos a seguir:

$x^4 + q = rx - px^2$

$x^4 + 2\sqrt{q}x^2 + q = rx - px^2 + 2\sqrt{q}x^2$

$(x^2 + q)^2 = rx + (2\sqrt{q} - p)x^2$

Como queremos que o segundo membro seja um quadrado perfeito, vamos adicionar um número qualquer k a ambos os lados, de modo que o membro da esquerda continue um quadrado perfeito, e o da direita vire um quadrado perfeito. Temos, então:

$(x^2 + q)^2 + 2qk + 2x^2k + k^2 = rx + (2\sqrt{q} - p)x^2 + 2qk + 2x^2k + k^2$

$(x^2 + q + k)^2 = rx + (2\sqrt{q} - p + 2k)x^2 + 2qk + k^2$

Agora, para o membro da direita ser um quadrado perfeito, então o Delta (discriminante da equação do segundo grau do membro à direita, quando analisamos na fórmula quadrática) tem de ser zero. Esse discriminante é

$\triangle = r^2 - 4(2\sqrt{q} - p + 2k)(2qk + k^2)$

$\triangle = r^2 - 16\sqrt{q^3}k - 8\sqrt{q}k^2 + 8pqk + 4pk^2 - 16qk^2 - 4k^3$

$\triangle = -4k^3 + 4(p - 4q - 2\sqrt{q})k^2 + 8(pq - 2\sqrt{q})k + r^2 = 0$

Então, para achar o número que satisfaça o requisito do membro à direita ser um quadrado perfeito, devemos resolver a equação acima. Pela fórmula de Tartaglia-Ferro-Cardano para cúbicas, temos (pelo menos) uma solução real para tal equação de terceiro grau em k. Podemos também utilizarmo-nos do truque da demonstração anterior para reduzir ao nosso caso estudado, e daí achamos k. Temos, com

$(q + k) = A$

$\sqrt{2\sqrt{q} - p + 2k} = B$

$\sqrt{2qk + k^2} = C$

Obtemos a equação

$(x^2 + A)^2 = (Bx + C)^2$,

a qual é o desejado. Observamos que não demos uma fórmula explícita para z, é quase impossível fazer tanta conta! Reparem que daríamos k em sua forma de resolução de cúbica, o que ainda demandaria modificações e, além disso, este apareceria em um radical. Logo após, apareceria este radical dentro de mais um radical, o que é suficientemente cansativo para não fazermos. Resumindo, é melhor procurar resolver as equações do 4º grau pelos outros métodos apresentados neste capítulo.

2.3.4 Equação do 5º Grau

Resolver a equação do quinto grau significa encontrar as suas raízes.

Pelo Teorema de Abel-Ruffini, não é possível resolver equações de grau igual ou superior a 5 através de transformações algébricas dos radicais, isto é, não é possível encontrar uma fórmula geral ou algoritmo algébrico geral para resolver todas as equações de grau 5, apesar de existirem alguns critérios que determinam quais são solúveis por operações algébricas.

Métodos para achar soluções aproximadas são possíveis através do Cálculo Numérico, por exemplo, o método de Newton-Raphson, entre outros (que não será apresentado aqui por encontrar-se fora do escopo dos ensinos fundamental e médio).

Existem métodos que reduzem uma equação geral do quinto grau, eliminando sucessivamente os coeficientes dos termos do quarto, terceiro e segundo grau, através de operações com radicais (estas operações são feitas resolvendo-se equações do quarto grau ou menor). Em seguida, chega-se a uma equação da forma que pode ser resolvida pelo radical de Bring ou através de funções teta. Uma vez que estes métodos são complexos demais para o objetivo deste trabalho, não teceremos comentários sobre eles.

Concluíndo, a partir do 5° grau, as raízes das equações deverão ser encontradas de modo mais prático e rápido, combinando-se: relações de Girard, Algoritmo de Briot-Rufini, fatorações, Teorema de D'Alembert. Deve-se tentar descobrir as raízes, uma a uma e ir reduzindo o grau da equação aos poucos.

Capítulo 3

Método Tradicional de Resolução de Inequação

Este método é amplamente utilizado nos livros didáticos de ensino Fundamental e Médio, veja por exemplo em Iezzi et al. (2013), Filho e Silva. (2003), Dante (2011). Consiste em analisar cada polinômio integrante da inequação separadamente, fazendo o estudo da variação de sinais de cada um.

Para os casos mais simples, inequações do 1° grau, basta fazer uma reta, representativa da função e analisar os sinais, antes de depois da raiz.

3.1 Revisando o Método Tradicional

Vamos começar, revisando o Método tradicional, tal como é proposto nos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

No produto e/ou quociente de vários polinômios temos que construir uma reta real para cada polinômio, com suas raízes ordenadas de forma crescente, colocando os sinais de cada polinômio em sua própria reta, sendo estas retas, uma paralela à outra. Adicionar uma reta extra ao final (paralela também), onde serão colocadas todas as raízes, para então, fazermos a multiplicação de sinais de todas as retas, em cada intervalo, colocando o resultado da multiplicação na reta solução (a reta extra).

É patente, que alunos, tanto do nível fundamental quanto do nível médio, sintam dificuldade na análise de sinal das funções polinomiais, principalmente quando se apresentam em grau acima do 3° ou em produtos e/ou quocientes de vários polinômios. Não pela dificuldade intrínseca do conteúdo apresentado, mas, pelo método de resolução. Dificulta também o algoritmo usado para a análise do sinal de cada intervalo da reta real. D'Amore (2007) também, aponta outra dificuldade no processo de aprendizagem da matemática: *"...para muitos professores existe uma identidade entre o conceito matemático que se deseja* *ensinar, o símbolo matemático e os algoritmos."*

Uma das propostas do Método Alternativo é simplificar os algoritmos utilizados na resolução de inequações.

3.2 Inequações do 1º Grau

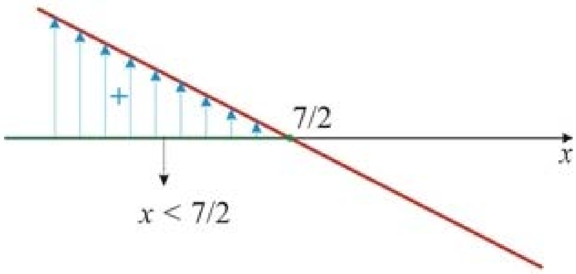
Pode-se resolver qualquer inequação do 1° grau por meio do estudo de sinal de uma função polinomial do 1° grau, com o seguinte procedimento:

1. Iguala-se a expressão $ax + b$ a zero;
2. Localiza-se a raiz no eixo x;
3. Estuda-se o sinal conforme o caso.

Exemplo 3.1 $-2x + 7 > 0$

$$-2x + 7 = 0$$
$$x = 7/2$$

Figura 1 – Representação geométrica da inequação: $-2x + 7 > 0$



Fonte: Autoria Própria

Como podemos observar na figura 1, uma vez que $f(x) = -2x + 7$ é representado por uma reta, decrescente, $f(x) > 0$ se $x < \dfrac{7}{2}$. Logo, teremos o seguinte conjunto solução:

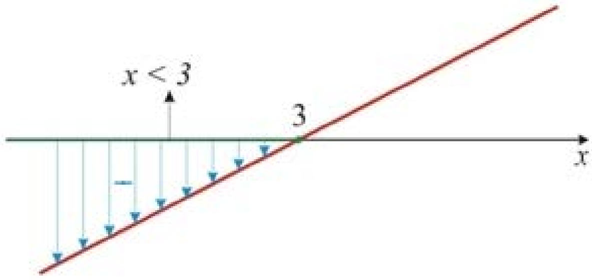
$S = \{x \in R / x < \frac{7}{2}\}$

Exemplo 3.2 $2x - 6 < 0$

$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

Como podemos observar na figura 2, uma vez que $f(x) = 2x - 6$ é representado por uma reta, crescente, $f(x) < 0$ se $x < 3$. Logo, teremos o seguinte conjunto solução:

Figura 2 – Representação geométrica da inequação: $2x - 6 < 0$



Fonte: Autoria Própria

$S = \{x \in R/x < 3$

3.3 Inequações do 2º Grau

O método tradicional trata a inequação do segundo grau como um todo, uma única expressão que deve ser analisada e associada ao seu gráfico, a parábola. É necessário saber que o sinal do coeficiente a representa a posição da concavidade da parábola, para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$.

Exemplo 3.3 *Vamos resolver a inequação* $3x^2 + 10x + 7 < 0$

Pelo método de Bhaskara:

$\triangle = b^2 - 4ac$

$\triangle = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7$

$\triangle = 100 - 84$

$\triangle = 16$

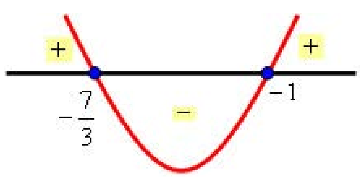
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2.3} = \frac{-10 \pm 4}{6}$

$x' = \frac{-10+4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$

$x'' = \frac{-10-4}{6} = \frac{-14}{6} = -7/3$

Veja a figura 3.

Figura 3 – Representação geométrica da inequação: $3x^2 + 10x + 7 < 0$



Fonte: Autoria Própria

Como podemos observar na figura 3, uma vez que $f(x) = 3x^2 + 10x + 7$ é representado por uma parábola, e como $a > 0$ e $\triangle > 0$, pelos itens 2.1.4 e 3.3, a concavidade está virada para cima e existem duas raízes distintas. E, $f(x) < 0$ se $-7/3 < x < -1$. Logo, teremos o seguinte conjunto solução:

$S = \{x \in R/ -7/3 < x < -1\}$

Exemplo 3.4 *Determine a solução da inequação $-2x^2 - x + 1 \leq 0$.*

$\triangle = b^2 - 4ac$

$\triangle = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1$

$\triangle = 1 + 8$

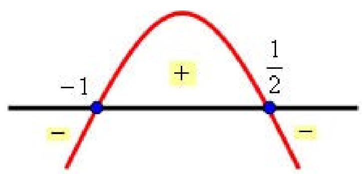
$\triangle = 9$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2.(-2)} = \frac{1 \pm 3}{-4}$

$x' = \frac{1+3}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$

$x'' = \frac{1-3}{-4} = \frac{-2}{4} = -1/2$

Figura 4 – Representação geométrica da inequação: $-2x^2 - x + 1 \leq 0$



Fonte: Autoria Própria

$S = \{x \in R/x \leq -1 \;\; ou \;\; x \geq 1/2\}$

3.4 Inequações Produto

Como exposto no início deste capítulo, o método tradicional trata a inequação produto como várias inequações separadas; estuda os sinais separadamente; para em seguida, através de retas paralelas, multiplicar os sinais referentes ao mesmo intervalo.

Exemplo 3.5 *Ache o conjunto solução da inequação produto abaixo:* $(-3x + 6)(5x - 7) < 0$

Primeiro o estudo do sinal de cada função:

$-3x + 6 = 0$

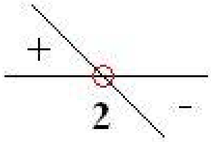
$-3x = -6$

$-3x = -6 : (3)$

$-x = -2 : (-1)$

Logo, $x = 2$

Figura 5 – Representação geométrica da inequação: $(-3x + 6) < 0$



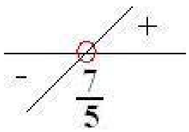
Fonte: Autoria Própria

$5x - 7 = 0$

$5x = 7$

$x = 7/5$

Figura 6 – Representação geométrica da inequação: $(5x - 7) < 0$

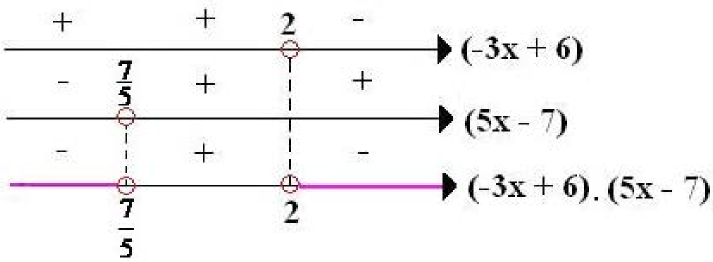


Fonte: Autoria Própria

Na figura 5 vemos que a função é decrescente, assim, o sinal é negativo à direita da raíz e positivo à esquerda da raíz. Na figura 6 vemos que a função é crescente, assim, o sinal é positivo à direita da raíz e negativo à esquerda da raíz.

De posse das soluções de cada função isolada, e tendo em vista as etapas citadas no 2º parágrafo do tópico 3.1, montamos o algoritmo visto na figura 7:

Figura 7 – Representação geométrica do produto: $(-3x + 6)(5x - 7) < 0$



Fonte: Autoria Própria

Como a inequação quer valores que sejam menores que 0 escrevemos que o conjunto solução será:

$S = \{x \in R / x < 7/5 \ \ ou \ \ x > 2\}$

Exemplo 3.6 *Encontre o conjunto solução da inequação produto* $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$

Primeiro o estudo do sinal de cada função:

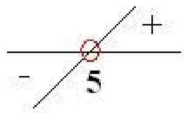
$2x - 10 = 0$

$2x = 10$

$x = 10 : (2)$

$x = 5$

Figura 8 – Representação geométrica da inequação: $2x - 10 > 0$



Fonte: Autoria Própria

Pelo item 2.1.2 , teremos: $S = 5$

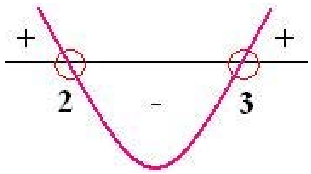
$P = 6$

É fácil ver que as raízes serão:

$x' = 3$

$x'' = 2$

Figura 9 – Representação geométrica da inequação: $x^2 - 5x + 6 > 0$



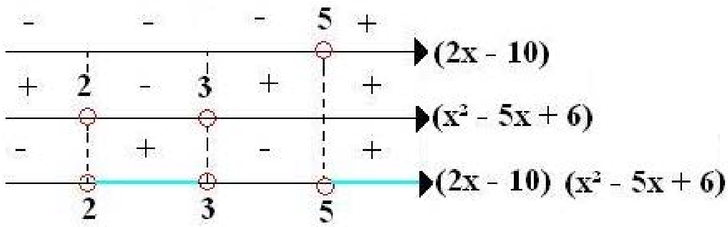
Fonte: Autoria Própria

Na figura 8 vemos que a função é crescente, assim, o sinal é positivo à direita da raíz e negativo à esquerda da raíz. Como podemos observar na figura 9, uma vez que $f(x) = x\breve{}5x + 6$ *é representado por uma parábola, e como* $a > 0$ *e* $\triangle > 0$ *, pelos itens 2.1.4 e 3.3, a concavidade está virada para cima e existem duas raízes distintas. Sinal positivo se* $x < 2$ *ou* $x > 3$ *e negativo se* $2 < x < 3$.

De posse das soluções de cada função isolada, e tendo em vista as etapas citadas no 2º parágrafo do tópico 3.1, montamos o algoritmo da figura 10:

Como a inequação quer valores que sejam maiores que 0*, escrevemos que o conjunto solução de* $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$*, será* $\{x \in R/2 < x < 3 \;\; ou \;\; x > 5\}$

Figura 10 – Representação geométrica da inequação: $(2x-10)(x^2-5x+6)>0$



Fonte: Autoria Própria

3.5 Inequações Quociente

Na resolução da inequação quociente utilizamos os mesmos recursos da inequação produto, o que difere é que, ao calcularmos a função do denominador, precisamos adotar valores maiores ou menores que zero e nunca igual a zero. Observe a resolução desta inequação quociente:

Exemplo 3.7 *Resolver a seguinte inequação* $\dfrac{x+1}{2x-1} \leq 0$

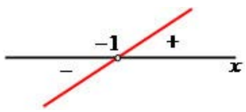
Resolvendo as funções $y' = x+1$ *e* $y'' = 2x-1$*, determinando a raiz da função* $(y=0)$ *e a posição da reta (*$a>0$ *crescente e* $a<0$ *decrescente, onde* a *é o coeficiente angular da reta).*

$y' = x+1$

$x+1=0$

$x=-1$

Figura 11 – Representação geométrica da inequação: $x+1>0$



Fonte: Autoria Própria

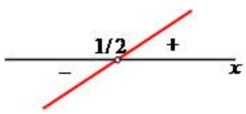
$y'' = 2x-1$

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=1/2$

Figura 12 – Representação geométrica da inequação: $\dfrac{x+1}{2x-1} \leq 0$

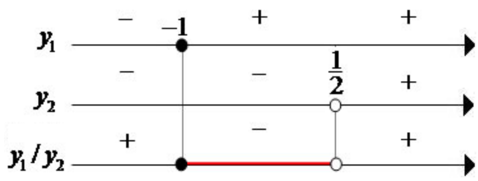


Fonte: Autoria Própria

Nas figuras 11 e 12 foram estudados os sinais das duas funções y' e y''.

Agora, montamos o algoritmo do método tradicional:

Figura 13 – Representação geométrica da inequação: $2x - 1 > 0$



Fonte: Autoria Própria

Tendo em vista o resultado do algoritmo, na figura 13, concluímos que x assume os seguintes valores na inequação quociente:

$S = \{x \in R / -1 < x < 1/2\}$

x *não pode ser igual a* $1/2$ *, pois assim o denominador seria* 0.

3.6 Análise do Método Tradicional

Este Método tradicional é eficiente. Porém, quando os polinômios são de grau 3 ou maior, podem ser cometidos erros no quadro comparativo dos sinais, ou na multiplicação de sinais.

A aritmética, em geral, procura encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Já na Álgebra, o objetivo principal, *"é se estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral"* (BOOTH, 1995, p. 24)

A proposta deste trabalho é evitar tais confusões, por exemplo, ao não se utilizar deste algoritmo (quadro comparativo de sinais) e muito menos fazer multiplicações de sinais.

Capítulo 4

Método Alternativo de Resolução de Inequações

Segundo a literatura, os estudantes mostram, em geral, grandes dificuldades na resolução de inequações desde os primeiros anos da escola secundária até à universidade, Costa (1998). Na sua resolução, aplica-se um processo puramente algébrico e, muitas vezes, resolvem-nas como se de equações se tratassem, pois, o fazem substituindo apenas o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade, o que parece ilustrar uma transferência mecânica de procedimentos, Huillet (1996). Neste capítulo falaremos da base teórica do Método Alternativo, bem como de sua aplicação.

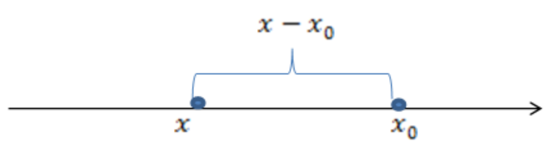
4.1 Afastamento e Inequações

No que se segue admitir-se-á que qualquer reta considerada estará sempre munida de um sistema de coordenadas e quando horizontal, orientada no sentido usual, isto é, da esquerda para a direita.

Definição 1: Seja uma reta r, x_0 a abscissa de um ponto fixo e a abscissa de um ponto corrente de r. Será chamado de afastamento de x a x_0 ao binômio $x - x_0$.

Ao número x_0, chamaremos, raiz do afastamento.

Figura 14 – Representação geométrica do afastamento do binômio $x - x_0$



Fonte: Autoria Própria

O valor de um afastamento $x - x_0$ pode ser positivo ou negativo ou zero conforme x se ache à direita ou à esquerda do x_0 ou coincida com x_0 . Por exemplo, na figura 14 o afastamento $x - x_0$ é negativo.

Abreviadamente:

$x - x_0 > 0$ se e somente se x está à direita de x_0 .

$x - x_0 < 0$ se e somente se x está à esquerda de x_0 .

Posto isto, pode-se interpretar os binômios numa expressão da forma

$$E = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

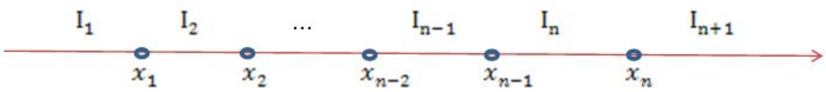
Ou

$$E = \frac{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_p)}{(x - x_{p+1})...(x - x_n)}$$

como sendo os afastamentos de à cada um dos números x_1, x_2, ..., x_n. Será examinado o caso em que os números x_1, x_2, ..., x_n são todos distintos.

Suponha inicialmente que $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e disponha estes números no eixo real. Os intervalos antes da primeira raiz, entre as raízes e depois da última raiz, serão chamado de I_n, representados na figura 15, que ficarão assim dividido em $n + 1$ intervalos abertos, sendo o primeiro da esquerda e o último da direita, ilimitados.

Figura 15 – Intervalos entre raízes



Fonte: Autoria Própria

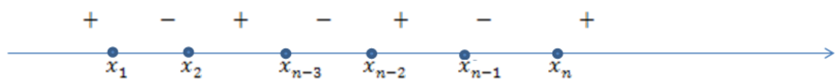
Para um número x pertencente ao último intervalo I_{n+1}, as diferenças $x - x_1, x - x_2, ..., x - x_n$ serão todas positivas e, portanto, para estes valores de $x, E > 0$.

Para um número x no intervalo imediatamente anterior ao último (I_n, na figura) $x - x_1, x - x_2, ..., x - x_{n-1}$ continuarão positivos, porém $x - x_n$ tornar-se-á negativo, resultando para estes valores de $x, E < 0$.

Para um número x no intervalo imediatamente anterior a este último (I_{n-1}, na figura) $x - x_1, x - x_2, ..., x - x_{n-2}$ continuarão positivos, mas, $x - x_n$ e $x - x_{n-2}$, ficarão negativos resultando $E > 0$.

Procedendo-se desta maneira vê-se que há uma alternância nos sinais da expressão. E cada vez que os valores de x passam de um intervalo para o intervalo vizinho, obtendo-se, para o sinal de E, o esquema da figura 16, que é o algoritmo do Método Alternativo:

Figura 16 – Estudo dos sinais nos intervalos



Fonte: Autoria Própria

4.2 Funções produto e quociente

Tsamir, Almog e Tirosh (1998) identificam algumas dificuldades dos alunos com relação à resolução de inequações. Como também identificamos esta dificuldade, vamos agora estudar as funções produto e quociente á luz do Método Alternativo. Perceberemos que a quantidade de etapas necessárias para se chegar ao resultado final reduz-se consideravelmente.

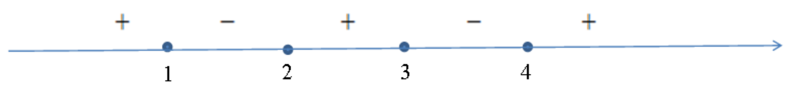
Utilizando-se a teoria de Régine (1984), na qual se acredita que para o aluno mobilizar diversos registros de representação, ao estudar inequações racionais fracionárias, é necessário que o professor também mobilize ou crie condições, por meio de tarefas, que permitam tal mobilização por parte dos alunos, analisaremos funções produto e quociente através de exemplos.

Agora vamos estudar, através de exemplos, a função Produto:

Exemplo 4.1 *Estudar a variação de sinal da função produto*

$$f(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \rightarrow \frac{f(x)}{-3} = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = E$$

Figura 17 – Estudo de sinal da função $f(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$



Fonte: Autoria Própria

Pelo algoritmo do Método Alternativo, figura 17, podemos estudar a variação de sinal da função como se segue:

$f(x) < 0$, *isto é* $f(x)$ *tem o sinal de* -3 *onde* $E > 0$;

$f(x) > 0$, *isto é* $f(x)$ *tem o sinal contrário ao de* -3 *onde* $E < 0$.

Logo:

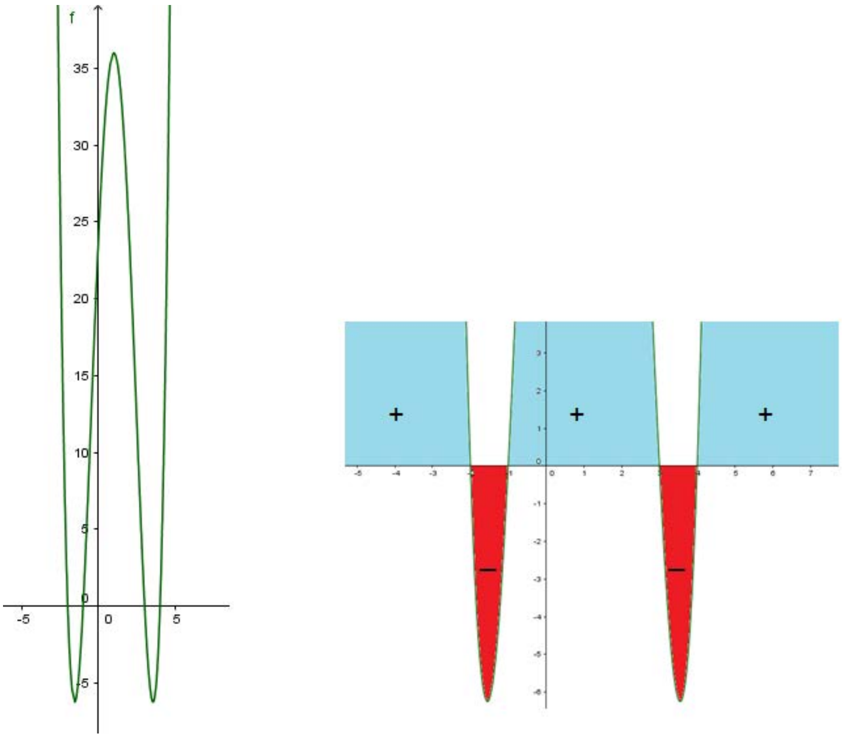
$f(x) > 0$, *quando* $1 < x < 2 \ \ ou \ \ 3 < x < 4$.

$f(x) < 0$, *quando* $x < 1 \ \ ou \ \ 2 < x < 3 \ \ ou \ \ x > 4$.

Exemplo 4.2 *Estudar a variação de sinal da função produto*

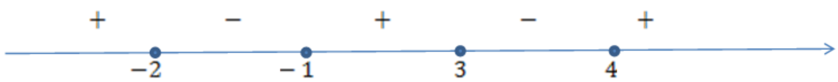
$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$$

Figura 18 – Representação Gráfica de $f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$



Fonte: Autoria Própria

Figura 19 – Estudo de sinal da expressão $f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$



Fonte: Autoria Própria

Na figura 18 temos o gráfico da função produto. Na imagem da esquerda, está detalhado o formato da curva e na imagem da direita destacam-se os sinais da função. Já na figura 19, temos o estudo completo dos sinais da função, através do algoritmo do Método Alternativo. Assim,

$f(x) > 0$ *para* $x < -2 \;\; ou \;\; -1 < x < 3 \;\; ou \;\; x > 4$

$f(x) < 0$ *para* $-2 < x < -1 \;\; ou \;\; 3 < x < 4$

Os dois exemplos a seguir são variações das funções produto e quociente, porém, na fatoração das mesmas aparece um coeficiente em evidência. Assim sendo, temos que estudar o que acontece com o sinal da função. Podemos estudar o sinal de $f(x)$ como se segue:

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ ou $f(x) = a\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_p)}{(x-x_{p+1})(x-x_n)}$

com $0 \neq a \in R$

Ponhamos $\frac{f(x)}{a} = E$ onde $E = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ ou $E = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_p)}{(x-x_{p+1})(x-x_n)}$

Daí $\frac{f(x)}{a} > 0$ se, e somente se $E > 0$ e $\frac{f(x)}{a} < 0$ se, e somente se $E < 0$.

Por conseguinte podemos concluir que:

$f(x)$ tem o sinal de a nos intervalos onde $E > 0$;

$f(x)$ tem o sinal contrário ao de a nos intervalos onde $E < 0$.

Exemplo 4.3 *Estudar a variação de sinal da função produto*

$$f(x) = 2(x-2)(x-3)(x+1)$$

Figura 20 – Estudo de sinal da função $f(x) = 2(x-2)(x-3)(x+1)$

Fonte: Autoria Própria

A figura 20 representa o estudo da variação de sinais de E. Pelo algoritmo do Método Alternativo, figura 20, podemos estudar a variação de sinal da função como se segue:

$f(x) > 0$, *isto é tem o sinal de 2, onde* $E > 0$

$f(x) < 0$, *isto é tem o sinal contrário ao de 2 ou* $E < 0$

$f(x) > 0$ *para* $-1 < x < 2 \;\; ou \;\; x > 3$

$f(x) < 0$ *para* $x < -1 \;\; ou \;\; 2 < x < 3$

Agora vamos estudar, através de exemplos, a função Quociente:

Exemplo 4.4 *Estudar a variação de sinal da função quociente*

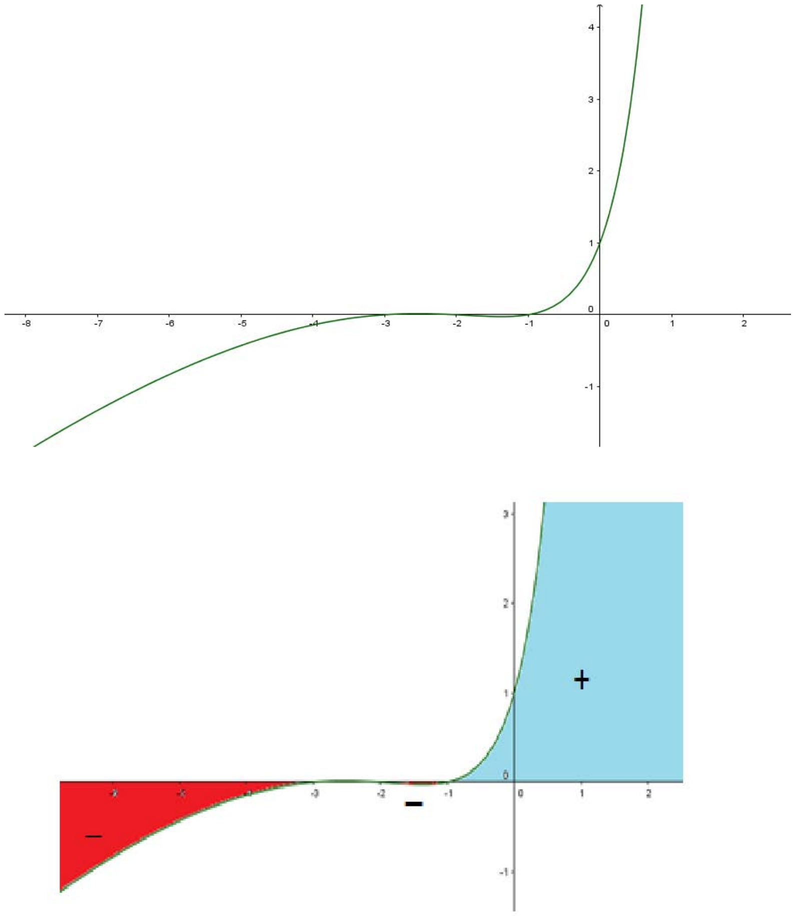
$$f(x) = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}$$

Na figura 21 temos o gráfico da função quociente. Na imagem da direita, está detalhado o formato da curva e na imagem da esquerda destaca se os sinais da função. Já na figura 22, temos o estudo completo dos sinais da função, através do algoritmo do Método Alternativo. Assim,

$f(x) > 0$ *quando* $-3 < x < -2 \;\; ou \;\; -1 < x < 2 \;\; ou \;\; x > 3$

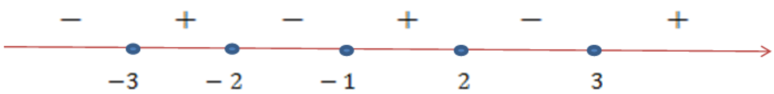
$f(x) < 0$ *quando* $x < -3 \;\; ou \;\; -2 < x < -1 \;\; ou \;\; 2 < x < 3$

Figura 21 – Estudo de sinal da expressão $f(x) = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}$



Fonte: Autoria Própriak

Figura 22 – Estudo de sinal da função $f(x) = 2(x-2)(x-3)(x+1)$



Fonte: Autoria Própria

4.3 Funções com um número par de raízes iguais

Agora, examinaremos o caso em que os números x_1, x_2, ..., x_n não são todos distintos. Suponhamos que o binômio $x - x_i$ ocorra k vezes na expressão E , isto é:

$$E = (x - x_i)^k.F$$

Se o k for par, então, $\forall x \neq x_i$, o sinal de E = sinal de F e este último será obtido pelo processo já descrito.

Exemplo 4.5 *Estudar a variação do sinal da função:*

$$f(x) = (x+2)^4(x-1)(x-3)(x-5)$$

Para $x \neq -2$*, sinal de* $f(x)$*= sinal de* $(x-1)(x-3)(x-5)$

Figura 23 – Estudo de sinal da função $f(x) = (x+2)^4(x-1)(x-3)(x-5)$

Fonte: Autoria Própria

Pelo algoritmo do Método Alternativo, figura 23, podemos estudar a variação de sinal da função como se segue:

$f(x) > 0$*, quando* $-11 < x < 2 \;\; ou \;\; 3 < x \neq 5.$

$f(x) < 0$*, quando* $x < -11 \;\; ou \;\; 2 < x < 3.$

4.4 Funções com um número ímpar de raízes iguais

Se k for ímpar, o sinal de $(x - x_i)^k$ será igual ao de $x - x_i$ e para estudar o sinal de $E = (x - x_i)^k.F$, bastará o sinal de $E = (x - x_i).F$

Exemplo 4.6 *Estudar a variação do sinal da função:*

$$f(x) = (x+2)(x+3)^5(x-5)(x-8)$$

Sinal de $f(x)$ *= sinal de* $(x+2)(x+3)(x-5)(x-8)$

Figura 24 – Estudo de sinal da função $f(x) = (x+2)(x+3)^5(x-5)(x-8)$

Fonte: Autoria Própria

Pelo algoritmo do Método Alternativo, figura 24, podemos estudar a variação de sinal da função como se segue:

$f(x) > 0$*, para* $x < -3 \;\; ou \;\; -2 < x < 5 \;\; ou \;\; x > 8.$

$f(x) < 0$*, para* $-3 < x < -2 \;\; ou \;\; 5 < x < 8.$

Fica subentendido que o aparecimento de mais de uma potência de expoente par ou mais de uma potência de expoente ímpar ou as duas coisas figurando simultaneamente numa expressão deve ser tratada da mesma forma. Generalizando, podem aparecer todos os casos em um único problema, a expressão, inequação, será tratada da mesma forma.

Capítulo 5

Proposta de Atividade para a Sala de Aula

A Álgebra é, como já dissemos na introdução deste trabalho, na maioria das situações, apenas uma ferramenta no auxílio à resolução de problemas pertinentes a outros ramos da matemática. Uma atividade, envolvendo inequações, para ficar bem elaborada, abordaria outras áreas de conhecimento da matemática. Vamos propor aqui uma atividade, simples, unicamente sobre inequação, para ressaltar a diferença entre o método tradicional e o Método Alternativo, e também, exercitar o Método aqui proposto. Vamos tentar fazer isto através de uma didática de construção do conhecimento que torne os alunos participativos o tempo todo. Levamos também em consideração que os dois métodos já foram apresentados aos alunos.

5.1 Método Tradicional x Método Alternativo

Objetivos

- Mostrar como funciona o método tradicional;
- Reafirmar a importância de se encontrar as raízes de funções polinomiais;
- Mostrar o Método Alternativo;
- Fazer uma comparação entre os dois métodos.

Público Alvo

- Alunos da 1ª série do Ensino Médio. (Se a atividade só envolvesse polinômios até o 2º grau, poderia ser para o 9º ano do Ensino Fundamental também).

Pré-requisitos

- É necessário o conhecimento prévio sobre os dois métodos.

Materiais e Tecnologias

- A fim de motivar os alunos, tornando mais agradável uma tarefa que, via de regra, é mecânica, utilizaremos cartolina branca representando o caderno (cor de fundo); pequenos círculos feitos com cartolina azul para simbolizar o sinal positivo e pequenos círculos feitos com cartolina vermelha para simbolizar o sinal negativo;
- As retas que representam cada polinômio, serão feitas com pincel atômico, preto;
- Elementos básicos para uma aula tradicional, como quadro, giz/pincel, apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se a divisão da turma em grupos de até 4 pessoas para um trabalho colaborativo. A aplicação da atividade deverá ser feita em sala de aula devido à necessidade do quadro para as devidas explicações, com isso, se torna necessário materiais tradicionais para a ministração de uma aula normal.

Dificuldades Previstas

- Encontrar as raízes de uma equação do 4° grau e outra do 3° grau.
- Montar o algoritmo do Método Tradicional e resolvê-lo pode confundir um pouco os alunos, tendo em vista o número de equações e raízes.

Descrição geral (Tempo previsto: 50 minutos)

Será sorteado, para cada grupo, uma inequação, que deverá ser resolvida pelo método tradicional e pelo Método Alternativo:

01. (30 min) Encontrar as raízes dos polinômios envolvidos na inequação.

Exemplo de inequação:

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}{(x^3 + 2x^2 - x - 2)(x^2 - 16)} > 0$$

Resposta esperada: Vamos chamar de:

$P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x$

$P_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$P_3(x) = x^2 - 16$

Encontrando as raízes:

Vamos encontrar primeiro as raízes de $P_1(x)$. Conforme o item 1311,

Assim, uma das raízes é 0. Dividindo por $(x - 0)$, teremos

$x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

Usando agora o item 1.2.5, em $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, vemos que as possíveis raízes são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ e ± 18

Não é difícil concluir que 2 é uma das raízes.

Dividindo por $(x - 2)$, teremos

$x^2 - 9$

Por 1.1.2, encontramos as raízes $+3$ e -3.

As raízes de $P_1(x)$ são: $0, 2, 3$ e -3, ou seja,

$P_1(x) = x(x - 2)(x - 3)(x + 3)$ forma fatorada

Agora vamos encontrar as raízes de $P_2(x)$

Usando, 1.2.4 em $P_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, teremos

$P_2(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$

Logo, uma das raízes será -2 e, por 3.1.2, as outras duas serão $+1$ e -1 .

As raízes de $P_2(x)$ são: $-1, -2$ e $+1$, ou seja,

$P_2(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$ forma fatorada

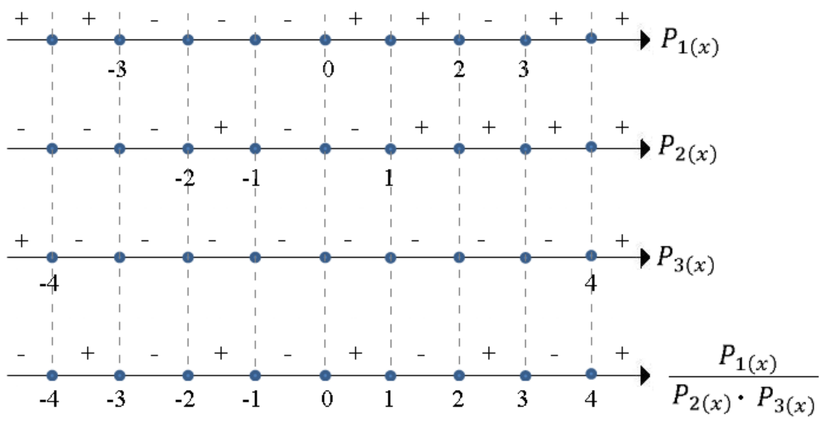
Por último, resolvendo $P_3(x)$ por 1.1, encontramos as raízes -4 e $+4$, ou seja,

$P_3(x) = (x - 4)(x + 4)$ forma fatorada

02.(10 min) Represente as raízes de cada polinômio $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ em uma reta real distinta e estude o sinal das funções polinomiais pelo método tradicional Resposta esperada:

Na Figuras/figura45 encontram-se as representações dos sinais das funções $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ de cima para baixo. Ao final da figura, a reta extra com o resultado da multiplicação de sinais em todas as retas anteriores.

Figura 25 – Estudo de Sinal



Fonte: Autoria Própria

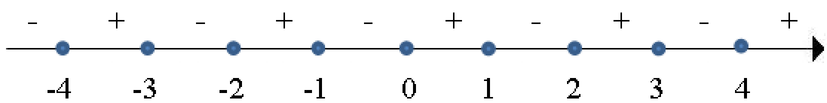
03.(05 min) Resolvendo pelo algoritmo do Método Alternativo:

Resposta esperada:

raízes $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 4, as mesmas já encontradas.

Na Figuras/figura46 estão representadas todas as raízes do polinômio correspondente à inequação original, bem como os sinais da função polinomial.

Figura 26 – Estudo de Sinal



Fonte: Autoria Própria

04.(10 min) Comparando os dois métodos

Resposta esperada:

É fácil constatar que, além de ser mais trabalhoso o Método Tradicional, por seu algoritmo carregado, com muitas informações visuais, pode induzir ao erro. O mesmo não acontece com o Método Alternativo, cujo algoritmo é simples e com poucas informações visuais. É também de fácil construção, pois só utiliza uma reta real e os sinais são sempre colocados da mesma forma, alternando-se os sinais, iniciando pelo sinal positivo e começando pelo último intervalo da direita para esquerda.

5.2 Possíveis Continuações ou desdobramentos

O objetivo foi mostrar que existe outra maneira, outro método de resolução de inequações. Que tanto um quanto o outro vão chegar à mesma conclusão, entretanto o método apresentado, para alunos do ensino fundamental e médio, pode ser mais atraente.

Esta atividade é apenas o início de uma série que pode se tornar bem mais criativa e instigante acrescentado polinômios mais complexos ou fazendo perguntas menos diretas e mais elaboradas, do tipo: Encontre o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x}{6x^3 - 11x^2 + 4x}}$$

Assim, a resolução desta atividade exigiria a aplicação de conhecimentos sobre Existência de raízes quadradas, Domínio de função, além dos apresentados neste trabalho.

Considerações Finais

Sensibilizado com a grande dificuldade apresentada pelos alunos no que diz respeito à Álgebra, desenvolvi este trabalho, no campo das Inequações, a fim de dar, mais uma alternativa de resolução para as mesmas. Uma ferramenta a mais para os alunos.

O presente estudo teve por alvo analisar um Método Alternativo, mais objetivo, rápido e com menos etapas a serem desenvolvidas, para se resolver inequações polinomiais.

Assim como no método tradicional, neste também depende de se conhecer as raízes de todos os polinômios envolvidos, quer seja no produto deles quer seja no quociente. Foram apresentados aqui, alguns métodos para se encontrar as raízes de polinômios de diferentes graus, com suas demonstrações. Acreditamos que os métodos apresentados são suficientes para resolver todos os problemas de Ensino Médio e Fundamental, apesar de não termos esgotado o tema, como foi dito na introdução.

A grande diferenciação que se faz entre os dois métodos é na análise final, para saber em que intervalos a função apresentada é crescente ou decrescente. Comparando:

Algoritmo do Método Tradicional

1°) Tem-se que construir uma reta real para cada polinômio;

2°) Colocar os sinais de cada função em sua própria reta;

3°) Colocar estas retas, uma paralela à outra, com suas raízes ordenadas de forma crescente;

4°) Adicionar uma reta extra ao final (paralela também), onde serão colocadas todas as raízes;

5°) Fazer a multiplicação de sinais de todas as retas, em cada intervalo, colocando o resultado da multiplicação na reta solução (a reta extra).

Algoritmo do Método Alternativo

1°) Colocam-se todas as raízes em uma única reta, ordenadas de forma crescente, com os sinais + e – alternando-se a partir do último intervalo da direita (para a esquerda).

Quando analisamos o sinal de Inequações do 4° grau, ou acima, o Algoritmo do Método Tradicional torna se complexo, na visão do aluno. Muitos intervalos, com muitos sinais a serem multiplicados. Enquanto isso, o Algoritmo do Método Alternativo não se altera.

Ao final da pesquisa, podemos concluir que a proposta de se buscar um Método, que venha ser mais objetivo, rápido e com menos etapas a serem desenvolvidas, para se resolver inequações polinomiais é possível. Através da pesquisa realizada, verificou-se que apesar do Método Tradicional ser eficiente, o Método Alternativo é uma ferramenta de uso mais fácil, diminuindo em muito as chances de erro. Como em qualquer área da matemática, aqui também existe a possibilidade do aluno, após utilizar algumas vezes o método, notar que existe um padrão de resolução e passar a fazê-lo mecanicamente. Sim, é um risco. Porém, cabe ao professor, em sala de aula, cobrar em suas atividades e avaliações, não só a resposta final e numérica, mas o raciocínio completo.

Referências

BELTRÃO, R. C. *Dificuldades dos alunos para resolver problemas com inequações Difficulties of students to solve problems with inequations*. 84–95 p. Dissertação (Mestrado), 1999. Citado na página 12.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *As ideias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual*, 1995. Citado na página 39.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974. Citado na página 22.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1996. Citado na página 18.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino fundamental*. Brasília, DF, 1998. Citado na página 13.

CLARA, M. d. S. H. C. et al. *Resolução de Inequações Logarítmicas: Um olhar sobre a produção dos alunos*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Citado na página 12.

COSTA, M. J. *Vizualização e mudança de quadros numa perspectiva construtivista: uma contribuição para o estudo das inequações.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Pedagógica: Moçambique, 1998. Citado na página 40.

D'AMORE, B. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. Tradução: Maria Cristina Bonomi. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 32.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 1. ed. Av. Otaviano Alves de Lima, 4400, quinto andar e andar intermediário Ala A, Fregesia do Ó, São Paulo - SP: Editora Ática, 2011. v. 1. Citado na página 32.

FALCÃO, J. T. D. R. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. *Estudos em psicologia da educação matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE*, p. 85–107, 1993. Citado na página 12.

FILHO, B. B.; SILVA., C. X. da. *Matemática Aula por Aula*. [S.l.]: Editora FTD, 2003. Citado na página 32.

FONTALVA, G. M. *Um estudo sobre inequações entre alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado), 2006. Citado na página 12.

FRASSON, M. V. S. Como obter raízes por soma e produto quando a não é 1. *Revista do Professor de Matemática*, n. 70, p. 26 e 27, 2009. ICMC-USP. Citado na página 22.

HUILLET, D. Analytical or graphical or resolution: The inequalities case. p. *roceedindins of 2nd National Congress of Association for Mathematics Education of South Africa*, p. 79 – 89, 1996. Citado na página 40.

IEZZI, G. et al. *Matemática Ciências e Aplicações*. 7. ed. Rua Henrique Schaumann, 270, Pinheiros, SP: Editora Saraiva, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 32.

JÚNIOR, A. T. *Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002. Citado na página 12.

KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York: Oxford Univ. Press., 1972. Citado na página 23.

LIMA, E. L. A equação do 3º grau. *Revista Matemática Universitária*, v. 5, p. 9–23, 1987. Citado na página 22.

MARINHO, A. *Inequação: a Construção do seu significado.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1999. Citado na página 12.

PONTES, H. M. de S.; KLUPPEL, G. T. Duval, raymond. ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. org. tânia mm campos. trad. marlene alves dias. são paulo: Proem, 2011. doi: 10.5212/praxeduc. v. 7i2. 0014. *Práxis Educativa*, v. 7, n. 2, p. 603–607, 2011. Citado na página 12.

RÉGINE, D. *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Tese (Doutorado) — Thèse d'Etat, Université de Paris VII, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 42.

TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia (publicação comemorativa do IV centenário da morte de Niccolo Tartaglia)*. Brescia: Appresso de l'auttore, 1959. Citado na página 23.

TSAMIR, P.; ALMOG, N.; TIROSH, D. *Students Soluions of inequalities*. Stellenbosh: South África, 1998. IV. P. 129-136. Citado na página 42.