PAULA EVELINE DA SILVA DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UM ESTUDO COM AUXÍLIO DE MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
JUNHO DE 2014

PAULA EVELINE DA SILVA DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UM ESTUDO COM AUXÍLIO DE MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
JUNHO DE 2014

PAULA EVELINE DA SILVA DOS SANTOS
TEOREMA DE EULER: UM ESTUDO COM AUXÍLIO DE MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIAS/ **PAULA EVELINE DA SILVA DOS SANTOS**. – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ, JUNHO DE 2014-
91 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

– , JUNHO DE 2014.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

PAULA EVELINE DA SILVA DOS SANTOS

TEOREMA DE EULER: UM ESTUDO COM AUXÍLIO DE MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 26 de Junho de 2014.

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof$^{\underline{a}}$. Gilmara Teixeira Barcelos
D.Sc. - IF Fluminense

Prof. Nilson Sérgio Peres Stahl
D.Sc. - UENF

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Helena e Paulo César, que são os grandes incentivadores da minha caminhada profissional e pessoal.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela força, fé e proteção para realização de mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais que com muito carinho, amor e compreensão, tiveram papel fundamental na minha formação. Ao meu irmão, André, e minha cunhada Renata, pela força, amizade e incentivo.

Aos meus afilhados Lavínia e Gabriel, pelo imenso amor e pelas alegrias proporcionadas nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo, pela troca de experiências e pelos momentos de descontração durante o curso.

Às amigas Josie Vasconcellos e Mikelle Rodrigues, pelo apoio, amizade e constante incentivo para superar as dificuldades encontradas no caminho.

À amiga Lívia Azelman, pelo incentivo, carinho, apoio e amizade não só nos assuntos relacionados a esse trabalho, mas em todos os momentos passados durante a trajetória desse curso.

Ao orientador, Geraldo Oliveira, pelo exemplo de competência na orientação deste trabalho.

À todos os professores do curso, em especial, o professor Oscar pela ajuda em vários momentos.

Aos alunos que participaram da experimentação das atividades, por contribuírem diretamente para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos que fizeram parte deste momento da minha vida diretamente ou indiretamente.

A Geometria existe, como já disse o filósofo,
por toda a parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.
O beduíno rude vê as formas geométricas,
mas, não as entende;
o sunita entende-as, mas não as admira;
o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e admira a Ordem e a harmonia!
Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu.
Malba Tahan - Júlio César de Mello e Souza

Resumo

Este trabalho tem como tema principal Poliedros e o Teorema de Euler. Um dos objetivos desse trabalho foi buscar recursos que auxiliem o processo de ensino aprendizagem deste conteúdo da Matemática. Foi feita uma breve análise da definição de Poliedros e apresentadas algumas considerações históricas a respeito dos Poliedros e o Teorema de Euler. Além disso, foram elaborados materiais concretos, sólidos confeccionados de isopor, e atividades investigativas para serem utilizados no estudo do tema citado. Também foi utilizado o *software* Poly em uma atividade a fim de facilitar a visualização de elementos dos poliedros de Platão. Essa proposta de ensino foi aplicada a duas turmas de 2º ano do Ensino Médio. Para efeito de comparação, em uma turma foram utilizados todos os recursos pedagógicos elaborados, já na outra turma utilizou-se apenas um recurso pedagógico além do livro didático, o vídeo Sinfonia de Poliedros que resume todo o conteúdo. A experimentação das atividades foi obtida por meio de observações das atitudes, comportamentos e dúvidas dos alunos. A análise dos mesmos aponta que este estudo contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem do tema proposto.

Palavras-chaves: Geometria, Poliedros, Euler, Material concreto, Poly.

Abstract

ABSTRACT: This work has as main theme Polyhedra and Euler's theorem. One of the goals of this work was to seek resources to assist the process of teaching learning of mathematics content. A brief review of the definition of polyhedra was taken and presented some historical considerations regarding Polyhedra and Euler's theorem. Beside that, concrete, solid materials made of styrofoam, and investigative activities for use in the study of the subject mentioned were drafted. Poly software was also used in an activity in order to facilitate the visualization of elements of Plato polyhedra. That teaching proposal was applied to two groups of 2nd year from high school. For comparison, in a class all teaching resources developed in this work were used , but in the other class we used only a limited number of resources, focusing on a more traditional class . The validation activities was obtained through observations of the attitudes, behaviors and concerns of students. The analysis of the data indicates that this study contributed to the teaching and learning of the subject.

Key-words: Geometry, Polyhedra, Euler, Concrete Material, Poly.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil (BRASIL, 2006). Ela é necessária em uma simples contagem e nos modernos e complexos computadores. Souza e Pataro (2012) ainda afirmam que a Matemática está relacionada a diversas áreas do conhecimento e é uma ferramenta indispensável ao dia a dia. Compreender a Matemática e suas ideias auxilia as pessoas a entender o mundo à sua volta (SOUZA, PATARO, 2012).

Diante das transformações que estão ocorrendo no mundo globalizado, a Matemática tem papel fundamental, pois fornece ao aluno ferramentas que o ajudam a tomar decisões, estimular o raciocínio lógico e desenvolver estratégias (SOUZA, PATARO, 2012). Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana (BRASIL, 2006).

Mas, apesar de estar presente em tantos momentos importantes, pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata. Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados (GIOVANNI, CASTRUCCI, 2009).

Essas dificuldades podem gerar no aluno um desinteresse e um certo desapontamento com essa matéria. Segundo Giovanni e Castrucci (2009) esse desinteresse pode ser perigoso, pois, para esses autores no mundo de hoje, que vive em constante e rápida transformação, ficar à parte do conhecimento matemático é estar à margem das mudanças do mundo. Os PCNs reforçam afirmando que:

> *Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (BRASIL, 2006, p. 40).*

Porém, o ensino de Geometria tem sido negligenciado nos vários níveis de escolarização, apesar de sua importância para a formação do conhecimento matemático (JESUS, 2011).

Segundo Kampff, et. al. (2005) o trabalho com noções geométricas é importante pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, descobrir leis que regem sequências obtidas na prática, formular hipóteses, testar as mesmas e concluir. Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento, que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (KAMPFF, et. al., 2005).

Pirola (2000) afirma que o ensino de Geometria está concentrado mais nos aspectos algébricos e aritméticos do que nos conceitos geométricos, estes ficam sempre para depois. Geralmente, a Geometria só é estudada se houver tempo no final do ano, caso contrário, esta ação fica sob responsabilidade dos professores dos próximos anos (PIROLA, 2000). Considera-se que dois motivos são principais e contribuem para este fato: a falta de tempo decorrente do limitado ano letivo; ou o fato de muitos professores não se sentirem à vontade ao ministrar tais conteúdos.

Considera-se que os alunos preferem aulas que fogem ao padrão normal, por isso, apostou-se na utilização de material concreto e tecnologias como atrativo. Materiais concretos pois, segundo Carvalho (2010) o seu uso no desenvolvimento de conteúdos já representa uma forma de contextualização. E optou-se pelo uso de tecnologias pois, o seu uso em sala de aula é essencial para a formação de um cidadão pleno, que possa desenvolver e aplicar seu conhecimento matemático no dia a dia e consiga as potencialidades desses recursos para aprender mais (CARVALHO, 2010).

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi estabelecida a seguinte questão norteadora que funcionará como centro desse presente estudo:

Quais são as possíveis contribuições de uma proposta de ensino envolvendo o uso de materiais concretos e tecnologias para a aprendizagem de conceitos geométricos, mais especificamente de Poliedros e do Teorema de Euler?

Para o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se uma pesquisa no banco de teses e dissertações de algumas universidades utilizando os termos 'geometria', 'poliedros', 'teorema de euler' e 'materiais concretos'. Foram encontrados alguns trabalhos que serviram de inspiração e nortearam a elaboração deste. Mialich (2013), realizou um trabalho sobre Poliedros e Teorema de Euler, nele a autora analisou o conteúdo de Poliedros em certos documentos oficiais (PCN, Currículo do Estado de SP, Matrizes do SARESP e ENEM), também propôs atividades explorando poliedros, o Teorema de Euler e os conteúdos de área, volume e planificação, utilizando o *software* Poly. Também serviu de base para esse trabalho um projeto da Unicamp denominado Matemática Multimídia [1] que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. As atividades que serviram de base para a elaboração desse trabalho foram encontradas disponíveis no *site* desse projeto. Nessas atividades os alunos utilizam, primeiramente, material concreto, sólidos construídos com isopor, visando facilitar a contagem dos seus números de vértices, faces e arestas. As atividades elaboradas para serem realizadas com o auxílio do *software* Poly, possibilitam que os alunos identifiquem os elementos dos Sólidos de Platão, além de verificar a validade da Relação de Euler nos mesmos. Destaca-se que na folha de atividades entregue aos alunos (Apêndice A) foram colocadas as definições de Poliedros, Poliedros convexos e não convexos, além do próprio Teorema de Euler.

O objetivo geral desse trabalho é elaborar e validar atividades que possibilitem o estudo de Poliedros e do Teorema de Euler por uma turma do Ensino Médio. As atividades foram resolvidas com o auxílio de material concreto e do *software* Poly.

Alguns objetivos específicos foram delineados para se alcançar o objetivo geral, são eles:

- Fazer um estudo aprofundado sobre Poliedros e Teorema de Euler;
- Pesquisar e elaborar atividades diferenciadas, preferencialmente que utilizem materiais concretos, para o estudo do tema;
- Experimentar as atividades e os recursos pedagógicos utilizados;
- Analisar os resultados diagnosticados na experimentação.

Este trabalho consta de cinco capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, faz-se um relato a partir da visão de alguns autores sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em especial de Geometria. Este capítulo subdivide-se em duas seções. Na primeira, comenta-se a falta de motivação dos alunos para aprender e, principalmente para aprender Matemática. Neste momento, também são apresentadas algumas sugestões que contribuem com os professores que querem ajudar o aluno desmotivado. Na segunda seção, destaca-se a importância da Geometria bem como a importância da utilização de recursos pedagógicos para auxiliar o estudo dessa área do conhecimento.

No segundo capítulo, encontra-se o aporte teórico da pesquisa sobre Poliedros estruturado em três seções: Um breve histórico e aplicações, Definição de Poliedro e Os

[1] Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:cortar+cubos>.

Sólidos de Platão. Na primeira seção, é abordada a história dos Poliedros e são apresentadas algumas aplicações desse tema em outras áreas do conhecimento. A seção da definição de Poliedro, apresenta a definição do tema e também a definição que é utilizada neste trabalho. Além disso, encontra-se uma pequena subseção abordando Poliedro convexo. Na última seção, intitulada Sólidos de Platão, consta uma rápida história desses sólidos bem como duas demonstrações para a propriedade de que existem apenas cinco poliedros regulares e convexos.

O terceiro capítulo apresenta um relato sobre Leonhard Euler e uma breve história de seu famoso Teorema. Também apresenta-se em uma subseção a demonstração do Teorema de Euler feita por Elon Lima (1991).

O quarto capítulo aborda a Topologia de Superfícies em uma aplicação no estudo dos Poliedros.

No Capítulo 5, "Relato de Experiência", são descritas todas as ações realizadas para o desenvolvimento deste trabalho. Esse capítulo encontra-se subdividido em quatro seções. A primeira seção, "Procedimentos Metodológicos", descreve-se a metodologia adotada neste trabalho, bem como as etapas que foram cumpridas a fim de se alcançar os objetivos propostos. Na segunda seção, "Recursos pedagógicos" é relatado como foi feita a construção dos materiais concretos e a escolha do *software* utilizado nas atividades, apresentando seus objetivos. Na terceira seção, "Elaboração das Atividades", descrevem-se as atividades desenvolvidas, destacando o objetivo de cada uma delas. Na última seção, "Experimentação das Atividades", é descrito e analisado o processo de experimentação das atividades e dos materiais elaborados.

Nas "Considerações Finais", destaca-se a relevância deste estudo, faz-se uma breve retrospectiva da pesquisa, focalizando os principais resultados; relatam-se as contribuições e as dificuldades encontradas e, finalmente, apontam-se algumas formas de continuidade do estudo realizado.

Capítulo 1

Matemática

1.1 A motivação para aprender Matemática

É constante a reclamação dos professores de que os alunos não tem motivação para estudar, porém poucos sabem realmente o que significa motivação, qual seu papel na determinação do comportamento e o que pode influenciá-la. Muitas concepções erradas sobre o assunto podem levar os professores a acharem que não há o que se fazer a respeito.

A definição do dicionário Aurélio Ferreira (2001) para a palavra motivação é: *"Ato ou efeito de motivar, conjunto de fatores, os quais agem entre si, e determinam a conduta de um indivíduo"*. Sendo assim, considera-se que um aluno motivado se mobiliza, se envolve ativamente na realização das atividades propostas, pois vê um motivo que estimula seu interesse de alguma forma. Sendo assim, motivação é aquilo que faz a pessoa agir em determinada direção. É a motivação que leva uma pessoa a prestar atenção (ou não), a se empenhar (ou não) na realização das tarefas, etc (TORISU, 2010).

Torisu (2010) diz que pesquisas revelam que a motivação para aprender está relacionada com a relação que o aluno estabelece com aquilo que deve aprender. Desse modo, se o assunto o interessa, se a proposta de atividade feita pelo professor o deixa entusiasmado, provavelmente, ele se esforçará mais e se mostrará mais participante. Por outro lado, se as aulas são monótonas, os exercícios repetitivos, se o aluno não acredita que é capaz de resolver o que lhe é solicitado, por considerar difícil demais ou por se acreditar pouco inteligente, ou menos capaz, provavelmente, não se empenhará muito.

Ainda segundo Torisu (2010) a motivação para aprender pode acontecer quando alguém enfrenta obstáculos em nome de um objetivo, ou quando a pessoa se empenha por que se acha capaz, e a motivação também pode vir de estímulo dos pais, de uma relação positiva estabelecida com colegas e professor, de uma atividade interessante, criativa, que mobiliza a curiosidade, etc. Dessa forma, o professor não deve se achar o único responsável pela motivação de um aluno para aprender, pois a mesma não vem apenas dele. Vem da família, dos amigos, da valorização dos estudos pela comunidade na qual o aluno está inserido, entre outros.

Segundo Lima (2004) a motivação para a aprendizagem em um ambiente educacional, é tida como *"A mola propulsora da aprendizagem"*.

Para Bzuneck (2004):

> *A motivação tornou-se um problema de ponta em educação, pela simples constatação de que, em paridade de outras condições, sua ausência representa queda de investimento pessoal de qualidade nas tarefas de aprendizagem. Alunos desmotivados estudam muito pouco ou nada e , consequentemente aprendem muito pouco (BUZNECK, 2004. p. 13).*

Comumente o professor associa a falta de motivação para aprender, em muitos casos também considerada como desinteresse, ao aluno que não presta atenção no que está sendo ensinado, conversa o tempo todo ou fica apático e alheio ao que se passa em classe, não realiza as atividade propostas ou as faz sem nenhum empenho (JESUS, 2011). Isso pode ter como consequências baixo desempenho ou reprovação, indisciplina e conflitos durante a aula e, até mesmo, o extremo da desmotivação com a escola: a evasão (JESUS, 2011). Entretanto não se pode generalizar, pois as vezes a atitude de um aluno pode parecer de que ele está desmotivado, quando na verdade ele pode estar apenas realizando sua tarefa mecanicamente sem se envolver com o objeto de estudo (JESUS, 2011). Buzneck (2004) também afirma que nem sempre um mau rendimento em classe pode ser considerado falta de esforço ou desmotivação.

O professor que deseja melhorar a aprendizagem de seus alunos investindo na motivação deve compreender como cada aluno é motivado. Lima (2004) ressalta que:

> *Para ensinar não basta apenas ter conhecimento duma série de metodologias de ensino, optando por esta ou por aquela. É preciso compreender o próprio aluno: as características da sua personlidade, a etapa de desenvolvimento motor, emocional, cognitivo e social na qual se encontra, bem como a maneira como aprende. (LIMA, 2004. p. 149).*

A escola deve ser um espaço motivador e não somente um lugar de transmissão de conteúdos. Sendo assim, o professor precisa propor atividades que os alunos tenham condições de realizar e que despertem a curiosidade deles e os faça avançar. É necessário levá-los a enfrentar desafios, a fazer perguntas e procurar respostas. Como diz Bzuneck (2004) o professor deve propor, também, tarefas significativas e desafiadoras, que instiguem o aluno a ir um pouco além do que ele 'sabe'.

Para Izquierdo (2011), o envolvimento dos estudantes com os conteúdos das disciplinas, entre outros aspectos, decorrem das ações do professor no ambiente em que se configura a sala de aula. Da mesma forma que sem fome não apreendemos a comer e sem sede não aprendemos a beber água, sem motivação não conseguimos aprender (IZQUIERDO, 2011).

Para Bock, Furtado e Teixeira (2002), são necessários três tipos de variáveis para se ter a motivação: o ambiente (familiar, escolar e o meio social); as forças internas ao indivíduo (necessidade, desejo, vontade, interesse, impulso e instinto) e o objeto que atrai o indivíduo por ser fonte de satisfação da força interna que o mobiliza.

Para Moares (2012):

> *A sensação é, na verdade, de que os alunos estão cada vez mais desmotivados a aprender; os professores, cada vez mais soterrados em demandas diversas, tensos, frustrados; os pais, cada vez mais perdidos, diante da missão de educar para um mundo que não conhecem. (MORAES, 2012. p. 18).*

Com o objetivo de contribuir com os professores que muitas vezes no exercício da profissão apresentam o verdadeiro interesse em ajudar o aluno desmotivado, Caiado (s/d) apresenta algumas sugestões baseadas em estudiosos da área com o objetivo de auxiliar o educador na prática, motivando seu aluno, independente da disciplina ou série em que se encontra:

1. Aplique o conteúdo com entusiasmo, evitando aulas “mecânicas”;
2. Busque sempre relacionar os conteúdos com fatos da atualidade;
3. Elabore atividades que possa detectar a evolução do aluno;
4. Estabeleça um ritmo de aula de forma que todos possam acompanhar o raciocínio que exige o conteúdo;
5. Quando o aluno apresentar dificuldades, apresente a ele pistas proporcionando oportunidades para superar as dificuldades, fazendo com que o aluno exerça seu próprio raciocínio;
6. Ao iniciar a aula estabeleça metas e objetivos dessa, porém, baseados no ritmo da turma, combinando regras para que não seja desviado o objetivo da aula;
7. No momento da avaliação, o ideal é que o professor evite comparações, ameaças, ou seja, condutas negativas que possam vir a refletir maleficamente na auto-estima dos alunos.

Torisu (2010) também lista algumas dicas que podem ajudar ao professor a melhorar a motivação dos alunos. Segundo ele, sempre que possível, o professor deve permitir aos alunos realizarem as atividades com os colegas, estimular o aluno a não desistir, criar situações nas quais os alunos obtenham êxitos sucessivos, possibilitar aos alunos certo grau de participação na escolha das tarefas e na forma como serão conduzidas e principalmente respeitar as capacidades individuais de cada um não realizando comparações em sala de aula que causem desestímulo.

Embora o professor não possa intervir em relação a todos os fatores que desmotivam seus alunos, ele pode fazer a diferença dentro de sua sala de aula, utilizando-se de estratégias motivacionais que venham trazer significado à aprendizagem dos conteúdos e resgatar a autoestima dos alunos (JESUS, 2011).

1.2 Geometria: a importância de recursos pedagógicos

Esta seção traz considerações a respeito do ensino de Geometria no Brasil e da situação que os alunos chegam ao Ensino Médio.

A Geometria está presente em diversas situações da vida cotidiana: na natureza, nos objetos que se utiliza, nas brincadeiras infantis, nas construções e nas artes, por exemplo. À nossa volta existem as mais diversas formas geométricas.

A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. Segundo Oliveira (1997, p.8), *"a diversidade geométrica presente tanto na regularidade de formas existentes no tecer das teias de aranha quanto na arquitetura de cidades produzidas pela criatividade humana (...) desperta-nos o pensamento geométrico"*.

Segundo Pavanello (1989), não se sabe ao certo quando o homem começou a desenvolver conceitos de natureza geométrica. Considera-se que tal fato se deu como resposta a necessidades das comunidades da época que deixavam sua vida nômade, passando a se fixar à terra e a cultivá-la. As grandes civilizações antigas - chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia - possuíam muitas informações de natureza geométrica, e as aplicavam. Sabiam construir figuras planas e espaciais, conheciam relações entre as grandezas geométricas, calculavam comprimentos, áreas e volumes.

Passos (2000), apresenta a seguinte descrição de Geometria:

> *A Geometria se constitui em um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a interrelação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos (PASSOS, 2000, p. 49).*

Uma das razões da importância da Geometria é sua presença constante no dia a dia. Já nos primeiros meses de vida, as crianças iniciam-se no aprendizado dos movimentos e no reconhecimento dos objetos do espaço em seu redor (CARVALHO, 2010).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.75), enfatizam que:

> *O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de figuras geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.*

Lorenzato e Fainguelernt (1995), apontam alguns fatores que justificam a importância de se estudar Geometria. Segundo esses autores, sem o estudo de Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações do dia a dia que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Além disso, destacam que sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida (LORENZATO; FAINGUELERNT, 1995).

O ensino de Geometria reveste-se de grande importância, pois deve desenvolver no aluno intuição geométrica e raciocínio visual e lógico, de forma a habilitá-lo a formular, explorar e resolver problemas e a comunicar-se com o mundo que o cerca.

Diante disso, é necessário prover oportunidades diversas aos alunos, para o desenvolvimento de habilidades que possibilitem o trabalho com o conhecimento geométrico mais elaborado. Isto porque as representações geométricas não são inatas, elas necessitam ser trabalhadas na escola (VASCONCELLOS, 1993).

É sabido que a Geometria é um conteúdo de muita importância e parte essencial do ensino e apesar disso, ficou, durante muito tempo, em segundo plano na Educação brasileira e muitas vezes até desprezado.

A Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus, (Lei nº. 5692/71) concedia uma certa liberdade às escolas quanto à decisão sobre os planejamentos dos conteúdos das diferentes disciplinas, e isso possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixassem de incluí-la em seu planejamento. Por outro lado, mesmo aqueles que continuaram a ensiná-la, reservavam o final do ano letivo para a abordagem em sala de aula, talvez na tentativa, ainda que inconsciente de utilizar a falta de tempo, como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (CARVALHO, 2008).

Um fato que merece destaque e que impactou o ensino de Geometria no Brasil foi o Movimento da Matemática Moderna, que centrava o estudo da matemática a partir da teoria dos conjuntos (MENESES, 2007). Isso significou um abandono bastante significativo do ensino de Geometria e uma defasagem na formação dos professores. Esse abandono, percebido principalmente durante os anos de 1960 a 1990, também se refletiu nos cursos de graduação de professores e nos cursos de magistério, pois esses cursos não tinham preocupação e nem um currículo voltado ao ensino de Geometria, fato esse que foi responsável pela geração de inúmeros professores órfãos dessa formação e, consequentemente, sem a consciência da importância da aprendizagem desse conteúdo (MENESES, 2007).

Kaleff (1994) complementa afirmando que:

> *Durante séculos, a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam à memorização (decorando) para enfrentar as dificuldades lógicas apresentadas pelo método dedutivo. Ainda assim, a Geometria formava a base das Ciências exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico (KALEFF, 1994, p. 20).*

Ainda segundo Kaleff (1994) o Movimento da Matemática Moderna levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial. Assim a Geometria foi praticamente excluída dos planejamentos escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com consequências que se sentem até hoje.

É preciso que o alunos evidenciem que a Geometria está próxima de seu cotidiano. Os alunos não podem conviver com atividades escolares que contemplem apenas a solução dos problemas externos a seu mundo. Ao contrário, é importante que estas se relacionem com seu próprio contexto de vida, com o ambiente que o cerca, ou seja, atividades com cálculos específicos que ele possa realizar em sua própria casa, tais como a área do terreno, as áreas de paredes a serem pintadas, o volume da caixa d'água, etc.

Kaleff (1994) afirma que a partir do anos 1970 o Ensino da Geometria passou a viver um momento de resgaste com alguns objetivos a serem alcançados. Destacam-se aqui alguns (KALEFF, 2004):

> *induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial; ii) desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar argumentos matemáticos; iii) proporcionar ao aluno meio de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva; iv) desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade. (KALEFF, 1994, p. 20).*

Não se pode negar que a Geometria oferece um maior número de situações nas quais o aluno pode exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos, ao conceber maneiras de representá-las (PAVANELLO, 1995, p.14).

Pode-se situar o início da grande ênfase na utilização de materiais manipuláveis no ensino de Geometria na década de 1980, quando se constata a existência de um movimento nacional de resgate desse ensino que, de certa forma, ficou bastante ausente das salas de aula durante o período do Movimento da Matemática Moderna (NACARATO, 2005).

Percebe-se que os materiais manipuláveis têm marcado forte presença no atual ensino de Geometria. Nacarato (2005) destaca que um uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los.

Nacarato (2005) diz ainda que:

> *No caso da Geometria, há vários materiais sugeridos e utilizados pelos professores, como: conjunto de sólidos geométricos, tangram, geoplano e poliminós. Em momento algum, questiono a utilização desses materiais; pelo contrário, considero-a fundamental em todas as séries e níveis de ensino, uma vez que podem contribuir para o desenvolvimento da visualização. Estudos na área da Geometria apontam a importância dos processos de visualização. (NACARATO, 2005, p.4).*

A utilização de materiais concretos favorece a visualização e análise das propriedades geométricas. O material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto e ter uma imagem visual do que está estudando e não somente ver a sua imagem mental por meio da imaginação.

Kaleff (2008) é uma autora que busca novas tecnologias que auxiliem o ensino de Matemática, em especial da Geometria. A autora observou que após realizarem atividades experimentais concretas em Geometria, alguns alunos desinteressados pelo estudo da Matemática, se motivaram para o estudo de outras áreas da Matemática.

Uma possibilidade que favorece o estudo da geometria é quando se faz uso de *softwares* de geometria dinâmica, pois muitos deles possuem ferramentas que permitem movimentos de translação, rotação, entre outros. Gravina e Santarosa (1998) assim como Alves e Soares (2003) afirmam que o computador pode ser visto também como um material concreto, pois permite ao estudante explorar objetos na tela que podem ser manipulados, chegando-se à abstração de forma mais natural.

No PCN está escrito que a presença da tecnologia é um auxílio para aprender Matemática, pois o ensino desta no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático (BRASIL, 2000).

De acordo com Alves e Soares (2003), a Geometria é o ramo da Matemática que tem experimentado as maiores transformações com a utilização da tecnologia digital; devido, principalmente, ao desenvolvimento de *softwares* específicos voltados para o seu processo de ensino e aprendizagem. O bom uso destes recursos em sala de aula tem trazido uma motivação a mais para os alunos (ALVES e SOARES, 2003).

Cabe destacar, porém, que todo recurso pedagógico possui limites para a sua utilização e não traz, em si mesmo, garantias de sucesso no alcance dos objetivos definidos para a atividade pedagógica. Essa utilização deverá ser planejada, levando-se em consideração as vantagens e desvantagens do recurso selecionado para a atividade a ser realizada.

Diante disto, fica evidente que é necessário o desenvolvimento de estratégias metodológicas que possam inserir os alunos no mundo da investigação matemática, possibilitando que estes, talvez por meio da utilização de objetos manipuláveis ou tecnologias digitais, possam extrair, organizar e sintetizar seus atributos e, assim, consigam compreender os conceitos e relacioná-los com o mundo concreto em que vivem.

Capítulo 2

Poliedros

Neste trabalho buscou-se abordar o tema Poliedros de maneira investigativa. Estudou-se o tema de forma a verificar a sua abordagem, bem como definição e propriedades, por diferentes autores. Neste capítulo, serão apresentadas considerações importantes do tema, que foram encontradas a partir de estudos realizados visando à elaboração das atividades.

2.1 Um breve histórico e aplicações

Grandes filósofos e matemáticos dedicaram à vida ao estudo da geometria. Enquanto a escola pitagórica tinha como lema "Tudo são números", a escola de Platão (a Academia) tinha escrito sobre a porta, "Não entre aqui ninguém que não seja geômetra"(MARTINS, GOLDONI, 2010). Há evidências de que os Povos Neolíticos que viveram na Escócia tenham esculpidos (Figura 1) alguns destes sólidos 1000 anos antes (MARTINS, GOLDONI, 2010).

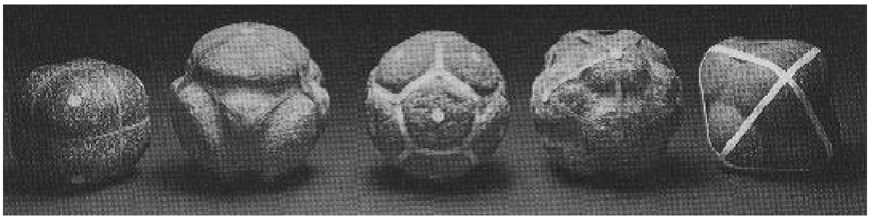


Figura 1 – Modelos Neolíticos dos Sólidos Platônicos. (PINTO, 2006, p.1)

De acordo com a história, pode-se dizer que a humanidade tem um grande fascínio pelos Poliedros Regulares, ou também denominados como Poliedros de Platão, pois este foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram tanto esses sólidos, que eles se tornaram conhecidos como "poliedros de Platão" (MARTINS, GOLDONI, 2011). Além disso, Platão, que viveu por volta dos 400 anos a.C., desenvolveu profunda admiração sobre os poliedros regulares. Em um de seus diálogos, o Timeu [1], Platão apresenta uma descrição dos cinco poliedros regulares. Segundo Eves (2004):

> *No trabalho de Platão, Timeu misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo – com os quatro elementos primordiais empedoclianos de todos os corpos materiais – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca. (EVES, 2004, p.114).*

É muito difícil estabelecer com precisão quando o ser humano passou a perceber os poliedros e a refletir sobre eles, porém evidências como as pirâmides egípcias revelam o seu conhecimento já na Antiguidade (BIANCHINI, PACCOLA, 2004).

O fascínio de matemáticos e filósofos pelos poliedros vem de longa data, há séculos os poliedros encantam os seres humanos por sua atuação em diversas áreas, como por exemplo, na natureza, na arquitetura e na arte. Destaca-se significativamente o trabalho de Euclides, "Os Elementos", que teria o estudo dos poliedros como motivação principal (COLLI, 2010).

Segundo Silva e Assumpção (2011) os Sólidos de Platão, assim como diversos outros objetos matemáticos, possuem uma história repleta de lendas e mitos. Porém, em geral, essa fascinante história não é devidamente utilizada, de modo a motivar os alunos a estudar e entrar no mundo dos conceitos geométricos. As riquezas da história da matemática, que poderiam ser utilizadas pelos professores como elementos motivadores para o estudo e a pesquisa em matemática é, na maioria das vezes desprezada. Segundo esses autores esta é uma das razões pelas quais a matemática é vista pelos educandos como algo frio, sem contexto e sem relações com o mundo em que ele vive.

Os poliedros regulares fazem parte do estudo da geometria desde que esse estudo se iniciou. Eles têm uma beleza simétrica que fascinou homens em todos os tempos. Alguns poliedros regulares eram conhecidos dos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura (MARTINS, GOLDONI, 2011).

O nome poliedro vem do grego, poli vem de *polys* que significa muito ou vários, e edro vem de *hedra* que significa face. Então poliedro seria uma figura de muitas faces.

Os poliedros regulares fascinaram os antigos como símbolo de perfeição da natureza (ALLAN, 1997). Allan (1997) complementa dizendo que os gregos, os pitagóricos mais especificamente, já sabiam da existência de três dos cinco poliedros regulares, são eles: o cubo, o tetraedro e o dodecaedro. Esses dois primeiros já eram conhecidos por Egípcios e Babilônios.

---

[1] Timeu é um tratado teórico de Platão na forma de um diálogo socrático, escrito cerca 360 a.C.. A obra apresenta especulações sobre a natureza do mundo físico (EVES, 2004).

Tem-se conhecimento dos poliedros regulares presentes na natureza: os três primeiros sob a forma de cristais e os outros dois como esqueletos de animais marinhos microscópicos. Sua beleza e simetria instigaram o interesse do ser humano por eles por meio dos séculos. Não há nenhuma disciplina matemática específica baseada nos cinco sólidos, mas muita coisa importante da matemática foi descoberta como subproduto do estudo dessas figuras (MARTINS, GOLDONI, 2011).

Os poliedros são objetos que podem ser facilmente relacionadas ao cotidiano, como, por exemplo, podem ser encontrados em forma de embalagens, na arquitetura, nas artes, etc. (MIALICH, 2013). Sabe-se também que os sólidos platônicos se manifestam na natureza (cristais, organismos vivos, moléculas, etc.) e na cultura humana (pinturas, esculturas, religião, design, etc) (BORTOLOSSI, 2009a). Bortolossi (2009a) ainda cita um exemplo de que são muitas as formas cristalinas naturais no formato do tetraedro (calcopirita), do cubo (galena) e do octaedro (magnetita) (Figura 2). A planificação dos poliedros também recebe atenção especial e são aplicados em design industrial, por exemplo.

(a) Calcopirita (b) Galena (c) Magnetita

Figura 2 – Formas cristalinas (BORTOLOSSI, 2009a)

Muitos vírus, como por exemplo, o vírus do Herpes e Radiolários, um tipo de protozoário ameboide, que dá origem a esqueletos minerais, como a Circogonia icosahedra, têm a forma aproximada de um icosaedro. (MIALICH, 2013).

Outra aplicação interessante de poliedros são os *Buckminsterfulerenos* C_{60}, mais conhecidos como Fulerenos são formados quando átomos de carbono se condensam numa atmosfera de gás inerte (hélio), esses átomos vaporizados são misturados ao hélio e se combinam para formar agregados moleculares que podem reunir alguns poucos átomos ou até centenas deles (ROCHA, 1996).

A estrutura de um Fulereno (Figura 3) é de um poliedro de 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos, estrutura facilmente reconhecida pelos brasileiros como o formato de uma bola de futebol.

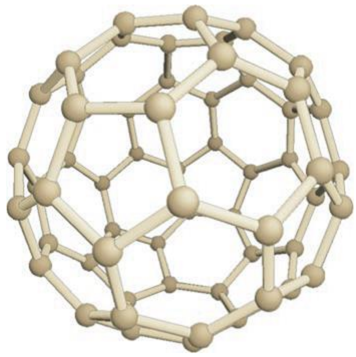


Figura 3 – Representação de uma molécula de Fulereno (ROCHA, 1996, p. 1).

Um importante resultado sobre poliedros é a conhecida Fórmula/Relação de Euler ou Teorema de Euler: se V, A e F indicam, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro, então V - A + F = 2. Essa relação será abordada no capítulo 3.

Abordando rapidamente o caso dos Fulerenos e a Relação de Euler, temos que nos Fulerenos cada átomo está ligado a três outros, sendo assim em cada vértice há o encontro de três arestas, cada uma ligada a dois vértices. Desse modo: $V = \frac{2}{3}A$, substituindo essa relação em $(V - A + F = 2)$, tem-se que: $F = \frac{1}{3}A + 2$.

O número de faces numa molécula fulerênica é $F = P + H$, onde P é o número de pentágonos e H o número de hexágonos. Ao contar as arestas para todas as faces, estas são contadas duas vezes, visto que são compartilhadas por duas faces. Sendo assim, numa molécula fulerênica tem-se $A = \frac{1}{2}(5P + 6H)$.

Substituindo essa última relação na equação $F = \frac{1}{3}A + 2$, encontra-se que o número de pentágonos numa molécula fulerênica é P = 12.

A Relação de Euler não impõe qualquer restrição quanto ao número de hexágonos nas moléculas fulerênica, e elas sempre têm exatamente 12 pentágonos (ROCHA, 1996).

Porém, antes da abordagem à Relação de Euler precisa-se de uma definição adequada para o objeto de estudo em questão. Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006) as dificuldades, em demonstrar teoremas sobre poliedros, enfrentadas pelos matemáticos do passado podem ser creditadas a falta de uma definição precisa do significado dessa palavra. Sendo assim, na próxima seção apresenta-se o referencial teórico estudado e que foi considerado importante para o desenvolvimento deste trabalho, a definição de poliedros vista pelo parâmetro de diferentes autores.

2.2 Definição de Poliedro

Nesta seção serão apresentadas as definições de Poliedros pelo ponto de vista de diferentes autores.

Iezzi et al. (2010), define poliedros como "sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos".

Notemos que na definição dada por Iezzi et al. (2010), ao tratar poliedro utilizando o termo sólido geométrico, ou seja, algo maciço, não oco, a região interior, limitada por polígonos planos, pertence ao poliedro. O mesmo ocorre com a definição dada por Dante (2005), quando diz que a região limitada pelas faces também faz parte do poliedro.

Bianchini e Paccola (2004) definem poliedros como sólidos planos limitados por polígonos planos tais que cada um dos lados desses polígonos pertença a dois e somente dois deles.

Será adotada neste trabalho a definição de Poliedro (Figura 4) dada por Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006):

> *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde: a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono. b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro. c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro.*

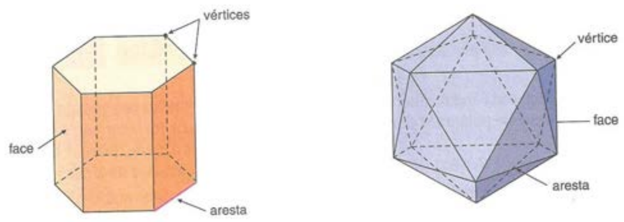
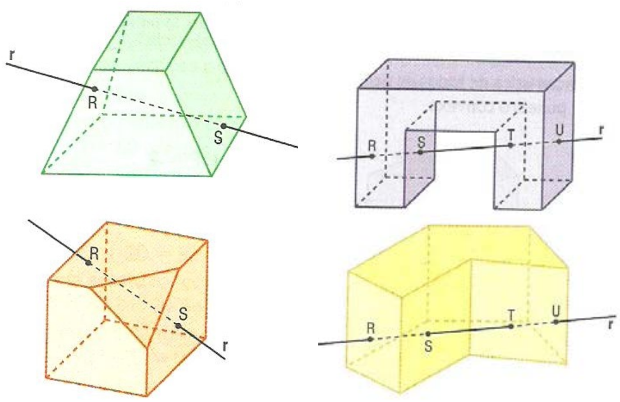


Figura 4 – Poliedros (BONJORNO, GIOVANNI, 2005, p. 248).

2.2.1 Poliedro convexo

Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

É usual encontrar a seguinte definição: Um conjunto C do plano ou espaço é dito convexo, se ao considerarmos qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C, o segmento considerado está inteiramente contido no conjunto C (Figura 5).



(a) Poliedros convexos (b) Poliedros não convexos

Figura 5 – Poliedros (DANTE, 2005, p. 277)

Neste caso, um poliedro P é convexo, se e somente se, o conjunto C formado pelo poliedro e seu interior é um conjunto convexo.

Os poliedros convexos são classificados em várias categorias. No Ensino Básico, as categorias consideradas, em geral, são as dos poliedros regulares (convexos), também conhecidos como poliedros platônicos, os prismas e as pirâmides.

2.3 Os sólidos de Platão

Os poliedros conhecidos como poliedros de Platão são todos aqueles que:

- são convexos;
- têm o mesmo número de lados em todas as faces;
- em todos os vértices chega o mesmo número de arestas.

Platão (350 a.C.) foi o primeiro a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos com tamanha intensidade, que eles se tornaram conhecidos como “poliedros de Platão”.

Estes poliedros foram muito estudados pela Escola de Platão que chegou a construir uma teoria filosófica baseada neles, comparando-os com os cinco elementos da natureza (Figura 6). Um membro desta escola, Teeteto, fez um estudo completo dos poliedros regulares. Ele demonstrou que só existem cinco poliedros regulares, e exibiu um processo de construção destes cinco poliedros, com a demonstração que estes modelos são regulares (ALLAN, 1997).

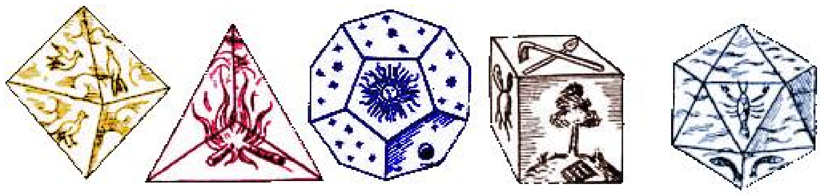


Figura 6 – Os cinco poliedros e os elementos. Fonte: <http://avrinc05.no.sapo.pt/>.

Um estudo mais detalhado encontramos em Eves (2004, p. 114):

> *Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações do Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para a sua superficie, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume – superficie são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como fogo é o mais seco dos quatro "elementos" e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tenha maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a estabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções.*

Eves (2004) ressalta a primeira anotação do Livro XIII dos Elementos de Euclides dizendo que "irá tratar dos sólidos de Platão, assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto" (EVES, 2004. p. 114).

Segundo Martins e Goldoni (2010) Platão considerava que na matéria havia porções limitadas por triângulos ou quadrados, formando-se elementos que se diferenciam entre si pela natureza da forma do seu contorno. Platão associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – tetraedro, octaedro, icosaedro e o cubo – com os quatro "elementos" da natureza – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca, conforme figura 7.

Figura 7 – Os elementos da natureza. Fonte: <http://avrinc05.no.sapo.pt/>.

Para Eves (2004) um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos são todos congruentes. Embora existam polígonos regulares de todas as ordens, somente existem cinco poliedros regulares diferentes. Os poliedros regulares recebem nomenclatura de acordo com o número de faces que possuem. Assim, temos (Figura 8) o tetraedro com quatro faces triangulares, o hexaedro, ou cubo, com seis faces quadradas, o octaedro com oito faces triangulares, o dodecaedro com doze faces pentagonais e o icosaedro com vinte faces triangulares (EVES, 2004).

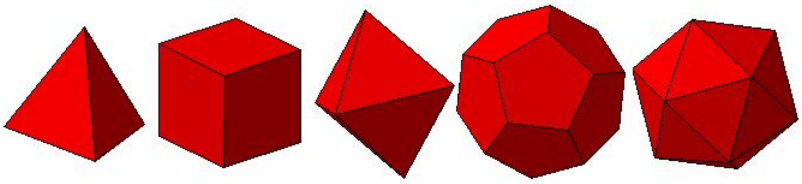


Figura 8 – Os sólidos de Platão (MIALICH, 2013, p. 36.)

As considerações atuais sobre os cinco sólidos tendem a ser topológicas, como se pode observar numa definição moderna, ou seja, de que um sólido é um poliedro convexo regular se todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si, se seus vértices são convexos e se em cada vértice incide o mesmo número de faces (MARTINS, GOLDONI, 2010).

As duas definições apresentadas apresentam a mesma conclusão, porém a definição de MArtins e Goldoni (2010) para poliedros regulares apresenta-se, num primeiro momento, mais fácil para o leitor.

Dante (2005) fez uma demonstração para a propriedade de que existem apenas cinco poliedros regulares e convexos.

Essa demonstração será retratada abaixo:

Consideremos um poliedro regular sendo n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Assim, temos:

$$2\mathrm{A} = \mathrm{nF} = \mathrm{pV}$$

o que acarreta que:

$$A = \frac{nf}{2} \text{ e } V = \frac{nf}{p}$$

Substituindo esses valores na Relação de Euler, V - A + F = 2, temos:

$\frac{nf}{p}$ - $\frac{nf}{2}$ + F = 2 $\Rightarrow$ $\frac{2nf - npf + 2pf}{2p}$ = $\frac{4p}{2p}$ $\Rightarrow$ F(2n+2p-np)=4p $\Rightarrow$ F = $\frac{4p}{2n+2p-np}$

Precisamos ter 2n + 2p - np > 0, isto é:

$$2n > np - 2p \Rightarrow > p(n-2) \Rightarrow \frac{2n}{n-2} > p$$

Como p $\geq$ 3, temos que:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geq 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow -n > -6 \Rightarrow n < 6$$

Portanto, temos as seguintes possibilidades: n = 3, n = 4 e n = 5.

Para n = 3:

$$F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

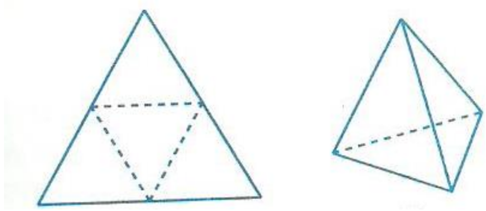


Figura 9 – Tetraedro, 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que concorrem em cada vértice (DANTE, 2005, p. 280).

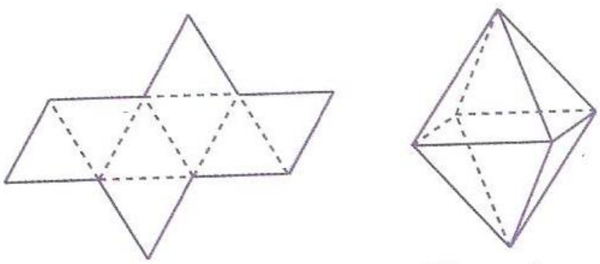


Figura 10 – Octaedro, 8 faces triangulares e 4 arestas concorrem em cada vértice (DANTE, 2005, p. 280).

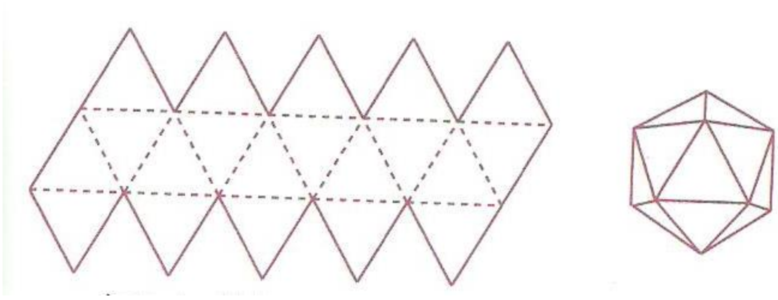


Figura 11 – Icosaedro, 20 faces triangulares e 5 aresta que concorrem em cada vértice (DANTE, 2005, p. 281).

Para n = 4:

$$F = \frac{4p}{8-2p} = \frac{2p}{4-p} \rightarrow \text{p} = 3 \rightarrow \text{F} = 6 \text{ (cubo)}$$

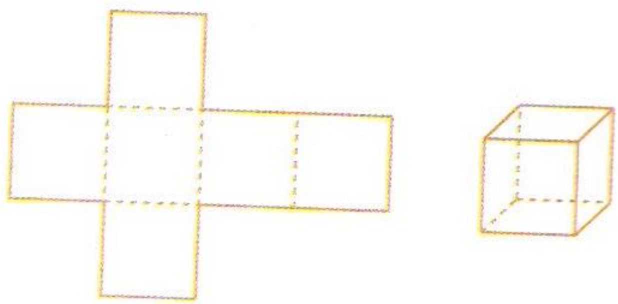


Figura 12 – Cubo, 6 faces quadradas e 3 arestas que concorrem em cada vértice (DANTE, 2005, p. 281).

Para n = 5:

$$F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow \text{p} = 3 \rightarrow \text{F} = 12 \text{ (dodecaedro)}$$

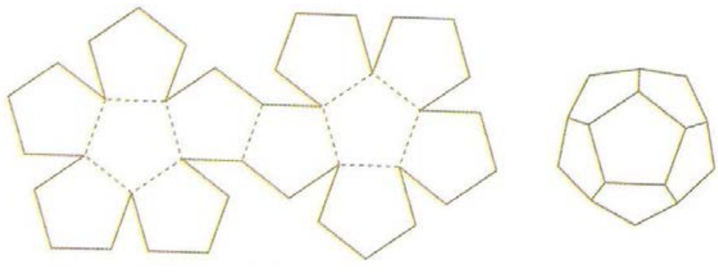


Figura 13 – Dodecaedro, 12 faces pentagonais regulares congruentes e 3 arestas que concorrem em cada vértice (DANTE, 2005, p. 281).

Bortolossi (2009a) também faz uma demonstração para o fato de que só existem cinco sólidos platônicos, usando agora a fórmula de Euler: se V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de um poliedro convexo, então:

$$\text{V - A + F} = 2 \text{ (1.1)}$$

Considere então um sólido platônico cujas faces são polígonos regulares de n lados. Como cada aresta do poliedro é definida pela interseção dos lados de dois polígonos adjacentes, segue-se que se contarmos todos os lados de todos os polígonos, iremos contar duas vezes cada aresta do poliedro. Desta maneira:

$$n \cdot \text{F} = 2 \cdot \text{A (1.2)}$$

Denote por p o número de arestas do poliedro que concorrem em um mesmo vértice. Cada uma destas arestas, a exemplo das faces, se conecta a dois vértices. Assim, se contarmos o número de arestas em cada face, estaremos contando duas vezes o número de arestas do poliedro. Portanto:

$$p \cdot \text{V} = 2 \cdot \text{A (1.3)}$$

Substituindo-se os valores de V e F das Equações (1.2) e (1.3) na Equação (1.1), teremos que $2 \cdot \frac{A}{p}$ - A + $2 \cdot \frac{A}{n} = 2$ ou, ainda, $\frac{1}{p}$ - $\frac{1}{A} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Consequentemente,

$$\text{A} = \frac{2np}{2n + 2p - np} \text{ (1.4)}$$

Como o número A de arestas deve ser positivo, temos que $2n + 2p - np > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n - p} > \text{p}$$

Uma vez que p $\geq$ 3, concluímos que, obrigatoriamente, n $<$ 6. As possibilidades são então as seguintes:

Se n = 3, então $\text{A} = \dfrac{6p}{6 - p}$ e, portanto, $\text{F} = 2 \cdot \frac{A}{n} = 4 \cdot \dfrac{p}{6 - p}$. Desta última fórmula segue-se que p $<$ 6. Agora:

- Se p = 3, então F = 4. Neste caso, o poliedro formado é o tetraedro.
- Se p = 4, então F = 8. Neste caso, o poliedro formado é o octaedro.
- Se p = 5, então F = 20. Neste caso, o poliedro formado é o icosaedro.

Se n = 4, então A = $4 \cdot \dfrac{p}{4-p}$ e, portanto, F = $2 \cdot \frac{A}{n} = 2 \cdot \dfrac{p}{4-p}$. Desta última fórmula segue-se que p < 4. Sendo assim, p = 3 e, portanto, F = 6. Neste caso, o poliedro formado é o cubo.

Se n = 5, então A = $10 \cdot \dfrac{p}{4-p}$ e, portanto, F = $2 \cdot \frac{A}{n} = 2 \cdot \dfrac{p}{10-3p}$. Desta última fórmula segue-se que p < $\frac{10}{3}$. Sendo assim, p = 3 e, portanto, F = 12. Neste caso, o poliedro formado é o dodecaedro.

Finalizada essa parte teórica sobre Poliedros, será abordado nesse próximo capítulo, o Teorema de Euler, que é o tema principal deste trabalho.

Capítulo 3

Teorema de Euler: Aspectos Históricos e Demonstração

Leonhard Euler (Figura 14) talvez tenha sido o matemático mais produtivo da história. Nasceu na Basiléia, Suíça em 15 de abril de 1707. Por oportunidades profissionais, emigrou para a Rússia com 20 anos e ali se radicou, onde é considerado um herói nacional. Jamais retornou à Suíça. Especula-se que não tenha retornado em protesto ao fato de seu país não ter dado cidadania à sua esposa, nascida na Holanda. Mas a Suíça liderou as comemorações dos 300 anos do nascimento de Euler (D'AMBRÓSIO, 2009).

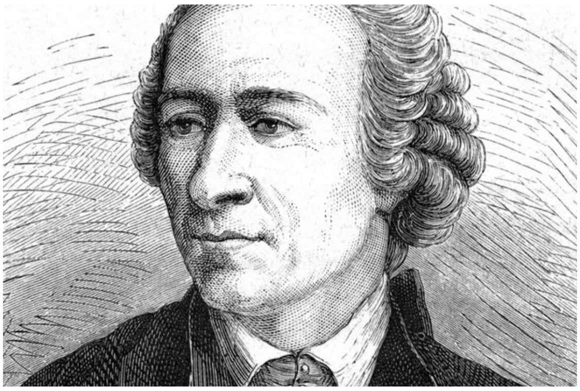


Figura 14 – Leonhard Euler (MANNING, 2013).

Seu pai, Paulus Euler, era um pastor calvinista, que havia sido aluno da Universidade de Basiléia. Era uma criança prodígio e inquieta, sempre envolvida com brinquedos que permitiam satisfazer sua curiosidade sobre fenômenos físicos. Para distraí-lo de suas brincadeiras, algumas perigosas, o pai deu-lhe um livro que era uma importante introdução à álgebra e muito popular na época, o Die Coss, de Christoph Rudolff, que continha questões desafiadoras. Este livro viria a ter grande influência na Álgebra de Leonhard Euler, publicada em 1770 (Figura 15), que foi, entre as suas publicações, a que alcançou o maior número de edições em língua alemã e uma quantidade significativa de traduções para várias línguas (D'AMBRÓSIO, 2009).

Figura 15 – A Álgebra de L. Euler. (Fonte: <http://www.sophiararebooks.com>.)

Em 1713, Leonhard foi morar com sua avó, em Basiléia, e fez estudos clássicos. Com 13 anos, entrou na Universidade de Basiléia. Era uma idade comum para jovens brilhantes ingressarem na Universidade. Mesmo contrariando a vontade de seu pai, que insistia para que ele estudasse teologia, Leonhard enveredou pela Matemática. Mas sempre se manteve fiel aos princípios e práticas religiosas calvinistas e, durante toda sua vida, conduzia diariamente as preces nas refeições da família, geralmente terminando sempre com um sermão.

Álgebra e análise foram as áreas em que ele mais investiu. Uma de suas obras mais conhecidas é o livro publicado em 1748 com o título *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise dos Infinitos). Em sua autobiografia, Euler afirmou ter recebido de Jacob Bernoulli os primeiros princípios de matemática e, mais tarde, teria tido aulas particulares com Johann Bernoulli aos sábados. O fato de ter tido os ensinamentos desses grandes matemáticos em sua juventude não é suficiente para explicar tal produção [1]. A capacidade intelectual, a boa formação inicial, a dedicação e a criatividade, aliadas, fizeram desse matemático uma figura singular na história da matemática. Sem cair em extremos elogiosos, não se pode colocar em dúvida que escrever sobre qualquer parte da produção de Euler é um grande desafio (SILVA, 2009).

D'Ambrósio (2009) afirma que as obras completas de Euler, em fase final de publicação, quando ficarem prontas consistirão em 84 volumes, além disso, ainda está sendo planejado um volume adicional, com os manuscritos não publicados, cadernos e diários. Seus trabalhos são muito bem escritos, com interessantes exemplos, fundamentais em

[1] Já estão disponíveis, para consulta on-line, vários trabalhos de Euler, no The Euler Archive: http://math.dartmouth.edu/ euler/.

todas as áreas da matemática. Embora conhecesse várias línguas, Euler escrevia, principalmente, em latim, francês e alemão.

Leonhard Euler chamou de H o número de faces do sólido; S, o número de ângulos sólidos (o que hoje chama-se vértices do poliedro); A, o número de arestas; L, a soma de todos os lados das faces; P, a soma de todos os ângulos planos (vértices das faces), e partir daí considerou as possíveis relações que poderiam existir entre H, S, A, L e P (SIQUEIRA, 2009). Euler enunciou: “Em qualquer sólido limitado por faces planas, a soma do número de ângulos sólidos e o número de faces excede em dois o número de arestas”, ou seja, $S + H = 2 + A$ (SIQUEIRA, 2009).

Ainda segundo Siqueira (2009) é corrente entre matemáticos e historiadores da matemática, desde o final do século XIX, que os estudos de Leonhard Euler sobre poliedros contêm as primeiras noções de topologia registradas na literatura.

O teorema de Euler foi descoberto em 1758 e diz que se um poliedro possui V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$.

Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como consequência imediata. Mas, Descartes não parece ter notado isso. O navio que trouxe para a França os pertences de Descartes, depois de sua morte em Estocolmo, naufragou no rio Sena. O baú que continha o manuscrito flutuou e foi encontrado no dia seguinte. A cópia feita por Leibniz também se perdeu, sendo reencontrada em 1860 (LIMA, 1991).

Esse teorema tem sido ensinado, há décadas, nas aulas de Geometria e possuí características que o tornam atraente e popular: generalidade de validez, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível (LIMA, 1991).

É simples ilustrar esse teorema com desenhos para verificar visualmente que $V - A + F = 2$ (Figura 16).

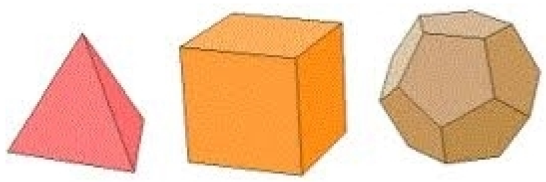


Figura 16 – Tetraedro, cubo e dodecaedro, todos verificam a relação de Euler (DANTE, 2005, p. 275)

Porém, o Teorema de Euler não é válido para qualquer poliedro propriamente dito. Na figura 17, temos que $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$.

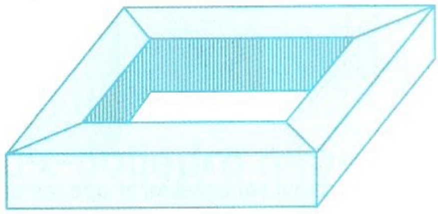


Figura 17 – O Teorema de Euler não se verifica (DANTE, 2005, p. 278).

A controvérsia em relação ao Teorema de Euler durou por mais de um século. Azambuja (1983) afirma que depois de muito tempo percebeu que a demonstração que sempre usou, e que consta em vários livros-texto estava errada. Além disso, sua argumentação a muito tempo utilizada estava insuficiente. Nascimento e Salgado (2013) analisaram alguns materiais de Ensino de Matemática na Educação Básica e notaram uma carência de uma prova consistente e plausível da legitimidade do teorema de Euler. Em geral, os livros didáticos do Ensino médio abordam este teorema com o nome de Relação de Euler para poliedros e o fazem apenas com a introdução de exemplos, afirmando, logo de imediato, que a mesma é válida para todo poliedro convexo com V vértices, F faces e A arestas (NASCIMENTO, SALGADO, 2013). Alguns livros analisados por esses autores não comentam porque o número V - A + F é igual a 2, alguns dizem que sempre é igual a dois, o que é um erro se o conceito de poliedro não ficar bem definido. Apenas para uma classe especial de poliedros temos que V - A + F = 2. É visto que alguns autores se restringem a poliedros convexos, isto é, poliedros situados do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces (LIMA, 1991).

A demonstração mais famosa e divulgada desse teorema é a de Cauchy, porém ela também é bastante limitada, pois serve apenas para poliedros convexos e homeomorfos à esfera ("homeo" = mesmo, "morfo" = forma). O poliedro ser homeomorfo à esfera significa que ele pode ser inflado, como uma bexiga, por exemplo, até assumir o formato esférico (Figura 18 e 19).

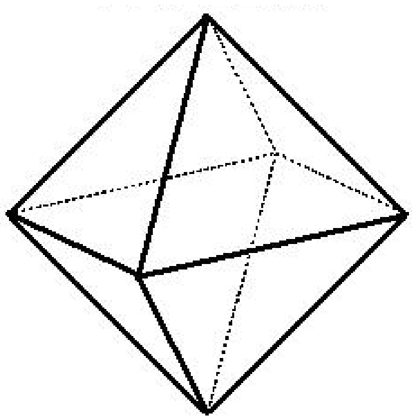


Figura 18 – Octaedro homeomorfo à esfera (Fonte: <http://euler.mat.ufrgs.br>).

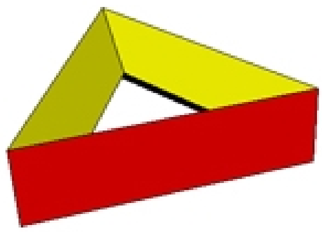


Figura 19 – Poliedro não homeomorfo à esfera (BORTOLOSSI, 2009b).

3.1 Demonstração do Teorema de Euler

A demonstração que constará aqui, tem com base Azambuja Filho (1983, p. 15-17), Elon Lages Lima (1991, p. 86), e ainda Mialich (2013).

O teorema a demonstrar é o seguinte:

Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente V - A + F = 2.

Começa-se tomando o poliedro P e r uma reta não paralela a nenhuma de suas faces (tal reta sempre existe, pois existe um número finito de faces). Seja também H o plano perpendicular à reta r que não intersecta P, como ilustrado na Figura 20.

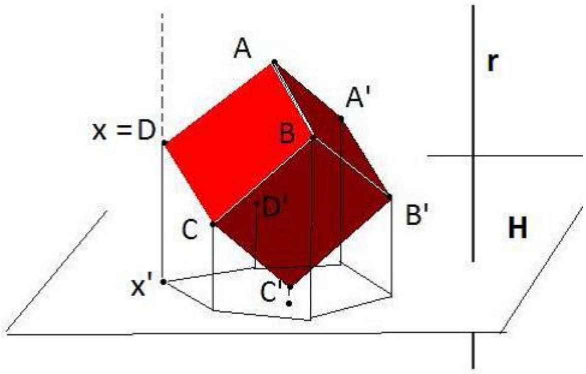


Figura 20 – Cubo pendurado pelo vértice A, faces iluminados e faces sombrias (MIALICH, 2013).

O plano H será chamado plano horizontal, o qual divide o espaço em dois semi-espaços. Consideremos o semi-espaço que contém P como o semi-espaço superior, ou seja, os pontos de P estão acima de H. As retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) são chamadas retas verticais.

Suponha o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior onde todos os seus raios são retas paralelas à reta r. Todo ponto x do semi-espaço superior, possui uma projeção ortogonal (sombra) x' no plano H (está sendo seguida a notação de Azambuja Filho (1983, p. 15-17)). A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de X.

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazio) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

O fato anterior pode ser reformulado do seguinte modo: Seja P' a sombra do poliedro P, cada ponto da sombra P' é sombra de um ou de dois pontos de P. Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno γ'é a sombra de uma poligonal fechada γ, formada por arestas de P. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a γ). A poligonal γ é chamada o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a γ') é sombra de 2 pontos de P.

Se dois pontos de P têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado sombrio. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente.

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical e suas projeções, no plano, seja o mesmo ponto y'), as faces AA'B'B, AA'D'D e ABCD são iluminadas e as outras 3 faces são sombrias (Figura 21).

Observa-se que neste exemplo, os vértices A' B' B C D D' são aparentes, A é iluminado e C' é sombrio (A e C' tem a mesma sombra). Ainda, o contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A' e γ' é a sombra desse contorno, ou seja, a poligonal fechada γ', como na Figura 21:

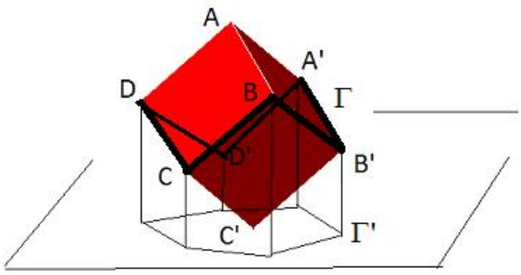


Figura 21 – Cubo pendurado pelo vértice A, contorno aparente (MIALICH, 2013).

Considere P_1 o conjunto formado pelos pontos iluminados de P, unido com o contorno aparente γ, e seja P_1' a sombra de P_1. Tem-se claramente uma correspondência biunívoca entre os elementos de P_1 e P_1'.

No exemplo (cubo), P_1' é formado pela reunião dos polígonos justapostos Q_1 (sombra da face iluminada ABCD); Q_2 (sombra da face iluminada AA'BB') e Q_3 (sombra da face iluminada AA'DD'), como mostrado na Figura 22:

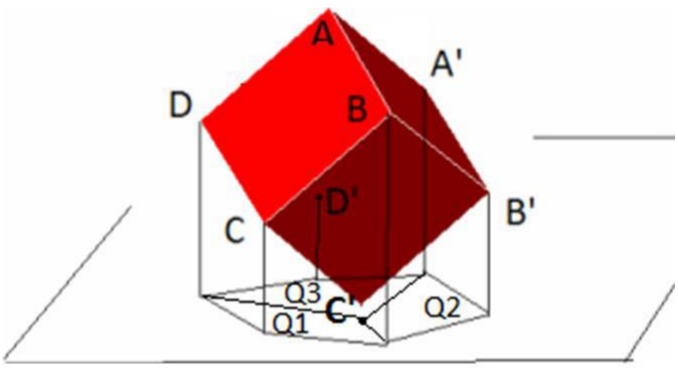


Figura 22 – Cubo: sombra das faces iluminadas unido com o contorno (MIALICH, 2013).

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2, formado pelos pontos sombrios de P unido com o contorno aparente γ. A regra que associa a cada ponto de P_2 a sua sombra, também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'. Escreve-se P_2' para indicar a sombra de P_2, expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P contidas em P_2 (o que dá também uma reunião de polígonos justapostos).

Foi calculado então a soma de todos os ângulos das faces de P. Observemos que a soma dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra F_k' (já que a reta r escolhida não é paralela a nenhuma face e a sombra de um polígono de n lados será um polígono de n lados). Ao considerar a parte iluminada e a parte sombria de P, tem-se que há V_1 vértices iluminados, V_2 vértices sombrios e V_0 vértices no contorno aparente γ. Tem-se assim que o número de vértices do poliedro é:

$$\mathrm{V} = V_0 + V_1 + V_2$$

Nota-se ainda que V_0 é também o número de vértices (e de lados) da poligonal γ', contorno do polígono convexo P'. A face iluminada dá então um polígono convexo com V_0 lados, V_0 vértices e que possui V_1 pontos interiores que são os vértices iluminados de P. Analogamente, a face sombria também possui o mesmo número de lados V_0, mas por sua vez possui V_2 pontos interiores.

Tem-se ainda que S = S1 + S2, onde S_1 é a soma dos ângulos internos das faces iluminadas e S_2 é a soma dos ângulos internos das faces sombrias. Para calcular S_1, usa-se a observação anterior que a soma dos ângulos internos de uma face F_k de P é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra Fk'. Daí S1 é igual à soma dos ângulos internos dos polígonos convexos nos quais está decomposto o polígono convexo P_1', sombra de P_1. Para calcular esta última soma, soma-se os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo face por face.

Em P_1' temos V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno γ' (sombra do contorno aparente γ). A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno γ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados.

Na Figura 23, a seguir, os vértices interiores (sombras de certos vértices iluminados) são X' e Y', de modo que tem-se $V_1 = 2$, os demais vértices pertencem a γ', isto é, são sombras de vértices do contorno aparente, e no caso tem-se $V_0 = 7$.

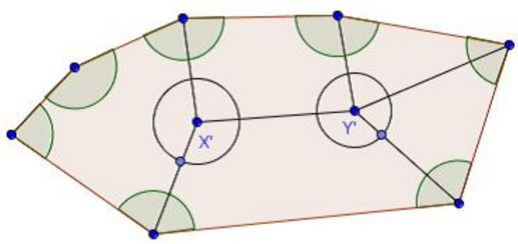


Figura 23 – Soma dos ângulos de uma possível região (MIALICH, 2013).

Calculando S_1 e S_2, tem-se então:

$$S_1 = 2\pi \ V_1 + \pi \ (V_0 \text{ - } 2),$$

$$S_2 = 2\pi \; V_2 + \pi \; (V_0 \text{ - } 2).$$

Somando S_1 e S_2, obtêm-se:

$$\text{S} = 2\pi \; V_1 + 2\pi \; V_2 + 2\pi \; (V_0 \text{ - } 2)$$
$$\text{S} = 2\pi \; (V_1 + V_2 + V_0 \text{ - } 2)$$
$$\text{S} = 2\pi \; (\text{V - } 2).$$

Comparando as equações obtidas, tem-se:

$$2\pi \; (\text{A - F}) = 2\pi \; (\text{V - } 2).$$

Dividindo ambos os membros por 2π obtemos que A – F = V – 2 e temos então a Relação de Euler:

$$\mathbf{V \text{ - } A + F = 2}$$

Capítulo 4

Topologia De Superfícies: Uma Aplicação no Estudo dos Poliedros

A palavra topologia vem do grego *topos*, que significa lugar, e *logos*, que significa estudo. Topologia então é o ramo da Matemática que estuda os Espaços Topológicos, sendo considerado uma das geometrias. Essa geometria estuda as transformações contínuas. Um exemplo é o desenho de um triângulo, no qual é possível medir sua área, seu comprimento, ângulo, mas se o desenho fosse feito em uma borracha, há a possibilidade de deformá-lo continuamente, o que não varia é que na nova figura, continuam existindo, por exemplo, pontos interiores e exteriores (FRANCO, RISSI, 2009).

Para Eves (2004) a topologia começou como um ramo da geometria, mas durante o segundo quarto do século XX passou por generalizações tais e se envolveu com tantos outros ramos da matemática que hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da matemática. Pode-se definir então, a topologia como o estudo matemático da continuidade (EVES, 2004). Pode-se considerar a topologia como o estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as transformações chamadas transformações topológicas; isto é, sob aplicações contínuas que têm inversas também contínuas. As propriedades de uma figura geométrica que se mantém invariantes sob as transformações topológicas da figura se denominam propriedades topológicas da figura; e duas figuras tais que cada uma delas pode ser transformada topologicamente na outra se dizem homeomorfas ou topologicamente equivalentes.

A Topologia é a geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada por homeomorfismos, ou seja, é a geometria das transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas (FRANCO, RISSI, 2009).

Sampaio (1996) enumera quatro deformações que não afetam a topologia de uma superfície:

1. Esticar ou inflar o objeto, ou algumas de suas partes;
2. Encolher ou retorcer o objeto, ou algumas de suas partes;
3. Entortar a superfície ou partes dela;
4. Cortar o objeto segundo uma linha suave nele demarcado e, posteriormente, colar uma na outra as duas bordas que foram geradas por esse corte, resgatando a superfície com a linha nela originalmente demarcada (considerando a mesma orientação).

Assim Topologia de uma superfície é definida como o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando a ela aplica-se qualquer uma das quatro deformações citadas acima. A topologia em atividades práticas parece estar dissociada da realidade do aluno de Ensino Fundamental e não aparece em livros didáticos, excluindo-se assim um saber matemático necessário ao desenvolvimento do estudante.

A noção inicial de topologia é atribuída ao matemático suíço Leonhard Euler. Em 1736, em uma cidade da Alemanha chamada Königsberg corriam dois rios que se uniam formando o Rio Pregel (SCHEMMER, PEREIRA, 2012) (Figura 24). Euler levantou um problema, tendo em vista as pontes ao longo do trajeto dos rios. O problema consistia em atravessar as sete pontes da cidade de Königsberg em um único trajeto, ou seja, passar por todas as setes pontes sem voltar a cruzar qualquer uma delas. Euler mostrou ser impossível atravessar as pontes sem passar duas vezes, pelo menos, por uma delas.

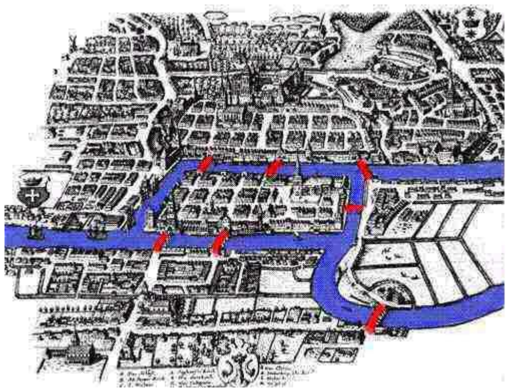


Figura 24 – As pontes de Königsberg. (Fonte: SCHEMMER, PEREIRA, 2012).

Ao examinar esse problema das pontes, Euler percebeu a existência de algumas propriedades das figuras geométricas que não dependiam da forma nem do tamanho das figuras. Ele percebeu que poderia torcer, esticar, puxar algumas figuras, sem que essas propriedades se alterassem. O campo de estudo da Topologia é exatamente este: uma geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada por meio de transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas, ou seja, por meio de homeomorfismos. Pode-se esticar as figuras ou encolhê-las sob certas condições, e continuar obtendo figuras equivalentes. Por isso podemos considerar a Topologia como uma “geometria elástica” (SCHEMMER, PEREIRA, 2012).

Outro matemático que contribui significativamente para o desenvolvimento desta nova área foi Augustus Möbius. Ele descobriu a faixa de Möbius (também conhecida como fita de Möbius). Obtém-se um modelo da faixa de Möbius torcendo-se uma tira de papel em 180º e colando-se as extremidades, segundo a Figura 25:

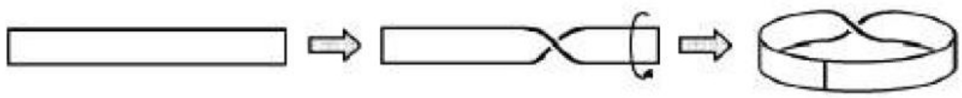


Figura 25 – Construção da faixa de Möbius. (SCHEMMER, PEREIRA, 2012).

A topologia, como campo de estudos autônomo, certamente não é anterior a meados do século XIX, mas podem-se encontrar investigações isoladas anteriores sobre questões de natureza topológica. Perto do fim do século XVII, Leibniz usou o termo geometria situs para designar uma espécie de matemática qualitativa que hoje seria considerada como parte da topologia; mas suas previsões de que se tratava de um campo muito rico demoraram a se concretizar. Uma das descobertas topológicas mais antigas é a propriedade de uma superfície poliédrica fechada simples traduzida na relação V - A + F = 2.

Capítulo 5

Relato de Experiência

A fim de alcançar os objetivos traçados, algumas etapas foram cumpridas. Neste capítulo descrevem-se tais etapas na seguinte ordem: i) seleção e elaboração dos recursos pedagógicos, ii) elaboração das atividades, iii) experimentação das atividades.

5.1 Procedimentos Metodológicos

Visando alcançar os objetivos, foi realizada uma pesquisa qualitativa por meio de um estudo de caso. Este tipo de estudo faz com que o pesquisador disponha de mais tempo para adaptar seus instrumentos, modificar sua abordagem para explorar elementos imprevistos, precisar alguns detalhes e construir uma compreensão do caso que leve em conta tudo isso (LAVILLE; DIONNE, 1999). A técnica de coleta de dados usada neste trabalho foi observação da postura dos alunos durante a experimentação das atividades.

Para atingir os objetivos estabelecidos foram realizadas algumas etapas. Primeiramente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre Poliedros e Teorema de Euler, afim de obter mais conhecimentos em relação ao tema. Após isso, foi feita uma pesquisa em alguns livros didáticos, *sites*, artigos, revistas, dentre outras fontes, para observar se estes, propunham atividades diferenciadas relacionadas ao tema em questão. Logo após, foram elaboradas as atividades juntamente com uma pesquisa dos recursos pedagógicos (materiais concretos e *softwares*) que possibilitassem o estudo de Poliedros e Teorema de Euler. Por fim, foram realizadas a experimentação das atividades elaboradas e dos recursos pedagógicos selecionados com alunos do Ensino Médio e análise dos dados levantados na experimentação.

5.2 Recursos Pedagógicos

Para a aplicação deste trabalho optou-se por utilizar materiais concretos, pois de acordo com Kaleff (2008), o desenvolvimento da habilidade de visualização acontece na medida em que se coloca para o aluno um apoio didático baseado em materiais concretos que representam o objeto geométrico em estudo. E segundo Oliveira (2008) por meio da manipulação dos materiais concretos, o aluno é motivado à ação e tem estimulada a sua criatividade. Kaleff (2008) apresenta algumas características que os materiais manipuláveis devem possuir: i) modelar e representar o conceito matemático ou as relações a serem exploradas da forma mais fiel possível; ii) ser atraentes e motivadores, com vista a cumprir o seu papel de mediador lúdico no desenvolvimento de habilidades e de conceitos geométricos; iii) ser apropriados para serem utilizados em diferentes séries ou ciclos de escolaridade e em diferentes níveis cognitivos da formação de um conceito matemático; iv) proporcionar uma base e facilitar um caminho para a abstração; v) proporcionar, na medida do possível, manipulação individual.

Considerando as características descritas por Kaleff (2008) foi realizada uma pesquisa sobre o tipo de material mais conveniente (adequado) para as atividades propostas. Foram listados os seguintes materiais possíveis: espuma floral e isopor. A espuma floral não foi uma boa opção devido a esse material soltar muito pó quando manuseado, então optou-se pelo isopor. Sendo assim, foram construídos de isopor cubos, paralelepípedos retângulos e outros sólidos conforme a Figura 26.

Figura 26 – Sólidos de isopor.

Além do material concreto, optou-se utilizar um *software* que contribuía para o estudo dos poliedros e a relação de Euler. Foi escolhido o *software* Poly [1] devido as possibilidades de mover e observar de vários ângulos os poliedros, além deste utilizar alguns recursos de animação.

Além disso, durante a elaboração das atividades investigativas, notou-se que para a resolução e compreensão destas, seria necessária uma breve revisão de alguns conteúdos de Geometria Plana e Espacial. Sendo assim foram elaborados *slides* contendo informa-

[1] Poly é um programa para exploração e construção de poliedros. Com ele, é possível manipular os sólidos poliédricos no computador em uma variedade de formas. Versões achatadas (redes) de poliedros podem ser impressas e, em seguida, cortado, dobrado e colado, para produzir modelos tridimensionais. Disponível em: <http://www.peda.com/poly/>.

ções sobre: polígonos, noções primitivas de geometria espacial, definição e elementos de poliedros, poliedros convexos e não convexos.

5.3 Elaboração das atividades

As atividades desenvolvidas neste trabalho buscam desenvolver o raciocínio, as capacidades de resolução de problemas e de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo conforme orientações do PCNs (BRASIL, 2000). Além disso, buscou-se elaborar atividades que utilizem material concreto, mas que não sejam apenas adaptações de aulas tradicionais com roteiros de atividades fechadas, sem espaço para explorações.

O objetivo da elaboração das atividades, aqui descritas, foi fornecer sugestões para o estudo do Teorema de Euler utilizando recursos pedagógicos, além de possibilitar a experimentação dos mesmos. O professor que se interessar poderá usá-las sem fazer alterações ou, alterá-las de modo a satisfazer seus objetivos, adequando-as aos diversos contextos em que atuam. Buscou-se trabalhar o tema de forma agradável possibilitando que os alunos investigassem, selecionassem estratégias de resolução, discutissem com os colegas e socializassem suas respostas. É importante que o professor chame à atenção dos seus alunos para que não tentem somente memorizar a relação, mas sejam capazes de observar e compreender (SANTOS; NUNES; ROSA, 2000). Desse modo, vale ressaltar que as atividades visam possibilitar que os alunos desenvolvam a sua capacidade de visualização e raciocínio, como já descrito.

Destaca-se novamente, que algumas atividades foram encontradas prontas e adaptadas de modo a atingir os objetivos deste trabalho.

Nas subseções a seguir, apresentam-se as atividades que foram realizadas com auxílio de materiais concretos e *software* Poly, bem como o objetivo de cada uma delas.

5.3.1 Atividade 1

Esta atividade (Figura 27) tem por objetivo que os alunos verifiquem a relação de Euler em alguns poliedros. Para isso, serão entregue aos alunos os três sólidos construídos de isopor, para que manuseiem e contem o número de vértices, faces e arestas de cada um. Feito isso, eles deverão verificar se a relação de Euler é válida para cada um dos sólidos e registrar na sua folha de atividades (Figura 28). Esta atividade foi planejada para ser realizada individualmente.

Figura 27 – Sólidos da atividade 1

Atividade 1 Verificando a Relação de Euler

Conte o número de vértices, faces e arestas de cada poliedro recebido e verifique se a Relação de Euler é válida para cada um deles.

- Cubo

V: ______

F: ______ Relação de Euler é válida? ______

A: ______

Figura 28 – Atividade 1

5.3.2 Atividade 2

Esta atividade é separada em duas partes, na primeira serão utilizados poliedros convexos, na segunda parte poliedros não convexos.

Na primeira parte é solicitado que os alunos façam cortes nos cubos recebidos de modo a obter um outro poliedro e em seguida completem uma tabela verificando a validade da relação de Euler (Figura 29).

Atividade 2

1ª parte – Poliedro Convexo

Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro convexo. Para isso os cortes devem ser feitos como planos intersectando o sólido.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
0	6	12	8	2
1 corte				
2 cortes				
3 cortes				

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? ____________________

Figura 29 – Atividade 2

Na segunda parte, os alunos devem proceder como na primeira, porém agora os poliedros a serem obtidos devem ser não convexos. É esperado que dessa vez sejam encontrados poliedros não convexos que obedecem à relação de Euler, porém outros no qual esse fato não ocorre. Vale ressaltar que será levado para aula um poliedro não convexo que não obedece a Relação de Euler, para o caso de não ser obtido nenhum poliedro desse tipo durante a realização das atividades. Esse exemplo de poliedro que não obedece a Relação de Euler aparece também na atividade 1, como poliedro B.

O objetivo dessa atividade, nas duas partes, é que os alunos tentem obter um poliedro, através de cortes, no qual a relação de Euler não se verifica, e chegar talvez em uma generalização para saber sem precisar verificar, se a relação de Euler é válida ou não para aquele poliedro.

5.3.3 Atividade 3

Para resolução dessa atividade é utilizado o *software* Poly (Figura 30), iniciando assim um processo de abstração, embora ainda seja possível a manipulação dos sólidos nesse *software*. A atividade foi dividida em duas partes, a fim de diminuir o risco de confusão por parte dos alunos com enunciados grandes.

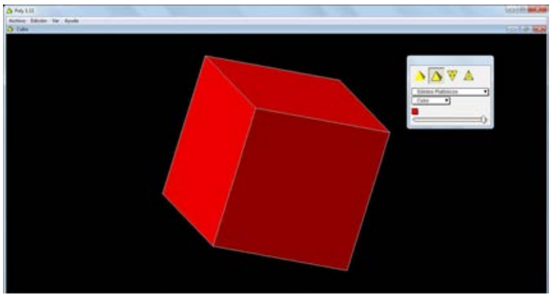


Figura 30 – Software Poly

O objetivo desta atividade é possibilitar aos alunos identificar e conhecer os sólidos de Platão, bem como suas planificações, além de observar que a relação de Euler é válida para todos os cinco sólidos de Platão.

Na primeira parte, é pedido que os alunos selecionem cada um dos cinco sólidos de Platão e preenchem uma tabela (Figura 31) no qual deve ser registrado qual o polígono que forma cada poliedro e o número de arestas concorrentes em cada um de seus vértices.

Atividade 3

1ª parte

Selecione sólidos de Platão (*Sólidos Platônicos*) no primeiro campo e depois vá selecionando cada um dos poliedros de Platão no segundo campo. Utilizando a visualização do Poly, complete a tabela, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice.

Nome do Poliedro	Polígono que forma o Poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro		
Cubo		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

Figura 31 – Atividade 3

Na segunda parte, é pedido que os alunos, com o auxílio do *software*, contem o número de vértices, faces e arestas de cada sólido de Platão e verifiquem se a relação de Euler é válida para este (Figura 32).

2ª parte

Verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler

Poliedro	**Faces (F)**	**Arestas (A)**	**Vértices (V)**	**V – A + F**
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Figura 32 – Atividade 3b

5.4 Experimentação das atividades

A experimentação das atividades ocorreu numa Instituição Pública Estadual da Cidade de Campos dos Goytacazes, para uma turma da 2ª série do Ensino Médio, uma vez que os conteúdos Poliedros e Relação de Euler faziam parte do planejamento da série escolhida. Essa experimentação ocorreu durante o horário da aula da turma, pois a autora deste trabalho é professora regente da turma escolhida. Sendo assim, participaram 25 alunos, que ficaram divididos em 11 duplas e 1 trio (Apêndice A). Para efeito de comparação esse mesmo conteúdo foi apresentado a uma segunda turma, porém seu enfoque foi em uma aula expositiva, sem a utilização dos materiais elaborados nesse trabalho. Em alguns momentos serão feitos comparações entre as duas apresentações, a fim de observar de fato se os materiais elaborados trouxeram algum benefício para a aprendizagem dos alunos. Os planos de ação das aulas da primeira e segunda turmas estão disponíveis nos Apêndices C e D, respectivamente.

Foram necessários três encontros de duração de duas aulas de 50 minutos cada. No primeiro encontro, foram realizadas as seguintes etapas: Alguns pré-requisitos (apresentados de forma dialogada), Definição de Poliedros, Poliedros convexos e não convexos e Poliedros Regulares, resolução e discussão das atividades 1 e 2. No segundo encontro, deu-se continuidade apresentando o *software* Poly, realizando a Atividade 3 e foi também apresentado aos alunos um vídeo denominado "Sinfonia de Poliedros"[2], que resume todo o conteúdo estudado. No último encontro foram resolvidos alguns exercícios de vestibular. Finalizando a parte expositiva, o teorema de Euler foi apresentado aos alunos. Vale ressaltar que nenhuma atividade tinha o objetivo dos alunos chegarem ou conjecturarem o teorema citado, e sim tinham o objetivo deles tentarem fazer falhar esse teorema. A realização das atividades foi mediada pela autora deste trabalho.

[2] Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WG0e57Dpe-g

O primeiro encontro foi realizado na sala de aula, o segundo encontro foi realizado numa sala de multimídia da instituição, já que foi utilizado o projetor de multimídia para realizar a atividade 3 e para a exibição do vídeo. O último encontro foi realizado em uma sala de aula, pois este foi destinado à resolução e discussão dos exercícios de vestibular.

As atitudes dos participantes, seus questionamentos e comentários na resolução das atividades e na utilização dos recursos pedagógicos, durante a experimentação, possibilitaram o registro de situações importantes para o alcance dos objetivos deste trabalho.

Na subseção a seguir, analisa-se a resolução de cada atividade, porém vale ressaltar que o enfoque maior dessa análise será na aula apresentada à primeira turma, no qual foram utilizados todos os materiais manipulativos elaborados durante esse trabalho.

5.4.1 Análise da Resolução da Atividade 1

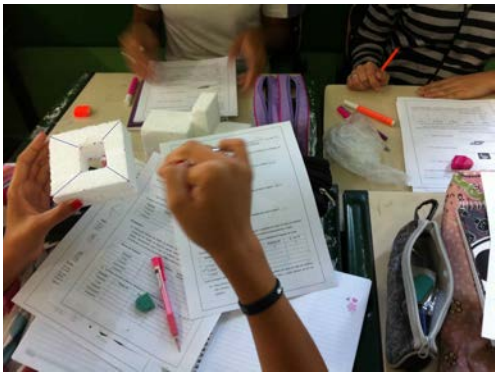
Primeiro foram apresentadas, de forma dialogada, aos alunos algumas definições como: poliedros, poliedro convexo, poliedro regular. Foram apresentados também aos alunos fotos dos cinco sólidos de Platão, utilizando o projetor de multimídia. Antecedendo a resolução das atividades, foi ressaltado que, à medida que sentissem necessidade, poderiam solicitar ajuda da mediadora.

A atividade 1 foi resolvida com afinco, visto que todos participaram ativamente, o que reforça a afirmação de Ponte, Oliveira e Brocardo (2005) que dizem que materiais manipuláveis são grandes fontes de entusiasmo para os alunos.

Nesta atividade os alunos receberam três sólidos, um cubo e dois poliedros denominados sólidos A e B (Figura 33). Como os sólidos de isopor eram todos na cor branca, foi necessária a utilização de canetas coloridas para marcar os vértices, arestas e faces que já tinham sido contados, evitando assim, que cada um desses fosse contado mais de uma vez. Destaca-se um aluno que numerou as faces dos sólidos com as canetas de hidrocor (Figura 34).

(a) Cubo

(b) Sólido A



(c) Sólido B

Figura 33 – Alunos resolvendo a Atividade 1

Figura 34 – Sólidos com faces numeradas

A dificuldade dos alunos foi na hora de contar o número de vértices, faces e arestas dos sólidos A e B, já no cubo a contagem desses elementos foi realizada sem problemas. Ressalta-se aqui que na turma 2 os alunos tiveram grande dificuldade nessa contagem já no cubo, visto que eles não tinham o cubo em mãos para manipular. Sendo assim, não foi possível a utilização dos outros dois sólidos (A e B) para essa turma.

5.4.2 Análise da Resolução da Atividade 2

Essa atividade foi dividida em 2 itens com o mesmo objetivo, tentar fazer falhar a relação de Euler fazendo cortes nos sólidos recebidos. Nessas atividades os alunos utilizaram estiletes para fazerem os cortes. Ressalta-se aqui que esta atividade foi aplicada somente a turma 1, visto que para resolução da mesma foram utilizados os materiais concretos elaborados, que não foram utilizados na aula da turma 2.

No primeiro item deveriam ser feitos cortes nos cubos recebidos de modo que o resultado de cada seja um poliedro convexo. Foi alertado aos alunos que para obter o poliedro convexo os cortes deveriam ser feitos como planos intersectando o sólido.

Esse primeiro item foi realizado sem dificuldade pelos alunos (Figura 35), atribui-se à essa facilidade de resolução ao fato deles já saberem contar o número de vértices, faces e arestas abordada na atividade anterior. Pode-se dizer também que os alunos estavam bastante motivados, pois buscaram obter sólidos diferentes dos tradicionalmente obtidos com cortes paralelos às bases (Figura 36).

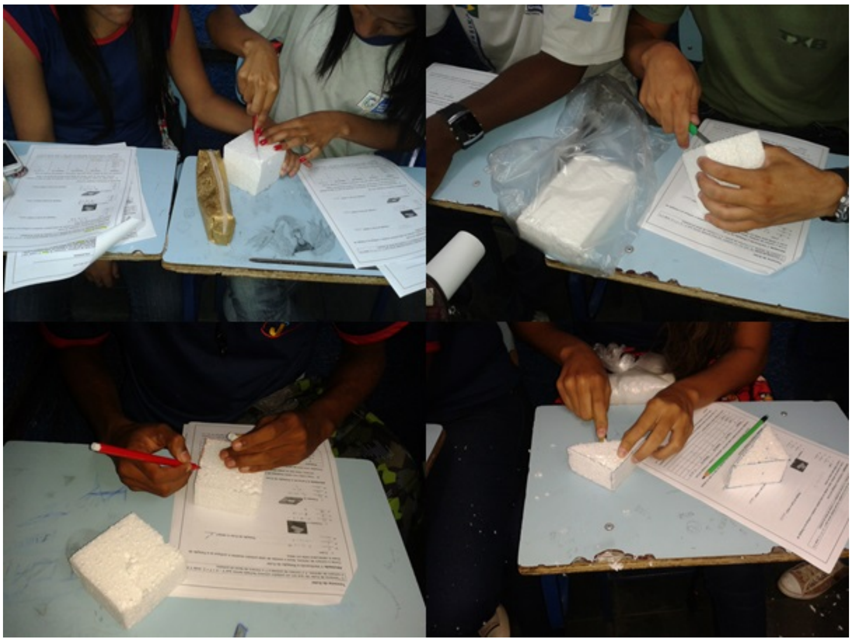


Figura 35 – Alunos realizando o item a da Atividade 2

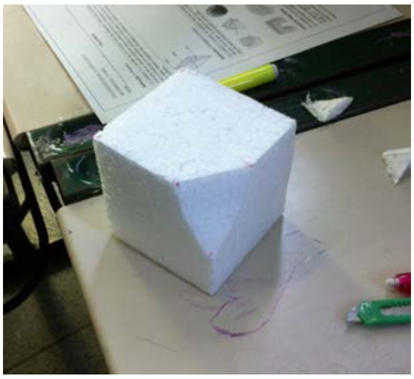
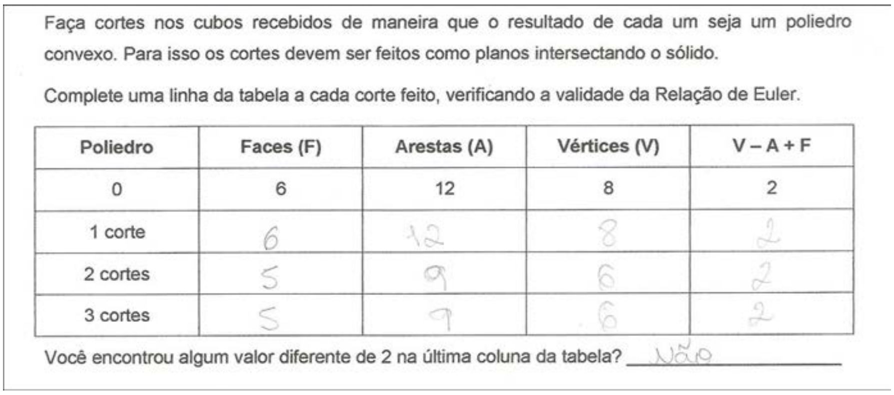


Figura 36 – Sólido obtido no item a da Atividade 2

Um fato que merece destaque também nesse item, refere-se ao fato de que um aluno cortou o cubo ao meio, com um plano paralelo a as faces laterais, encontrando como resultado paralelepípedos. Depois, o aluno cortou um dos paralelepípedos ao meio novamente, e encontrou o mesmo valor de vértices, faces e arestas em todas as linhas da tabela (Figura 37). Destaca-se também, uma aluna que conseguiu fazer falhar a Relação de Euler nesse item, porém esse fato se deve ao fato da aluna ter contado de forma errada o número de arestas de um sólido obtido após o corte (Figura 38).



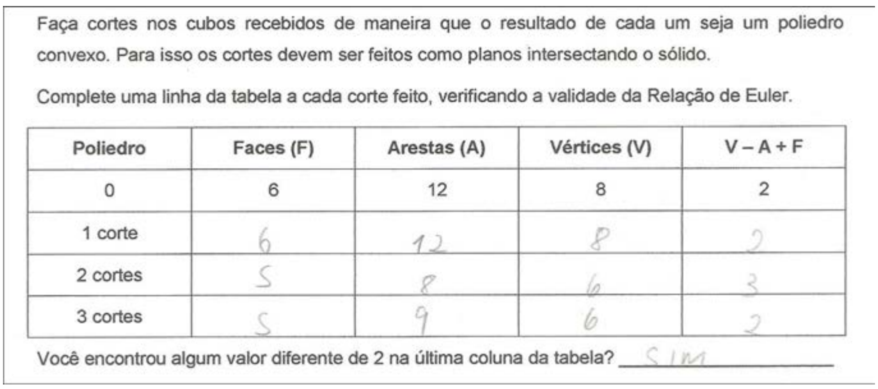
Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro convexo. Para isso os cortes devem ser feitos como planos intersectando o sólido.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
0	6	12	8	2
1 corte	6	12	8	2
2 cortes	5	9	6	2
3 cortes	5	9	6	2

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? Não

Figura 37 – Resposta do aluno 1



Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro convexo. Para isso os cortes devem ser feitos como planos intersectando o sólido.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
0	6	12	8	2
1 corte	6	12	8	2
2 cortes	5	8	6	3
3 cortes	5	9	6	2

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? SIM

Figura 38 – Resposta da aluna 2

O segundo item é semelhante ao primeiro, porém os sólidos obtidos deviam ser não convexos. Nesse item, os alunos apresentaram dificuldade em realizar cortes de modo a obter um poliedro não convexo. Nesse momento, a autora do trabalho teve que interferir e fazer um exemplo para a turma e também chamar atenção deles para os exemplos de poliedros convexos e não convexos que tinham na própria apostila deles (Figura 39). Soligo (2003) afirma que "a intervenção direta do professor durante as atividades, evidentemente, é condição para que os alunos avancem em seus conhecimentos". Após esse exemplo feito pela autora, os alunos fizeram os cortes necessários para obter poliedros não convexos e a atividade foi resolvida sem grandes dificuldades (Figura 40).

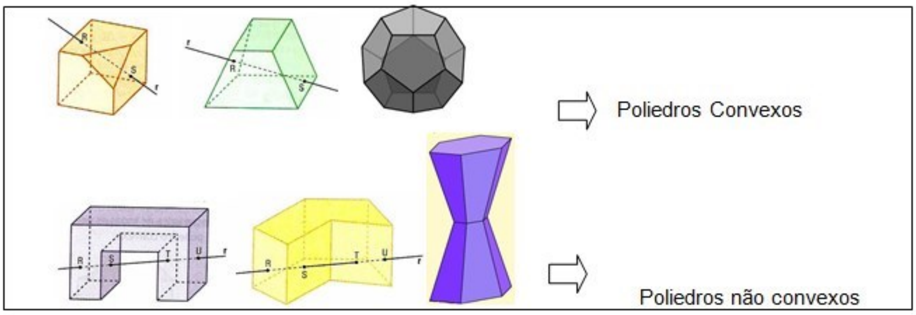


Figura 39 – Exemplos da apostila

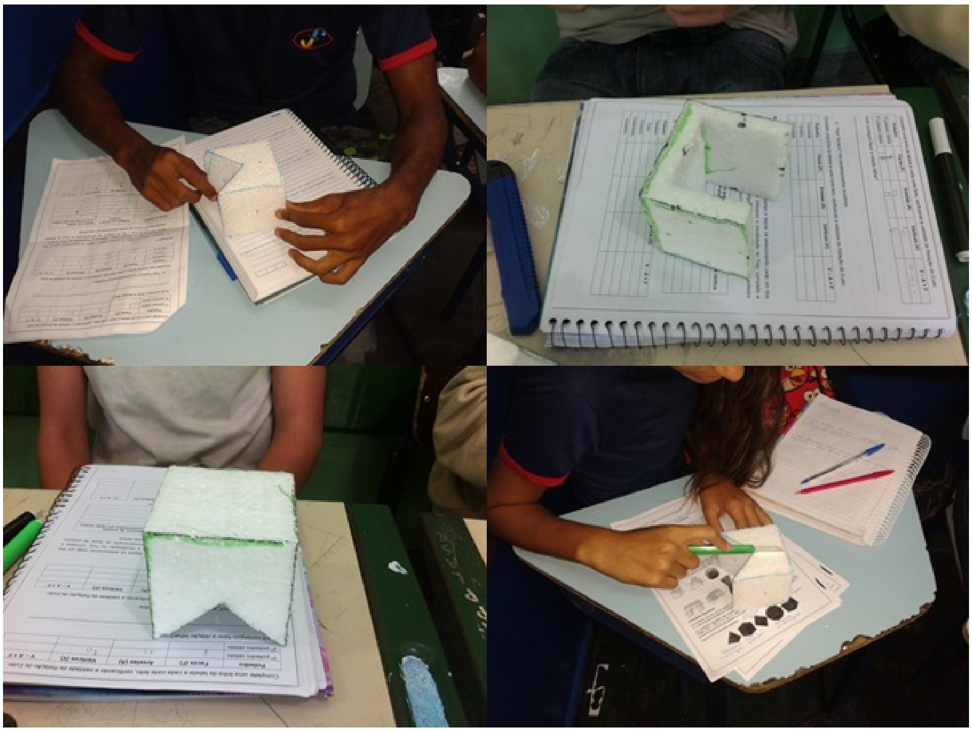
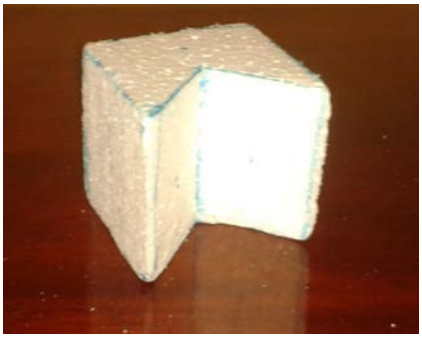


Figura 40 – Alunos realizando o segundo item da atividade 2

Quando todos os alunos terminaram a resolução da atividade 2, fez-se a socialização das respostas. Todos mostraram seus sólidos, obtidos por meio dos cortes. Considera-se que o objetivo dessa atividade foi atingido plenamente, visto que a união das respostas resultou em várias opções de sólidos (Figura 41). Segundo Silva et al. (2000), verificar essas possibilidades, geralmente desconhecidas pelos alunos, costuma ser uma atividade estimulante a qual eles se entregam com misto de desafio e prazer.

(a) Sólidos convexos



(b) Sólido não convexo

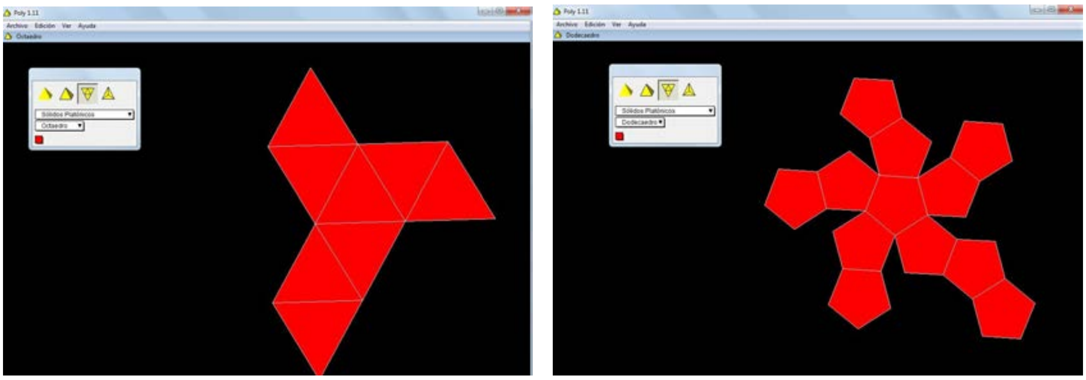
(c) Prismas triangulares

(d) Paralelepípedos retângulos

Figura 41 – Sólidos obtidos na Atividade 2

5.4.3 Análise da Resolução da Atividade 3

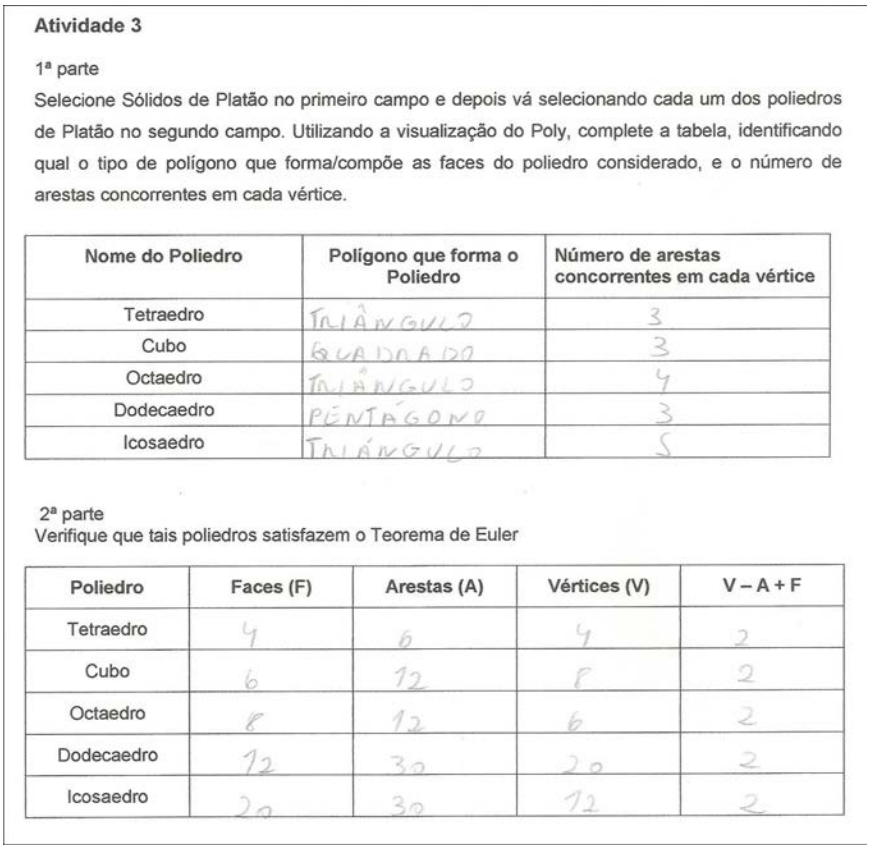
Nesta atividade foram estudados os cinco poliedros de Platão, utilizando o *software* Poly. Inicialmente foi feito o reconhecimento do *software*, destacando as ferramentas que seriam utilizadas na atividade. Os alunos se mostraram bastante interessados pelo *software* e principalmente pela planificação desses poliedros (Figura 42), que sinaliza interesse e curiosidade pelo recurso.



(a) Planificação do octaedro (b) Planificação do dodecaedro

Figura 42 – Planificações

Foi planejado pela autora deste trabalho que esta atividade fosse aplicada no laboratório de informática da instituição, porém devido a um problema nos computadores desse laboratório, essa parte da aula foi realizada em uma sala de multimídia. O *software* Poly foi apresentado por meio de um projetor de multimídia, e as atividades foram resolvidas com o auxílio da autora que selecionava os poliedros pedidos. Considera-se que mesmo com esse empecilho, o objetivo da atividade foi alcançado, pois os alunos conheceram os cinco poliedros de Platão e puderam verificar a validade da relação de Euler para os mesmos (Figura 43).



Atividade 3

1ª parte

Selecione Sólidos de Platão no primeiro campo e depois vá selecionando cada um dos poliedros de Platão no segundo campo. Utilizando a visualização do Poly, complete a tabela, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice.

Nome do Poliedro	Polígono que forma o Poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro	TRIÂNGULO	3
Cubo	QUADRADO	3
Octaedro	TRIÂNGULO	4
Dodecaedro	PENTÁGONO	3
Icosaedro	TRIÂNGULO	5

2ª parte

Verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	6	12	8	2
Octaedro	8	12	6	2
Dodecaedro	12	30	20	2
Icosaedro	20	30	12	2

Figura 43 – Resposta de um aluno da atividade 3

Após a realização desta atividade, foi apresentado aos alunos um vídeo, intitulado Sinfonia de Poliedros (Figura 44). Vale ressaltar que esse vídeo foi exibido para as duas turmas, tanto turma 1 quanto turma 2. Esse vídeo contém aproximadamente 10 minutos e conta a história de um diretor de teatro, curioso da cultura grega, decide montar uma peça baseada no diálogo Timeu, de Platão. Para tanto, conta com a ajuda de dois amigos, um marceneiro e outro compositor que, ao trabalharem juntos na peça, acabam fascinados pelos sólidos de Platão. Durante a exibição do vídeo os alunos se mostraram interessados e comentaram que toda aula poderia ser encerrada com um vídeo que resumisse o conteúdo abordado (Figura 45). A utilização de um vídeo didático em sala de aula pelo professor de matemática pode ser um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conteúdos matemáticos segundo as orientações dos PCN's (BRASIL, 2006).

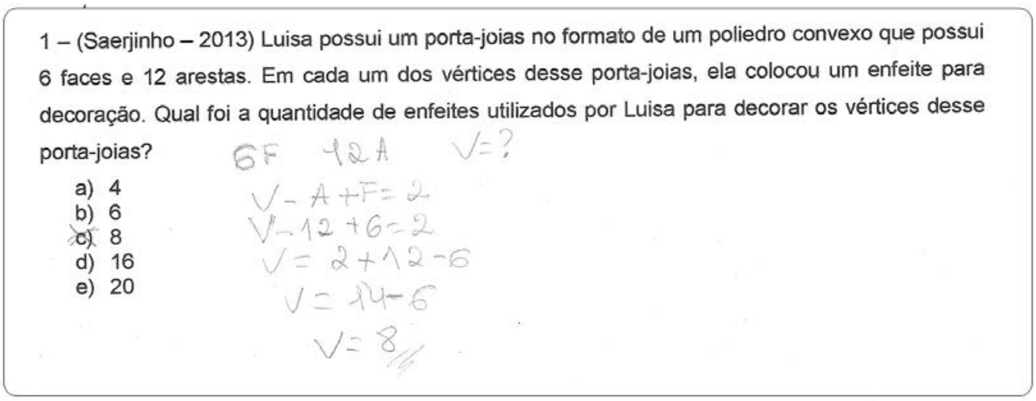
Figura 44 – Vídeo: Sinfonia de Poliedros

Figura 45 – Alunos assistindo o vídeo

5.4.4 Análise da Resolução dos Exercícios de Vestibular

A resolução dos exercícios de vestibular ocorreu no último encontro em uma sala de aula. Foi solicitado aos alunos que fizessem todos os quatro exercícios, para que, em seguida, as respostas fossem comentadas. A turma foi avisada que podia pedir o auxílio da mediadora quando surgisse alguma dúvida.

O primeiro exercício (Figura 46) foi resolvido sem dificuldade pelos alunos, visto que eles deveriam somente interpretar o problema a utilizar a Relação de Euler.



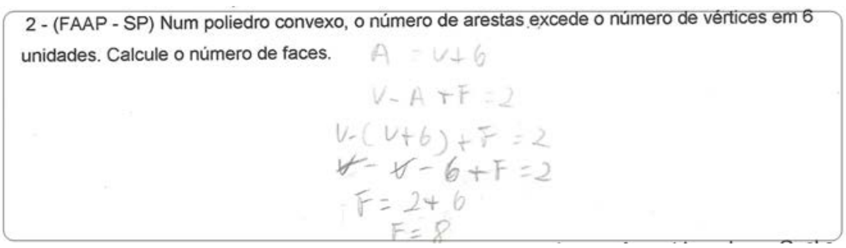
1 – (Saerjinho – 2013) Luisa possui um porta-joias no formato de um poliedro convexo que possui 6 faces e 12 arestas. Em cada um dos vértices desse porta-joias, ela colocou um enfeite para decoração. Qual foi a quantidade de enfeites utilizados por Luisa para decorar os vértices desse porta-joias?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 16
e) 20

6F 12A V=?
V - A + F = 2
V - 12 + 6 = 2
V = 2 + 12 - 6
V = 14 - 6
V = 8

Figura 46 – Exercício 1

No exercício número 2, foi pedido aos alunos que encontrassem o número de faces de um poliedro cujo número de arestas excedia o número de vértices em 6 unidades. Esse exercício foi interpretado corretamente pelos alunos, porém alguns tiveram dificuldades em representar o número de arestas ($A = V + 6$) corretamente, elemento importante para sua resolução. Nesse momento a autora foi chamada e auxiliou os alunos nessa notação. Após esse fato, a resolução do mesmo foi realizada sem problemas (Figura 47).



2 - (FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

A = V+6
V - A + F = 2
V - (V+6) + F = 2
$\cancel{V} - \cancel{V} - 6 + F = 2$
F = 2+6
F = 8

Figura 47 – Exercício 2

O exercício 3 foi o que gerou mais dúvidas. As dúvidas surgiram já no momento de interpretar o problema. Foi pedido para calcular o número de faces de um poliedro que tinha três faces pentagonais e algumas triangulares, sendo que o número de arestas era o quádruplo do número de faces triangulares.

A autora teve que resolver esse exercício juntamente com a turma para auxiliar a montar o problema, já que os alunos alegavam dificuldades em obter os elementos necessários para a resolução (Figura 48).

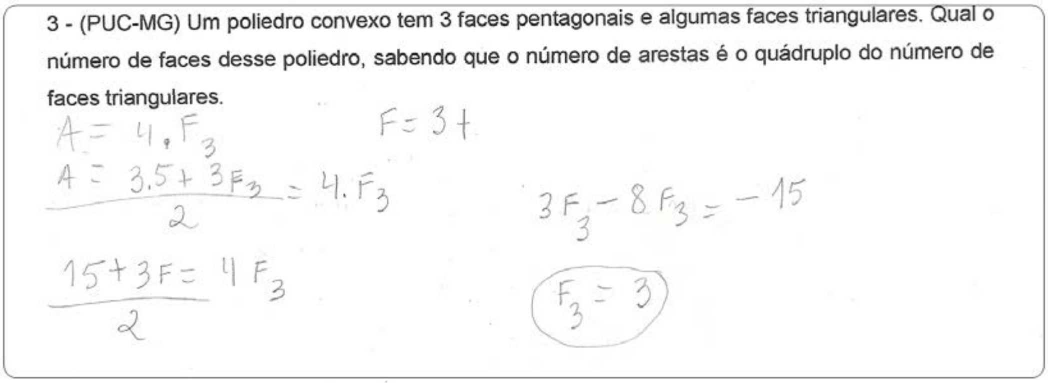


Figura 48 – Exercício 3

Uma resolução que merece destaque é a do quarto exercício. Foi pedido aos alunos que calculassem o número de vértices de um poliedro que tinha 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. A dificuldade foi em achar o número de arestas do poliedro para substituir na relação de Euler. A autora teve que encontrar o número de arestas juntamente com a turma. Para isso foi utilizado um dos sólidos construídos de isopor para exemplificar o processo de contagem das arestas.

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{2}$$

A dúvida persistiu em relação a ter que dividir por dois antes de encontrar o número de arestas do poliedro. Para sanar essa dúvida foi utilizada uma planificação de um cubo, feita de cartolina, para mostrar aos alunos que quando o poliedro é montado duas arestas se juntam formando somente uma. Ou seja, no momento da contagem pelos tipos de faces, cada aresta é contada duas vezes, por isso a divisão por dois. Após esses esclarecimentos, o exercício foi resolvido sem problemas (Figura 49).Este procedimento está de acordo com o que defende Kaleff (2008), quando afirma que o material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto e ter uma imagem visual do que está estudando e não somente ver a sua imagem mental por meio da imaginação, ou seja, na tela mental da sua cabeça.

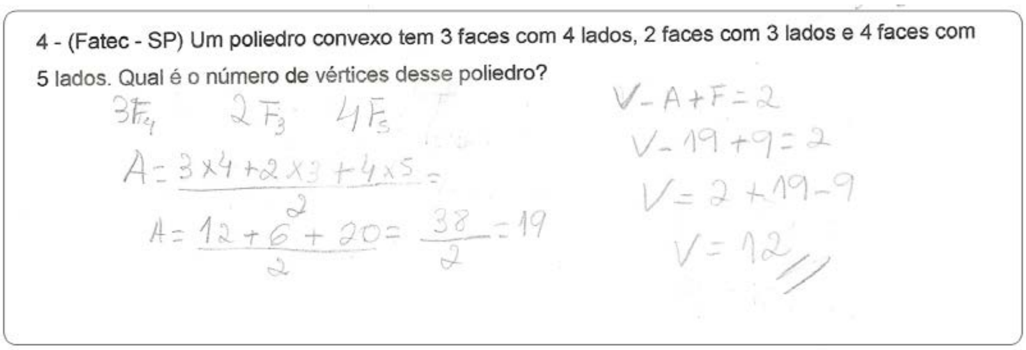


Figura 49 – Exercício 4

Considerações Finais

No presente capítulo são apresentadas as conclusões obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, são analisados alguns resultados, expondo as contribuições, bem como as dificuldades encontradas durante a realização deste trabalho. Em seguida, algumas ações para pesquisas futuras são sugeridas.

De acordo com o citado no referencial teórico, a Geometria é uma parte da Matemática que, na escola, teve sua importância reduzida e, por isso, durante muito tempo, não foi desenvolvida nos currículos escolares. Atualmente, no entanto, a Geometria vem sendo reintroduzida nos Currículos Escolares. Um exemplo disso são alguns livros didáticos que trazem os conteúdos de Geometria intercalados com os demais e não no final do livro como era o estilo de muitos autores durante um certo tempo.

Para tentar resgatar o interesse pela Geometria procurou-se elaborar atividades que despertassem o interesse nos alunos e, recursos que fossem utilizados para a execução dessas atividades: tais como, o uso de materiais concretos e de *softwares* de Geometria Dinâmica. Em relação aos *softwares*, é importante observar que o cotidiano está impregnado pelo uso de tecnologias e a escola não pode ficar de fora desse novo contexto.

O principal objetivo desse trabalho foi desenvolver e validar alguns recursos pedagógicos e atividades didáticas para a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, buscou-se investigar, como a utilização de recursos pedagógicos, tais como materiais concretos e *softwares*, auxiliam no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, em especial da Geometria. Buscou-se também perceber se a utilização de tais recursos favoreceu a motivação para aprender de um grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Campos dos Goytacazes.

O conteúdo escolhido foi o estudo dos Poliedros com ênfase no Teorema de Euler. Após muita pesquisa, foram elaboradas atividades investigativas que seriam realizadas pelos alunos com o auxílio de materiais concretos e um *software* de Geometria Dinâmica.

Destaca-se que o desenvolvimento dos materiais e a pesquisa sobre o tema, possibilitou um valioso estudo, em particular, sobre os Poliedros e Teorema de Euler. Destaca-se também, que o trabalho aqui desenvolvido contribuiu significativamente para a experiência de sua autora. Esta teve a oportunidade de desenvolver e aplicar recursos didáticos, com os quais os alunos participaram ativamente do processo de aprendizagem. Este trabalho possibilitou também, ampliar os conhecimentos sobre Poliedros, Topologia e sobre Leonhard Euler.

Para efeito de comparação essas atividades foram aplicadas em duas turmas de 2º ano, nas quais a autora é professora de Matemática, da escola em questão. Em uma turma foram utilizados os recursos pedagógicos elaborados e produzidos durante esse trabalho (turma 1), já na outra turma não foram utilizados todos os materiais elaborados durante esse trabalho (turma 2).

Na experimentação das atividades e dos recursos pedagógicos, os alunos contribuíram de forma valorosa para o andamento do trabalho, conforme descrito no capítulo 5. Os alunos demonstraram grande interesse pelas atividades, realizando-as com entusiasmo e participando ativamente. Ressalta-se que os recursos pedagógicos e o *software Poly* foram bem aceitos pelos alunos, sendo utilizados com agrado e quase sempre com facilidade.

Percebeu-se que na primeira turma os alunos, de modo geral, se mostravam mais participativos, interessados em realizar as atividades, solicitavam mais a ajuda da professora e estavam mais envolvidos na resolução das atividades propostas. Considera-se que esse fato ocorreu devido a utilização dos recursos, fato que não acontece em toda aula de Matemática.

Quanto ao uso do *software*, percebeu-se que este foi utilizado de modo satisfatório, pois contribui de forma significativa para o processo de visualização dos poliedros e de suas planificações.

Observou-se que a proposta desenvolvida na pesquisa não alterou o comportamento dos alunos de forma definitiva, contudo, proporcionou momentos de maior participação e interesse. Isso sinaliza que é possível motivar a aprendizagem dos alunos, a partir do uso de materiais manipuláveis e tecnologias em sala de aula.

Algumas dificuldades foram superadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Para a escolha do material concreto, foi necessário muito pesquisa para encontrar o mais adequado e que atendesse melhor aos objetivos traçados, visto que um material inapropriado poderia não ajudar na aprendizagem dos alunos ou até mesmo prejudicá-la. A atividade 3, que utilizava o *software* Poly, foi planejada pela autora para ser realizada no laboratório de informática da instituição, porém devido a um problema nas máquinas, a mesma foi realizada em uma sala de multimídia. O *software* foi apresentado por um projetor na parede da sala em questão. Considera-se que esses problemas encontrados não prejudicaram o andamento do trabalho.

Quanto ao uso de recursos pedagógicos manipuláveis, considera-se que estes quando bem utilizados em sala de aula beneficiam não só os alunos, mas também, os professores, pois seu uso pode trazer significativas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. Destaca-se como importante neste trabalho a oportunidade de ser usado um método pedagógico diferente, que provavelmente ajuda a despertar o interesse dos alunos.

Uma consideração importante a ser feita é que a proposta desse trabalho evidenciou que atividades que alterem a rotina da sala de aula do aluno podem ser de grande valia para o professor cativar esse aluno, despertando seu interesse e fazendo-o perceber de que é capaz de aprender Matemática.

Pela experiência vivenciada nesta pesquisa e pela experiência da autora adquirida em sala de aula, percebeu-se que é possível mudar a prática do professor e não ficar somente na exposição dos conteúdos. Ao se propor utilizar um recurso pedagógico diferente, o professor deve conhecer bem esse material, saber se é válida a sua utilização e aprender como trabalhar com ele.

É verdade que é preciso contar um planejamento flexível, visto que a realização dessas atividades geralmente necessitam de mais tempo. É necessária também uma disposição pessoal para seleção e elaboração dos materiais a serem utilizados. É sabido por todos, que essa é uma questão delicada pois, a maioria dos professores se desdobram para dar conta de muitos alunos e muitas turmas, as vezes até de muitas escolas. Porém, é interessante ter em mente que alguns materiais elaborados podem ficar para o professor utilizar novamente com futuros alunos.

Durante a realização deste trabalho foram percebidos aspectos positivos e negativos como em qualquer proposta de ensino e aprendizagem. Porém, os resultados sugerem que os pontos positivos superaram os negativos, visto que foi possível despertar o interesse dos alunos em vários momentos.

A partir do que foi exposto nessas considerações finais, para dar continuidade a este trabalho, pode-se desenvolver recursos didáticos e atividades para serem realizadas com outros conteúdos de Geometria como o estudo mais aprofundado de prismas, cilindros, pirâmides e esferas. Seria interessante aplicar as atividades elaboradas a outro grupo de alunos, para assim ter possibilidade de aprofundar a análise das mesmas.

Referências Bibliográficas

ALLAN, N. *Uma curta história de Poliedros*, 1997. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/nelo/>. Acesso em: 09/06/14.

ALVES, G.; SOARES, A. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: WORSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA E XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, IX, 2003, Campinas. *Anais...* p. 275 - 286, 2003. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/library/WIE-George-Adriana.pdf>. Acesso em: 11/05/14.

BRASIL, *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Médio.* Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 2000.

BRASIL, *Ministério da Educação (MEC)*, Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino. Orientações Curriculares do Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BIANCHINI, E. PACCOLA, H. *Matemática.* 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

BOCK, A. M. B., FURTADO, O., TEIXEIRA, M. de L. T. *Psicologias: uma introdução ao estudo de psicologia.* São Paulo: Editora Saraiva, 2002.

BORTOLOSSI, H. J. *Os Sólidos Platônicos*, 2009a. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 03/06/14.

BORTOLOSSI, H. J. *Uma Pletora de Poliedros*, 2009b. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>. Acesso em: 03/06/14.

BZUNECK, J. A.*A motivação do aluno: aspectos introdutórios.* In: BORUCHO-

VITCH, E., BZUNECK, J. A. A motivação do aluno: contribuições da Psicologia contemporânea. Petrópolis: Vozes, 2004, p. 9 – 36.

CAIADO, E. C. *Como proceder com alunos desmotivados. Canal do Educador*, s/d. Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/sugestoes-pais-professores/como-proceder-com-alunos-desmotivados.htm> Acesso em: 07/05/14.

CARVALHO, L. C. *Análise da Organização Didática da Geometria Espacial métrica nos livros didáticos.* PUC/SP, 2008. Dissertação de Mestrado.

CARVALHO, J. B. P. LIMA, P. F. *Geometria.* In: CARVALHO, J. B. P. Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

COLLI, E. *Poliedros*, 2010. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/ matemateca/textos/poliedros.pdf>. Acesso em: 16/03/14.

D'AMBRÓSIO, U. Euler, um matemático multifacetado. *Revista Brasileira de História da Matemática* – Vol. 9 nº 17, p. 13 – 31, 2009. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em: 16/03/14.

DANTE, L. R. *Matemática contexto e aplicações.* São Paulo: Editora Ática, 2005.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, A. B. de H. *Miniaurélio Século XXI Escola: o minidicionário da língua portuguesa.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001, p. 473.

FILHO, Z. A. As coisas que ensinamos: Demonstração do Teorema de Euler para poliedro convexo. *Revista do professor de matemática.* São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 3, p. 15-17, 1983.

FRANCO, V. S.; RISSI, M. R. *Topologia: uma proposta metodológica para o Ensino Fundamental,* 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde /arquivos/2210-8.pdf>. Acesso em: 07/05/14.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática.* São Paulo: FTD, 2009.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE, IV, 1998, Brasília, *Anais...* Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec>. Acesso em: 07/05/14.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, v.2: Ensino Médio. São Paulo. Editora Saraiva. 2010.

IZQUIERDO, I. *Silêncio, Por favor!* Editora Unisinos. Coleção: Aldus. 2ed, 2011.

JESUS, A. G. *A motivação para aprender Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental: um estudo do potencial dos materiais manipulativos e da construção de objetos na aprendizagem de área de polígonos e volume de prismas.* Universidade Federal de Ouro Preto, 2011. Dissertação de Mestrado.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos... *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.* Niterói RJ, n.2, p. 19-25, Ano I, 1994.

KALEFF, A. M. *Novas Tecnologias no Ensino da matemática-Tópicos em Ensino de Geometria: A sala de aula frente ao laboratório de ensino e à historia da Geometria.* v. 1. Rio de Janeiro: UAB/CEDERJ, 2008.

KAMPFF, A. J. C.; FERREIRA, A. L. A.; CARVALHO, M. H. S. de; LIMA, J. V. de. Um Hiperdocumento para Introdução à Geometria Plana. *Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)*, Porto Alegre, v. 3, n. 2, p. 1-10, 2005.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. *A Construção do Saber*: manual da metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artmed, 1999.

LIMA, E. L. Motivação em sala de aula: a mola propulsora da aprendizagem. In: SISTO, F. F. OLIVEIRA, G. G. FINI, L. D. T. (orgs.) *Leitura de psicologia para a formação de professores.* Petrópolis: Editora Vozes, 2004, p. 149-162.

LIMA, E. L. CARVALHO, P. C P. WAGNER, E. MORGADO, A. C. *A matemá-*

tica do Ensino Médio. Volume 2 – 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro. IMPA. 1991.

LORENZATO, S. FAINGUELERNT, E. K. A omissão geométrica. *Educação Matemática em revista, SBEM*, ano III, n.4 – 1º semestre, 1995.

MANNING, S. *Leonhard Euler: 306 aniversário de Matemático comemorado com um doodle do Google*, 2013. Disponível em: <http://www.mirror.co.uk/news/uk-news/leonhard-euler-mathematicians-306th-birthday-1833422>. Acesso em: 03/06/14.

MARTINS, T. D. GOLDONI, V. *Descobrindo os Poliedros de Platão*, 2010. Disponível em: < http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/> Última consulta em: 17/03/2014.

MENESES, R. S. *Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo*. 2007. 172 f. (Mestrado acadêmico em Educação Matemática) - Pontíficia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

MIALICHI, F. R. *Poliedros e Teorema de Euler.* Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, 2013. Dissertação de Mestrado.

MORAES, F. R. *A nova sala de aula*, 2012. Disponível em: <http://www.autonomiaedu.com.br/wp-content/uploads/a-nova-sala-de-aula-5-24.pdf>. Acesso em 15/04/14.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática* - Ano 9, p. 1 - 6, 2005. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf>. Acesso em: 16/03/14.

NASCIMENTO, M.; SALGADO, S. A. B. Uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via geometria esférica. In: ANAIS DO VI COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2013, São Carlos, SP. *Anais...* Disponível em: <http://www2.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto-PO-T1-ZZ-mateus.pdf> Acesso em: 17/03/14.

OLIVEIRA, P. C. *Um estudo sobre o discurso e prática pedagógica em Geometria:*

Representações Sociais. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Grupo de Pesquisa: CEMPEM –Prática Pedagógica em Matemática, 1997.

OLIVEIRA, J. A. *Varetas, canudos, arestas e ... Sólidos regulares*, 2008. Disponível em: <http://br.geocities.com/jaymeprof/tg/Platao/varetas.htm> Última consulta em: 10/05/14.

PASSOS, C. L. *Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: a Geometria na Sala de Aula.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Campinas, SP. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 2000.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica.* Dissertação de Mestrado em Educação. Campinas, SP. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 1989.

PAVANELLO, R. M. *Formação de Possibilidades cognitivas em Noções Geométricas*, 1995. (Doutorado em Metodologia do Ensino) – Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas: [s.n], 1995.

PINTO, P. R. *Notas sobre Sólidos Platónicos e Simetrias*, 2006. Disponível em: <http://www.math.ist.utl.pt/ ppinto/plato5.htm>. Acesso em: 07/06/14.

PIROLA, N. A. *Solução de Problemas Geométricos: Dificuldades Perspectivas.* Tese de Doutorado em Educação. Campinas, SP. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 2000.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

ROCHA, R. C. Fulerenos e sua espantosa geometria molecular. *Revista Química Nova Escola*, p. 7 - 11, 1996.

SAMPAIO,J. C. V. Tópicos de Topologia Intuitiva. *Anais do X Encontro Brasileiro de Topologia.* São Carlos,S.P: 1996.

SANTOS, M. da C. A. dos S.; NUNES, R. da S.; ROSA, I. G. R. *Cortes em Poliedros*, 2000. Disponível em:<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/frame.htm> Acesso em: 03/05/14.

SCHEMMER, J.; PEREIRA, P. S. *Uma aproximação entre a educação básica e o ensino superior por meio de aplicações topológicas*, 2012. Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro-Gaucho-Ed-Matem/cientificos/CC81.pdf>. Acesso em: 07/06/14.

SILVA, V. L. ASSUMPÇÃO, A. L.M. *Utilização de jogos e materiais manipuláveis para a construção de conhecimentos sobre poliedros regulares*, 2011. Disponível em: <http://www.facitec.br/revistamat> Acesso em: 20/05/2014.

SILVA, C. M. S. O livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. *Revista Brasileira de História da Matemática* – Vol. 9 nº 17, p. 33 – 52, 2009.Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em: 16/05/14.

SILVA, B. F. C.; NEVES, A. F.; GIUNTA, M. A. B.; NASCIMENTO, R. A.; *Seções planas no cubo e a organização do espaço tridimensional.* In: III CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO E 14º SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 2000. Ouro Preto, MG. Disponível em: <www.faac.unesp.br>. Acesso em: 17/04/14.

SIQUEIRA, R. M. História, Tradição e Pesquisa Sob Disputa: O Caso dos Poliedros na Geometria. *Revista Brasileira de História da Matemátic*a - Vol. 9 nº 17, 2009. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo9-no17.html>. Acesso em: 16/05/14.

SOLIGO, R. A. *Dez importantes questões a considerar. Caderno dos Professores.* São Luís - MA: Secretaria Municipal de Educação de São Luís, 2003, v. 1, p. 109-131.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Vontade de saber matemática.* 2 ed. São Paulo: FTD, 2012.

TORISU, E. M. *Compreendendo a motivação do aluno para aprender matemática por meio das crenças de autoeficácia.* Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

VASCONCELLOS, M. *A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores.* In Zetetiké, v.1, n.1, 1993.

Apêndices

APÊNDICE A

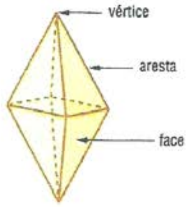
Apostila de atividades

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática - LCMAT/UENF
Aluna: Paula Eveline da Silva dos Santos
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho

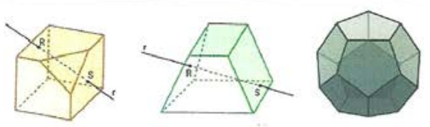
Definição 1 Poliedro

Um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces. É exigido que cada lado de um desses polígonos seja também lado de um, e apenas um, outro polígono e ainda que a intersecção de duas faces distintas do sólido seja uma aresta comum, um vértice ou vazia. Os lados desses polígonos são chamados de arestas do poliedro e os seus vértices, de vértices do poliedro.

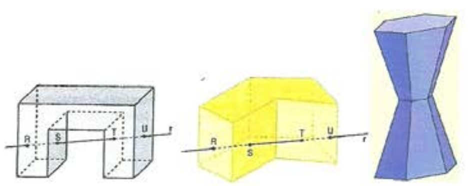


Definição 2 Poliedro Convexo

Um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. Ou podemos dizer que um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele.



Poliedros Convexos



Poliedros não convexos

Teorema de Euler

O Teorema de Euler diz que em um poliedro convexo fechado temos que $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

Atividade 1

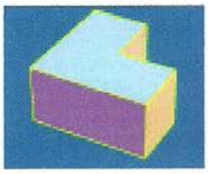
Conte o número de vértices, faces e arestas de cada poliedro recebido e verifique se a Relação de Euler é válida para cada um deles.

- Cubo

V: ______

F: ______ Relação de Euler é válida? ______

A: ______

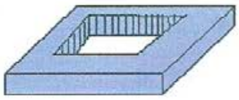


- Poliedro A

V: ______

F: ______ Relação de Euler é válida? ______

A: ______



- Poliedro B

V: ______

F: ______ Relação de Euler é válida? ______

A: ______

Atividade 2

1ª parte – Poliedro Convexo

Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro convexo. Para isso os cortes devem ser feitos como planos intersectando o sólido.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
0	6	12	8	2
1 corte				
2 cortes				
3 cortes				

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? ______________________

2ª parte – Poliedro Não Convexo

Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro não convexo. Lembre-se de que, dependendo do corte feito, o sólido deixará de ser um poliedro.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
1º poliedro obtido				
2º poliedro obtido				

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? ____________________

Atividade 3

1ª parte

Selecione Sólidos de Platão no primeiro campo e depois vá selecionando cada um dos poliedros de Platão no segundo campo. Utilizando a visualização do Poly, complete a tabela, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice.

Nome do Poliedro	Polígono que forma o Poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro		
Cubo		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

2ª parte

Verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Exercícios de Vestibular

1 – (Saerjinho – 2013) Luisa possui um porta-joias no formato de um poliedro convexo que possui 6 faces e 12 arestas. Em cada um dos vértices desse porta-joias, ela colocou um enfeite para decoração. Qual foi a quantidade de enfeites utilizados por Luisa para decorar os vértices desse porta-joias?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 16
e) 20

2 - (FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

3 - (PUC-MG) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

4 - (Fatec - SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Qual é o número de vértices desse poliedro?

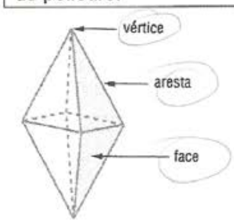
APÊNDICE B

Apostila de atividades respondida por um aluno

Mestrado Profissional em Matemática - LCMAT/UENF
Aluna: Paula Eveline da Silva dos Santos
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho

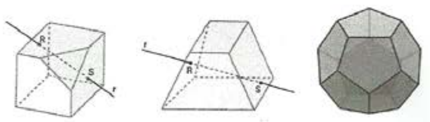
Definição 1 Poliedro

Um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces. É exigido que cada lado de um desses polígonos seja também lado de um, e apenas um, outro polígono e ainda que a intersecção de duas faces distintas do sólido seja uma aresta comum, um vértice ou vazia. Os lados desses polígonos são chamados de arestas do poliedro e os seus vértices, de vértices do poliedro.

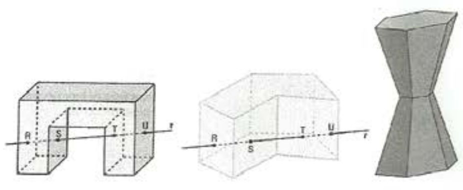


Definição 2 Poliedro Convexo

Um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. Ou podemos dizer que um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele.



Poliedros Convexos



Poliedros não convexos

Teorema de Euler

O Teorema de Euler diz que em um poliedro convexo fechado temos que V – A + F = 2, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

Atividade 1

Conte o número de vértices, faces e arestas de cada poliedro recebido e verifique se a Relação de Euler é válida para cada um deles.

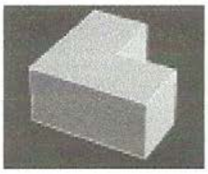
- Cubo

V: 8 $V-A+F=$

F: 6 $8-12+6=2$

A: 12

Relação de Euler é válida? sim



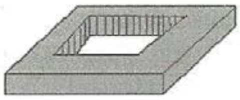
- Poliedro A

V: 12

F: 8

A: 18

Relação de Euler é válida? sim



- Poliedro B

V: 16 $V-A+F$

F: 16 $16-32+16=0$

A: 32

Relação de Euler é válida? não

Atividade 2

1ª parte – Poliedro Convexo

Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro convexo. Para isso os cortes devem ser feitos como planos intersectando o sólido.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
0	6	12	8	2
1 corte	6	12	8	2
2 cortes	5	9	6	2
3 cortes	5	9	6	2

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? Não

2ª parte – Poliedro Não Convexo

Faça cortes nos cubos recebidos de maneira que o resultado de cada um seja um poliedro não convexo. Lembre-se de que, dependendo do corte feito, o sólido deixará de ser um poliedro.

Complete uma linha da tabela a cada corte feito, verificando a validade da Relação de Euler.

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
1º poliedro obtido	7	15	10	2
2º poliedro obtido				

Você encontrou algum valor diferente de 2 na última coluna da tabela? Não

Atividade 3

1ª parte

Selecione Sólidos de Platão no primeiro campo e depois vá selecionando cada um dos poliedros de Platão no segundo campo. Utilizando a visualização do Poly, complete a tabela, identificando qual o tipo de polígono que forma/compõe as faces do poliedro considerado, e o número de arestas concorrentes em cada vértice.

Nome do Poliedro	Polígono que forma o Poliedro	Número de arestas concorrentes em cada vértice
Tetraedro	triângulo	3 arestas
Cubo	quadrado	3 arestas
Octaedro	triângulo	4 arestas
Dodecaedro	pentágono	3 arestas
Icosaedro	triângulo	5 arestas

2ª parte

Verifique que tais poliedros satisfazem o Teorema de Euler

Poliedro	Faces (F)	Arestas (A)	Vértices (V)	V – A + F
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	6	12	8	2
Octaedro	8	12	6	2
Dodecaedro	12	30	20	2
Icosaedro	20	30	12	2

Exercícios de Vestibular

1 – (Saerjinho – 2013) Luisa possui um porta-joias no formato de um poliedro convexo que possui 6 faces e 12 arestas. Em cada um dos vértices desse porta-joias, ela colocou um enfeite para decoração. Qual foi a quantidade de enfeites utilizados por Luisa para decorar os vértices desse porta-joias? $6F$ $12A$ $V=?$

a) 4
b) 6
c) 8
d) 16
e) 20

$V-A+F=2$
$V-12+6=2$
$V=2+12-6$
$V=14-6$
$V=8$ //

2 - (FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces. $A=V+6$

$V-A+F=2$
$V-(V+6)+F=2$
$\cancel{V}-\cancel{V}-6+F=2$
$F=2+6$ $F=8$ //

3 - (PUC-MG) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

$F_5=3$ pentag.
$F=F_3+F_5$
$F=3+3=6$ //

$A=4.F_3$
$V-A+F=2$

$F=F_3+F_5$
$A=\frac{5.3+3.F_3}{2}$
$4F_3=\frac{15+3F_3}{2}$

$8F_3=15+3F_3$
$5F_3=15$
$F_3=3$ //

4 - (Fatec - SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Qual é o número de vértices desse poliedro?

$3F_4$ $2F_3$ $4F_5$

$A=\frac{3\times 4+2\times 3+4\times 5}{2}=$

$A=\frac{12+6+20}{2}=\frac{38}{2}=19$

$V-A+F=2$
$V-19+9=2$
$V=2+19-9$
$V=12$ //

APÊNDICE C

Plano de aula turma 1

PLANO DE AÇÃO

1- IDENTIFICAÇÃO INSTITUIÇÃO DE ENSINO:

SÉRIE: 2º ano do Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

TEMA: Relação de Euler

HORAS AULAS PREVISTAS: 6 horas/aula

2- OBJETIVOS

• Apresentar e verificar a Relação de Euler aos alunos.

• Procurar, por meio de experiências, poliedros para os quais a Relação de Euler seja válida.

• Procurar, por meio de experiências, poliedros para os quais a Relação de Euler não se verifica.

• Mostrar que existem apenas 5 poliedros regulares convexos.

3 - MATERIAL NECESSÁRIO

Os materiais utilizados serão: uma folha de atividades, sólidos de isopor confeccionados previamente, caneta coloridas, projetor de multimídia, estilete e um laboratório de informática.

4 - CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS

Relação de Euler e Poliedros.

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente serão expostas para os alunos algumas definições importantes para realização das atividades, são elas: definição de polígono e polígono convexo, poliedro e poliedro convexo.

Na primeira atividade, os alunos, individualmente, receberão um cubo e dois poliedros convexos. Com esses sólidos os alunos contarão o número de vértices, faces e arestas de cada um e verificarão se a Relação de Euler é válida para cada um deles.

A segunda atividade será dividida em duas partes. Na primeira parte, cada aluno receberá 2 cubos nos quais deverão fazer cortes de modo a obter um poliedro convexo. Depois de feitos os cortes, o aluno deverá, novamente, verificar a validade da Relação de Euler. Ao final dessa atividade o aluno deverá responder a seguinte pergunta: você conseguiu fazer a relação falhar?

Na segunda parte, os alunos devem proceder como na primeira, porém agora os poliedros a serem obtidos devem ser não convexos. É esperado que dessa vez sejam encontrados poliedros não convexos que obedecem à relação de Euler, porém outros no qual esse fato não ocorre. Vale ressaltar que será levado para aula um poliedro não convexo que não obedece a Relação de Euler, para o caso de não ser obtido nenhum poliedro desse tipo durante a realização das atividades.

Dando continuidade, será mostrado que existem apenas cinco poliedros regulares convexos. Para isso será utilizado o software Poly, no qual os alunos podem observar e investigar esses poliedros inclusive suas planificações.

Na terceira atividade, é pedido que os alunos selecionem cada um dos cinco sólidos de Platão, no software Poly, e preenchem uma tabela no qual deve ser registrado qual o polígono que forma cada poliedro e o número de arestas concorrentes em cada um de seus vértices. Na segunda parte, é pedido que os alunos, com o auxílio do software, contem o número de vértices, faces e arestas de cada sólido de Platão e verifiquem se a relação de Euler é válida para este.

Ao final da aula, será apresentado um vídeo que resume todo o conteúdo abordado.

APÊNDICE D

Plano de aula turma 2

PLANO DE AÇÃO

1- IDENTIFICAÇÃO INSTITUIÇÃO DE ENSINO:

SÉRIE: 2º ano do Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

TEMA: Relação de Euler

HORAS AULAS PREVISTAS: 6 horas/aula

2- OBJETIVOS

• Apresentar e verificar a Relação de Euler aos alunos.

• Apresentar exemplos de poliedros, nos quais a Relação de Euler é válida e também poliedros nos quais essa Relação não é válida.

• Mostrar que existem apenas 5 poliedros regulares convexos.

3 - MATERIAL NECESSÁRIO

Os materiais utilizados serão: uma folha de atividades, livro didático e projetor de multimídia.

4 - CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS

Relação de Euler e Poliedros.

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente serão expostas para os alunos algumas definições importantes para realização dos exercícios, são elas: definição de polígono e polígono convexo, poliedro e poliedro convexo.

Logo após, será apresentado aos alunos o Teorema de Euler e uma breve história sobre Leonhard Euler.

Serão mostrados exemplos, do próprio livro didático, de poliedros que valem a Relação de Euler e poliedros que não valem essa Relação.

Ao final da exposição do conteúdo, será apresentado um vídeo que resume todo o conteúdo abordado.

Os alunos também resolverão quatro exercícios de vestibulares quem envolvem o conteúdo estudado.