HUMBERTO SILVEIRA GONÇALVES FILHO

O JOGO SENHA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

OUTUBRO DE 2016

HUMBERTO SILVEIRA GONÇALVES FILHO

O JOGO SENHA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Profª. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
OUTUBRO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **197/2016**

Gonçalves Filho, Humberto Silveira
O jogo senha como recurso didático para o ensino dos métodos de contagem / Humberto Silveira Gonçalves Filho. – Campos dos Goytacazes, 2016.
74 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.
Orientador: Liliana Angelina León Mescua.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 71-72.
1. ANÁLISE COMBINATÓRIA 2. PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO 3. PERMUTAÇÕES CAÓTICAS 4. MÉTODOS DE CONTAGEM 5. SENHA I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 511.6

HUMBERTO SILVEIRA GONÇALVES FILHO

O JOGO SENHA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 26 de outubro de 2016.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFFluminense

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof. José Ramon Arica Chavez
D.Sc. - UENF

Profª. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A Deus em primeiro lugar, toda minha família, e ao meu querido pai, Humberto Silveira Gonçalves (in memoriam) que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos difíceis de minha vida.

Agradecimentos

Ao iniciar uma caminhada, o ser humano nunca pode determinar se conseguirá atingir seus objetivos, nesse caminhar existem possibilidades de que ocorram tropeços, porém a grande virtude é a coragem para se levantar e começar novamente, nunca desistir. Todavia, ao terminar uma jornada, não há prazer no mundo que possa ser comparado àquele momento. Todas as dificuldades são esquecidas, mesmo que momentaneamente, e após a euforia, novas metas, novos objetivos são traçados e o ser humano recomeça sua caminhada.

Nada seria possível sem a ajuda daqueles que estiveram comigo na realização desse sonho. Portanto, sou muito grato.

Em especial, a Deus pelas oportunidades que me foram dadas na vida. Agradeço também por ter vivido fases difíceis, que foram matérias-primas de aprendizado. Destaco a nova oportunidade de viver após meu grave acidente de carro indo realizar a primeira avaliação de MA11.

À minha namorada Maria Carolini Graviely Scherrer Lindoso, pelo amor, carinho, paciência, apoio e compreensão.

Aos meus pais Humberto Silveira Gonçalves (in memoriam) e Marina Curcio Seródio, sem os quais não estaria aqui, e por terem me fornecido condições para me tornar o profissional e homem que sou.

Aos colegas da classe, pela amizade e a família que construímos juntos, pelo apoio que me deram nesse período me ajudando nas dificuldades. Cito também, com grande carinho, meus amigos particulares e de trabalho pelo constante auxílio: Thiago Jacomino, Andressa Pedroza, Flávio Bittencourt, Thiago Bernardo, Fernanda Favoreto, Rodrigo Martins, Clinger Cleir, Daiana Milani, Everton Alcântara, Allana Guimarães, Eduardo Corrêa, Margareth Brandão, José Renato Paveis, Gilberto Jardim, Lenilson Oliveira, Rebeca Pereira e Sarah Vervloet (minha revisora).

À professora Liliana Angelina León Mescua, minha orientadora, pelo apoio constante concedido, competência, profissionalismo e pela confiança no meu trabalho.

Aos meus professores do curso: Oscar, Mikhail, Liliana, Rigoberto e Nelson, pelo conhecimento compartilhado. Sou grato a cada um pela minha formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, de cunho bibliográfico, exploratório e analítico, objetivamos utilizar o “Jogo Senha” ou “*Mastermind*” como recurso didático-pedagógico para auxiliar o ensino da Análise Combinatória. Nesse intuito, exploramos o grande potencial de aplicabilidade do tema, para estudar problemas de contagem a partir de análises matemáticas que o jogo propicia. Definimos e exemplificamos todos os Princípios de Contagem que fazem parte do currículo do segundo ano do Ensino Médio e introduzimos o conceito de Permutações Caóticas, por meio de atividades diversas, esperando tornar o estudo do tema mais atraente, compreensivo e dinâmico. Propomos ao final, cinco atividades visando associar os conceitos com o Jogo Senha, oferecendo uma forma lúdica e diferenciada para o ensino da Análise Combinatória.

Palavras-chaves: Análise Combinatória, Princípio Multiplicativo, Permutações Caóticas, Métodos de Contagem, Senha.

Abstract

In this work, focused on bibliographic, exploratory and analytical aspects, we aim to use the game *"Mastermind"* as a didactic-pedagogic resource to assist the teaching of Combinatorial Analysis. To that end, we explore the great applicability potential of the topic to study counting problems from mathematical analysis that the game provides. We define and exemplify all Counting Principles that are part of the second year of high school curriculum and introduced the concept of Permutations Chaotic, through various activities, hoping to make the study more attractive, sympathetic and dynamic. We propose, at the end, five activities aiming to associate the concepts with Mastermind, offering a playful and differentiated form for the teaching of Combinatorial Analysis.

Key-words: Combinatorial Analysis, Multiplicative Principle, Chaotic Permutations, Counting Methods, Password.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Sumário

Introdução

O jogo foi uma ferramenta frequentemente utilizada desde Roma e Grécia antigas, com objetivo de propiciar lazer aos "jogadores". No entanto, o jogo não está somente ligado ao que é diversão e prazer, mas também ao cálculo, raciocínio e operação, entre outros processos (BROUGÈRE, 1998).

> Os jogos são tão antigos como a humanidade. O ato de jogar desde sempre acompanhou a civilização. Em todas as civilizações encontramos uma prática lúdica. Os jogos constituem uma das facetas incontornáveis da cultura humana. [...] As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional. (NETO; SILVA; SILVEIRA, 2008 apud SOUZA, 2013, p. 7).

Em consequência da inovação educacional do século XIX, novas propostas pedagógicas começaram a surgir, incentivando diferentes maneiras de ensinar, conforme constata, por exemplo, Souza (2000) em artigo acerca da renovação do programa escolar a partir de 1870. Neste âmbito, os jogos ganham espaço e adentram o meio educacional, mostrando-se como instrumentos positivos no processo de ensino-aprendizagem.

No que diz respeito aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), Brasil (1998, p. 49), destaca-se que "um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar". Brasil (1998, p. 36) ainda enfatizam: "[...] os jogos com regras têm aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda. A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico".

Já para Macedo (1995), a novidade dos jogos de regras é o seu caráter coletivo, pois neles as ações devem ser reguladas por convenções que definem o que os jogadores podem ou não fazer. E, segundo Moura (1992), o jogo ganhou importância em propostas para seu aparecimento no ensino de matemática nas contribuições teóricas de Piaget, Vygotsky, Leontiev, Elkonin, entre outros. Assim, os jogos passam a fazer parte dos materiais pedagógicos como metodologia de aprendizagem construtivista. Por meio dos jogos, o aprendiz explora informações que norteiam o aperfeiçoamento de capacidades mentais e isso traz o autodesenvolvimento da personalidade do indivíduo.

Naturalmente, cada jogo apresenta problemas e regras com as quais o jogador tem que lidar para que sua participação seja ativa. Os problemas exigem certa estratégia a qual pode ser explorada a partir de uma base teórica ou apenas pela intuição, porém, é de fundamental importância para o bom desempenho nas disputas a disciplina e o autocontrole do jogador.

Alguns jogos possuem regras, estratégias e conceitos ligados intimamente à matemática e um jogo específico que será utilizado como ferramenta no decorrer deste trabalho, visando apresentar estratégias de ensino, é o denominado "Jogo Senha" ou "*Mastermind*". Ele valoriza aspectos importantes, como: atenção, memorização, autonomia, assim como conhecimentos matemáticos. O tema matemático principal que está presente é a Análise Combinatória, que possui grande importância na formação dos alunos do Ensino Médio, como destaca os PCNs:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p. 257).

Além disso, segundo Gonçalves, temos que

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias. (ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001 apud GONÇALVES, 2014, p. 12).

Em nosso trabalho abordaremos uma forma de usar o Jogo Senha em salas de aula de nível médio, associando a matemática presente no jogo com os métodos de contagem dispostos em problemas do cotidiano. Não encontramos nenhuma proposta desse tipo, porém destacamos alguns trabalhos similares importantes para os temas Jogos e Combinatória, como é o caso de Gonçalves (2014), que propõe o ensino dos métodos de contagem sem o uso excessivo de fórmulas, utilizando o Princípio Multiplicativo como ferramenta didático-pedagógica; Santos (2007) que enfatiza a parte matemática presente nos casos do Jogo Senha; Ferreira, Sales e Mendes (2015) que relata uma experiência da aplicação do Jogo Senha para a iserção do tema Permutação Simples e Souza (2013), que trabalha os Jogos de Nim e Torre de Hanói, além de enfatizar a parte histórica dos jogos em geral.

Portanto, o presente trabalho, de cunho bibliográfico, objetiva utilizar jogos como metodologia de ensino e aprendizagem de matemática, mais especificamente o Jogo Senha. Nossos objetivos são assim delineados:

1. Objetivo Geral

• Criar uma metodologia de ensino diferenciada para o ensino de Análise Combinatória.

2. Objetivos Específicos

• Estimular o raciocínio combinatório do aluno a partir de uma abordagem dinâmica associando os métodos de Contagem com o Jogo Senha;

• Incentivar a parte escrita na resolução dos problemas de Contagem;

• Estimular o raciocínio combinatório através da resolução de problemas associando Conceitos com casos do Jogo Senha;

• Associar os conceitos utilizados nos casos do Jogo Senha com os métodos utilizados em problemas quaisquer de Análise Combinatória;

• Inserir o aluno nos problemas matemáticos tornando-os parte fundamental do processo educativo;

• Propor a inserção dos Conceitos de Permutações Caóticas no Ensino Médio.

Para tanto, será feita uma análise dos documentos/parâmetros que orientam o ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio e, em seguida, iremos analisar caso a caso qual método de contagem será proposto mostrando o potencial de aplicabilidade que esta ação didática possui. Após as análises gerais das situações presentes no Jogo, teremos a possibilidade de aplicar alguns Métodos de Contagem, a fim de entender com mais detalhes o decorrer do jogo além de trazer a oportunidade implícita de inserir algumas técnicas que não são exigidas pelos Parâmetros Nacionais.

Esperamos, com esta proposta, tornar o estudo da matemática mais atraente e motivador para os alunos, estimulando, principalmente, seu raciocínio dedutivo e o gosto por estudar matemática. Para melhor compreensão, apresentamos a seguir a estrutura do trabalho.

No Capítulo 1, iremos analisar as Orientações Curriculares Nacionais, a fim de entender os objetivos do ensino dos Métodos de Contagem. Faremos uma análise de como este tema é abordado no Ensino Médio Nacional. Apresentaremos também, todas as técnicas de Contagem envolvidas no Jogo, com a finalidade de embasar teoricamente o trabalho, dando mais segurança à pesquisa e às aplicações. Todas as técnicas serão enunciadas, definidas, demonstradas e exemplificadas, sempre dentro de alguns casos do próprio Jogo.

No Capítulo 2, mostraremos efetivamente a Análise Combinatória por trás do Jogo Senha. Iremos, com isso, aplicar os conceitos e técnicas apresentados no Capítulo 1 para entender matematicamente o desenvolver do Jogo em estudo. Com isso, estaremos apresentando, indiretamente, o potencial didático-pedagógico que esta proposta possui.

No Capítulo 3, apresentaremos propostas didático-pedagógicas para o Ensino de Análise Combinatória por meio da aplicação do Jogo Senha, seja pelo método tradicional no tabuleiro ou por aplicativos atualmente disponíveis em *Smartphones*. Mostraremos que os métodos de Contagem podem ser inseridos no decorrer do Jogo, trazendo assim aplicabilidade, ludicidade e desafio durante as tentativas de adivinhar a senha. Isso trará a oportunidade de associar a matemática presente no Jogo com Problemas de Contagem diversos.

Por fim, expomos nossas considerações finais, além de fazermos a análise do que foi desenvolvido ao longo do trabalho. Em seguida, as Referências Bibliográficas e os Apêndices.

Capítulo 1

A Análise Combinatória no Ensino Médio

1.1 Uma visão curricular da Análise Combinatória

Um trabalho (Dissertação de Mestrado) desenvolvido por Leonardo (FREITAS, 2014) propõe a inserção do Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental objetivando estimular desde cedo o raciocínio combinatório dos discentes. Trata-se de uma proposta inspirada nos estudos de Jean Piaget a respeito do aprendizado infanto-juvenil, onde são destacadas fases de aprendizagem. O conceito matemático utilizado é fundamental dentro da Análise Combinatória. Por sua vez, esse tema é caracterizado por ser muito focado no raciocínio do que propriamente em cálculos e isso faz com que muitos alunos o considerem difícil para assimilação. Uma passagem do trabalho citado acima mostra claramente a forma com que o tema é visto atualmente:

> Não é difícil encontrar professores de matemática que não suportam a ideia de lecionar Análise Combinatória em turmas do segundo ano do ensino médio, onde geralmente este assunto é abordado, e, quando o fazem, é de forma simplória, direta e com pouca variedade de aplicações, seguindo um padrão pré-existente. Menos difícil ainda é perceber que este fato leva a um baixo nível de aprendizado por parte do discente, que é atropelado por informações que, na maior parte dos casos, são impostas pela presença de fórmulas e procedimentos a serem seguidos, o que torna o estudo do assunto ainda mais difícil, já que apenas uma minoria possui alguma afinidade com a própria matemática. (FREITAS, 2014, p. 8).

Vale ressaltar, que por ser um tema que exige um trabalho cuidadoso, temos que nos precaver, pois

> [...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO et al., 2016, p. 2).

Outro aspecto importante é a forma de abordagem do tema nos livros didáticos. Com base no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), guia que avalia e coordena a distribuição de livros didáticos no Brasil, além de auxiliar na base pedagógica, observamos que todos os livros disponíveis no Ensino Médio, de acordo com o guia de 2015, por exemplo, destacam o conteúdo de Combinatória da maneira expressa no quadro 1 (Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e Princípio Aditivo de Contagem (PAC)):

Quadro 1 – Tópicos de Análise Combinatória dispostos em livros didáticos

Autor/Conteúdo	PFC	PAC	Fatorial	Permutação	Arranjo	Combinações	Binômio de Newton
(LEONARDO, 2013)	X		X	X	X	X	X
(DANTE, 2009)	X			X	X	X	X
(PAIVA, 2009)	X	X	X	X	X	X	X
(IEZZI et al., 2013)	X			X	X	X	X
(SMOLE; DINIZ, 2010)	X			X	X	X	
(SOUZA, 2010)	X	X		X	X	X	X

Fonte: Autoria própria

A representação disposta nos livros didáticos em geral sugere direta ou indiretamente a apresentação do tema de forma separada, forçando, assim, um ensino focado apenas na distinção das técnicas de contagem. Isso provoca o incentivo na memorização de fórmulas, ou seja, formam-se alunos que entendem os Métodos de Contagem da seguinte maneira: “Se for um problema de Arranjo uso essa fórmula, mas se for de Combinação utilizarei essa...”.

Tal forma de apresentar o tema diverge dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) (Documento do Ministério da Educação que visa auxiliar o Docente em sua prática pedagógica):

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística. (BRASIL, 2002, p. 126 - 127).

Outro aspecto relevante refere-se à restrição dos métodos de contagem. Existem técnicas de contagem importantes na Análise Combinatória que não são sugeridas de maneira alguma no ensino básico, como vimos na distribuição dos conteúdos apresentadas no quadro 1. Um assunto que merece destaque é o das “Permutações Caóticas”, que devido a sua simplicidade e aplicabilidade, será apresentado neste trabalho, embora o mesmo não faça parte dos temas apresentados nos livros de Ensino Médio.

Analisando um pouco mais os PCN+, observamos que as novas propostas de ensino integrado, contextualizado e interdisciplinar, dividem a Matemática em três grandes temas: 1) Álgebra: Números e Funções; 2) Geometria e Medidas; e 3) Análise de Dados. O tema em estudo, Análise Combinatória, enquadra-se no terceiro tema, que por sua vez é organizado por três unidades: Estatística, Contagem e Probabilidade, temas que devem ser tratados de forma conjunta e complementar, pois,

> A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de idéias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. (BRASIL, 2002, p. 126).

E, ainda, especificamente no nível médio:

> Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isso, a Contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental desse tema. A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.(BRASIL, 2002, p. 126).

Com isso, vemos que este tema coopera na interpretação dos diversos modelos de problemas matemáticos, fazendo com que o aluno desenvolva distintas maneiras para raciocinar diante da situação proposta.

Os conteúdos e habilidades de Contagem desenvolvidos no tema Análise de Dados, conforme os PCN+, são apresentados abaixo:

> Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.
>
> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
>
> • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
>
> • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 127).

Dependendo da metodologia abordada, a presença forte que os problemas combinatórios possuem em outras ciências fica um pouco omissa. Porém, tal como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), “São necessárias noções de probabilidade, análise combinatória e bioquímica para dar significado às leis da hereditariedade, o que demanda o estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas” (BRASIL, 1999, p. 42). Destaca-se ainda dos PCNEM:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 1999, p. 44).

Certamente, nos livros didáticos, os alunos terão uma gama de problemas contextualizados, atuais e interessantes, porém, não há dinamismo, propostas extraclasse, propostas de jogos, como é o caso do presente estudo. Com isso, o aluno fica preso em um formato tradicionalista de apenas ver o problema combinatório com o recurso do livro. De forma simplificada, com o Jogo Senha, o aluno estará "dentro" de um problema de contagem.

1.2 Conceitos da Análise Combinatória

A Análise Combinatória é uma seção da Matemática que ganhou bastante importância devido às relações que possui. Em outras palavras, "[...] os métodos combinatórios são particularmente relevantes em estatística e ciência da computação e, juntamente com a matemática pura, torna esse conteúdo, de forma intuitiva, mais atraente" (GONÇALVES, 2014, p. 19).

Os métodos de Contagem têm como princípio a técnica de quantificar elementos de um conjunto. Porém, em muitos casos, é necessária a explicitação de todos os elementos para efetuar a contagem. Através da Análise Combinatória, não será preciso tal ação.

Uma característica importante desse tema Matemático é o forte incentivo ao raciocínio.

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita no problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a solução. (MORGADO et al., 2016, p. 2).

Antes de enunciar conceitos necessários para aplicações em problemas de contagem, é importante ressaltar a "estratégia clássica" (grifo nosso), apresentada em diversos livros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), como estas relacionadas abaixo:

> 1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. [...]
>
> 2. Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. [...]
>
> 3. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (LIMA et al., 2006, p. 90 - 91).

1.2.1 Princípio Aditivo de Contagem ou Princípio da Adição

Este princípio é uma ferramenta básica necessária para determinar o número de elementos de um conjunto, formado por regras e características próprias.

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (MORGADO et al., 2016, p. 15).

Definição 1.1. *Considerando dois conjuntos A e B disjuntos, com a e b elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $a + b$ elementos. Generalizando, se $A_1, A_2, ..., A_k$ são conjuntos disjuntos dois a dois e A_i possui n_i elementos, onde $i = 1, 2, 3, ..., k$, então: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ possui $n_1 + n_2 + ... + n_k$ elementos.*

Exemplo 1.1. *Uma tarefa poderá ser realizada de 3 formas caso transcorra de manhã. Esta mesma tarefa poderá ser feita à tarde através de outras 2 formas distintas. Com isso, de quantas maneiras ela poderá ser feita durante o dia?*

Solução: Pelo Princípio Aditivo de Contagem, existem $3 + 2 = 5$ formas de realização da tarefa.

Exemplo 1.2. *Um químico dispõe de 4 substâncias (A, B, C e D) para formar uma mistura. A mistura será composta de 3 substâncias, porém, a substância A não pode se misturar com B. De quantos modos ele poderá formar a mistura?*

Solução: Para este problema, temos dois casos:

a) Das três escolhidas para a mistura, não pode constar a substância A;

b) Das três escolhidas para a mistura, não pode constar a substância B.

Então, temos para o caso a) uma mistura possível: BCD. E para o caso b) uma outra mistura (e única): ACD. Logo, pelo Princípio Aditivo de Contagem, o químico terá $1 + 1 = 2$ modos de formar a mistura.

1.2.2 Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Este princípio também é conhecido como Princípio Multiplicativo (PM). É uma das técnicas mais eficientes e importantes dos problemas de Análise Combinatória.

Definição 1.2. *O princípio Fundamental da Contagem diz que se há x modos de tomar uma primeira decisão D_1 e, tomada a primeira decisão, há y modos de tomar a segunda decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \times y$.*

De forma generalizada, se uma decisão D_1 pode ser feita de x modos, uma decisão D_2 de y modos, ..., uma decisão D_n de n modos, então o número de modos de realizar $D_1, D_2, ..., D_n$ em sequência, é $x \times y \times ... \times n$.

Exemplo 1.3. *Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades diferentes. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para ele? (Considere diferentes cursos do tipo Medicina da universidade A e Medicina da universidade B).*

Solução: Temos duas tarefas a ser realizada:

Tarefa 1: Escolher a universidade;

Tarefa 2: Após a escolha da universidade, escolher o curso.

Claramente, a tarefa 01 poderá ser feita de 10 maneiras e a tarefa 02 de 15 maneiras.

Pelo Princípio Multiplicativo o aluno terá $10 \times 15 = 150$ cursos diferentes para sua escolha.

Exemplo 1.4. *(MORGADO; CARVALHO, 2013, p.118) Quantos são os números de três dígitos distintos?*

Solução: Temos três escolhas para solucionar este problema. O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0 (sendo 0 o primeiro dígito, o número será considerado de dois dígitos ou menos). O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito, mas nesse caso ele pode valer 0. Por último, o terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser nem igual ao primeiro nem ao segundo. Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $9 \times 9 \times 8 = 648$ números existentes com a configuração pedida.

Vejamos agora uma importante informação em relação a uma notação que será muito utilizada:

> Durante o desenvolvimento da análise combinatória muitos matemáticos adotaram diferentes simbologias para denominar as mesmas operações. O símbolo $\Pi(n)$ foi instituído por Gauss (1777-1855) para representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) usava o símbolo $\gamma(n+1)$; a notação $n!$ é devida ao francês Cristian Kramp (Colônia, 1808) e $|\underline{n}$ usada por outros autores. A Arbogast (Strasburgo, 1800) deve-se a denominação *fatorial* (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 5)

Assim, para simplificar a escrita matemática, para todo número natural n definiremos $n!$ (que se lê fatorial de n) como o produto

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$$

Convenientemente, o fatorial de zero será considerado como sendo igual a um, pois esta atitude preserva a validade de alguns resultados já conhecidos. Assim, temos que:

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$\ldots\ldots$

1.2.3 Permutações Simples

Definição 1.3. *Um problema de Permutação Simples é caracterizado pela troca de posição dos elementos disponibilizados, formando assim agrupamentos que se diferem apenas pela ordem.*

Essa ideia pode ser vista a partir do significado da palavra. Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa Priberam, "permutação" deriva do latim *permutatio*, que significa "permuta, troca, transposição recíproca de duas coisas".

Logo, para permutar n objetos distintos temos, inicialmente, n escolhas para uma vaga, $n-1$ escolhas para uma vaga ainda não escolhida, $n-2$ escolhas para uma vaga ainda não escolhida e assim por diante até esgotar os objetos e consequentemente as vagas. Finalizando, pelo Princípio Multiplicativo teremos $n!$ ordenações possíveis. Confirmando assim a definição de Lima et al. (2006, p. 99): "o número de permutação simples de n objetos distintos é $P_n = n!$".

Exemplo 1.5. *Quantos são os anagramas da palavra CALOR? Quantos começam por consoantes?*

Observação 1.1. *Um Anagrama é um rearranjo das letras de uma palavra para formar outra palavra, com sentido ou não, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez. Exemplo: ORMA e ROMA são anagramas da palavra AMOR.*

Solução: Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Para formar um anagrama começando por consoante, devemos, primeiramente, escolher a consoante (3 modos) (lembrando a estratégia 3: Ver pagina 19 deste trabalho) e, depois, arrumar (permutar) as 4 letras restantes ($4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos). Assim, pelo Princípio Multiplicativo temos $3 \times 24 = 72$ anagramas começando por consoante.

Exemplo 1.6. *De quantas maneiras uma família de 10 pessoas (6 homens e 4 mulheres) podem se posicionar para tirar uma foto, de modo que os homens fiquem lado a lado, assim como as mulheres?*

Solução: Primeiramente, temos que escolher a ordem por gênero. Isto pode ser feito de $2 \times 1 = 2$ formas (homens na esquerda e mulheres na direita ou o contrário). Em seguida, vamos permutar os membros da família separadamente. Para os homens, temos $6! = 720$ ordenações. Já para as mulheres, $4! = 24$ ordenações. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $2 \times 720 \times 24 = 34560$ formas de ordenar a família para tirar a foto.

1.2.4 Combinações Simples

Definição 1.4. *Uma Combinação Simples consiste em selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados de forma que a ordem não seja importante. Tal seleção será obtida se $0 \leq p \leq n$.*

De acordo com Lima *et al.*,

> Cada seleção de p objetos é chamada de uma combinação simples de classe p dos n objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b, c, d, e são (a, b, c), (a, b, d), (a, b, e), (a, c, d), (a, c, e), (a, d, e), (b, c, d), (b, c, e), (b, d, e) e (c, d, e). [...]
>
> Para resolver o problema das combinações simples, basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de n – p objetos, que são os não selecionados. (LIMA et al., 2006, p. 101).

Esta definição se baseia no seguinte desenvolvimento. Inicialmente, coloque em fila os n elementos dados, isso pode ser feito de $n!$ maneiras. Tome os p elementos da fila para compor a seleção de p elementos (consequentemente os $n - p$ últimos irão compor o segundo grupo). Como cada divisão do conjunto em grupos de p e $n - p$ elementos é contada $p! \times (n-p)!$ vezes, temos que o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto com n elementos é:

$$\frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Podendo também ser escrita da forma:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ou seja, se $n - p = r$ temos:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...r(r-1)(r-2)...1}{p!r(r-1)(r-2)...1} = \frac{n(n-1)...(r+1)}{p!}$$

E simbolizamos por $C(n,p)$. Assim, sendo $r = n - p$, temos:

$$C(n,p) = \frac{n(n-1)...(r+1)}{p(p-1)...1} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$$

De um jeito simples, o importante é perceber que $n(n-1)...(n-p+1)$ possui p **fatores**, e este fato simplifica o entendimento da fórmula. Vejamos no seguinte caso: Qual é o valor de $C(10,3)$?

Temos que $n = 10$ e $p = 3$. Logo, $r = n - p = 7$. Então:

$$C(10,3) = \frac{10 \times (10-1) \times ... \times (7+1)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

Exemplo 1.7. *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?*

Solução: Como a comissão será formada por no mínimo três homens, então temos alguns casos a ser considerados:

Caso A: Três homens e o restante (duas, pois a comissão é composta de cinco pessoas) de mulheres;

Caso B: Quatro homens e o restante (uma) de mulher;

Caso C: Cinco homens e nenhuma mulher.

Para o Caso A, dentre cinco homens temos que escolher três e, dentre quatro mulheres, escolher duas. Isso pode ser feito, respectivamente, de $C(5,3)$ e $C(4,2)$ modos.

Já no Caso B, dentre cinco homens, escolher quatro e, dentre quatro mulheres, escolher uma. Isso pode ser feito, respectivamente, de $C(5,4)$ e $C(4,1)$ modos.

E no Caso C, dentre cinco homens, temos que escolher cinco. Isso claramente pode ser feito de um $C(5,5)$ modo.

Pelo Princípio Multiplicativo temos:

$C(5,3) \times C(4,2) = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1} = 60$ modos para o caso A;

$C(5,4) \times C(4,1) = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} \times \frac{4}{1} = 20$ modos para o caso B;

E 1 modo para o caso C.

Logo, pelo Princípio Aditivo temos: $60 + 20 + 1 = 81$ comissões possíveis.

Exemplo 1.8. *Há 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta S paralela a R. Quantos triângulos com vértices nesses pontos existem?*

Solução: Temos dois casos a serem considerados: Triângulos com dois vértices na reta R e um vértice na reta S ou Triângulos com dois vértices na reta S e um vértice na reta R. Para o primeiro caso, devemos selecionar dois pontos dentre os cinco disponíveis na reta R e, em seguida, selecionar um ponto da reta S dentre os oito possíveis.

Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $C(5,2) \times C(8,1)$ modos.

Para o segundo caso, temos que selecionar dois pontos, dentre oito possíveis da reta S e, feita esta escolha, iremos selecionar um ponto dentre os cinco dispostos na reta R.

Também pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $C(8,2) \times C(5,1)$ modos.

Então, pelo Princípio Aditivo temos:

$$C(5,2) \times C(8,1) + C(8,2) \times C(5,1) = \frac{5\times4}{2\times1} \times \frac{8}{1} + \frac{8\times7}{2\times1} \times \frac{5}{1} = 80 + 140 = 220$$

triângulos possíveis.

1.2.5 Permutações Caóticas

> A brincadeira de “amigo oculto”, muito comum em nossa sociedade, traz consigo uma intrigante questão que no séc. XVIII motivou o célebre matemático Leonhard Euler a empenhar-se em um engenhoso e surpreendente trabalho com o intuito de solucioná-la. (OLIVEIRA et al., 2009, p. 1).

Leonhard Euler (1707-1783) (figura 1) também possui importantes contribuições em diversas áreas da Matemática. Segundo Boyer (1989, p. 304) “Euler cedo conquistou reputação internacional; já antes de sair de Basileia tinha recebido menção honrosa da Académie de Paris por um ensaio sobre mastros de navios”.

Figura 1 – Leonhard Euler

Fonte: http://knoow.net/cienciasexactas/matematica/euler-leonhard/

Esta brincadeira, também interpretada como "Problema das Cartas mal endereçadas", é considerada um problema clássico de Permutações Caóticas. Assim:

Definição 1.5. *Uma permutação de* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *é dita caótica (ou desordenada) quando nenhum dos elementos* ($a_{i's}$) *estão no seu lugar primitivo* (i*-ésima posição). Assim, por exemplo, as permutações* $a_2a_4a_1a_3$ *e* $a_3a_4a_2a_1$ *são caóticas, mas* $a_1a_3a_2a_4$ *não é* (a_1 *e* a_4 *estão no seu lugar primitivo).*

Morgado *et al.* acrescenta,

> As permutações caóticas de (1,2,3,4) são 2143, 3142, 3241, 4123, 3412, 2413, 2341, 3421, 4321. É interessante observar que D_n é aproximadamente igual a $n!/e$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $n!/e$. (MORGADO et al., 2016, p. 65).

Consideremos a notação $D\texttt{[n]} = D_n$ indicando o número de Permutações Caóticas dos elementos do conjunto `A={1,2,3,...,n}`. Para calcular o número $D\texttt{[n]}$, define-se inicialmente o conjunto A_i como conjunto das permutações em que i $(i \in A)$ representa a quantidade exata de elementos de A que não saíram da posição inicial. Logo, queremos calcular o número de elementos do conjunto B das permutações dos elementos de A que não pertencem a nenhum dos conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Seja S_k o conjunto das permutações do conjunto A, onde k representa a quantidade mínima de elementos que ficarão na posição inicial, segue um exemplo para facilitar a compreensão:

Exemplo 1.9. *Considere o conjunto* $A = \texttt{\{1,2,3,4\}}$*. O número* 1243*, obtido através da permutação dos objetos de* A*, pertence ao conjunto* A_2*, pois o* 1 *e o* 2 *permaneceram na posição inicial enquanto* 2431 *pertence a* A_1*, pois apenas o número* 3 *permaneceu na sua* *posição primitiva. Por sua vez,* 1243 *e* 2431*, pertencem ao conjunto* S_1*, pois indica que ao menos um dos* n *números permaneceram na posição inicial. Ou seja,* $S_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k$*,* $S_2 = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_k$*,* $S_3 = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup ... \cup A_k$ *e finalmente* $S_k = A_k$*.*

Voltando ao problema temos:

$$card(S_0) = n(n-1)(n-2)...1 = n!$$

("$card$" significa cardinalidade/número de elementos do conjunto)

Para fazer $card(S_1)$, devemos escolher qual objeto ficará fixo na posição inicial e, em seguida, iremos permutar livremente os elementos restantes ($(n-1)$ elementos). Logo,

$$card(S_1) = n(n-1)! = n!$$

Já para $card(S_2)$, devemos, em primeiro lugar, escolher dois elementos para fixar na posição inicial e em seguida permutar o restante. Assim, temos:

$$card(S_2) = C(n,2)(n-2)! = \tfrac{n(n-1)(n-2)...(r+1)}{2!} \times (n-2)!$$

Como vimos na seção 1.2.4:Combinações, nesse caso $n = 2 + r$, então $r = n - 2$. Assim:

$$card(S_2) = C(n,2)(n-2)! = \tfrac{n(n-1)...(r+1)}{2!} \times (n-2)! = \tfrac{n...(n-2+1)}{2!} \times (n-2)! = \tfrac{n(n-1)}{2!} \times (n-2)! = \tfrac{n!}{2!}$$

Analogamente,

$$card(S_3) = C(n,3)(n-3)! = \tfrac{n(n-1)...(r+1)}{3!} \times (n-3)! = \tfrac{n...(n-3+1)}{3!} \times (n-3)! = \tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times (n-3)! = \tfrac{n!}{3!}$$

E de modo geral,

$$card(S_n) = C(n,n)(n-n)! = \tfrac{n(n-1)...(r+1)}{n!} \times (n-n)! = \tfrac{n!}{n!}$$

Então, $card(B)$ será dado por

$$card(B) = card(S_0) - card(S_1) + card(S_2) - card(S_3) + ... + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Essa oscilação do sinal é oriunda da definição de S_k, pois k não indica o número fixo de elementos que permanecem na posição inicial e sim, um número mínimo e, por isso, temos que realizar essas subtrações. Por exemplo, S_2 possui todos os elementos de S_1, com isso, $card(B)$ não pode conter a parcela $card(S_1) + card(S_2)$, pois estaríamos cometendo o equívoco de contar os elementos de S_1 duas vezes.

Logo, o número de Permutações Caóticas do conjunto A é:

$$D\texttt{[n]}=n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \frac{n!}{5!} + ... + \frac{n!(-1)^n}{n!} = n!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}) = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!})$$

De um jeito mais claro, temos:

$$D\texttt{[n]} = n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Exemplo 1.10. *Qual é o número de anagramas da palavra TENIS, desde que nenhuma das letras permaneça na posição original?*

Solução: Claramente, queremos resolver um problema de Permutação Caótica com 5 elementos. Seu resultado será:

$$D\texttt{[5]}=5!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}) = 120(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}) = 60-10+5-1 = 54$$

Exemplo 1.11. *(MORGADO et al., 2016, p.67) Quantas são as permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?*

Solução: Para resolução deste problema, temos duas tarefas para realizar:

Tarefa 01: selecionar os três elementos que irão ser fixados na posição primitiva.

Tarefa 02: permutar os quatro elementos restantes de forma caótica.

A Tarefa 01 pode ser feita de $C(7,3)$ maneiras e a Tarefa 02 de $D\texttt{[4]}$ maneiras. Pelo Princípio Multiplicativo temos

$$C(7,3) \times D\texttt{[4]} = \frac{7 \times 6 \times (4+1)}{3 \times 2 \times 1} \times 4!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 9 = 315$$

maneiras de realizar a permutação pedida.

Temos também alguns casos em que pode ser feita uma permutação caótica em quantidades de vagas maiores que o número de objetos. Vejamos o caso geral no próximo exemplo.

Exemplo 1.12. *(PINHEIRO et al., 2009, p. 144) Dados n objetos $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_s)$, (veja que $n = p + s$) qual o número de permutações dos n objetos que não mantém nenhum dos $x_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ na posição original?*

Solução: Para solucionar este problema, vamos dividi-lo em vários casos:

Caso nenhum dos objetos fique na posição inicial, temos $D\texttt{[n]} = C(s,0) \times D\texttt{[n]}$ permutações.

Caso apenas um dos $y_j(j = 1, 2, \ldots, s)$ fique na posição inicial, temos $C(s,1) \times D\texttt{[n-1]}$ permutações. De fato, primeiro escolhemos quem iremos fixar, o que pode ser feito de $C(s,1)$ maneiras, depois permutamos caoticamente os $n-1$ objetos restantes. Para isso, temos $D\texttt{[n-1]}$ possibilidades. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações é $C(s,1) \times D\texttt{[n-1]}$.

Caso exatamente dois dos $y_j(j = 1, 2, \ldots, s)$ fiquem nas suas posições originais, temos $C(s,2) \times D\texttt{[n-2]}$ permutações.

$$\ldots$$

Caso $y_1, y_2, ..., y_s$ fiquem fixos nas posições iniciais, temos $C(s,s) \times D\texttt{[n-1]}$ permutações.

Portanto, o número de permutações que não fixam $x_1, x_2, ..., x_p$ é:

$$C(s,0) \times D\texttt{[n]} + C(s,1) \times D\texttt{[n-1]} + C(s,2) \times D\texttt{[n-2]} + \cdots + C(s,s) \times D\texttt{[n-s]}$$

Mas, como $n = p + s$, faremos a substituição $s = n - p$, o número acima fica:

$$C(n-p,0) \times D\texttt{[n]} + C(n-p,1) \times D\texttt{[n-1]} + \cdots + C(n-p,n-p) \times D\texttt{[n-(n-p)]}$$

Que é o mesmo que,

$$\sum_{k=0}^{n-p} (C(n-p,k) \times D\texttt{[n-k]})$$

onde n representa o número total de objetos, p o número de objetos que irão ser permutados caoticamente.

Exemplo 1.13. *Quantas permutações há com a palavra PROF que não tem a letra P na primeira posição nem F como a última?*

Solução: Temos um caso de permutação caótica de dois objetos (P e F) em quatro vagas. Então, aplicando a fórmula acima, com $n = 4$ (P, R, O e F), $p = 2$ (P e F) e $s = n - p = 2$ (R e O), temos:

$$\sum_{k=0}^{2} (C(2,k) \times D\texttt{[4-k]}) = C(2,0) \times D\texttt{[4]} + C(2,1) \times D\texttt{[3]} + C(2,2) \times D\texttt{[2]} = 1 \times 9 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 9 + 4 + 1 = 14$$

Além das Permutações Simples (seção 1.2.3) e Caóticas (seção 1.2.5), também há Permutação Circular e com Elementos Repetidos. Para eventual pesquisa, seguem os conceitos nos apêndices A e B e alguns exemplos.

Capítulo 2

A Análise Combinatória por trás do Jogo Senha

Neste capítulo, iremos abordar de forma mais aplicada os conceitos de Análise Combinatória. Inicialmente, destacamos a importância da escrita matemática na explanação das resoluções de problemas deste tema. Em seguida, mostraremos efetivamente a aplicação dos Métodos de Contagem na análise de todos os casos presentes no Jogo Senha. Na seção 2.3, objetivando inserir o aluno em problemas de contagem, trabalharemos a resolução de diversos problemas, em vários níveis, com o intuito de mostrar que os métodos de contagem (visto na seção 1.2) são semelhantes aos utilizados na seção 2.2, na qual o foco é o Jogo Senha. Por fim, faremos um breve comentário sobre o Ensino de Análise Combinatória.

2.1 Uma orientação na resolução dos problemas de Análise Combinatória

Como vimos na página 19 deste trabalho, Lima et al. (2006) nos orienta seguir uma "estratégia clássica" mediante aos problemas de Combinatória e, por isso, todas as soluções da seção posterior seguem essa ideia. Assim, as diversas etapas dos problemas são descritas em tarefas, trazendo mais clareza nas resoluções.

Ao nos aprofundar-mos por diversos problemas desse tema, observamos cálculos sempre simples, porém, pensamentos e procedimentos carregados de engenhosidade. Com isso, temos que ter muito cuidado na explanação da resolução das questões, dando uma importância enorme à escrita e à organização da solução. Não é viável ensinar ao aluno que o número de anagramas da palavra PATO é $4! = 24$. Temos que vencer essa barreira da "pressa" e do raciocínio puramente mecânico, sugerindo etapas para a resolução dos problemas, a fim de provocar maior estímulo ao pensamento. O mais viável seria mostrar as cinco etapas de resolução: 1ª) a escolha da primeira letra; 2ª) a escolha da segunda letra; 3ª) a escolha da terceira letra; e 4ª) a escolha da última letra. Finalizando, aplicar o Princípio Multiplicativo e comprovar que o número de anagramas é $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

2.2 Jogo Senha e Análise Combinatória

No Jogo Senha, o desafiante seleciona, dentre 6 cores possíveis e distintas, um conjunto de 4 cores, chamado senha, com cores distintas duas a duas, e as coloca ordenadamente atrás de uma proteção, para que o desafiado não as veja. A cada tentativa do jogador, o desafiante "responde" colocando ao lado da senha uma informação adicional, composta de pinos brancos ou pretos, e o pino preto indicará que a cor e a posição do pino estão corretas, enquanto o pino branco estará informando que a cor está correta, porém, a posição não está.

Para fazer esta análise matemática do jogo, iremos denotar as cores disponíveis por A, B, C, D, E e F. Suponha que o desafiante escolha como senha as cores ABDF, nesta ordem. Se o desafiado "chuta" a senha BECF, nesta ordem, o desafiante irá responder com *b=1* (um pino branco) correspondente à cor B (cor certa na posição errada) e *p=1* (um pino preto) correspondente à cor F (cor certa na posição certa). Com essa informação, o desafiado saberá que, na senha escolhida pelo desafiante, uma das cores (sem saber qual) está certa e na posição certa e outra cor (sem saber qual) também está certa, porém, na posição errada. Além disso, saberá que duas cores (também sem saber quais) não fazem parte da senha. Esta última interpretação, muitas vezes, passa por despercebida, mas possui grande importância para a análise da senha proposta. Veja que não é possível um chute que resulte em 3 pinos pretos e 1 pino branco, pois a informação *p=3* mostra que três peças da senha possuem cor e posições corretas, logo, a quarta cor teria que estar certa e na posição certa, e isso é contraditório pela outra informação *b=1*. Além disso, no mínimo 2 pinos sempre serão colocados após cada chute, pois toda tentativa para o descobrimento da senha terá pelo menos duas cores coincidentes com as colocadas pelo desafiante, e isso faz com que os casos *b=0=p, b=1 p=0 e b=0 p=1* não ocorram. Na tabela a seguir temos todas as possibilidades de respostas do desafiante:

Tabela 1 – Onze possíveis respostas do desafiante após cada senha ser elaborada

b (pinos brancos)	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	4
p (pinos pretos)	4	3	2	2	1	2	1	0	1	0	0

Fonte: Autoria própria

Com esta tabela, vemos que existem 11 possibilidades de respostas do desafiante após cada chute.

Como um dos nossos objetivos é explorar os conceitos de Combinatória que estão por trás do jogo, analisaremos o número de contagem para cada item da tabela 1 e, como foi dito, mostraremos a semelhança entre problemas de Contagem diversos e a tentativa de descobrir a senha. Aos poucos, veremos que o jogo possibilita essa comparação importante.

Para que o desafiante construa uma senha, ele terá 6 possibilidades de escolha para a primeira cor; para a segunda, 5 possibilidades, pois não podem ocorrer cores repetidas; seguindo o mesmo pensamento, 4 possibilidades para a terceira cor; e 3 possibilidades para a última cor. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, o desafiante se dispõe de

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \text{ senhas possíveis.}$$

Após preparada a senha, o jogador é induzido a dar seu primeiro chute. Feito isso, o desafiante dará uma informação adicional sobre sua senha. Caso esta informação seja *b=0* e *p=4*, então a senha já estará descoberta. Vamos analisar os casos menos triviais, vendo com outros olhos a análise combinatória que está por trás do jogo. Com esta análise, será possível descobrir quantas são as maneiras de o jogador fazer seu segundo chute, e assim por diante. Consideremos que a senha oculta pelo desafiante é ABCD. Dessa forma, analisaremos agora cada caso.

Caso 01) Informação adicional (b=0 e p=3). Exemplo de tentativa: ABCF

Neste caso, há 2 tarefas a serem realizadas:

Tarefa 01: escolher três peças da senha para manterem-se fixas nas mesmas posições;

Tarefa 02: trocar a peça restante da senha por alguma das duas que ficaram de fora.

A primeira tarefa será feita de $C(4,3)$ maneiras e a segunda, de 2 maneiras.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $C(4,3) \times 2 = \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} \times 2 = 8$ senhas, sendo uma delas correta.

Caso 02) Informação adicional (b=0 e p=2). Exemplo de tentativa: ABEF

Para a resolução deste caso, o jogador irá realizar 3 tarefas:

Tarefa 01: escolher duas peças da senha e fixá-las nas posições iniciais;

Tarefa 02: trocar as duas peças restantes da senha pelas duas que ficaram de fora;

Tarefa 03: permutar, essas duas peças recém-incluídas na senha.

Assim, a primeira tarefa será feita de $C(4,2)$ maneiras; a tarefa 02 de uma maneira e a última tarefa será feita de 2 maneiras. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há

$$C(4,2) \times 1 \times 2 = \frac{4\times3}{2\times1} \times 1 \times 2 = 12$$

senhas, com apenas uma correta.

Caso 03) Informação adicional (b=1 e p=2). Exemplo de tentativa: ABDE

Neste caso, há 4 tarefas a serem realizadas:

Tarefa 01: escolher duas peças da senha e fixá-las nas posições iniciais;

Tarefa 02: escolher uma das duas restantes da senha para permutar caoticamente;

Tarefa 03: feita a escolha na tarefa acima, permutar caoticamente uma peça em duas vagas;

Tarefa 04: trocar uma peça por alguma das duas que ficaram de fora.

Deste modo, a tarefa 01 poderá ser feita de $C(4,2)$ maneiras; a tarefa 02 de $C(2,1)$ maneiras; a tarefa 03 de uma maneira e a última tarefa de 2 maneiras.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem

$$C(4,2) \times 2 \times 1 \times 2 = \tfrac{4\times 3}{2\times 1} \times 2 \times 1 \times 2 = 24$$

senhas, com apenas uma correta.

Caso 04) Informação adicional (b=1 e p=1). Exemplo de tentativa: ACEF

Esta situação requer 5 tarefas:

Tarefa 01: escolher uma peça da senha para deixar fixada na posição inicial;

Tarefa 02: escolher outra peça da senha para fazer uma permutação caótica em três vagas;

Tarefa 03: permutar caoticamente a peça escolhida na tarefa anterior em três vagas disponíveis;

Tarefa 04: trocar duas peças que estavam na configuração inicial pelas duas que ficaram de fora;

Tarefa 05: permutar as duas peças escolhidas na tarefa 04.

Neste sentido, a tarefa 01 pode ser feita de 4 maneiras (escolha de A, C, E ou F); a tarefa 02 de 3 maneiras (alguma daquelas não escolhidas anteriormente); a tarefa 03 de 2 maneiras; a tarefa 04 de 1 maneira e a tarefa 05 de 2 maneiras. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$ senhas, entre as quais uma delas é a correta.

Caso 05) Informação adicional (b=2 e p=2). Exemplo de tentativa: ABDC

Neste caso, o jogador terá que realizar apenas 2 tarefas:

Tarefa 01: escolher duas peças que permanecerão fixas nas posições iniciais;

Tarefa 02: permutar caoticamente as duas restantes em duas vagas.

A tarefa 01 será realizada de $C(4,2)$ maneiras e a tarefa 02 será realizada de 1 maneira. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem

$$C(4,2) \times 1 = \tfrac{4\times 3}{2\times 1} \times 1 = 6$$

senhas, entre as quais uma é correta.

Caso 06) Informação adicional (b=2 e p=1). Exemplo de tentativa: BACF

Neste caso, o jogador terá 4 tarefas para realizar:

Tarefa 01: escolher qual delas ficará fixa;

Tarefa 02: escolher, dentre as três restantes, quais as duas irão fazer a permutação caótica;

Tarefa 03: feita escolha na tarefa anterior, realizar a permutação caótica de dois elementos em três vagas;

Tarefa 04: substituir uma peça por alguma não utilizada.

Com isso, observamos que a tarefa 01 poderá ser realizada de 4 maneiras (uma das peças dentre B, A, C e F); a tarefa 2 será realizada de $C(3,2)$ maneiras; a tarefa 3 será feita de

$$\sum_{k=0}^{3-2=1} (C(3-2,k) \times D\texttt{[3-k]}) = C(1,0) \times D\texttt{[3]} + C(1,1) \times D\texttt{[2]} = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$$

maneiras e a tarefa 4 de 2 maneiras (neste caso, D ou E).

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem

$$4 \times C(3,2) \times 3 \times 2 = 4 \times \tfrac{3\times 2}{2\times 1} \times 3 \times 2 = 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$$

senhas, entre as quais uma delas é correta.

Caso 07) Informação adicional (b=2 e p=0). Exemplo de tentativa: BAEF

Agora o jogador terá as seguintes tarefas a realizar:

Tarefa 01: selecionar 2 cores daquelas escolhidas, o que pode ser feito de $C(4,2) = 6$ maneiras (essas duas cores serão permutadas caoticamente no final);

Tarefa 02: pegar as duas cores que ele não havia utilizado anteriormente ($C(2,2) = 1$ maneira) para substituir pelas 2 peças descartadas na tarefa 01;

Tarefa 03: distribuir as quatro peças que ele tem em mãos, de forma que duas delas não fiquem nas mesmas posições, o que pode ser feito de (permutação caótica de dois objetos em 4 vagas) $\sum_{k=0}^{1}(C(1,k) \times \texttt{[n-k]})$ maneiras com ($n = 4$, $r = 2$ e $s = 2$)

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há

$$6 \times 1 \times \sum_{k=0}^{4-2=2}(C(4-2,k) \times D\texttt{[4-k]}) =$$
$$6\times(C(2,0)\times D\texttt{[4]}+C(2,1)\times D\texttt{[3]}+C(2,2)\times D\texttt{[2]} = 6\times(1\times9+2\times2+1\times1) = 6\times14 = 84$$

senhas, das quais uma delas é correta.

Caso 08) Informação adicional (b=3 e p=1). Exemplo de tentativa: BCAD

Nesse caso, o jogador acertou as cores, porém, apenas uma delas está posicionada corretamente. Com isso, ele terá duas tarefas para fazer:

Tarefa 01: Escolher qual delas ele não irá mover;

Tarefa 02: Permutar de forma caótica as peças restantes.

Assim, a tarefa 01 poderá ser realizada de 4 maneiras (peças B, C, A ou D), enquanto a tarefa 02 de D[3] maneiras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times D\texttt{[3]} = 4 \times 2 = 8$ senhas das quais uma delas será correta.

Caso 09) Informação adicional (b=3 e p=0). Exemplo de tentativa: CABE

Inicialmente, o jogador tem de selecionar 3 peças daquelas que tinha colocado na senha, o que pode ser feito de $C(4,3) = \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} = 4$ formas. Porém, como essas possíveis 3 peças estão nas posições erradas, o jogador terá que permutá-las de forma caótica em 4 vagas. Isso pode ser feito de

$$\sum_{k=0}^{n-r}(C(n-r,k) \times D\texttt{[n-k]})$$

formas, com *n=4* (número de vagas) e *r=3* (número de peças que serão permutadas caoticamente), então:

$$\sum_{k=0}^{n-r}(C(n-r,k) \times D\texttt{[n-k]}) = \sum_{k=0}^{1}(C(1,0) \times D\texttt{[4-k]}) =$$
$$C(1,0) \times D\texttt{[4]} + C(1,1) \times D\texttt{[3]} = 1 \times 9 + 1 \times 2 = 11$$

Como uma cor está errada, então ele deve escolher dentre as duas cores que estão de fora, uma para compor a sua senha. Esta escolha é feita de 2 maneiras (pois há 2 peças que não foram escolhidas para a tentativa de descobrir a senha). Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, o jogador tem $4 \times 11 \times 2 = 88$ senhas dentre as quais uma delas será a correta.

Caso 10) Informação adicional (b=4 e p=0). Exemplo de tentativa: CADB

Neste caso, o jogador deve apenas retirar cada cor de sua posição primitiva. Então, ele precisa saber o número de permutações caóticas de 4 elementos, que é

$$D[4] = 4! \times (\tfrac{1}{0!} - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}) = 24 \times (1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24}) = 12 - 4 + 1 = 9$$

Logo, dentre 9 possibilidades, uma será a correta.

2.3 Problemas diversos de Análise Combinatória

Selecionamos e criamos abaixo alguns problemas de Contagem de níveis diversos que possuem grande frequência nas provas seletivas nacionais, com o intuito de mostrar algumas semelhanças e associações com os questionamentos dos casos do Jogo Senha apresentados anteriormente. Observaremos também que os Métodos de Contagem utilizados durante a resolução são os mesmos vistos nos casos do Jogo Senha. Com isso, corroboramos com o intuito de auxiliar ainda mais o trabalho dos docentes para esse tema de grande aplicabilidade e diversas vezes pouco estimulado nos discentes.

Problema 01: (Autoria Própria)

Com as letras que compõem a palavra **LIVRO** podem ser feitos **x** anagramas que começam por vogal e **y** anagramas que começam e terminam por consoante. Logo, o valor de **x** $+$ **y** é?

A) 60 B) 84 C) 96 D) 108 E) 120

Solução:

As tarefas para a resolução do número de anagramas que começam por vogal, denominados por "x", são:

Tarefa 01: escolher uma vogal para a primeira vaga;

Tarefa 02: escolher uma letra ainda não escolhida para a segunda vaga;

Tarefa 03: escolher uma letra ainda não escolhida para a terceira vaga;

Tarefa 04: escolher uma letra ainda não escolhida para a quarta vaga;

Tarefa 05: escolher uma letra ainda não escolhida para a última vaga.

$card$**(Tarefa 01)** $= 2$ (I ou O);

$card$**(Tarefa 02)** $= 4$;

$card$**(Tarefa 03)** $= 3$;

$card$**(Tarefa 04)** $= 2$;

$card$**(Tarefa 05)** $= 1$.

Pelo Princípio Multiplicativo, $x = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

Analogamente, "y" são anagramas que começam e terminam por consoante.

Seguem, então, as tarefas de resolução:

Tarefa 01: escolher uma consoante para a primeira vaga;

Tarefa 02: escolher uma consoante, distinta da escolhia acima, para a última vaga;

Tarefa 03: escolher uma letra ainda não escolhida para a segunda vaga;

Tarefa 04: escolher uma letra ainda não escolhida para a terceira vaga;

Tarefa 05: escolher uma letra ainda não escolhida para a quarta vaga.

$card$**(Tarefa 01)** $= 3$ (L, V ou R);

$card$**(Tarefa 02)** $= 2$ (Exemplo: Escolhido L acima, resta V ou R);

$card$**(Tarefa 03)** $= 3$;

$card$**(Tarefa 04)** $= 2$;

$card$**(Tarefa 05)** $= 1$.

Novamente, pelo Princípio Multiplicativo temos $y = 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$

Logo, **x** $+$ **y** $= 48 + 36 = 84$

Comentário:

Temos agora um problema simples, no qual utilizamos apenas o Princípio Multiplicativo. Isso ocorre de forma semelhante quando descobrimos o número de senhas possíveis do Jogo Senha. O interessante deste problema são as tarefas 01 dos dois anagramas e a tarefa 02 do anagrama y, pois nota-se a prioridade em atacar a tarefa mais restrita que as demais. Como vimos, esta é a terceira estratégia na resolução de um problema de

Combinatória, sugerida em Lima et al. (2006), citado na página 19 deste trabalho.

Problema 02: (Autoria Própria)

Marina e Thiago, junto com outros seis amigos (3 mulheres e 3 homens) vão viajar de ônibus em uma excursão escolar. O ônibus que os levará possui exatamente quatro bancos (cada um com dois assentos) vagos. De quantas maneiras os oito amigos podem se sentar no ônibus de modo que Marina e Thiago fiquem juntos e em cada banco sente um homem e uma mulher?

Solução:

Temos 4 bancos vagos e cada banco com dois assentos. Mediante a situação, vejamos as tarefas necessárias para ordenação dos oito amigos entre os assentos:

Tarefa 01: (mais restrita e pré-definida) escolher qual, dentre os quatro bancos, Marina e Thiago irão se sentar: $card$(Tarefa 01)$= 4$;

Tarefa 02: escolher um rapaz para sentar em outro banco: $card$(Tarefa 02)$= 3$;

Tarefa 03: escolher uma moça para sentar ao lado do rapaz escolhido acima: $card$(Tarefa 03)$= 3$;

Tarefa 04: escolher um rapaz, ainda não escolhido, para sentar em um banco ainda livre: $card$(Tarefa 04)$= 2$;

Tarefa 05: escolher uma moça, ainda não escolhida, para sentar ao lado do rapaz escolhido acima: $card$(Tarefa 05)$= 2$;

Tarefa 06: escolher o último rapaz para sentar no último banco disponível: $card$(Tarefa 06)$= 1$;

Tarefa 07: escolher a última moça para sentar ao lado do rapaz escolhido acima; $card$(Tarefa 07)$= 1$.

Sabemos que cada banco possui dois assentos e com isso, cada casal pode trocar de lugar entre si. Logo, finalizamos com a tarefa abaixo:

Tarefa 08: permutar, entre cada banco, a ordem de sentar do casal. $card$(Tarefa 08)$=$ $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Então, pelo PM há $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 16 = 2304$ ordenações possíveis.

Comentário:

Observamos, neste problema, uma aplicação forte do Princípio Multiplicativo, por todo o decorrer da sua resolução. É um problema interessante para trabalhar em sala de aula, pois há várias maneiras de resolver e todas as soluções utilizarão o Princípio Multiplicativo como elemento chave. Como já mencionamos em comentários anteriores, este princípio é o pilar da Análise Combinatória, sendo diversas vezes explorado nos casos do Jogo Senha. Como exemplo, temos certa semelhança nos princípios utilizados no Caso 04 (Seção 2.2).

Problema 03: (Autoria Própria)

Um atleta pratica três atividades físicas durante seis dias de uma mesma semana. Cada dia ele pratica apenas uma atividade. As atividades são: Corrida, Futebol e Natação. Durante a semana ele reserva dois dias para cada atividade. Observe a representação de uma semana do atleta: (Futebol, Corrida, Futebol, Natação, Natação e Corrida).

O número total de modos distintos do atleta praticar as atividades durante uma semana é:

A) 6 B) 90 C) 180 D) 720

Solução:

De acordo com a situação do problema, temos que escolher o dia (vaga) que cada atividade física ficará, sabendo que a ordem de escolha não importa. Logo, temos as tarefas abaixo:

Tarefa 01: escolher, dentre seis dias, quais irá praticar Corrida;

Tarefa 02: escolher, dentre os dias ainda não escolhidos, quais irá praticar Futebol;

Tarefa 03: escolher, dentre os dias ainda não escolhidos, quais irá praticar Natação.

Então, $card$(Tarefa 01)$= C(6,2)$; $card$(Tarefa 02)$= C(6-2,2)$ e $card$(Tarefa 03)$= C(6-2-2,2)$. Logo, pelo PM temos:

$$C(6,2) \times C(4,2) \times C(2,2) = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1} = 90$$

Comentário:

Temos outro caso clássico, em que a técnica de Combinação Simples é muito evidente. O mais interessante é perceber que este problema possui uma forma distinta e mais fácil de resolver, porém, não será usada a ideia de combinação. Vejamos: temos que pensar como se CCFFNN (C: Corrida, F: Futebol e N: Natação) fosse uma palavra, e então iremos analisar quantos anagramas há com essa palavra.

Se as letras fossem diferentes entre si, obteríamos

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

anagramas. Número este obtido através da descrição de seis tarefas triviais. Porém, como temos duas letras C, contamos cada anagrama $2 \times 1 = 2$ vezes. Analogamente, contamos cada anagrama duas vezes por conter duas letras F, e duas vezes por conter duas letras N. Logo, o número de anagramas procurado é:

$$\frac{720}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{720}{8} = 90$$

Isso é um caso de Permutação com Elementos Repetidos. Ver mais no **Apêndice** A, página 74.

Problema 04: (Autoria Própria)

Considere um grupo de 12 alunos. Deste grupo será composta uma comissão com 05 alunos, contendo três cargos específicos: presidente, secretário e tesoureiro. Qual é o número total de comissões que podem ser formadas?

Solução:

Para resolução, observamos inicialmente que, dentre as 5 vagas da comissão, 3 delas possuem cargos específicos e, por isso, temos que atacá-las primeiro (são as tarefas mais restritas). Logo, as tarefas para a resolução são:

Tarefa 01: escolher um aluno para ocupar o cargo de Presidente;

Tarefa 02: escolher um aluno ainda não escolhido para ocupar o cargo de Secretário;

Tarefa 03: escolher um aluno ainda não escolhido para ocupar o cargo de Tesoureiro;

Tarefa 04: escolher, dentre os 9 alunos restantes, dois para completar a comissão.

Desse modo, a Tarefa 01 poderá ser feita de 12 maneiras; a Tarefa 02 de 11 maneiras; a Tarefa 03 de 10 maneiras e a última Tarefa será feita a partir da combinação $C(9,2)$. Dessa forma, pelo Princípio Multiplicativo, há $12 \times 11 \times 10 \times C(9,2) = 12 \times 11 \times 10 \times \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 47520$ comissões.

Comentário:

Por mais que possamos crer que esse se assemelha com o Problema 05 (veremos a seguir), observamos agora que há cargos específicos dentro de uma comissão, e seguindo a proposta vista em (LIMA et al., 2006, p. 91), citada na página 19, de atacar os casos mais restritos em primeiro lugar, realizamos inicialmente a seleção para cada uma dessas três vagas restritas. Apenas ao final, nas duas vagas não carregadas de cargo específico, foi utilizado Combinação Simples, como será feito por todo o Problema 05.

É importante o trabalho com problemas do tipo, pois tiramos da cabeça dos alunos o erro comum de pensar que cada problema se enquadra em apenas uma técnica de contagem.

Vale ressaltar a semelhança desse problema com os Casos 02 e 05 do Jogo Senha. Ambos utilizam os mesmos métodos de contagem em sua resolução.

Problema 05: (Autoria Própria)

De um grupo de 10 mulheres, dentre elas Carol, e de 8 homens, dentre eles José, quantas comissões podem ser formadas por:

a) 5 pessoas com no mínimo 4 mulheres?

b) 6 pessoas: 3 de cada sexo e de modo que Carol e José sejam incluídos?

Solução:

a) Temos duas possibilidades para a resolução deste problema:

Possibilidade 01: 4 mulheres e 1 homem (total 5 pessoas);

Possibilidade 02: 5 mulheres e nenhum homem.

Assim temos as tarefas abaixo:

Possibilidade 01: Tarefa 01: escolher as mulheres (4 dentre 10) e Tarefa 02: escolher um homem para completar a comissão.

O número $card$(Tarefa 01) será obtido por $C(10,4)$. Analogamente, $card$(Tarefa 02)$= C(8,1) = 8$.

Pelo PM temos:

$$C(10,4) \times C(8,1) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 8 = 10 \times 3 \times 8 \times 7 = 1680$$

Na **Possibilidade 02**, temos apenas uma tarefa: Tarefa 03: escolher as mulheres (5 dentre 10).

O número $card$(Tarefa 03) será obtido por $C(10,5)$.

Logo, há

$$C(10,5) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 9 \times 2 \times 7 = 252$$

para a Possibilidade 02.

Agora, pelo Princípio Aditivo de Contagem temos:

$$1680 + 252 = 1932$$

que é o número de comissões procurado.

b) Queremos, agora, uma comissão de 6 pessoas, com 3 homens e 3 mulheres, contando com a presença de Carol e José. Temos as seguintes tarefas:

Tarefa 01: escolher as mulheres (nesse caso 2 dentre 9, pois Carol já está certa como membro da comissão);

Tarefa 02: escolher os homens (nesse caso 2 dentre 7, pois José já está certo como membro da comissão).

$card$**(Tarefa 01)** $= C(9, 2) = \frac{9\times8}{2\times1} = 36$

$card$**(Tarefa 02)** $= C(7, 2) = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $36 \times 21 = 756$ comissões dessa forma.

Comentário:

Este problema trabalha de forma diversificada o método de contagem Combinações Simples, utilizado em diversas situações do Jogo Senha, além de ser um dos tópicos mais importantes da Análise Combinatória de nível médio. A parte interessante deste problema é a presença do Princípio Aditivo de Contagem na letra "a", quando vimos diferentes possibilidades e em cada, uma forma de ordenação. Podemos dizer que essa alternativa traz a possibilidade de exemplificar os dois princípios de Contagem, mostrando sua diferença. Além desse item, temos na letra "b" uma informação pré-definida sobre a ordenação procurada. Muitos alunos se enganam nessas situações, tornando difícil o que por vezes é óbvio. A sugestão é mostrar aos discentes que uma informação sendo certa, já pré-estabelecida, será descartada para a ordenação dos demais membros, por exemplo, se a comissão possui 3 mulheres, e Carol está certa na comissão, o que nos resta é apenas ordenar os 2 membros (mulheres) restantes.

Problema 06: (Autoria Própria)

Quantos anagramas da palavra UENF existem de forma que uma e apenas uma letra se mantenha fixa na posição inicial?

Solução:

Primeiro, temos que escolher qual letra será fixada na posição inicial. Esta pode ser nossa **Tarefa 01**. Então, $card$**(Tarefa 01)**$= 4$. Agora, para a **Tarefa 02** faremos uma permutação Caótica das três letras restantes em três vagas.

A **Tarefa 02** pode ser feita de $D[3] = 2$ formas (feita algumas vezes anteriormente). Que também, pode ser obtido pela aproximação do número inteiro mais próximo do resultado do quociente de $3!/e$ onde $e \cong 2,71$, como vimos na seção 1.2.5.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $4 \times 2 = 8$ anagramas procurados. Veja:

U na posição primitiva: UNFE e UFEN;

E na posição primitiva: FEUN e NEFU;

N na posição primitiva: EFNU e FUNE;

F na posição primitiva: ENUF e NUEF.

Comentário:

Temos, nesse caso, um problema que envolve Anagrama, Permutação Caótica e Princípio Multiplicativo. O que vale para ser destacado é a semelhança dele com o Caso 08 do Jogo Senha. Claramente, este problema pode ser apresentado aos alunos do Ensino Médio mesmo sem ter a base conceitual de Permutação Caótica, visto que o número de maneiras para tal ordenação é pequena e por isso é apresentada ao final. Esse problema também possui grande semelhança com a questão do ENEM de 1998 que será visto no Problema 10 desta seção.

Problema 07: (LIMA et al., 2006, p. 92) Adaptado.

João quer criar uma senha de três dígitos para seu celular. Ele deseja que o número formado seja par e não se inicie por zero. Quantas senhas são possíveis?

Solução:

Como o número (senha) é par, então ele pode terminar por $0, 2, 4, 6$ e 8. E, sendo de três dígitos, não podemos incluir o 0 na primeira casa. Ora, o zero é incluído na última casa e não será contado como opção restante. Ora, ele não está incluído na última casa, mas pode ser utilizado na segunda casa. Isto gera impasse na resolução e, por isso, o método mais viável é mostrar para os alunos a divisão das Possibilidades. Por mais que dê trabalho, é o jeito correto de solucionar problemas como esse.

Possibilidade 01: terminando com 0;

Possibilidade 02: terminando com 2;

Possibilidade 03: terminando com 4;

Possibilidade 04: terminando com 6;

Possibilidade 05: terminando com 8.

Para a **Possibilidade 01**, temos as tarefas abaixo:

Tarefa 01: escolher um número para o primeiro dígito; $card$(Tarefa 01)$= 9$ possibilidades: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

Tarefa 02: escolher um número ainda não escolhido para o segundo dígito. $card$(Tarefa 02)$= 8$ possibilidades.

Não há **tarefa 03**, pois como foi definido nesta possibilidade, o 0 já está incluído como último dígito do número. Logo, pelo Princípio Multiplicativo temos $9 \times 8 = 72$ números de três dígitos distintos do formato da **Possibilidade 01**.

Para a **Possibilidade 02**, temos:

Tarefa 01: escolher um número para o primeiro dígito:

$card$**(Tarefa 01)**$= 8$ possibilidades: $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

Tarefa 02: escolher um número ainda não escolhido para o segundo dígito.

$card$**(Tarefa 02)**$= 8$ possibilidades: O 2 já está no último dígito e algum número já foi escolhido para o primeiro dígito. Mas agora, para o segundo dígito, o 0 poderá ser incluído!.

Portanto, o Princípio Multiplicativo nos mostra que há $8 \times 8 = 64$ números de três dígitos que terminam com o número 2.

De forma análoga, as Possibilidades 03, 04 e 05, possuem cada uma a quantidade de 64 números.

Agora, pelo Princípio Aditivo de Contagem, há $72 + 64 \times 4 = 72 + 256 = 328$ senhas com a configuração pedida.

Comentário:

Este problema é simples e muito interessante, pois a tarefa mais restrita, que é a escolha para o último dígito, possui um detalhe diferenciado. Quando o 0 é fixado no último dígito, há 9 possibilidades para o primeiro dígito. No entanto, sendo, por exemplo, o 2 fixado no final, teremos 8 possibilidades para o primeiro dígito porque o 0 não pode ser fixado na posição inicial, pois fere o pedido do problema de não começar com 0.

Essa ideia de depender da escolha sugere tal separação na solução do problema, além de trazer a possibilidade de utilizar o Princípio Multiplicativo e Aditivo de Contagem. Sem dúvidas, é um ótimo problema para estimular o raciocínio combinatório e a organização nas soluções de problemas.

Problema 08: (OBMEP 2015 – Nível 3 – 1ª fase)

Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

A) 20 B) 30 C) 60 D) 90 E) 120

Solução:

Tarefas para resolução:

Tarefa 01: Escolher os dois participantes que serão premiados;

Tarefa 02: Escolher uma medalha para um dos escolhidos acima;

Tarefa 03: Escolher uma medalha (igual à escolhida acima ou não) para o outro participante.

$card$**(Tarefa 01)** $= C(5,2)$;

$card$**(Tarefa 02)** $= 3$; (Ouro, prata ou bronze)

$card$**(Tarefa 03)** $= 3$. (Ouro, prata ou bronze, pois há a possibilidade de repetição)

Pelo Princípio Multiplicativo há

$$C(5,2) \times 3 \times 3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 \times 3 = 90$$

formas de premiação.

Comentário:

Este problema contém uma seleção de dois elementos dentre cinco disponíveis. Este cálculo é semelhante aos diversos feitos nos casos do Jogo Senha, por exemplo, tarefa 01 do caso 02, no qual foram selecionados 3 objetos dentre 4 disponíveis.

Problema 09: (ENEM 2009 – Prova cancelada) Questão citada no trabalho de Kasprzykowski (2014, p. 39)

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava - se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$2,00 de desconto. Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

A) 1/24 B) 3/24 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/2

Solução:

Em momento algum citamos neste trabalho os conceitos de Probabilidade. Todavia, de forma simplificada, consideremos que a Probabilidade de um evento A ocorrer é dada por:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(U)}$$

Onde $card(A)$ representa o número de formas de ocorrer o evento A (casos favoráveis) e $card(U)$ representa o número de formas de ocorrer o evento U denominado "todos os casos possíveis".

Com isso, para resolver este problema temos dois cálculos:

$card(A)$, que será a permutação dos números $0, 1, 2$ e 5 de forma que nenhum deles permaneça na posição inicial e $card(U)$, o número de permutações, sem restrições, dos números $0, 1, 2$ e 5.

Para $card(A)$ temos um caso clássico de Permutação Caótica de 4 objetos em 4 vagas. Então, $card(A) = D\texttt{[4]} = 9$ e para $card(U)$ temos a divisão de quatro tarefas:

Tarefa 01: escolher um número para a primeira vaga;

Tarefa 02: escolher um número ainda não escolhido para a segunda vaga;

Tarefa 03: escolher um número ainda não escolhido para a terceira vaga;

Tarefa 04: escolher um número ainda não escolhido para a última vaga.

$card$**(Tarefa 01)** $= 4$

$card$**(Tarefa 02)** $= 3$

$card$**(Tarefa 03)** $= 2$

$card$**(Tarefa 04)** $= 1$

Assim, pelo PM, $card(U) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Logo, a probabilidade procurada é:

$$P(A) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Comentário:

Este problema utiliza os conceitos básicos de Probabilidade em conjunto com uma Permutação Caótica, cuja importância é grande, e trata-se de uma forma de agrupamento pouco utilizado no Ensino Médio, embora frequentemente explorado no Jogo Senha. Vimos várias situações nos casos do Jogo Senha, quando temos as informações adicionais com pino(s) branco(s). Ótimos trabalhos sobre esse método de Contagem podem ser vistos em Rimsa e Falcão (2014) e Oliveira et al. (2009).

Problema 10: (ENEM – 1998)

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00. A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

A) 0 B) 1/3 C) 1/4 D)1/2 E) 1/6

Solução:

Semelhantemente ao Problema 03, temos:

Para $card(A)$, casos favoráveis, devemos ordenar 3 objetos em 3 vagas de modo que nenhum deles permaneça na posição inicial e $card(U)$. Temos uma permutação simples sem restrição de 3 objetos em 3 vagas.

O número $card(A)$ oriunda de uma Permutação Caótica de 3 objetos em 3 vagas.

Então, sem utilizar a fórmula, $card(A)$ é o inteiro mais próximo do resultado de $\frac{3!}{e} \cong \frac{6}{2{,}71} \cong 2$.

Já para $card(U)$ temos as tarefas:

Tarefa 01: escolher uma letra para a primeira vaga;

Tarefa 02: escolher uma letra ainda não escolhida para a segunda vaga;

Tarefa 03: escolher uma letra ainda não escolhida para a última vaga;

Logo,

$card$**(Tarefa 01)** $= 3;$

$card$**(Tarefa 02)** $= 2;$

$card$**(Tarefa 03)** $= 1.$

Assim, pelo PM, $card(U) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Logo, a probabilidade procurada é:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Comentário:

Novamente, temos um misto de Probabilidade e Permutação Caótica, agora com menos objetos.

2.4 A Didática no Ensino de Análise Combinatória - Uma visão mediante a forma de Resolução

As técnicas de Contagem também podem ser aplicadas nos casos do Jogo Senha, como vimos na seção 2.2. É interessante mostrar aos alunos que problemas com elementos e situações distintas podem revelar a mesma ideia matemática, como vimos de forma mais clara, por exemplo, no Problema 06 da seção 2.3. Como foi dito, esse é um problema idêntico ao caso 08 do Jogo Senha, porém, o primeiro ordena peças na formação de uma senha, enquanto o outro ordena letras para se formar um anagrama.

Em alguns problemas da seção 2.3, não vemos semelhança por completo, porém, a parte organizacional e de cálculos é a mesma. Essa semelhança mostra claramente o objetivo do trabalho. O interessante do tema em estudo é a forte relação com o raciocínio no desenvolver dos problemas. É uma parte da Matemática onde dificilmente um aluno irá errar o resultado de algum problema por erro de cálculo. Orienta-se um trabalho intensivo com problemas e, de acordo com o aparecimento dos erros comuns dos discentes, analisar que cada erro possui um significado relativo ao raciocínio, que fere a estratégia correta de resolução, ou seja, não devemos apenas afirmar "está errado" e refazer o problema. É fundamental analisar calmamente o porquê do erro e onde ele está.

Como vimos no Capítulo 01, o método didático para este tema se torna fundamental para a caminhada dos alunos mediante a efetivação do aprendizado. Por meio da resolução de um maior número de problemas, estaremos oferecendo aos discentes um raciocínio construtivo e indiretamente mostraremos que a resolução é composta, em sua maior parte por pensamento sobre o que fazer e, não menos importante, o restante de cálculo. Como afirma Lima *et al.*:

> Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de, em cada problema, buscar a solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. [...] Combinatória não é difícil: impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos. (LIMA et al., 2006, p. 118).

Por exemplo, na seção 1.2.4: Combinações Simples, no Exemplo 02 (p. 25), há 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta S paralela a R. Quantos triângulos com vértices nesses pontos existem? Poderíamos resolvê-lo da seguinte forma: selecionar 3 pontos dentre os 13 disponíveis e, em seguida, retirar os casos nos quais os três pontos escolhidos configuram pontos pertencentes a uma mesma reta e, então, teríamos como resultado

$$C(13,3) - C(5,3) - C(8,3) = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} - \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 220.$$

Certamente, essa solução é interessante e eficaz, porém, estamos mostrando ao aluno um belo truque. Não podemos trabalhar truques antes dos métodos que educam o raciocínio. Beleza e praticidade de um truque são qualidades que só serão notadas por quem possuir domínio dos métodos.

Capítulo 3

Propostas de Atividades para a Sala de Aula

Os fatos já apresentados mostram que os problemas de Contagem exigem dos discentes um raciocínio lógico matemático apurado e estimulado. Os Métodos de Contagem geralmente são compostos por cálculos simples, em contrapartida, muitas vezes dependem de um desenvolvimento estratégico não trivial. Um dos motivos que justifica isso é o fato das soluções serem um grande desafio para a imaginação, pois, aparentemente, cada problema se classifica como único e, na verdade, é notória a falta de uma teoria geral para as resoluções.

Na seção 1.2 apresentamos princípios gerais que atacam muitos desses problemas, porém, sempre aliados a uma organizada solução. Logo, uma didática diferenciada, mediante vários exemplos, será um grande auxílio para a aprendizagem concreta desse tema.

Buscando aprimorar o desenvolvimento resolutivo dos discentes nos problemas de contagem, sugerimos neste capítulo atividades dinâmicas focadas no trinômio Jogo Senha, Análise Combinatória e Problemas de Contagem. Para tais aplicações, é necessário que os alunos já tenham tido contato com os Métodos de Contagem básicos além de conhecer bem o Jogo Senha, ferramenta que será o pilar para esse capítulo. Sobre esses conteúdos básicos de Contagem, destacamos, pela forte presença nos currículos do Ensino Médio, Princípio Aditivo de Contagem, Princípio Multiplicativo, Permutação Simples e Combinações Simples, temas que foram apresentados e exemplificados neste trabalho. É fundamental a explanação dos conceitos acompanhada de vários exemplos, como foi feito na seção 1.2.

Agora, aliando os conceitos de Combinatória com o Jogo Senha, elaboramos cinco atividades objetivando inserir os alunos diretamente nos problemas de Contagem, tornando-os participativos por todo o tempo, trabalhando assim uma didática de construção do conhecimento. Na primeira atividade, iniciaremos o trabalho com alguns casos do Jogo Senha objetivando expor as semelhanças de suas resoluções com problemas importantes da Análise Combinatória. Em seguida, diversificaremos as possibilidades de jogar (via *Smartphones*, Tabuleiro e Ficha para colorir), oportunizando mostrar os alunos as diferenças matemáticas entre os casos do Jogo, dando provas matemáticas que nem só os pinos das informações adicionais revelam algo sobre o decorrer do Jogo. Para a terceira atividade, voltamos a dar ênfase à forma da resolução dos problemas de contagem, incentivando o cuidado e o raciocínio durante a redação das soluções. Vale ressaltar que todas as atividades propostas sugerem uma junção entre problemas dispostos nos casos do Jogo Senha com problemas Combinatórios diversos. Essa associação é o diferencial nas atividades, pois visa usar o Jogo como porta de entrada para a inserção do aluno nos problemas, transformando-o no personagem que irá fazer as ações propostas. Isto seria o Tópico 1, denominado Postura, citado da página 19 deste trabalho, visto em (LIMA et al., 2006, p. 90). Na quarta atividade propomos uma atividade distinta das demais, pois a didática do professor se baseará em um problema cotidiano fazendo com que, ao final, os discentes trabalhem efetivamente em casos do Jogo. Finalizando o capítulo, daremos o primeiro passo para o trabalho das Permutações Caóticas no Ensino Médio, indicando assim a oportunidade de um trabalho posterior mais elaborado.

3.1 Atividade 01: Os problemas de Contagem presentes em casos do Jogo Senha

Objetivos:

1. Mostrar a aplicabilidade dos métodos básicos de Contagem em casos do Jogo Senha;
2. Estimular a metodologia de descrição de tarefas nas resoluções dos problemas de Contagem;
3. Associar o problema proposto por meio do Jogo Senha com problemas tradicionais de Contagem.

Público Alvo:

Alunos do Ensino Médio que estejam estudando o tema Análise Combinatória (geralmente 2° ano do Ensino Médio).

Pré-requisitos:

É necessário o conhecimento prévia do tema Análise Combinatória, por meio dos Métodos de Contagem: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo de Contagem, Permutação Simples e Combinações Simples.

Materiais e Tecnologias:

Como complemento pedagógico, sugere-se a confecção de slides com as imagens utilizadas na atividade, pois a informação visual que o Jogo apresenta é fundamental para a compreensão e, consequentemente, será determinante para as resoluções dos discentes.

Recomendações Metodológicas:

1. Orienta-se a divisão da turma em grupos de até 4 pessoas para um trabalho colaborativo. A aplicação da atividade deverá ser feita em sala de aula, pois as resoluções serão feitas no caderno, de forma tradicional, além da projeção em slide, obrigatoriamente, ter que se posicionar em um local de visão ampla da turma;

2. Como esta atividade enfatiza desde o início uma resolução bem elaborada de casos do Jogo Senha, orienta-se uma participação ativa do professor dando orientações nos grupos para que haja um desenvolvimento satisfatório dos discentes.

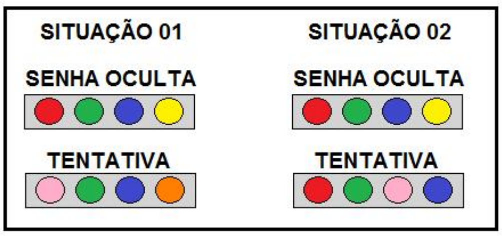
Dificuldades Previstas:

Não se espera dificuldades, pois a atividade é de fácil realização/compreensão e a dinâmica da prática em grupo auxilia o processo de ensino. Devemos levar em consideração que por ser uma atividade diferenciada, o empenho e colaboração da turma se torna um elemento fundamental para o sucesso.

Descrição geral: (Tempo previsto: 110 minutos)

1. De acordo com a figura 2 abaixo, representando duas situações do Jogo Senha, faça o que se pede:

Figura 2 – Caso do Jogo Senha utilizado na Atividade 01



Fonte: Autoria própria

a) (02 min) Qual é a informação adicional que o Jogo terá que fornecer para o jogador?

Resposta esperada:

Informação adicional: Situação 01: b=0 e p=2 e Situação 02: b=1 e p=2.

b) (28 min) Descreva, passo a passo as tarefas que o jogador terá que fazer para tentar encontrar a senha:

Resposta esperada:

Situação 01: Tarefas de resolução:

Tarefa 01: Escolher duas peças da senha e fixá-las nas posições iniciais, pois o jogador sabe que há duas peças de cor e posição certas (informação p=2);

Tarefa 02: Trocar as duas peças restantes da senha pelas duas que ficaram de fora;

Tarefa 03: Permutar, essas duas peças recém-incluídas na senha.

Situação 02: Tarefas de resolução:

Tarefa 01: Escolher duas peças da senha e fixá-las nas posições iniciais, pois o jogador sabe que há duas peças de cores e posição certas (informação p=2);

Tarefa 02: Escolher uma das duas restantes da senha para, em seguida, retirar ela da posição inicial;

Tarefa 03: Feita a escolha na tarefa acima, retirar esta da posição inicial, pois o jogador sabe que uma peça está na posição errada (informação b=1);

Tarefa 04: Trocar uma peça por alguma das duas que ficaram de fora.

c) (10 min) Utilizando as tarefas descritas acima, resolva as situações utilizando os métodos de contagem apropriados.

Resposta esperada:

Situação 01: A primeira tarefa será feita de $C(4,2)$ maneiras; a tarefa 02 de uma maneira e a última tarefa será feita de 2 maneiras. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há

$$C(4,2) \times 1 \times 2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 2 = 12$$

senhas, com apenas uma correta.

Situação 02: A tarefa 01 poderá ser feita de $C(4,2)$ maneiras; a tarefa 02 de $C(2,1)$ maneiras; a tarefa 03 de uma maneira e a última tarefa de 2 maneiras.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem

$$C(4,2) \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 4 = 24$$

senhas, com apenas uma correta.

2. (60 min: 30 minutos cada Problema) Siga rigorosamente os mesmos passos de (1. b) e (1. c) acima para resolver os dois problemas de contagem abaixo:

2.1. Problema 01

(OBMEP 2015 – Nível 3 – 1ª fase) (Visto na seção 2.3 deste trabalho) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

A) 20 B) 30 C) 60 D) 90 E) 120

Resposta esperada:

Tarefas de Resolução:

Solução vista na seção 2.3 deste trabalho.

2.2 Problema 02:

(Autoria própria) (Visto na seção 2.3 deste trabalho)

Considere um grupo de 12 alunos. Deste grupo será composta uma comissão com 05 alunos, contendo três cargos específicos: presidente, secretário e tesoureiro. Qual é o número total de comissões que podem ser formadas?

Resposta esperada:

Solução vista na seção 2.3 deste trabalho.

3. (10 min) Comente quais as semelhanças notou entre a resolução dos casos do Jogo Senha e os problemas propostos.

Resposta esperada:

Os alunos irão perceber que os métodos de contagem utilizados são os mesmos, além de forma de organização do problema. O auxílio entre a associação dos problemas com o caso do Jogo Senha será confirmado na resposta deste questionamento.

Possíveis Continuações e Desdobramentos:

O formato da atividade permite uma diversificação nos casos do Jogo Senha a ser estudado, consequentemente, oferece a possibilidade de ampliar os problemas propostos no número 2. Lembremos que o ideal é a relação entre os problemas presentes no Jogo com os propostos.

3.2 Atividade 02: Comparando casos do Jogo Senha

Objetivos:

1. Estimular as diversas formas de se jogar o Jogo Senha;

2. Entender melhor cada caso do Jogo Senha através de comparações comprovadas

por cálculos;

3. Mostrar um detalhe importante do Jogo Senha, referente à informação adicional, a saber: a falta de pinos brancos ou pretos na informação adicional também tem algo a dizer sobre a senha;

4. Mostrar a aplicabilidade dos métodos básicos de Contagem em casos do Jogo Senha;

5. Estimular a metodologia de descrição de tarefas nas resoluções dos problemas de Contagem por meio da resolução dos casos do Jogo.

Público Alvo:

Alunos do Ensino Médio que estejam estudando o tema Análise Combinatória (geralmente 2° ano do Ensino Médio).

Pré-requisitos:

É necessário o conhecimento prévio do tema Análise Combinatória, por meio dos Métodos de Contagem: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo de Contagem, Permutação Simples e Combinações Simples.

Materiais e Tecnologias:

1. Fichas para colorir simulando o Jogo Senha (figura 4 ao final da atividade);

2. Alguns *Smartphones*, geralmente os próprios alunos possuem, com o aplicativo do Jogo Senha instalado (há diversos disponíveis para baixar) (figura 5 ao final da atividade);

3. Um tabuleiro original ou semelhante ao Jogo Senha (figura 6 ao final da atividade);

4. Elementos básicos para uma aula tradicional, como quadro, giz/pincel, apagador.

Recomendações Metodológicas:

1. Orienta-se a divisão da turma em grupos de até 6 pessoas para um trabalho colaborativo. Três integrantes do grupo terão a função de Jogador (cada um jogará em uma das formas: Ficha, *Smartphone* ou Tabuleiro) e os outros de Desafiante. Feita a tentativa inicial, todos os membros do grupo prosseguem com o decorrer da atividade acompanhando as explicações do professor;

2. A aplicação da atividade poderá ser realizada, inicialmente, fora de sala, como em um pátio, ginásio, em algum ambiente amplo, dando assim mais tranquilidade aos discentes;

3. Esta atividade possui um caráter simples, apenas de demonstração dos resultados referentes aos casos do Jogo Senha. É importante ressaltar que alguns casos possuem um maior potencial didático, como veremos exemplos na descrição geral;

4. A fim de familiarizar o Jogo entre os discentes, orienta-se estender o tempo durante o processo de aplicação do Jogo, trazendo ludicidade para atividade, auxiliando assim nas orientações do docente;

5. Não se aconselha o estudo de casos do Jogo Senha que utilizem métodos de contagem não trabalhados anteriormente em sala;

6. A parte final da atividade, reservada para a parte matemática, de demonstração de casos do Jogo Senha, deverá ser realizada em sala de aula por meio dos recursos tradicionais necessários para pratica docente.

Dificuldades Previstas:

1. A utilização de três formas do Jogo pode acarretar descontrole entre os alunos, dúvidas, conflito entre o grupo;

2. Sabemos do potencial informativo que os *Smartphones* possuem, e por isso, poderá haver momentos de dispersão determinantes para atrapalhar esta ação didática;

3. Talvez não seja fácil a obtenção do tabuleiro do Jogo Senha (original/similar). Caso ocorra este problema, sugere-se a aplicação da atividade por meio dos outros métodos;

4. Sabemos da revolução tecnológica atual, porém, nem todos os alunos possuem *Smartphones*. Logo, é preciso uma análise do quantitativo de celulares com possibilidade de instalação do aplicativo e, em seguida, a distribuição dos grupos de forma que a atividade transcorra de forma igualitária.

Descrição geral: (Tempo previsto: 50 minutos)

Sabemos que cada caso do Jogo Senha se caracteriza pela informação adicional dada pelo Jogo a partir da tentativa inicial no descobrimento da senha. Com isso, trabalharemos algumas comparações importantes entre alguns casos, mostrando assim que o Jogo não se compõe apenas de informação adicional formada por pinos brancos e pretos.

Nesta aplicação, procura-se também dinamizar as formas de trabalhar o Jogo em sala de aula, através de três opções: Aplicativo de *Smartphone*, Tabuleiro ou Fichas de Papel. Vamos aos procedimentos:

1. (05 min) Inicie o Jogo Senha de três formas distintas (*Smartphone*, Tabuleiro ou Ficha de Papel para colorir).

2. (15 min) Dentre as três tentativas elaboradas inicialmente, classifique, de forma indutiva, qual julga mais fácil e qual mais difícil para o prosseguimento. Copie no caderno. Exemplo: *Smartphone*: Caso b=1 e p=1; Tabuleiro: Caso b=1 e p=2 e Ficha: Caso b=0 e p=3. Daí, suponhamos que o jogador julgue: Ficha (o mais fácil) e *Smartphone* (o mais difícil).

Observações: Se o jogador acertar na primeira tentativa, repita o procedimento para que isso não aconteça novamente.

Após a escolha do mais fácil, estimule os alunos a prosseguirem tentando vencer o jogo, familiarizando assim o Jogo entre eles.

3. (05 min) Ao final, mostre a figura 3 aos alunos, para que verifiquem se fizeram boa escolha ou não. Em seguida, prove no quadro alguns casos, específicos do Ensino Médio, dando assim mais segurança para os dados informados.

Observação: Todos os casos da figura 3 foram resolvidos na seção 2.2 deste trabalho.

Figura 3 – Casos do Jogo Senha e número de senhas correspondentes - Imagem para utilizar na Atividade 2

Casos do Jogo Senha	○○○○	○○○	○○○●	○○	○○●	○○●●	○●	○●●	●●	●●●	●●●●
Número de Senhas Relacionadas	9	88	8	84	72	6	48	24	12	8	1

Fonte: Autoria própria

4. (05 min) Relate o que os levou a fazer o julgamento do mais fácil.

Resposta esperada:

Certamente o que leva a escolha do caso mais fácil é a quantidade total de pinos compostos na informação adicional. Mas, tal interpretação será desconsiderada quando, ao analisar, por exemplo, na tabela os casos (b=0 e p=2) e (b=1 e p=2), pois o primeiro caso possui 12 senhas correspondentes, enquanto o segundo 24.

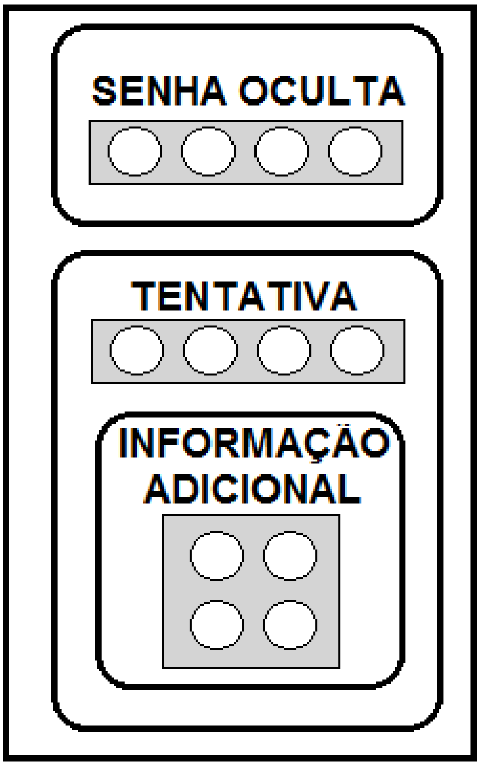
Tal prova, irá mostrar aos alunos que a falta de pinos também é uma informação importantíssima do jogo. Os cálculos serão feitos no momento a seguir.

5. (20 min) Agora observe algumas explicações/resoluções feitas pelo professor.

Escolher casos específicos que irão auxiliar o ensino de Contagem a partir de soluções bem organizadas, como as vistas na seção 2.3 deste trabalho.

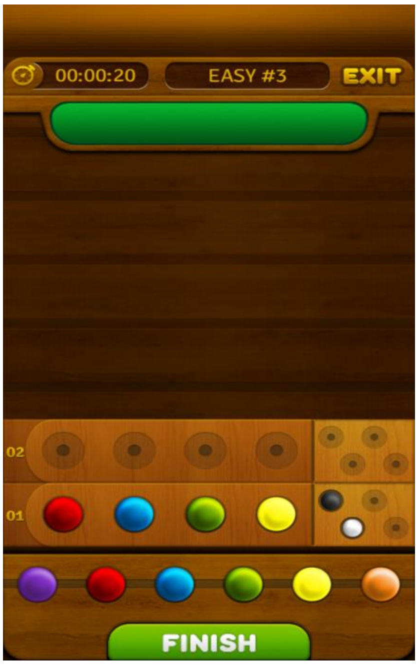
As figuras 4, 5 e 6 mostram três formas de jogar o Jogo Senha:

Figura 4 – Modelo de Ficha para colorir simulando o Jogo Senha



Fonte: Autoria própria

Figura 5 – Aplicativo de *Smartphone* denominado "Real Code Breaker" simulador do Jogo Senha



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Tabuleiro do Jogo Senha

Fonte: http://www.matematicamania.com.br/2008/mastermind-um-jogo-de-logica/

3.3 Atividade 03: O cuidado na escrita das resoluções dos problemas de Contagem

Objetivos:

1. Mostrar a aplicabilidade dos métodos básicos de Contagem em casos do Jogo Senha;
2. Estimular a metodologia de descrição de tarefas nas resoluções dos problemas de Contagem;
3. Associar o problema proposto pelos casos do Jogo Senha com problemas tradicionais de Contagem.

Público Alvo:

Alunos do Ensino Médio que estejam estudando o tema Análise Combinatória (geralmente 2° ano do Ensino Médio).

Pré-requisitos:

É necessário o conhecimento prévio do tema Análise Combinatória, por meio dos métodos de contagem: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo de Contagem, Permutação Simples e Combinações Simples.

Materiais e Tecnologias:

1. Como complemento pedagógico, sugere-se a confecção de slides para auxiliar a parte 01 da atividade (Resolução do caso do Jogo Senha), por meio de imagens, animações, recursos em geral oferecendo ao discente uma solução dinâmica e objetiva;

2. Elementos básicos para uma aula tradicional, como quadro, giz/pincel, apagador.

Recomendações Metodológicas:

Não há necessidade de divisão da turma em grupos. Esta atividade se baseia na orientação do professor durante o processo de construção da solução de problemas de contagem e isso reforça o fato de uma aplicação individual, de forma tradicional, contando com o auxílio constante do docente durante as dúvidas possíveis do processo.

Dificuldades Previstas:

Espera-se dificuldade dos alunos na parte da descrição das tarefas necessárias para a resolução dos problemas propostos. Isso pode acarretar um atraso na atividade visto que o professor pode ser muito solicitado. Com isso, orienta-se pedir o auxílio dos alunos que sentirem mais facilidade para ajudar os colegas durante este processo de ensino.

Descrição geral: (Tempo previsto: 75 minutos)

Neste momento, daremos uma ênfase na organização e no cuidado da escrita das resoluções de problemas de Contagem. Cada questionamento desta atividade irá encaminhar os alunos para uma resolução mais produtiva e com menos possibilidade de erros, vejamos:

1. (25 min) Apenas acompanhe com atenção os passos para a resolução de um caso do Jogo Senha (que é um problema de Contagem).

Explicação no quadro:

Resolução do Caso 04 do Jogo Senha: b=1 e p=1. Vista na seção 2.2 deste trabalho.

Neste caso, sabemos que o jogador acertou 2 cores (por conter dois pinos na informação adicional). Como há um pino preto, o jogador sabe que uma peça possui cor certa em posição certa. A presença do pino branco mostra que há outra cor correta na senha, porém, na posição errada. E, também, não podemos esquecer que duas cores da senha estão erradas.

Para a resolução, observe que temos vários problemas a serem resolvidos e iremos descrever esses como tarefas de resolução, vejam:

Tarefa 01: Escolher uma peça da senha para manter fixa na posição inicial;

Tarefa 02: Escolher outra peça da senha para em seguida mudar esta de posição;

Tarefa 03: Mudar de posição a peça escolhida anteriormente;

Tarefa 04: Trocar as duas peças, ainda não escolhidas da senha pelas duas peças que ficaram de fora na primeira tentativa;

Tarefa 05: Permutar as peças recém-incluídas na senha, terminando assim o número total de possibilidades.

Resolvendo as tarefas temos: A tarefa 01 consiste em selecionar um objeto dentre quatro disponíveis. Temos assim $C(4,1) = 4$ formas de seleção. A tarefa 02 consiste em selecionar um objeto dentre 3 (pois um deles foi escolhido na tarefa anterior). Temos assim $C(3,1) = 3$ formas de seleção. A tarefa 03 consiste em mudar de posição a peça escolhida anteriormente. Como há três vagas (pois uma vaga está fixada com a peça escolhida na tarefa 01), então, há apenas duas vagas possíveis. Como há duas peças erradas na senha, iremos trocar duas peças da senha pelas duas peças que ficaram de fora (Tarefa 04), e claramente isso é feito de uma maneira. Finalizando, a tarefa 05 consiste em permutar (trocar a posição) as duas peças escolhidas na tarefa anterior. Isso pode ser feito de 2 formas.

Com isso, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta do problema é:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$$

O que mostra que há 48 senhas das quais uma delas será a correta.

2. (40 min: 20 minutos cada Problema) Seguindo rigorosamente os passos (1°: Descrição em tarefas, 2°: resolução das tarefas, 3°: Aplicação do Princípio Multiplicativo) da solução acima, resolva os problemas abaixo: Observação: Orienta-se ao professor, acompanhar cada etapa deste processo.

2.1 Problema 01: (Autoria Própria) (Visto na seção 2.3 deste trabalho)

Marina e Thiago, junto com outros seis amigos (3 mulheres e 3 homens) vão viajar de ônibus em uma excursão escolar. O ônibus que os levará possui exatamente quatro bancos (cada um com dois assentos) vagos. De quantas maneiras os oito amigos podem se sentar no ônibus de modo que Marina e Pedro fiquem juntos e em cada banco sente um homem e uma mulher?

Resposta esperada 2.1:

Resolução vista na seção 2.3 deste trabalho.

2.2 Problema 02:(Autoria própria) (Visto na seção 2.3 deste trabalho)

De um grupo de 10 mulheres, dentre elas Carol, e de 8 homens, dentre eles José, quantas comissões podem ser formadas por:

a) 5 pessoas com no mínimo 4 mulheres?

b) 6 pessoas: 3 de cada sexo e de modo que Carol e José sejam incluídos?

Reposta esperada 2.2:

Resolução vista na seção 2.3 deste trabalho.

3. (10 min): Comente as semelhanças observadas entre a resolução feita pelo professor em 01 e as resoluções dos problemas propostos em 02. Como essa forma de resolução os auxiliaram durante as resoluções?

Resposta esperada:

Os alunos irão perceber que os métodos de contagem utilizados são geralmente os mesmos. Perceberão que a organização na resolução dos problemas é um grande auxílio para encontrar a resposta correta.

Possíveis Continuações e Desdobramentos:

O formato da atividade permite uma diversificação nos casos do Jogo Senha a ser estudado, consequentemente, oferece a possibilidade de ampliar os problemas propostos na segunda parte. Lembremos que o ideal é a relação entre os problemas presentes no Jogo com os propostos. Não é viável associar um caso do Jogo Senha que utilize em sua resolução apenas Permutações Caóticas com um problema, que para a sua resolução utiliza Princípio Multiplicativo e Combinações Simples.

3.4 Atividade 04: Resolvendo casos do Jogo Senha a partir de Problemas de Contagem

Objetivos:

1. Mostrar a aplicabilidade dos métodos básicos de Contagem em casos do Jogo Senha;
2. Estimular a metodologia de descrição de tarefas nas resoluções dos problemas de Contagem;
3. Associar problemas tradicionais de contagem com problemas propostos em caso do Jogo Senha.

Público Alvo:

Alunos do Ensino Médio que estejam estudando o tema Análise Combinatória (geralmente 2° ano do Ensino Médio).

Pré-requisitos:

É necessário o conhecimento prévio do tema Análise Combinatória, através dos métodos de contagem: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo de Contagem, Permutação Simples e Combinações Simples.

Materiais e Tecnologias:

1. Como complemento pedagógico, sugere-se a confecção de slides para auxiliar a parte 01 da atividade (Resolução dos Problemas de Contagem), através de imagens, animações, recursos em geral oferecendo ao discente uma solução dinâmica e objetiva;
2. Elementos básicos para uma aula tradicional, como quadro, giz/pincel, apagador.

Recomendações Metodológicas:

Não há necessidade de divisão da turma em grupos. Esta atividade se baseia na orientação do professor durante o processo de construção da solução de problemas de contagem (presentes em casos do Jogo Senha) e isso reforça o fato de uma aplicação individual, de forma tradicional, contando com o auxílio constante do docente durante as dúvidas possíveis do processo.

Dificuldades Previstas:

Espera-se dificuldade dos alunos na parte da descrição das tarefas necessárias para a resolução dos problemas propostos. Isso pode acarretar um atraso na atividade visto que o professor pode ser muito solicitado. Com isso, orienta-se pedir o auxílio dos alunos que sentirem mais facilidade para ajudar os colegas durante este processo de ensino.

Descrição geral: (Tempo estimado: 100 minutos)

Basicamente, esta atividade é o inverso da Atividade 3.3. Iremos iniciar a atividade com a resolução de Problemas de Contagem presentes em Vestibulares/ Processos seletivos/ Autoria própria, e com esta resolução, estaremos induzindo a solução posterior dos alunos dos casos do Jogo Senha.

1. (40 min: 20 minutos para cada Problema) Acompanhe a solução dos Problemas de Contagem abaixo:

1.1 Problema 01: (Autoria Própria) Visto na seção 2.3 deste trabalho:

Quantos anagramas da palavra UENF existem de forma que uma e apenas uma letra se mantenha fixa na posição inicial?

Explicação no quadro 1.1:

Resolução vista na seção 2.3 deste trabalho.

1.2 Problema 02: (Autoria Própria) Visto na seção 2.3 deste trabalho:

Um atleta pratica três atividades físicas durante seis dias de uma mesma semana. Cada dia ele pratica apenas uma atividade. As atividades são: Corrida, Futebol e Natação.

Durante a semana ele reserva dois dias para cada atividade. Observe a representação de uma semana do atleta: (Futebol, Corrida, Futebol, Natação, Natação e Corrida).

Explicação no quadro 1.2:

Resolução vista na seção 2.3 deste trabalho.

2. (50 min: 25 minutos para cada Problema) Seguindo rigorosamente os passos (1°: Descrição em tarefas, 2°: resolução das tarefas, 3°: Aplicação do Princípio Multiplicativo) da solução acima, resolva os problemas abaixo: Observação: Orienta-se ao professor, acompanhar cada etapa deste processo.

2.1 Problema 01: Caso do Jogo Senha: b=3 e p=1

Ao jogar o Jogo Senha, um jogador se depara com a seguinte situação: informação adicional b=3 e p=1. O que isso significa? Descubra o número de senhas correspondentes a essa informação adicional.

Resposta esperada:

Resolução vista na seção 2.2 deste trabalho.

2.2 Problema 02:

Considere o caso do Jogo Senha: Ao jogar o Jogo Senha, um jogador depara com a seguinte situação: informação adicional b=1 e p=1. O que isso significa? Descubra o número de senhas correspondentes a essa informação adicional.

Resposta esperada:

Resolução vista na seção 2.2 deste trabalho.

3. (10 min) Verifique se os métodos de contagem utilizados nas resoluções dos problemas 2.1 e 2.2 se assemelham com os que foram utilizados em 1.1 e 1.2. Em seguida, relate as semelhanças observadas entre as resoluções dos problemas apresentados em 01 com os propostos em 02.

Resposta esperada:

Será notória a presença dos mesmos Métodos de Contagem (geralmente Princípio Multiplicativo e Combinações Simples). Essa presença constante dos mesmos métodos de Contagem em diferentes problemas de Análise Combinatória reforça a resposta positiva quanto às semelhanças entre os problemas, como se observa com mais clareza em 1.1 e 2.1.

3.5 Atividade 05: Introdução às Permutações Caóticas

Objetivos:

1. Introduzir o conceito de Permutações Caóticas no Ensino Médio;
2. Mostrar a relação direta desse tema com o número de Euler;
3. Mostrar a aplicabilidade do tem por meio através de Problemas presentes em provas reconhecidas nacionalmente;
4. Associar a resolução dos problemas propostos com a proposta do estudo do Caso do Jogo Senha.

Público Alvo:

Alunos do Ensino Médio que estejam estudando o tema Análise Combinatória (geralmente 2° ano do Ensino Médio).

Pré-requisitos:

É necessário o conhecimento prévio do tema Análise Combinatória, através dos Métodos de Contagem: Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo de Contagem, Permutação Simples e Combinações Simples.

Materiais e Tecnologias:

1. Para dar mais dinamicidade à atividade, sugere-se a confecção de cartões, para que durante a aplicação dos questionamentos, os alunos tenham um manuseio mais prático auxiliando assim nas resoluções. Necessita-se de 11 cartões, 4 com as letras A, B, C e D, para a introdução da atividade, 3 com as letras T, V e E, para o problema proposto 1 e os demais com os números 0, 1, 2 e 5, para o problema proposto 2;
2. O ideal seria os 11 cartões para cada grupo;
3. Elementos básicos para uma aula tradicional, como quadro, giz/pincel, apagador.

Recomendações Metodológicas:

Orienta-se a divisão da turma em grupos de até 4 pessoas para um trabalho colaborativo. A aplicação da atividade deverá ser feita em sala de aula devido à necessidade do quadro para as devidas explicações, com isso, se torna necessário materiais tradicionais para a ministração de uma aula normal.

Dificuldades Previstas:

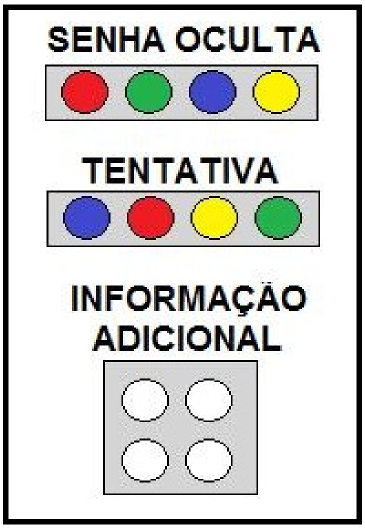
Não se espera dificuldades, pois a atividade é de fácil realização/compreensão e a dinâmica da prática em grupo auxilia o processo de ensino.

Descrição geral (Tempo previsto: 55 minutos):

Vamos trabalhar neste tópico um caso do Jogo Senha que para a sua resolução iremos pedir aos alunos apenas para listarem as possibilidades e para a confirmação dessa quantidade, estaremos inserindo os conceitos básicos das Permutações Caóticas. Seguem, então, os questionamentos:

1. (10 min) Consideremos o Caso 01 do Jogo Senha, veja a figura 7:

Figura 7 – Caso do Jogo Senha utilizado na Atividade 05



Fonte: Autoria própria

Para que o jogador resolva este problema ele deverá reordenar as cores de forma que nenhuma delas permaneça na posição inicial. Liste todas as possibilidades. (Nomear cada cor por uma letra maiúscula, exemplo: ABCD)

Resposta esperada:

Sendo ABCD a senha oculta e CADB a tentativa inicial, temos as seguintes ordenações: ABCD, ACBD, ADBC, BCAD, BDAC, BDCA, DBAC, DBCA e DCBA.

2. (05 min) Relate as dificuldades e as estratégias para a resolução da questão.

3. (15 min) Leia o texto mencionado abaixo:

Texto da seção 1.2.5 deste trabalho: (Até a segunda citação de Morgado *et al.*).

De acordo com as informações, verifique se a quantidade listada em 01 confere com o método citado acima.

Resposta esperada:

Como foram listadas 9 combinações em **01**, os alunos irão confirmar com o método acima pois:

$$\frac{4!}{e} \cong \frac{24}{2,71} \cong 8,85$$

4. (20 min: 10 minutos cada Problema) Resolva os problemas abaixo e veja a associação direta com as questões anteriores. Relate o que foi observado.

4.1 Problema 01:

(ENEM 2009 - Prova cancelada) (Visto na seção 2.3 deste trabalho) - Versão reformulada:

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava - se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R$2,00 de desconto. Qual é o número de maneiras que o consumidor pode ordenar os números de forma que ele acerte apenas o ultimo algarismo?

Resposta esperada 4.1:

Como o último algarismo está correto, resta ordenar os três primeiros fazendo com que nenhum deles permaneça a posição correta, ou seja, o 1 não pode ser o 1°, nem o 2 o 2°, nem o 5 o 3°. Utilizando os conceitos apresentados por Morgado et al. (2016, p. 65) já citado na página 26 temos:

$$\frac{3!}{e} \cong \frac{6}{2,71} \cong 2,21$$

Logo, há 2 maneiras:

25,10 ou 51,20.

4.2 Problema 02

(ENEM – 1998) (Visto na seção 2.3 deste trabalho) – Versão reformulada:

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de 200 reais. De quantas maneiras o participante pode ordenar as fichas de forma que ele não ganhe nada?

Resposta esperada 4.2:

Assim como no problema anterior, para que o participante não nada, ele terá que errar todas as letras, o que será uma Permutação Caótica de três objetos: $D[3]$ será o número inteiro mais próximo de $\frac{3!}{e} \cong \frac{6}{2{,}71} \cong 2,21$.

Veja então os possíveis casos: VET e ETV.

5. (05 min) Comente as semelhanças/diferenças entre os problemas presentes nas questões 1 e 4 acima.

Resposta esperada:

Os alunos irão perceber a semelhança durante a atividade e isso irá enfatizar o grande auxílio que a resolução do caso 01 do Jogo Senha proporcionou para o desenvolvimento das questões do ENEM propostas nessa atividade.

Possíveis Continuações ou desdobramentos:

Esta atividade pode ser considerada a introdução de um trabalho mais completo e focado em Permutações Caóticas. Para uma base sólida do tema, sugere-se a leitura do artigo Rimsa e Falcão (2014).

Considerações Finais

Alguns livros didáticos apresentam conceitos ligados aos Métodos de Contagem por meio de uma metodologia exclusivamente tradicionalista e não atrativa. Isso contribui para a formação de discentes que não compreendem a Análise Combinatória. Os alunos sentem dificuldade na assimilação dos conceitos pois não percebem os princípios básicos por trás da solução dos problemas. Muitos querem desenvolver métodos práticos, baseados em fórmulas, para resolver todos os tipos de problemas.

O tema matemático em discussão tem se tornado um excelente meio de ensinar os alunos a usarem a imaginação durante um processo resolutivo e a organizarem sistematicamente seu raciocínio lógico matemático.

Buscando um auxílio para a didática, sugerimos a utilização de Jogos em sala de aula, especificamente o Jogo Senha, devido à riqueza matemática em relação ao tema, trazendo uma possibilidade metodológica diferenciada focada na construção do conhecimento. A partir disso, de posse dos conceitos, podemos associar a resolução dos casos do Jogo Senha com problemas de Contagem comuns e frequentes, oferecendo consigo aulas mais atraentes e participativas, pois há inserção do aluno nos problemas, como parte predominante.

Nossa pesquisa se justificou pela dificuldade de ministrar os conceitos de Análise Combinatória. Acreditamos que as Atividades Propostas oferecem uma didática motivadora focada na contribuição para a aprendizagem significativa dos conceitos. Além disso, propomos uma metodologia que desenvolve o comportamento dos discentes diante de um problema de Contagem. É uma forma de estimular o raciocínio e a organização durante as resoluções e isso contribui para a redução da incorreta memorização de fórmulas .

Com esta proposta, observa-se também que o planejamento da aula de acordo com os objetivos pré-traçados é parte fundamental do processo. O cuidado durante a preparação metodológica poderá reduzir gradativamente as Dificuldades Previstas, dando assim mais qualidade ao trabalho.

O esperado nesta pesquisa não era apenas propor uma forma diferenciada de ensinar Análise Combinatória, mas mostrar que essa metodologia poderá estimular o raciocínio combinatório dos discentes. Além disso, buscamos despertar nos professores e nos leitores de um modo geral maior interesse em buscar novos conhecimentos, a fim de poder desfrutar das potencialidades que os jogos (em especial o Jogo Senha) oferecem para o processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, é possível vislumbrar novas abordagens a partir do que trabalhamos nesta pesquisa, o que dá importante continuidade aos estudos de conceitos matemáticos. Por isso, não esgotamos as possibilidades e nem o pretendemos, uma vez que as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória podem ser vastas e diferenciadas, como demonstramos. Isso significa que o presente estudo também provoca a abertura para outras questões a serem discutidas em trabalhos futuros. Esperamos, pois, que os professores se sintam estimulados à busca por métodos próprios, tendo em vista sempre a singularidade do aluno, as diversas maneiras de ensinar e de aprender.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 1989. Citado na página 25.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental - Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília, DF, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica*. Brasília, DF, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica*. Brasília, DF, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

BROUGÈRE, G. A criança e a cultura lúdica. *Revista da Faculdade de Educação*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 103–116, 1998. Citado na página 12.

DANTE, L. R. *Matemática: volume único*. [S.l.]: Ática, 2009. Citado na página 17.

FERREIRA, I. J.; SALES, P. E.; MENDES, R. M. A utilização do jogo "a senha"para trabalhar a permutação simples em turmas do ensino médio. *PIBID - Universidade Federal de Lavras*, 2015. Citado na página 13.

FREITAS, L. F. Análise combinatória vivenciada na matemática - uma nova proposta. *Dissertação de Mestrado - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Programa Profmat*, 2014. Citado na página 16.

GONÇALVES, R. R. S. Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio. *Dissertação de Mestrado - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - Programa Profmat*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 19.

IEZZI, G. et al. *Matemática Ciências e Aplicações*. 7. ed. Rua Henrique Schaumann, 270, Pinheiros, SP: Editora Saraiva, 2013. v. 1. Citado na página 17.

KASPRZYKOWSKI, A. G. de A. Análise comparativa da prova de matemática do enem e do vestibular da ufrj. *Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro - Programa Profmat*, 2014. Citado na página 46.

LEONARDO, F. M. d. Conexões com a matemática. *São Paulo: Moderna*, v. 3, 2013. Citado na página 17.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. *Coleçao do Professor de Matemática - Ed. SBM*, Volume 02, 2006. Citado 9 vezes nas páginas 20, 22, 23, 31, 39, 41, 44, 49 e 52.

MACEDO, L. Os jogos e sua importância na escola. *Cadernos de pesquisa*, v. 93, p. 5–10, 1995. Citado na página 12.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. *Coleçao PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado na página 21.

MORGADO, A. C. de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 16, 19, 20, 26, 28 e 68.

MOURA, M. O. de. O jogo e a construção do conhecimento matemático. *Séries Idéias - FDE - São Paulo*, 1992. Citado na página 12.

NETO, J. P. G.; SILVA, J. N. O. e; SILVEIRA, A. I. *Jogos matemáticos, jogos abstractos*. [S.l.]: Ed. Gradiva, 2008. Citado na página 12.

OLIVEIRA, F. A. de et al. Um estudo das permutações caóticas. *Trabalho apresentado como atividade do PIPE na disciplina Matemática Finita do Curso de Matemática*, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 48.

PAIVA, M. Matemática: Paiva. *São Paulo: Moderna*, 2009. Citado na página 17.

PINHEIRO, L. F. et al. Explorando os métodos de contagem no jogo senha. *Trabalho apresentado como atividade do PIPE na disciplina Matemática Finita do Curso de Matemática: FAMAT em Revista*, 2009. Citado na página 28.

RIMSA, L. G.; FALCÃO, R. de C. Permutações caóticas sobre sequências finitas. *Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de São João Del Rei - Programa Profmat*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 69.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares*, v. 10, 2001. Citado na página 13.

SANTOS, R. C. Explorando a análise combinatória no jogo senha. *Revista do Professor de Matemática*, n. 64, 2007. Citado na página 13.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. d. S. V. *Matemática: ensino médio: volume 2/Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. _*. [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2010. Citado na página 17.

SOUZA, B. D. O. Ensinando matemática com jogos. *Dissertação de Mestrado - CCT - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Programa Profmat*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

SOUZA, J. Coleção novo olhar–matemática. *São Paulo, Editora FTD*, 2010. Citado na página 17.

SOUZA, R. F. d. Inovação educacional no século xix: a construção do currículo da escola primária no brasil. *Cadernos Cedes*, SciELO Brasil, v. 51, p. 9–28, 2000. Citado na página 12.

VAZQUEZ, C. M.; NOGUTI, F. C. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. *Recife: VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado na página 22.

APÊNDICE A

Permutação com elementos repetidos

Quantos anagramas existem com a palavra **MATEMATICA**?

A palavra MATEMATICA possui 3 A, 2 M, 2 T, 1 E, 1 I e 1 C.

Como iremos formar um anagrama, devemos reordenar as 10 letras em 10 vagas. Vejamos as tarefas:

Tarefa 01: Escolher, dentre as 10 vagas, duas para preencher com M;

Tarefa 02: Escolher, dentre as vagas restantes ($10-2=8$), três para preencher com A;

Tarefa 03: Escolher, dentre as vagas restantes ($8-3=5$), duas para preencher com T;

Tarefa 04: Escolher, dentre as vagas restantes ($5-2=3$), uma para preencher com E;

Tarefa 05: Escolher, dentre as vagas restantes ($3-1=2$), uma para preencher com I;

Tarefa 06: Escolher, dentre as vagas restantes ($2-1=1$), uma para preencher com C;

As tarefas acima são realizadas de $C(10,2)$, $C(8,3)$, $C(5,2)$, 3, 2, 1, modos, respectivamente.

Pelo Princípio Multiplicativo temos $C(10,2)\times C(8,3)\times C(5,2)\times 3\times 2\times 1$ anagramas.

De modo geral temos:

Seja n o número de objetos, com $n=a+b+c+d+...+k$.

Então,

$$\frac{n!}{a!\times b!\times c!\times d!\times ...\times k!}$$

.

APÊNDICE B

Permutações Circulares

De quantas maneiras n pessoas podem formar uma roda de ciranda?

A resposta desse problema será o número de permutações circulares de n objetos distintos. A representação simbólica desse valor por $PC(n)$.

Vamos à resolução:

Consideremos por exemplo $n = 4$ (A, B, C e D).

Temos então 4 objetos e 4 vagas.

À primeira vista, basta escolher uma ordem para os quatro objetos, o que poderia ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos. Porém, as rodas $ABCD$ é idêntica a $CDAB$.

Perceba que o importante é a posição relativa dos objetos, ou seja, ao girar a roda $ABCD$ de certa maneira teremos $CDAB$. Logo, cada roda de ciranda poderá ser girada 4 vezes, logo, o resultado procurado será dado por $\frac{24}{4} = 6$.

Generalizando e respondendo o problema inicial temos:

O número de maneiras de colocar n objetos em n vagas em torno de um círculo é

$$PC(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...1}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$