MARCO ANTONIO SINHORELLI EIRAS

UMA VISÃO ANTECIPADA DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

NOVEMBRO DE 2014

MARCO ANTONIO SINHORELLI EIRAS

UMA VISÃO ANTECIPADA DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2014

MARCO ANTONIO SINHORELLI EIRAS

UMA VISÃO ANTECIPADA DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 28 de Novembro de 2014.

Profª. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IF Fluminense

Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família, em agradecimento pela compreensão da minha ausência, e em especial aos meus filhos Lucca e Luísa, para que eles percebam a importância de se estudar sempre.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a DEUS, que me colocou diante dos desafios e das pessoas certas e erradas nos momentos oportunos, permitindo que eu crescesse como Homem.

Em segundo lugar, a minha família, que sempre me apoiou nos estudos e compreendeu meus momentos de ausência.

Agradeço aos meus amigos de turma, professores competentes que sabem muito bem o significado de solidariedade.

E agradeço por fim, mas não com menor importância, ao Professor Rigoberto G. S. de Castro que muito contribuiu e orientou na realização deste meu trabalho.

Epígrafe

"Quanto mais barrenta for a estrada, mais fácil deixar nossas marcas."
(Anônimo).

Resumo

Este trabalho visa contribuir para que conhecimentos relativos a visão espacial do aluno sejam desenvolvidos. No primeiro ano do 2º segmento do ensino fundamental, o aluno é apresentado a alguns sólidos geométricos e nos anos seguintes, esta noção de três dimensões é quase posta de lado, dando-se maior importância ao conteúdo algébrico matemático. Neste trabalho são propostas atividades que visam não só diagnosticar com que saber matemático um aluno inicia o Ensino Médio, mas também exercícios que proporcionem um avanço neste conhecimento do espaço tridimensional. Estes exercícios proporcionam ao aluno: noção de localização plana e espacial, lateralidade, simetria, aprendizagem do conceito de superfícies de revolução, quando este aluno treina sua visão espacial ao girar elementos matemáticos que, a partir do plano, produzem figuras tridimensionais. Tal bateria de exercícios diagnósticos foi aplicada a um grupo de alunos de ensino médio noturno regular de uma escola pública, bem como a uma aluna bem singular de 9º ano de escolaridade, que já apresenta conhecimentos matemáticos avançados e cujo interesse por esta disciplina é tão motivador para todos nós docentes.Os resultados analisados confirmam que existe realmente uma grande lacuna a ser preenchida e que, este trabalho, pode vir a contribuir não só para um ajuste, mas também para acrescentar esta noção espacial necessária ao ambiente matemático e ao cotidiano do aluno.

Palavras-chaves: Ensino Médio, visão espacial, espaço tridimensional,superfícies de revolução.

Abstract

This work is an attempt to contribute to the development of pupils' relative knowledge of spatial vision. In the first year of Fundamental Education level 2, students are introduced to some geometric solids however the concept of three dimensions is relinquished during the following years of schooling, prioritizing Algebraic-Mathematical contents instead. This paper proposes activities which aim not only to diagnose the kind of Mathematical knowledge students bring when they start Upper Secondary School but also it presents activities which develop the notions of three dimensional spaces. The activities foster the perception of plane and spatial localization, laterality and symmetry as well as they help the students to learn the concept of surface revolution as the pupils train their spatial vision rotating Mathematical elements which create three-dimensional figures from a plane. This specific diagnostic activity was carried out in a group of a nightly Upper Secondary School students from a public school as well as applied to an outstanding student graduating from Fundamental Education level 2 who presents an advanced Mathematical knowledge and whose interest in Mathematics is an incentive for us, teachers..The analysis results confirm there is a huge gap which should be filled in and this work can adjust it and also implement a spatial notion absolutely necessary and essential to the Mathematical environment and to the pupils' routine.

Key-words: knowledge, spatial vision, three dimensional space, revolution surfaces.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ((LDB, 1996)Art.35, incisos I a IV), "o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conceitos adquiridos durante o ensino fundamental, no intuito de garantir a continuidade dos estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.".

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1999) tem-se que a Geometria deve proporcionar ao aluno a leitura e a interpretação do espaço, que está a sua volta. Segundo esses parâmetros:

> [...] ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.((PCN, 1999), p. 122)

Hoje em dia, percebe-se que os alunos têm uma enorme dificuldade em interpretar os problemas matemáticos. E, além disso, quando eles conseguem vislumbrar uma saída, não conseguem traduzir aquilo que foi interpretado em uma linguagem matemática simples e objetiva. Mas o que dizer quando o tema abordado na situação/problema sequer foi visto em sala de aula? Fica impossível.

Na maioria das vezes, nas escolas públicas, o conteúdo proposto nas coleções didáticas escolhidas pelos profissionais da educação não é completamente estudado ao longo do ano letivo. Diversas situações contribuem para isto: poucas aulas semanais, a falta de conhecimento prévio dos conteúdos pré-condicionantes ao tópico em questão (a famosa "falta de base"), o próprio rendimento escolar da turma no que diz respeito à velocidade de absorção dos temas propostos, entre outras. Não é interessante nos aprofundarmos nestas questões...

Além disso, acredita-se existir ainda uma aprendizagem, no que se refere à Geometria, puramente cultural, que consiste somente na obtenção dos nomes e propriedades dos objetos geométricos. Neste sentido, falta, por parte do ensino, um maior estudo e incentivo, para o aluno adquirir o domínio do objeto e suas relações com o espaço.

> (...) estamos convencidos de que há grande quantidade de adultos que, através de sua interação extra-escolar com o ambiente, não conseguiram desenvolver uma concepção do espaço que lhes permitia um controle adequado de suas relações espaciais, controle que lhes possibilite orientar autonomamente seus deslocamentos em âmbitos de determinada magnitude. ((PARRA; SAIZ, 1996), p.82)

Mas, o que fica claro é que o conteúdo matemático a ser visto é muito extenso. Somando-se a isto temos as diversidades regionais e locais dos estudantes espalhados por este enorme e desigual país, deixando lacunas em alguns tópicos matemáticos. E, em muitas vezes, os conteúdos correspondentes a essas lacunas são exigidos nos exames, onde o principal deles é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Nesta dissertação, proponho a antecipação do estudo do espaço tridimensional, não com o objetivo de construção de funções matemáticas complexas e visualização de figuras/formas espaciais diversas provenientes destas funções complexas. Proponho apenas um primeiro contato com esta visão espacial, que é mais exigida e detalhada somente no estudo de sólidos geométricos espaciais, geralmente abordados no 2º ou 3º anos do ensino médio.

A idéia é de consolidar o conceito e aplicação do plano cartesiano bidimensional e apresentar o plano cartesiano tridimensional. Em ambos os espaços, localizar pontos, segmentos de reta e retas, mas também proporcionar uma visão mais profunda ao introduzir sólidos de revolução gerados a partir da rotação de uma curva ao redor dos eixos ordenados.

Para alcançar os objetivos deste trabalho, eu os organizei em capítulos da seguinte forma:

O capítulo 1 contém uma breve história sobre o espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$. Como e quando surgiu, quem o elaborou e suas curiosidades. Também comenta sobre espaço multidimensional.

O capítulo 2 traz conceitos de espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$ como: sua construção, localização de pontos, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, baricentro de um triângulo, condição de alinhamento de três pontos, um conceito de matrizes (em especial, quadradas de ordem 2 e ordem 3), determinante, teorema de Laplace e o estudo da reta no $\mathbb{R}^2$, reforçando ou ampliando o conhecimento.

No capítulo 3 é feito um estudo do espaço tridimensional, iniciando-se com sua construção (tendo como base a construção do espaço bidimensional), exercitando a visão espacial com a localização de pontos e usando-se as equações paramétricas para a visualização de segmentos e retas. Neste capítulo também é apresentada a questão avaliada no ENEM 2013 e que despertou o interesse na elaboração deste trabalho.

O capítulo 4 traz atividades para a sala de aula, nas quais são apresentadas várias questões que visam não só avaliar o conhecimento prévio do aluno, mas também permitir que este desenvolva, passo a passo, sua noção espacial por meio de pontos, segmentos e retas, na atividade extra para consolidar conteúdos.

O capítulo 5 refere-se à conclusão.

Capítulo 1

Breve Histórico

Este capítulo foi elaborado com trechos do livro A História da Matemática, de Anne Rooney, pois o autor apresenta de forma simples e clara diversas passagens históricas sobre temas matemáticos. É uma obra de fácil aquisição e de leitura extremamente prazerosa. Muito bem organizada e com muitas ilustrações que facilitam e enriquecem sua leitura.

A partir da primeira metade do século XVII havia mais comunicação entre os matemáticos do que houve em qualquer época desde a Academia de Platão. Em muitos países, sociedades matemáticas prosperaram juntamente com outras sociedades letradas que estavam aparecendo. Na Inglaterra, a sociedade matemática tinha o nome atrativo de "Colégio Invisível". Na França, a comunicação foi ainda mais facilitada pelo Padre Marin Mersenne, que se correspondia com centenas de matemáticos, cientistas e outras pessoas cultas, agindo como um canalizador de conhecimento e uma espécie de networking guru. Isto significa que havia menos evidências de matemáticos desenvolvendo trabalhos individualmente que depois eram perdidos e não tinham impacto sobre os outros. Mersenne tentava resolver os conflitos da melhor maneira, mas pelo menos ninguém tinha dúvidas sobre o que qualquer outro estava fazendo. Por um processo de crescimento estável, foram lançados os fundamentos da matemática moderna. Dois homens, ambos franceses, iriam desempenhar um papel de destaque neste processo.

Nenhuma dessas duas figuras importantes da época era matemático profissional. René Descartes era um pequeno descendente da nobreza francesa que era mais famoso como filósofo do que como matemático. A explanação de seu sistema de geometria analítica está em um apêndice de seu texto filosófico, *Discourse on Method*, como uma demonstração de como ele usou a razão para chegar aos seus resultados. Pierre de Fermat era um advogado e depois um conselheiro que exercitava seu interesse pela matemática no seu tempo livre. Sua habilidade era comparável à de Descartes.

Descartes achava que nem a geometria nem a álgebra eram inteiramente satisfatórias, e procurava tirar o melhor de ambas. Vendo os valores em suas equações como segmentos de linha, Descartes evitava quaisquer dificuldades conceituais ao trabalhar com equações de ordem superior e tratar com equações que não tinham expressões da mesma ordem em cada lado. Por exemplo, os gregos não podiam aceitar uma equação do tipo $x^2 + bx = a$ porque as duas partes do lado esquerdo são consideradas como áreas e aquela do lado direito é considerada uma linha; uma área e uma linha não podem ser consideradas iguais.

Descartes refinou a noção de Viète usando letras do início do alfabeto para valores conhecidos (a,b,c) e letras do fim do alfabeto para incógnitas (x,y,z). Ele usou números em posição mais elevada (sobrescrito) para indicar potências e usou símbolos para os operadores aritméticos que ainda utilizamos. Somente seu símbolo para igualdade era diferente porque ele não adotava o par de linhas paralelas de Robert Recorde.

Descartes propôs que a posição de um ponto em um plano podia ser identificada pela referência a dois eixos que se interceptam, usados como guias de medidas, desenvolvendo assim o sistema de coordenadas que agora é conhecido como sistema cartesiano. Por toda a sua familiaridade da notação algébrica, as representações gráficas de Descartes das equações não se parecem todas com as nossas, porque ele nunca usou valores negativos para x em seus gráficos. A forma familiar de um gráfico dividido em quadrantes por eixos que se cruzam em $(0, 0)$ foi introduzida mais tarde por Newton. Além disso, seus eixos não eram sempre definidos em ângulos retos um com o outro. Descartes acreditava que qualquer expressão polinomial em x e y poderia ser expressa como uma curva e estudada usando geometria analítica.

Ao mesmo tempo que Descartes estava formulando sua geometria analítica, outro francês, Pierre de Fermat, estava fazendo quase a mesma coisa. Ambos chegaram a resultados semelhantes, de forma independente. Fermat insistia que qualquer relação entre x e y definia uma curva. Ele reformulou o trabalho de Apolônio em termos algébricos, desejando restaurar parte do trabalho perdido de Apolônio. Tanto descartes quanto Fermat propuseram o uso de um terceiro eixo para modelar curvas em três dimensões, mas isso não avançou até o século XVII.

Nem Descartes nem Fermat pensaram em publicar seus trabalhos amplamente. Descartes publicou os seus em francês, de forma que mais pessoas pudessem entendê-los, mas ele não os explicou com muitos detalhes e grande parte do trabalho era impenetrável a muitos dos leitores. Não está completamente claro se Descartes queria excluir pessoas que ele considerava não suficientemente sérias ou se ele queria proporcionar aos seus leitores o prazer da descoberta fazendo alguns saltos intelectuais e deixando que eles próprios fizessem as descobertas, mas de qualquer forma, isso pouco ajudou na disseminação de suas idéias.

Fermat foi um pouco melhor do que Descartes na promoção de seu trabalho, mesmo sendo um recluso assumido que recusava publicar. A disseminação de suas idéias durante toda a sua vida foi quase exclusivamente através da mediação de Marin Mersenne. Sem dúvida, Fermat publicou apenas uma de suas descobertas, uma retificação meio obscura da parábola semicúbica (um método para descobrir o comprimento de uma linha curva).

Descartes juntou a álgebra com a geometria definindo um ponto através de coordenadas e usando isso para traçar gráficos a partir de equações. Fazendo isso, ele proporcionou os meios para maior desenvolvimento da geometria algébrica em novas e incontáveis dimensões.

Qualquer forma bidimensional pode ser representada atribuindo-se coordenadas a seus vértices (cantos), cada um representado por dois números. O princípio pode ser ampliado para três dimensões facilmente - dando três coordenadas definimos um ponto no espaço tridimensional. É fácil relacionar as diferenças entre os pontos também. Em um sistema bidimensional, compontos (a, b) e (c, d) podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os dois pontos. O comprimento dessa linha é então $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$. Podemos aplicar a mesma fórmula para três dimensões: a distância entre os pontos (a, b, c) e (d, e, f) é $\sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}$. O que nos impede de levar este conceito mais adiante tratando com distâncias em 4 dimensões, definidas por 4 coordenadas? Ou 26 dimensões? Ou 4.519 dimensões? Podemos ter uma objeção conceitual porque não podemos visualizar um espaço quadridimensional, e muito menos com 4.519 dimensões, mas os matemáticos não estão preocupados se estamos ou não à vontade com o conceito.

Qual é o uso para o espaço multidimensional? Se pudermos retroceder a partir dos problemas de tentar visualizá-lo como um espaço do mundo real, o espaço teórico com muitas dimensões é realmente muito útil. Frequentemente traçamos gráficos que plotam duas variáveis - velocidade em relação ao tempo, por exemplo, ou temperatura em relação à taxa de crescimento. Há muitas situações do mundo real nas quais são envolvidas muito mais do que duas variáveis. Se formos acompanhar as condições climáticas, o desempenho de empresas em um mercado de ações, as taxas de mortalidade de uma população, há muitas variáveis para serem levadas em conta. Alocando valores talvez para sete, oito ou nove variáveis para cada ponto de dados, podemos imaginar, se não visualizar, um mapa em sete, oito ou nove dimensões a partir do qual podemos fazer medidas e previsões. Não é necessário desenhar o mapa - a álgebra pode se encarregar dos cálculos sem ele -, mas o espaço conceitual foi sugerido no qual existe o gráfico ((ROONEY, 2012), p.140-145).

Capítulo 2

O Espaço Bidimensional $\mathbb{R}^2$

Uma reta se diz *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto B está à direita do ponto A (portanto que o ponto A está à esquerda de B) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

Um *eixo* é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado de *origem*.

Todo eixo E pode ser posto, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\Re$ dos números reais. À origem O do eixo, faz-se corresponder ao número zero. A cada ponto X de E à direita de O corresponde um número real positivo x, a saber, a distância $d(O, X)$ de X à origem O. Aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem.

Se o ponto X do eixo E corresponde, da maneira acima indicada, ao número real x, diz-se que x é a *coordenada* do ponto X (Figura 1).

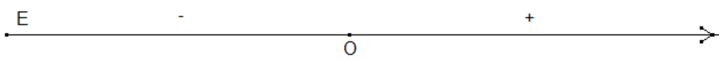


Figura 1 – Eixo orientado

Fonte: ((LIMA, 1992), p.4)

Indica-se com $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

Ou seja, podemos representar por $\mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x \in \Re \text{ e } y \in \Re\}$$

Onde, por exemplo, são elementos de $\mathbb{R}^2$ os pares $(3, 4)$, $(-2, 1)$, $(0, -3)$, etc.

Um *sistema de eixos ortogonais* num plano Π é um par de eixos OX e OY, tomados em Π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O. Diz-se que o eixo OX é *horizontal* e o eixo OY é *vertical*.

Um plano Π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$. Dado o ponto P do plano, baixamos por ele paralelas aos eixos OY e OX. Essas paralelas cortam os eixos em pontos cujas coordenadas são x e y respectivamente. Ao ponto P do plano Π faz-se então corresponder o par ordenado *(x,y)* $\in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde o ponto $P \in \Pi$, interseção da paralela a OY traçada pelo ponto de coordenada x com a paralela a OX traçada a partir do ponto de OY cuja coordenada é y. Os números x e y chamam-se as *coordenadas* (cartesianas) do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado: x é a *abscissa* e y é a *ordenada* de P.

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões, chamadas de *quadrantes* (Figura 2) . Tem-se o primeiro quadrante, formado pelos pontos que têm ambas as coordenadas positivas. No segundo quadrante, a abscissa é negativa e a ordenada é positiva. No terceiro, abscissa e ordenada são ambas negativas. No quarto quadrante, os pontos têm abscissa positiva e ordenada negativa.

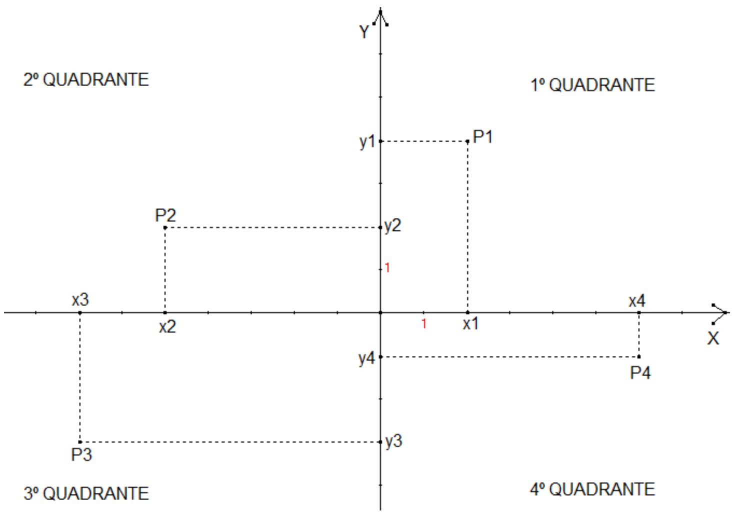


Figura 2 – Coordenadas e Quadrantes no plano

Fonte:((LIMA, 1992), p. 8)

Evidentemente, os pontos do eixo OX das abscissas têm coordenadas $(x, 0)$ e no eixo das ordenadas OY os pontos são da forma $(0, y)$. O ponto O, origem dos eixos, tem coordenadas $(0, 0)$.

2.1 Localização de pontos no $\mathbb{R}^2$

Para localizar um ponto no plano Cartesiano, devemos lembrar que no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo número representa a ordenada do ponto.

Exemplo 2.1 *Localizar os pontos a seguir no plano Cartesiano apresentado na (Figura 3) : A(1,2); B(-3,3); C(-4,-2); D(5,-3); E(3,0) e F(0,4).*

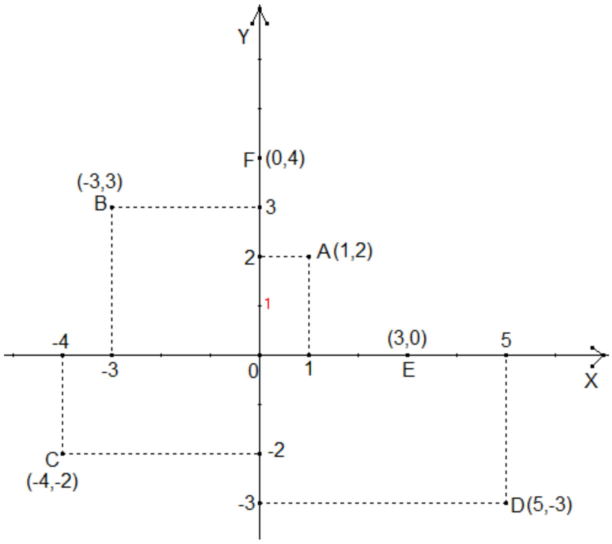


Figura 3 – Pontos e Coordenadas

Fonte: Elaboração própria

Observação 2.1 *Os eixos x e y dividem o plano Cartesiano em quetro regiões angulares chamadas quadrantes. Assim, no exemplo anterior teremos:*

$A \in 1quadrante \iff x_A > 0 \text{ e } y_A > 0$

$B \in 2quadrante \iff x_B < 0 \text{ e } y_B > 0$

$C \in 3quadrante \iff x_C < 0 \text{ e } y_C < 0$

$D \in 4quadrante \iff x_D > 0 \text{ e } y_D < 0$

O ponto E está localizado sobre o eixo das abscissas e o ponto F está localizado sobre o eixo das ordenadas. Por isso, ambos os pontos não pertencem a nenhum quadrante em especial.

2.2 Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ conforme (Figura 4).

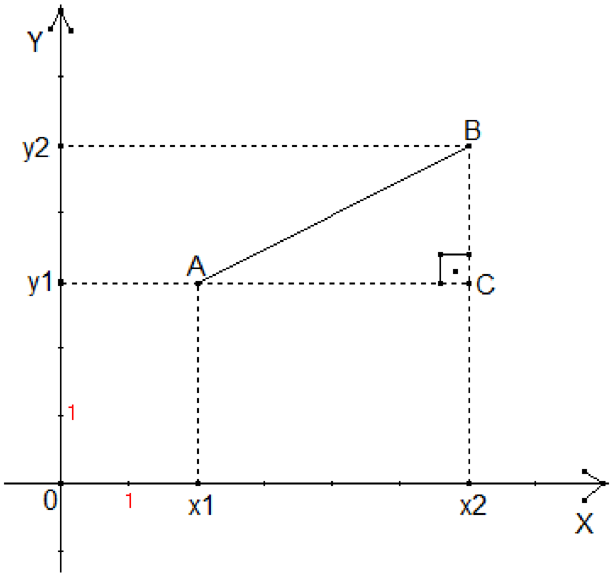


Figura 4 – Distância Entre Dois Pontos

Fonte:((MACHADO, 1982), p. 19)

Calculemos a distância d entre eles aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC. Assim, teremos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.2 *Calcular a distância entre os pontos A(-3,5) e B(6,-7):*

Solução

$d = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (-7 - 5)^2}$

$d = \sqrt{(9)^2 + (-12)^2}$

$d = \sqrt{81 + 144}$

$d = \sqrt{225}$

$d = 25$

Logo, a distância entre os pontos A e B é de 25 unidades.

Observação 2.2 *Caso os pontos A e B possuam os mesmos valores para a abscissa, ou seja, são pontos pertencentes a uma mesma vertical, calcularemos a distância entre eles simplesmente fazendo o módulo da diferença entre suas ordenadas. Assim:*

$$d = |y_2 - y_1| \tag{2.2}$$

Observação 2.3 *Caso os pontos A e B possuam os mesmos valores para a ordenada, ou seja, são pontos pertencentes a uma mesma horizontal, calcularemos a distância entre eles simplesmente fazendo o módulo da diferença entre suas abscissas. Assim:*

$$d - |x_2 - x_1| \tag{2.3}$$

2.3 Ponto Médio de Um Segmento

Definimos como ponto médio de um segmento de reta o ponto que divide este segmento em, exatamente, dois outros segmentos de mesmo comprimento.

Ao determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento de extremidades $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, faremos (Figura 5):

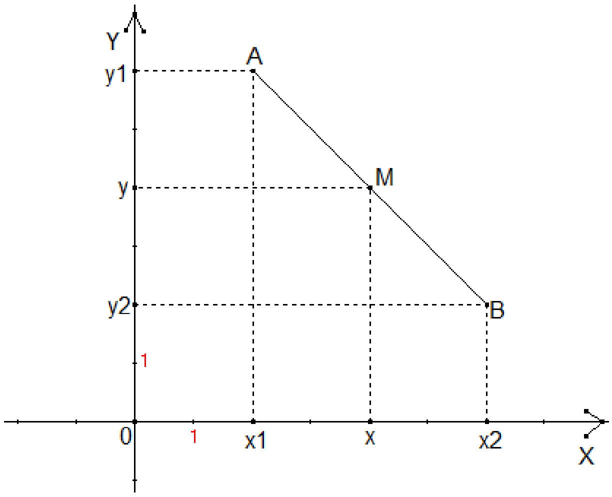


Figura 5 – Ponto Médio de um Segmento

Fonte: ((MACHADO, 1982), p. 10)

Solução

$$M = \frac{A+B}{2}$$

ou seja:

$$M = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \tag{2.4}$$

Exemplo 2.3 *Dar o ponto médio do segmento de extremidades A=(3,7) e B=(11,-1).*
Solução

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3,7) + (11,-1)}{2} = \left(\frac{3+11}{2}, \frac{7-1}{2} \right) = (7,3)$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio M são (7,3).

2.4 Baricentro do triângulo ABC

Definimos como baricentro G o ponto de intersecção das medianas do triângulo. O ponto G divide cada mediana na razão de 2 para 1, no sentido do vértice para o ponto médio do lado oposto. Sendo P o ponto médio do lado BC temos (Figura 6):

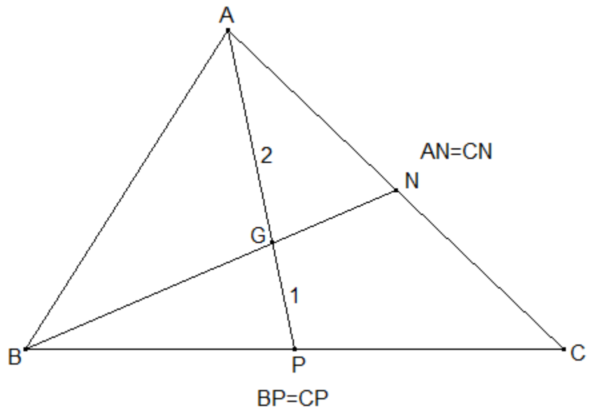


Figura 6 – Baricentro de um Triângulo

Fonte:((MACHADO, 1982), p. 12)

Assim faremos:

$G = (\frac{A+B+C}{3})$

Logo:

$$G = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)}{3} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \quad (2.5)$$

Exemplo 2.4 *Obter o baricentro do triângulo ABC quando* $A(0,0), B(9,0)$ *e* $C(0,6)$*:*
Solução

$$G = (\frac{0+9+0}{3}, \frac{0+0+6}{3}) = (3,2)$$

Portanto, as coordenadas do baricentro de ABC são G(3,2).

2.5 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Previamente, a idéia de matriz precisa ser exposta.

A idéia geral de matriz do tipo m x n é a de um quadro retangular com mn elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Na grande maioria das vezes, esses elementos são números. Matrizes são frequentemente utilizadas para organizar dados.

Portanto, definindo matriz:

Uma matriz m x n é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz M é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i - *ésima* linha com a j - *ésima* coluna.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Diz-se que uma matriz é *quadrada* quando tem o mesmo número de linhas e colunas.

Observação 2.4 *Apenas serão vistas matrizes quadradas de ordem 2 e de ordem 3 em particular, que são objetos de estudo neste trabalho.*
Para matrizes de qualquer tipo, maiores definições, conceitos, operações, ver livro Fundamentos de Matemática Elementar - Gelson Iezzi - Atual Editora

Exemplo 2.5 *Seja A uma matriz quadrada d ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes quadradas A e B do exemplo anterior, podemos definir uma função que associa cada matriz quadrada à um número real. Este número real será chamado de *determinante* associado à matriz dada.

O cálculo deste determinante depende da ordem da matriz fornecida, devendo esta ser quadrada.

Definição 2.1 *Dada A uma matriz quadrada de ordem 2, pode-se calcular o determinante associado à esta matriz realizando as seguintes operações:*

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *então chamaremos de determinante:*

$$det(A) = \left|A\right| \quad = \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{2.6}$$

Definição 2.2 *Dada B uma matriz quadrada de ordem 3, calcula-se o determinante associado à esta matriz efetuando as operações a seguir:*

Se $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ *então chamaremos de determinante:*

$$det(B) = det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = b_{11}det \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$= b_{11}det \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= b_{11}det \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13}det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

No cálculo descrito acima foi utilizado o Teorema de Laplace, que pode ser assim descrito:

Definição 2.3 *Teorema de Laplace:*

O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores (IEZZI, 1985).

Observação 2.5 *Lembrando que o cofator é calculado como sendo o número $(-1)^{i+j}.D_{ij}$, sendo D_{ij} o determinante da matriz que se obtém, suprimindo a linha i e a coluna j de M.*

Vamos reforçar estes conceitos por meio dos seguintes exemplos:

Exemplo 2.6 *Calcule o valor do determinante associado a cada matriz abaixo:*
$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *Solução:*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$det(A) = \left|A\right|$
$det(A) = -3.7 \; - \; (-5).2$
$det(A) = \; -21 + 10$
$det(A) = -11$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = \left|B\right|$$

$$det(B) = -1det\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 1det\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 2det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = -1(-3.3 - 4.1) - 1(2.3 - 5.(-4)) + 2(2.1 - 5.(-3)) =$$

$$det(B) = -1(-13) - 1(26) + 2(17) =$$

$$det(B) = 13 - 26 + 34$$

$$det(B) = 47 - 26 =$$

$$det(B) = 21$$

Obviamente, três pontos estarão alinhados se pertencerem a uma mesma reta. Ou seja, dizemos que os pontos são colineares.

Mas, como identificar que os pontos são colineares?

Pode-se dizer que determinante é um número real resultante de um conjunto de operações básicas matemáticas. No nosso caso, diremos que os pontos A, B e C são colineares se o determinante resultante do cálculo com as coordenadas destes pontos for nulo. Ou seja, quando o determinante der zero, os pontos serão colineares.

Caso contrário, se o determinante não for nulo, teremos três pontos não-colineares. Em outras palavras, os pontos A, B e C serão os vértices de um triângulo. Observe o exemplo (Figura 7):

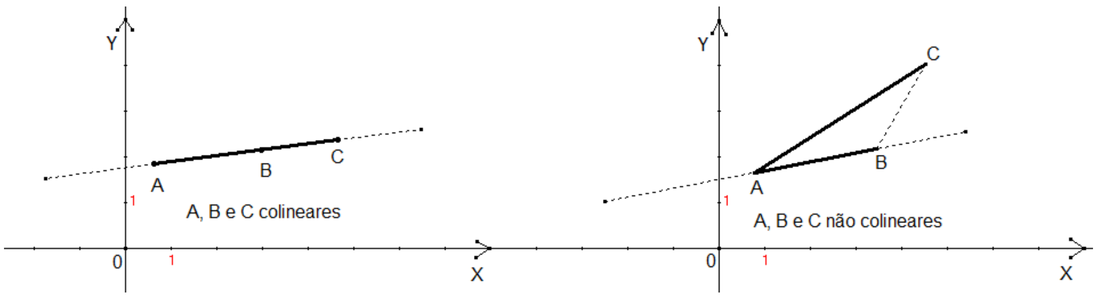


Figura 7 – Pontos Colineares e Não-colineares

Fonte: Elaboração própria

Formalmente, podemos dizer:

Três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2.7 *Verifique se os pontos A(-1,1), B(1,3) e C(7,9) são colineares.*
Solução

Criamos o determinante com as coordenadas dos três pontos fornecidos, composto por três linhas e três colunas, sendo que a 3ª coluna é composta de números 1 (Elemento neutro da multiplicação).

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, se o determinante for igual a zero (det=0), os três pontos analisados serão colineares, mas se o determinante for diferente de zero (det$\neq 0$), os pontos formarão um triângulo, pois estarão em desalinho.

Voltando ao nosso exemplo, ao se aplicar o Teorema de Laplace:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -1det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - 1det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + 1det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} =$$

$-1(3-9) - 1(1-7) + 1(9-21) =$

$-1(-6) - 1(-6) + 1(-12) =$

$6 + 6 - 12 =$

$12 - 12 =$

$det = 0$

Portanto, os pontos A, B e C são colineares.

2.6 O Estudo da Reta no $\mathbb{R}^2$

Existem algumas formas diferentes de representar uma reta no plano bidimensional. Uma forma será dita "especial"pois a veremos novamente quando estudarmos o $\mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional). Será dado um destaque nesta forma "especial".

2.6.1 Equação Geral da Reta

"A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ onde a,b,c são números reais, $a \neq 0$, ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r".((IEZZI, 1985), p. 25)

Em outras palavras, sabe-se que é possível traçar uma única reta que passa por dois pontos dados A e B. Existe um outro ponto P(x,y), genérico, também colinear aos pontos A e B. Assim, se estes três pontos estão alinhados, o determinante formado por eles deve ter valor nulo.

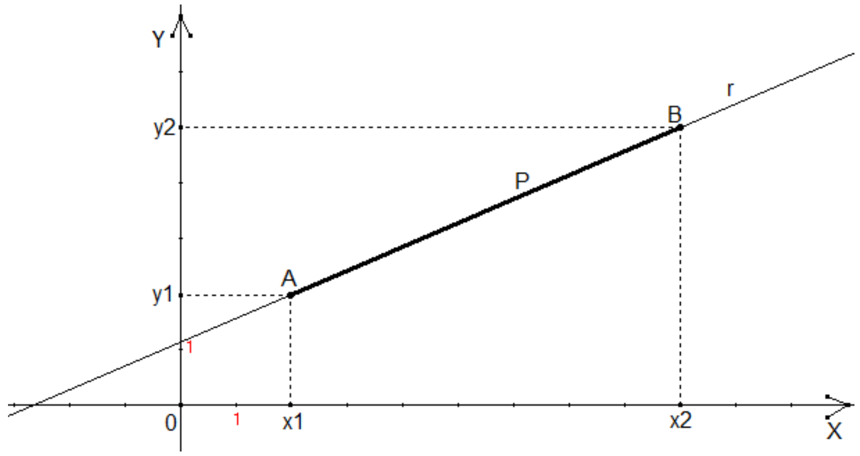


Figura 8 – Reta r passando por A e B

Fonte:((IEZZI, 1985), p. 25)

Assim, de acordo com as coordenadas dos pontos observadas no gráfico (Figura 8), teremos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x_1 det \begin{bmatrix} y_2 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} - y_1 det \begin{bmatrix} x_2 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} + 1det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{bmatrix} =$$

$x(y_2 - y) - y_1(x_2 - x) + 1(x_2y - xy_2) =$

$x_1y_2 - x_1y - x_2y_1 + xy_1 + x_2y - xy_2 =$

$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 =$

Fazendo $a = (y_1 - y_2)$, $b = (x_2 - x_1)$ *e* $c = (x_1y_2 - x_2y_1)$, teremos:

Todo ponto P(x,y)∈r deve verificar a equação:

$$ax + by + c = 0 \tag{2.9}$$

Vejamos este exemplo:

Exemplo 2.8 *Encontre a equação geral da reta que passa pelos pontos A(4,3) e B(0,7).*
Solução

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 4det \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} - 3det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} + 1det \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ x & y \end{bmatrix} =$$

$4(7 - y) - 3(0 - x) + 1(0 - 7x) =$

$28 - 4y + 3x - 7x =$

$-4y - 4x + 28 =$ *ou dividindo-se por (-4)*

$y + x - 7 = 0$

Logo, $4x + 4y - 28 = 0$ *ou* $x + y - 7 = 0$

A equação geral da reta que passa por A e B é: $x + y - 7 = 0$

2.6.2 Equação Reduzida da Reta

Dada a equação geral da reta r, $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos:

$by = -ax - c \Rightarrow$ y$= \left(-\dfrac{a}{b} \right) x + \left(-\dfrac{c}{b} \right) \Rightarrow y = mx + q$

onde $m = \left(-\dfrac{a}{b} \right)$ e $q = \left(-\dfrac{c}{b} \right)$

Em outras palavras, calculamos sua equação geral e ao isolarmos y no 1º membro da equação, encontramos a equação reduzida pretendida.

Portanto, a equação reduzida da reta r é:

$$y = mx + q \tag{2.10}$$

Chamamos m de coeficiente angular e q de coeficiente linear. Estudaremos futuramente com mais detalhes.

Exemplo 2.9 *Se uma reta r passa por A(-2,-3) e B(1,3) qual é sua equação reduzida?*

Solução

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = -2det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} + 3det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} + 1det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & y \end{bmatrix} =$$

$-2(3 - y) + 3(1 - x) + 1(y - 3x) =$

$-6 + 2y + 3 - 3x + y - 3x =$

$-3 + 3y - 6x =$ *dividindo-se por (3)*

$y - 2x - 1 = 0$

Isolando o y no 1º membro, teremos:

$y = 2x + 1$
Portanto, a equação reduzida da reta r é: $y = 2x + 1$.

2.6.3 Equação Segmentária da Reta

Considere uma reta r que intercepta os eixos cartesianos nos pontos Q(0,q) e P(p,0), distintos (Figura 9).

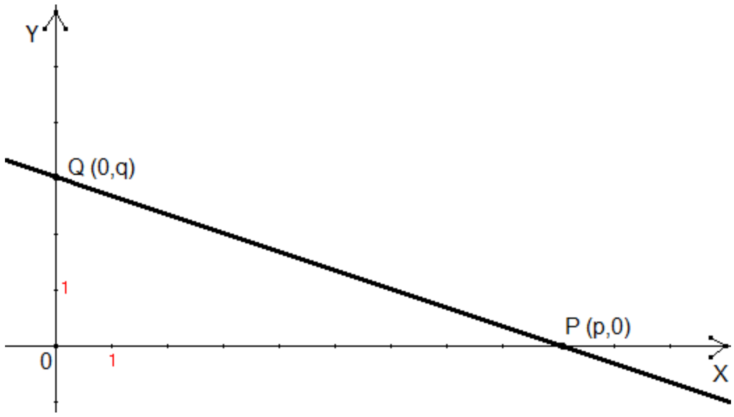


Figura 9 – Reta passando por P e Q

Fonte: ((IEZZI, 1985), p. 46)

A equação dessa reta é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} - qdet \begin{bmatrix} p & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} + 1det \begin{bmatrix} p & 0 \\ x & y \end{bmatrix} =$$

$-q(p - x) + 1(py) =$
$-pq + xq + py =$
Dividindo-se tudo por (pq), teremos:

$$\left(\frac{x}{p}\right) + \left(\frac{y}{q}\right) = 1$$

Logo, a equação segmentária da reta r é:

$$\left(\frac{x}{p}\right) + \left(\frac{y}{q}\right) = 1 \tag{2.11}$$

Exemplo 2.10 *Obter a equação segmentária da reta que intercepta os eixos em P(2,0) e Q(0,-3).*
Solução
Sabendo que a fórmula para a equação segmentária de uma reta é dada por:

$\left(\dfrac{x}{p}\right) + \left(\dfrac{y}{q}\right) = 1$, *onde p é o ponto onde a reta cruza com o eixo das abscissas e q é o ponto onde a reta cruza com o eixo das ordenadas, teremos:*
$\left(\dfrac{x}{2}\right) - \left(\dfrac{y}{3}\right) = 1$

A equação segmentária é obtida a partir da equação geral da reta da seguinte maneira:
$ax+by+c = 0 \Rightarrow$ ax+by = -c $\Rightarrow$-$\left(\dfrac{a}{c}\right)x$-$\left(\dfrac{b}{c}\right)y = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{-\frac{c}{a}}\right)+\left(\dfrac{y}{-\frac{c}{b}}\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{p}\right)+\left(\frac{y}{q}\right) = 1$

Exemplo 2.11 *Obtenha a equação segmentária da reta r:* $7x + 11y + 3 = 0$.
Solução
$7x + 11y = -3 \Rightarrow -\left(\frac{7}{3}\right)x$ - $\left(\frac{11}{3}\right)y = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{-\frac{3}{7}}\right) + \left(\dfrac{y}{-\frac{3}{11}}\right) = 1$

2.6.4 Coeficiente Linear e Coeficiente Angular de uma Reta

O primeiro, é mais simples, é o coeficiente linear de uma reta dada. Este coeficiente apenas nos indica onde a reta r intercepta o eixo das ordenadas. Nesta situação, a reta deve estar representada em sua forma reduzida. Veja os exemplos:

Exemplo 2.12 *Determine o coeficiente linear das equações* $r : y = -3x - 7$ *e* $s : y - 2x - 1 = 0$*:*
Solução
A reta r já está representada em sua forma reduzida. Assim:
Lembremos que:
$y = -3x - 7 \Rightarrow y = mx + q \Rightarrow q = -7$
Já a reta s está em sua forma geral. Ao transformar para a forma reduzida, a equação reduzida de s será:
$y = 2x + 1 \Rightarrow y = mx + q \Rightarrow q = +1$

O coeficiente angular de uma reta é o número real m que representa o valor da tangente do ângulo α formado entre o eixo das abscissas e a reta dada. Sempre ao girarmos, a partir do eixo x, no sentido anti-horário. Ou seja:

$$m = tg\alpha \tag{2.12}$$

Podemos efetuar o cálculo de m a partir de três situações a saber:

Observação 2.6

1) Conhecendo-se dois pontos distintos;

2) A partir da equação geral da reta;

3) Quando se conhece a direção da reta dada (por exemplo, sabe-se que a reta é paralela a uma reta dada).

• Vamos calcular o coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos conhecidos e distintos: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 10).

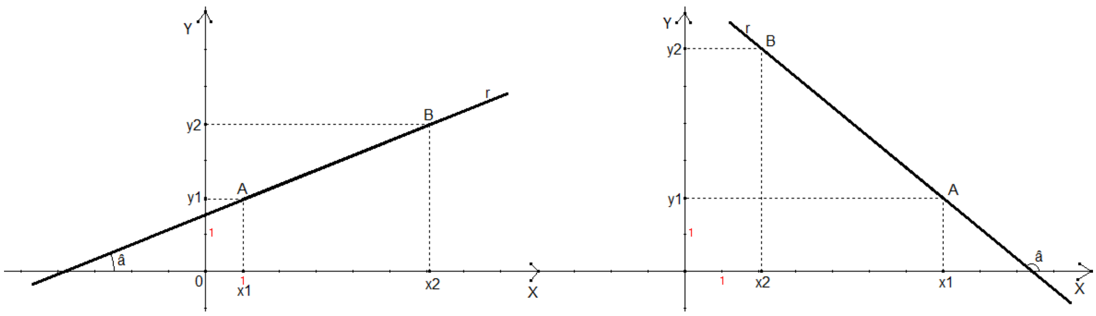


Figura 10 – Coeficiente Angular (â) da reta que passa por A e B

Fonte: Elaboração própria

$$\hat{a} = m = tg\alpha \Rightarrow m = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Notação mais utilizada:

$$m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} \tag{2.13}$$

Onde $\Delta\, y$ e $\Delta\, x$ são, respectivamente, a diferença de ordenadas e a diferença de abscissas entre A e B, calculadas no mesmo sentido.

Exemplo 2.13 *Calcule a declividade da reta que passa por A(-5,4) e B(1,10).*
Solução
$m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{10-4}{1-(-5)} = \frac{6}{6} = 1$

• Vamos calcular o coeficiente angular m de uma reta cuja equação geral é conhecida. Por exemplo, $r : ax + by + c = 0$.
$by = -ax - c \Rightarrow$ y$= \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \Rightarrow y = mx + q$
onde $m = \left(-\frac{a}{b}\right)$

Ou seja, encontramos sua respectiva equação reduzida e destacamos o coeficiente angular m.

Exemplo 2.14 *Dada a equação geral $2x - 7y + 1 = 0$, encontre o seu coeficiente angular m.*
Solução
Transformando a equação geral para a forma equação reduzida encontramos:
$y = \frac{2x}{7} + \frac{1}{7}$
Portanto, $m = \frac{2}{7}$

• Vamos encontrar o coeficiente angular de uma reta conhecendo-se a direção desta. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2.15 *Determine o coeficiente angular da reta r, sabendo-se que esta é a bissetriz dos quadrantes pares.*
Solução
Bem, para a reta r ser a bissetriz dos quadrantes pares, ela, com certeza, forma um ângulo de 135º com o eixo das abscissas, girando-se a partir do eixo x no sentido anti-horário.
Sabemos que bissetriz é a semi-reta que divide o ângulo em duas partes iguais.
Assim, podemos dizer que α = 90º+45º = 135º.
Então: $m = tg135 \Rightarrow m = -1$
Portanto, $m = -1$.

2.6.5 Posições Entre Duas Retas no $\mathbb{R}^2$

Dadas duas retas r e s cujas equações são: $r : a_1x+b_1y+c_1 = 0$ e $s : a_2x+b_2y+c_2 = 0$ elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos comuns às retas, isto é (Figura 11):
• r e s CONCORRENTES $\Longleftrightarrow$ um único ponto comum.
• r e s PARALELAS DISTINTAS $\Longleftrightarrow$ nenhum ponto comum.
• r e s COINCIDENTES $\Longleftrightarrow$ infinitos pontos comuns.

Resumidamente, teríamos:
• r e s CONCORRENTES $\Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
• r e s PARALELAS DISTINTAS $\Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
• r e s COINCIDENTES $\Longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

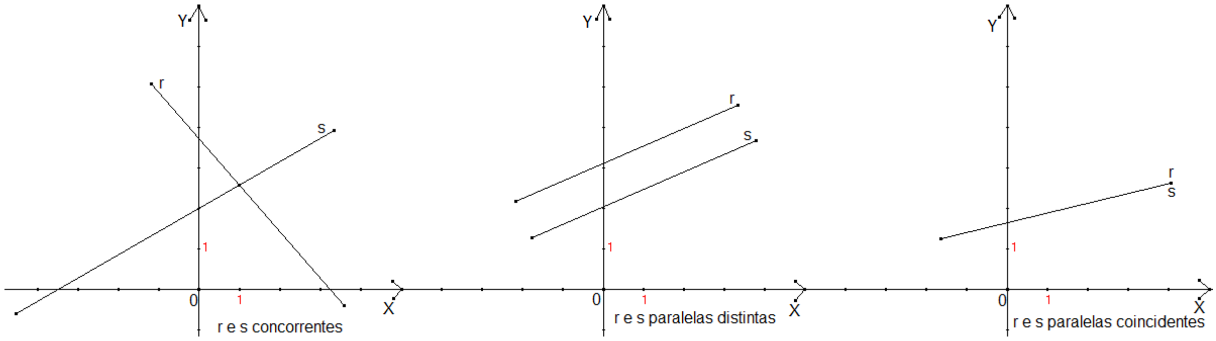


Figura 11 – Posições Relativas de Duas Retas

Fonte: Elaboração própria

Exemplo 2.16 *Definir o posicionamento das retas* $r : x+2y+3 = 0$ *e* $s : 3x+6y+1 = 0$ *:*
Solução
Como temos $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{3}{1}$
Assim, de acordo com a teoria apresentada acima, as retas r e s são PARALELAS DISTINTAS.

Observação 2.7 *Podemos classificar duas retas como paralelas apenas analisando os seus coeficientes angulares (m). Se as retas possuírem o mesmo coeficiente angular, podemos dizer que as retas são paralelas.*

$$m_r \;=\; m_s \tag{2.14}$$

Exemplo 2.17 *Dadas as retas* $r : y \;=\; 3x-4$ *e* $s : 2y-6x+10 = 0$ *, determine a posição relativa entre elas.*
Solução
Calculando ambos os coeficientes angulares, encontramos:
$m_r \;=\; 3$
$m_s \;=\; 3$ *pois a equação reduzida de s é:* $y \;=\; 3x-10$
Logo, teremos $m_r \;=\; m_s$ *e, consequentemente, r e s são paralelas distintas.*

Observação 2.8 *Podemos ter duas retas concorrentes numa situação especial. A situação destas retas serem perpendiculares entre si. Nesta situação, o coeficiente angular de uma reta será o simétrico do inverso do coeficiente angular da outra reta. Observe o exemplo:*

$$m_r \;=\; -\frac{1}{m_s} \quad ou \quad m_r.m_s \;=\; -1 \tag{2.15}$$

Exemplo 2.18 *Dadas as retas* $r : y = 5x - 2$ *e* $s : -\dfrac{x}{5} + 1$ *, determine a posição relativa entre elas.*
Solução
Calculando os coeficientes angulares de ambas as retas, teremos:
$m_r = 5$
$m_s = -\frac{1}{5}$
Portanto, teremos $m_r = -\frac{1}{m_s}$ *ou* $m_r.m_s = -1$

2.6.6 Equação Paramétrica da Reta

As equações paramétricas dão as coordenadas (x,y) de um ponto qualquer da reta em função (geralmente função linear) de uma terceira variável t (parâmetro).

$$x = f_1(t) \text{ e } y = f_2(t) \tag{2.16}$$

A partir das equações paramétricas obtém-se a equação geral da reta eliminando-se o parâmetro t.

Observe os exemplos:

Exemplo 2.19 *Qual é a equação geral da reta em que* $x = \frac{t+1}{2}$ *e* $y = 3t - 2$ *?*
Solução
Temos que $t = 2x - 1$ *e* $t = \frac{y+2}{3}$ *então:*
$2x - 1 = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 6x - 3 = y + 2 \Rightarrow 6x - y - 5 = 0$
Logo, a equação geral da reta é $6x - y - 5 = 0$.

Observação 2.9 *Notemos que para cada valor real atribuído a t obtemos as coordenadas* (x, y) *de um ponto da reta.*
Assim, no exemplo anterior, se:
· *Para* $t = 1 \Rightarrow x = \frac{1+1}{2} = 1$ *e* $y = 3.1 - 2 = 1$. *Logo* $P_1(1, 1)$.
· *Para* $t = 3 \Rightarrow x = \frac{3+1}{2} = 2$ *e* $y = 3.3 - 2 = 7$. *Logo* $P_3(2, 7)$.
· *Para* $t = -1 \Rightarrow x = \frac{-1+1}{2} = 0$ *e* $y = 3.(-1) - 2 = -5$. *Logo* $P_{-1}(0, -5)$.
E assim por diante, sempre produzindo pontos colineares.

Capítulo 3

O Espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$

Seja E o espaço euclidiano tridimensional, um sistema de coordenadas (cartesianas) em E consiste em três eixos OX, OY e OZ, com a mesma origem O, tais que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. O sistema é indicado com notação OXYZ.

Uma vez fixado o sistema OXYZ, chamaremos de Π_{xy},Π_{yz} e Π_{xz} os planos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

A escolha do sistema OXYZ faz com que se possa associar a cada ponto P do espaço um terno ordenado (x,y,z) de números reais, chamados de coordenadas do ponto P relativamente a esse sistema.

As coordenadas (x,y,z) do ponto P no sistema OXYZ podem ser obtidas assim: a reta paralela ao eixo OZ passando pelo ponto P corta o plano Π_{xy} no ponto P_0. Sejam (x,y) as coordenadas de P_0 no sistema OXY do plano Π_{xy}. Essas são as duas primeiras coordenadas de P. Por sua vez, a reta paralela ao eixo OX passando por P corta o plano Π_{yz} no ponto P_1. Sejam (y,z) as coordenadas de P_1 no sistema OYZ. O Número y é o mesmo já obtido e Z é coordenada restante do ponto P.

Um plano chama-se vertical quando contém o eixo OZ ou é paralelo a ele. Um plano diz-se horizontal quando é perpendicular ao eixo OZ. Todos os pontos de um plano horizontal têm coordenadas (x,y,c), onde a constante c é a coordenada no eixo OZ, da interseção do plano dado com esse eixo. De modo análogo, os planos perpendiculares aos eixos OX e OY têm equações do tipo $x = a$, $y = b$ respectivamente.

Evidentemente, um plano horizontal é paralelo a, ou coincide com, o plano Π_{xy}

O sistema OXYZ determina uma correspondência biunívoca $E \to \mathbb{R}^3$ que a cada ponto do espaço associa o terno (x,y,z) de coordenadas desse ponto no sistema dado.

As coordenadas da origem O são (0,0,0). Os pontos dos planos Π_{xy},Π_{yz} e Π_{xz} têm coordenadas (x,y,0), (0,y,z) e (x,0,y) respectivamente.

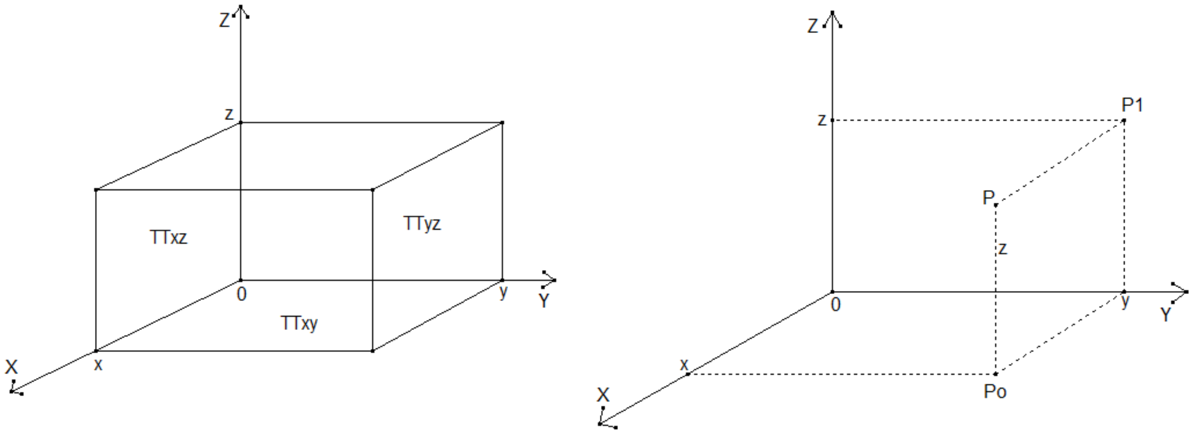


Figura 12 – Espaço Tridimensional

Fonte:((LIMA et al., 2006), p. 74)

3.1 Localização de Pontos no $\mathbb{R}^3$

A todo terno ordenado (x_1, y_1, z_1) do $\mathbb{R}^3$ corresponde um único ponto P do espaço tal que x_1 = abscissa de P, y_1 = ordenada de P, z_1 = cota de P.

Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 3.1 *Localize no espaço tridimensional (Figura 13), os seguintes pontos:*
$A(1, 2, 1),\ B(2, -3, 3),\ C(-4, -1, 2),\ D(4, 5, -3),\ E(-3, 3, 0)$
$F(0, -2, -3),\ G(3, 1, 0),\ H(0, -2, 4),\ I(0, 3, -1)$

Solução

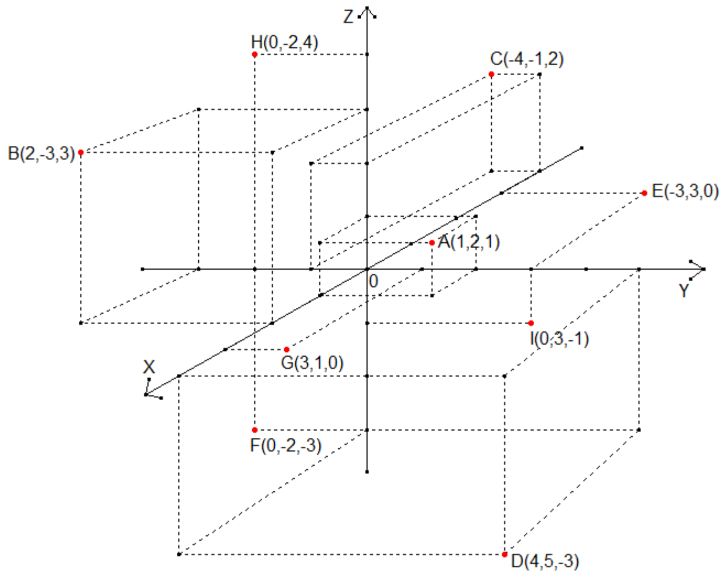


Figura 13 – Espaço Tridimensional

Fonte: Elaboração própria

Para um melhor entendimento, temos o espaço tridimensional dividido em 8 octantes a saber: (Figura 14)

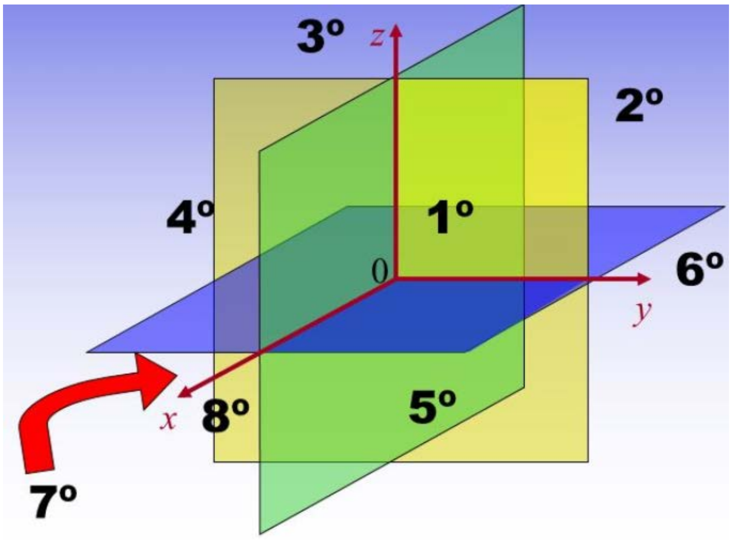


Figura 14 – Octantes numerados

Fonte: www.slideplayer.com.br (LUIS, 2006)

3.2 Equações Paramétricas no $\mathbb{R}^3$

Pode-se dizer que as equações paramétricas no $\mathbb{R}^3$ são formadas assim como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, as equações paramétricas fornecem as coordenadas de um ponto qualquer da reta em função (geralmente função linear) de uma terceira variável t (parâmetro).

$$x = f_1(t)\ ,\ y = f_2(t)\ e\ z = f_3(t) \tag{3.1}$$

Observação 3.1 *No* $\mathbb{R}^3$, *de posse das equações paramétricas, nós conseguimos formar uma outra equação chamada de equação simétrica da reta. Não existe uma equação com o formato da equação geral da reta que aprendemos no* $\mathbb{R}^2$.

Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 3.2 *Dadas as equações paramétricas da reta r:* $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

encontre sua equação simétrica:

Solução

Primeiro, vamos isolar o t dentro de cada paramétrica:

$t = \frac{x-1}{2}$

$t = y$
$t = \frac{z-2}{-3}$
Assim, sua equação simétrica é: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-3}$

Notemos que para cada valor real atribuído a t obtemos as coordenadas (x, y, z) de um ponto da reta.
Assim, no exemplo anterior, se:
· Para $t = 1 \Rightarrow x = 1 + 2.1 = 3$ e $y = 1$ e $z = 2 - 3.1 = -1$. Logo $P_1(3, 1, -1)$.
· Para $t = 2 \Rightarrow x = 1 + 2.2 = 5$ e $y = 2$ e $z = 2 - 3.2 = -4$. Logo $P_2(5, 2, -4)$.
· Para $t = 3 \Rightarrow x = 1 + 2.3 = 7$ e $y = 3$ e $z = 2 - 3.3 = -7$. Logo $P_3(7, 3, -7)$.
E assim por diante, sempre produzindo pontos colineares.

3.3 Sólidos de Revolução

Esta seção foi criada com o intuito de apresentar alguns exemplos de superfícies de revolução criadas a partir de elementos conhecidos: segmentos de reta e algumas curvas matemáticas que serão descritas no exemplo.

O objetivo destes exemplos é o de estimular o raciocínio espacial gerado por estas superfícies.

Além disso, os gráficos foram produzidos no programa winplot.

Observação 3.2 *"O programa winplot é um aplicativo para windows que permite a plotagem de curvas e superfícies. Lançado em torno de 1985, o programa foi inicialmente escrito na linguagem C, e desde 2001 é desenvolvido em C++."((KLBOT2, 2013) - Fonte: www.wikipedia.org)*

Exemplo 3.3 *Traçar as superfícies de revolução produzidas a partir do segmento de reta* $\overline{AB}$ *onde* $A(2, 2)$ *e* $B(5, 5)$*. Primeiramente ao se girar o segmento em relação ao eixo* x *e, em seguida, em relação ao eixo* y*.*
Solução
Primeiramente, o segmento $\overline{AB}$*:(Figura 15)*

Observação 3.3 *Convencionou-se, neste trabalho, marcar a superfície de revolução ao redor do eixo* x *em cor vermelha e ao redor do eixo* y *em cor azul.*

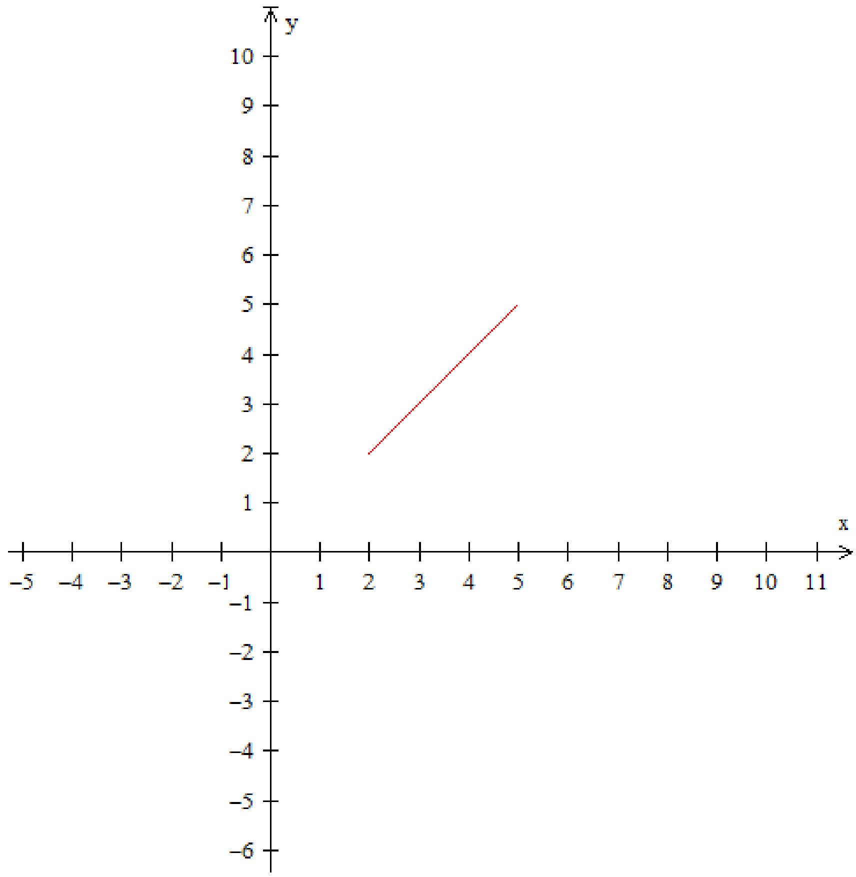


Figura 15 – segmento $\overline{AB}$, onde $A(2,2)$ e $B(5,5)$

Agora, rotacionando o segmento $\overline{AB}$ *em torno do eixo* x*.(Figura 16)*

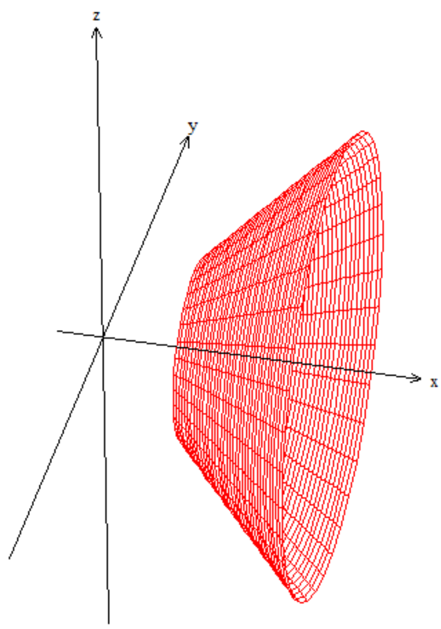


Figura 16 – segmento $\overline{AB}$ ao redor do eixo x

Agora, rotacionando o segmento $\overline{AB}$ *em torno do eixo* y*.(Figura 17)*

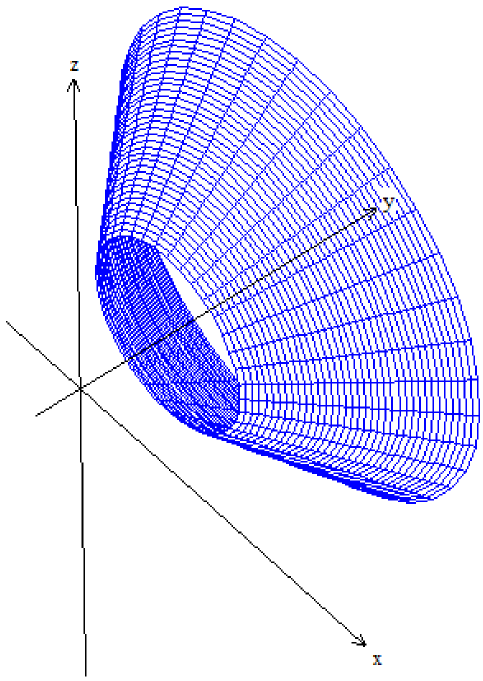


Figura 17 – segmento $\overline{AB}$ ao redor do eixo y

Exemplo 3.4 *Neste exemplo será utilizada a reta* $f(x) = x$ *apenas no intervalo de domínio* $[-5, 5]$*. Esboçar, assim, as superfícies de revolução criadas por este trecho de reta ao redor dos eixos* x *e* y*.*
Solução
Antes, a referida reta em seu intervalo de domínio:(Figura 18)

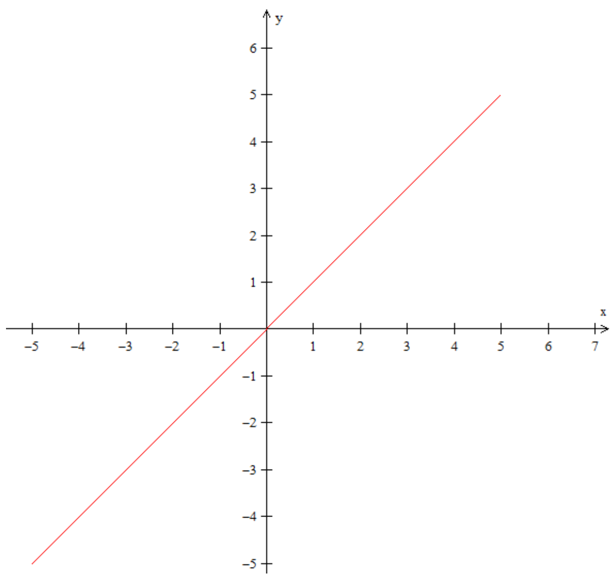


Figura 18 – Reta $f(x) = x$ no intervalo de domínio $[-5, 5]$

Agora, rotacionando em torno do eixo x*.(Figura 19)*

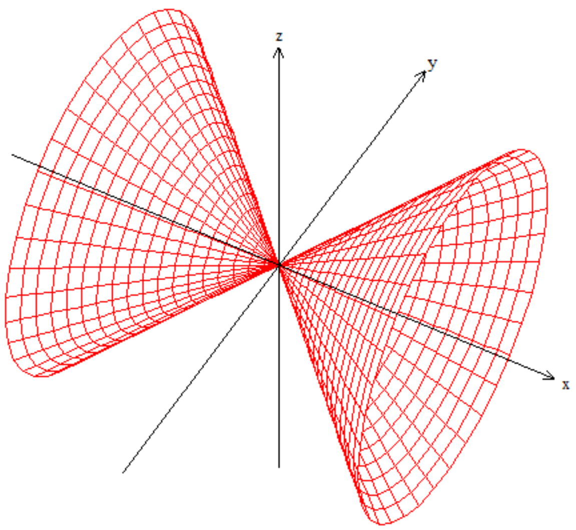


Figura 19 – Reta $f(x) = x$ no intervalo de domínio $[-5,5]$ ao redor do eixo x

Agora, rotacionando em torno do eixo y*.(Figura 20)*

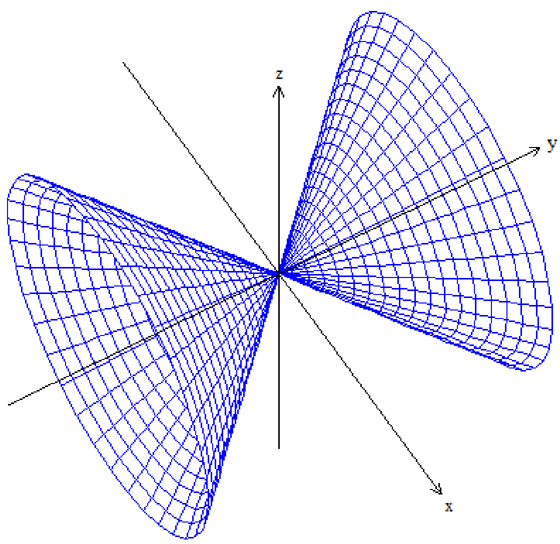


Figura 20 – Reta $f(x) = x$ no intervalo de domínio $[-5,5]$ ao redor do eixo y

Exemplo 3.5 *Neste novo caso, vamos analisar o que acontece quando gira-se ao redor dos eixos ordenados um fragmento/trecho de parábola, dada pela equação:* $f(x) = x^2$ *e cujo domínio é* $[0,3]$.

Solução

Fragmento de parábola a ser estudado:(Figura 21)

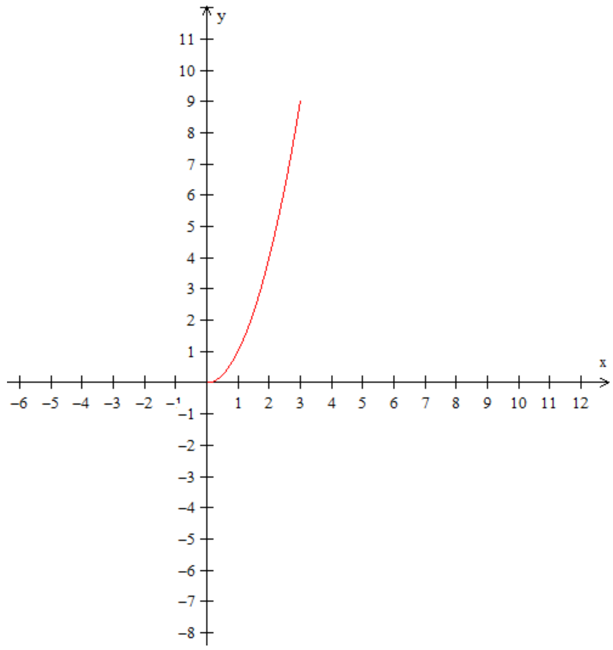


Figura 21 – Fragmento/trecho de parábola de domínio $[0, 3]$

Agora, rotacionando em torno do eixo x.(Figura 22)

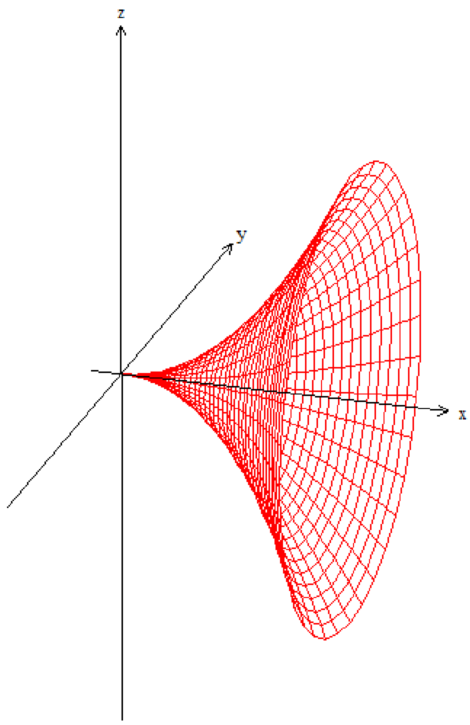


Figura 22 – Fragmento/trecho de Parábola ao redor do eixo x

Agora, rotacionando em torno do eixo y*.(Figura 23)*

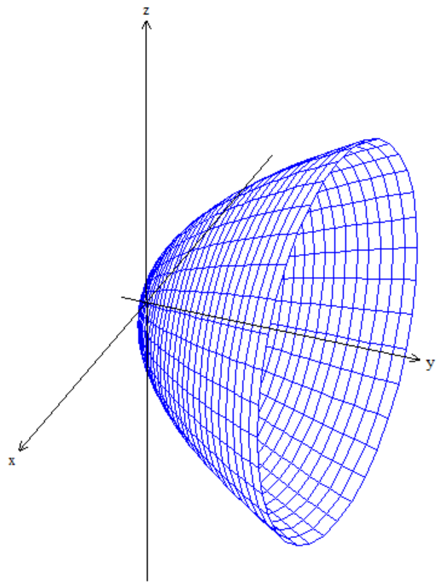


Figura 23 – Fragmento/trecho de Parábola ao redor do eixo y

Exemplo 3.6 *Foi estudado, no exemplo anterior, apenas um fragmento de parábola. Mas o que aconteceria com as superfícies de revolução se fosse ampliado o domínio desta função? Que figuras tridimensionais seriam formadas ao redor dos eixos coordenados? Será usada a mesma função quadrática do exemplo anterior, mas agora com o domínio diferente. Seja a parábola de equação:* $f(x) = x^2$ *e cujo domínio agora é* $[-3, 3]$.
Solução
Claro, o fragmento/trecho de parábola a ser estudado:(Figura 24)

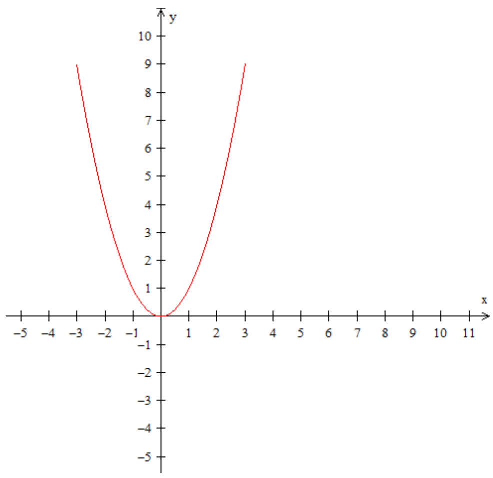


Figura 24 – Parábola de domínio $[-3, 3]$

Agora, rotacionando em torno do eixo x*.(Figura 25)*

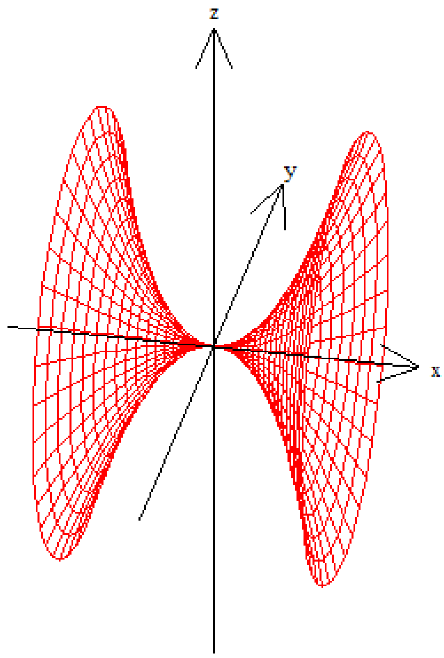


Figura 25 – Parábola ao redor do eixo x

Agora, rotacionando em torno do eixo y*.(Figura 26)*

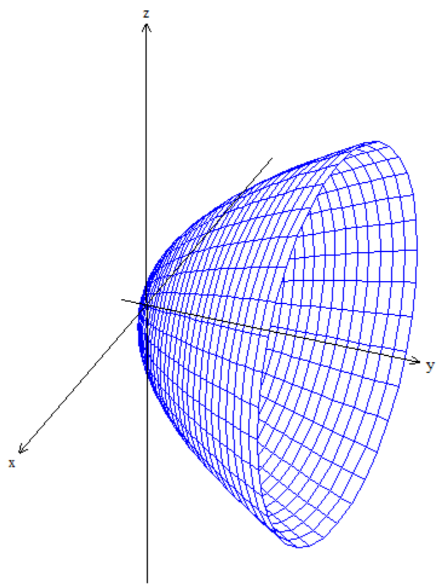


Figura 26 – Parábola ao redor do eixo y

Exemplo 3.7 *O exemplo a seguir apresenta o esboço de uma curva:* $f(x) = x^3$*. Em seguida, também serão visualizadas as superfícies de revolução geradas por esta curva.*
Solução
Gráfico de $f(x) = x^3$*:(Figura 27)*

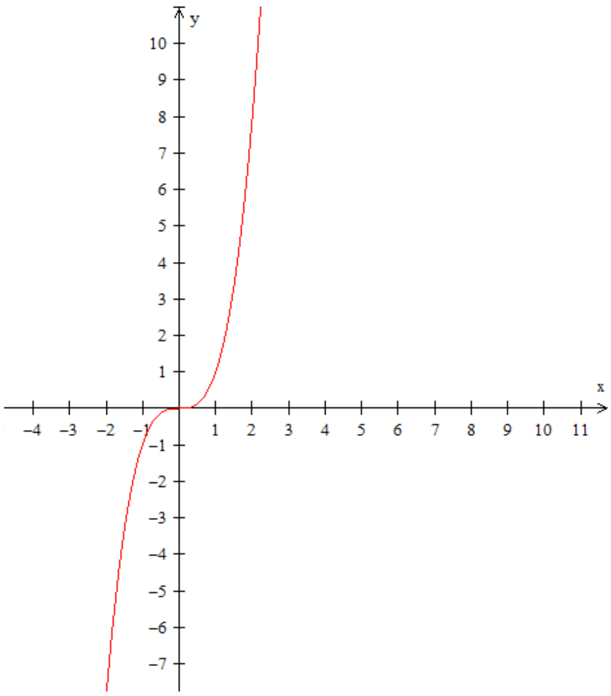


Figura 27 – Gráfico de $f(x) = x^3$

Agora, rotacionando em torno do eixo x*.(Figura 28)*

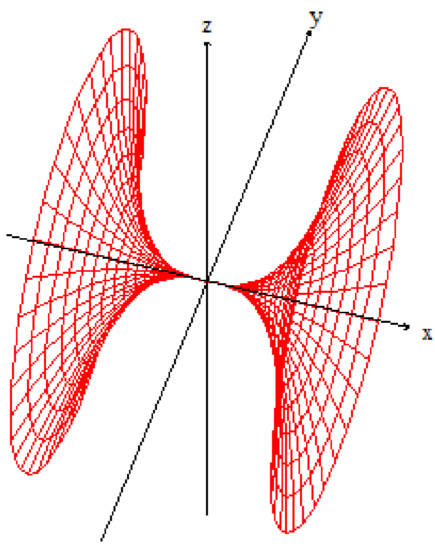


Figura 28 – $f(x) = x^3$ao redor do eixo x

Agora, rotacionando em torno do eixo y*.(Figura 29)*

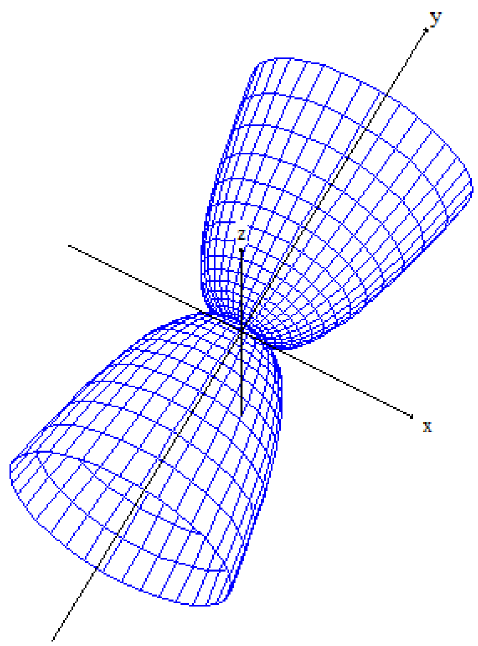


Figura 29 – $f(x) = x^3$ ao redor do eixo y

O estudo de sólidos de revolução é justificado na seguinte seção.

3.4 Questão do ENEM relativa ao espaço Tridimensional

Após uma conversa inicial com um grupo de alunos de ensino médio, foi constatado que o conhecimento sobre espaço tridimensional era muito insignificante, pra não dizer quase nenhum. A maioria dos alunos sequer já tinha ouvido falar em espaço tridimensional. Conhecer um terceiro eixo e aplicá-lo ortogonalmente aos outros dois eixos era impossível.

Em virtude disto, desenvolveu-se toda a atividade apresentada neste trabalho como diagnóstica e que foi aplicada à alunos de todos os anos do Ensino Médio, tendo como foco principal avaliar o conhecimento prévio do tema.

Em seguida foi apresentada a questão pedida no ENEM 2013 como motivação aos conceitos que seriam desenvolvidos a partir daquela avaliação diagnóstica. Toda a teoria apresentada seria também revista como forma de exercícios de consolidação de conteúdos em uma lista extra que seria abordada após o desenvolvimento teórico.

Todos os conceitos apresentados têm como objetivo dar uma visão antecipada do espaço tridimensional utilizando conhecimentos matemáticos já abordados, ou que possam vir a ser, neste momento do aprendizado escolar. Não sendo prejudicial ao desenvolvimento do saber matemático, pelo contrário, agregando-se mais valor a este.

3.4.1 Questão do ENEM 2013

Questão 136

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura (30)

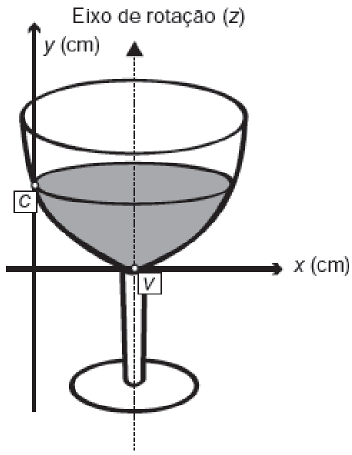


Figura 30 – Questão do ENEM 2013

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a)1

b)2

c)4

d)5

e)6

Gabarito: Letra e.

Capítulo 4

Atividades em Sala de Aula

Primeiramente apresentaremos uma lista com atividades diagnósticas, por meio das quais o conhecimento do assunto por parte do aluno será avaliado e quantificado pelo aplicador.

Uma segunda lista de exercícios foi, posteriormente, disponibilizada, tendo em vista um aprofundamento dos temas em análise.

4.1 Atividades Diagnósticas

Esta pequena lista de exercícios foi elaborada com ao propósito de diagnosticar o conhecimento de espaço bidimensional e espaço tridimensional nos alunos do Ensino Médio. Esta atividade foi dividida em dois grupos: o grupo 1 refere-se ao espaço bidimensional e o grupo 2 refere-se ao espaço tridimensional.

Para cada questão elaborada, segue um comentário com os objetivos inerentes a cada questão, isto é, aqueles conceitos que o aluno deveria ter ao se deparar com tal questionamento. Assim como algumas respostas colocadas por nossos alunos.

É claro que podem ocorrer adaptações por parte dos colegas professores, para uma melhor compreensão no contexto de cada região e de cada realidade do grupo de alunos envolvidos. Todas as questões propostas devem ser resolvidas individualmente.

4.1.1 Grupo 1 - Espaço Bidimensional $\mathbb{R}^2$

O aluno deverá responder aos itens sem qualquer ajuda externa e de livros didáticos.

1. Quantos eixos são necessários para se obter o plano cartesiano? R:

2. Qual o outro nome dado ao eixo x? R:

3. Qual o outro nome dado ao eixo y? R:

4. Como são colocados (posicionados) os eixos x e y entre si? Que tipo de ângulo é formado entre estes eixos ? R:

5. Localize no plano cartesiano (Figura 31), os seguintes pontos:
$A(5,3); B(3,-2); C(-4,-3); D(-1,5); E(5,0); F(0,4)$ *e* $G(0,0)$

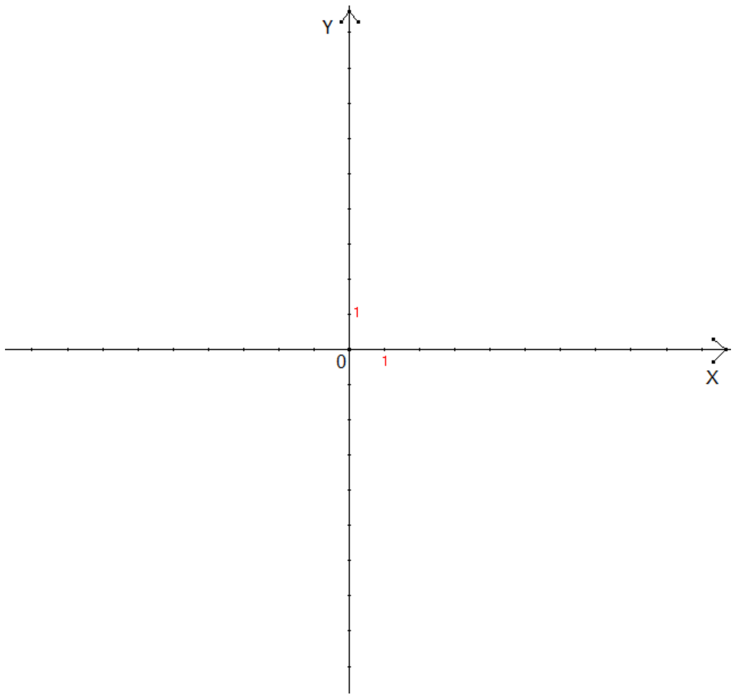


Figura 31 – Plano Cartesiano

a) Que ponto pertence ao 2º quadrante? R:

b) O ponto F pertence a algum quadrante? Justifique:

Observação 4.1 *Objetivos a serem alcançados:*

Nas questões 1 a 5, está sendo analisado se o aluno consegue construir (esboçar) um plano cartesiano bidimensional. Se ele possui noção de perpendicularidade, nomenclatura dos eixos coordenados, enumeração dos quadrantes e se a divisão dos eixos coordenados foi feita de forma proporcional, respeitando a mesma unidade de medida de comprimento nos dois eixos.

Também foi visto se o aluno tem capacidade de localizar os pontos dados de acordo com suas coordenadas (pares ordenados), aplicadas ao plano cartesiano. Observando o sentido do crescimento de valores (reta orientada) nos dois eixos.

Respostas dos alunos:

A maioria dos alunos respondeu corretamente a questão 1, usando em sua maioria: R:2 eixos.

Na questão 2, a maior parte dos alunos também soube responder, mas alguns erraram a escrita do outro nome dado ao eixo x. R: abcissas. Assim como a resposta em destaque.(Figura 32)

Figura 32 – Resposta errada à questão 2 da atividade diagnóstica

A questão 3 também apresentou um número pequeno de acertos, para minha surpresa. Muitos alunos deixaram em branco. Poucos acertos foram obtidos. E alguns alunos confundiram o nome do eixo com coordenadas, sendo estas usadas para localizar o ponto no plano. R: coordenadas. (Figura 33)

Figura 33 – Resposta errada à questão 3 da atividade diagnóstica

A totalidade dos alunos envolvidos acertou a questão 4, respondendo que os eixos formam 90º entre si. Alguns poucos alunos usaram a palavra "perpendiculares".

A grande maioria dos alunos acertou a questão 5,na localização de pontos e na resposta à letra a. R: Ponto D. Mas quanto a resposta do item b, a diversidade foi grande, mostrando que este conceito ainda não está completamente absorvido pelos alunos. Eis algumas respostas apresentadas: (Ver Figura 34) ; (Ver Figura 35) e (Ver Figura 36)

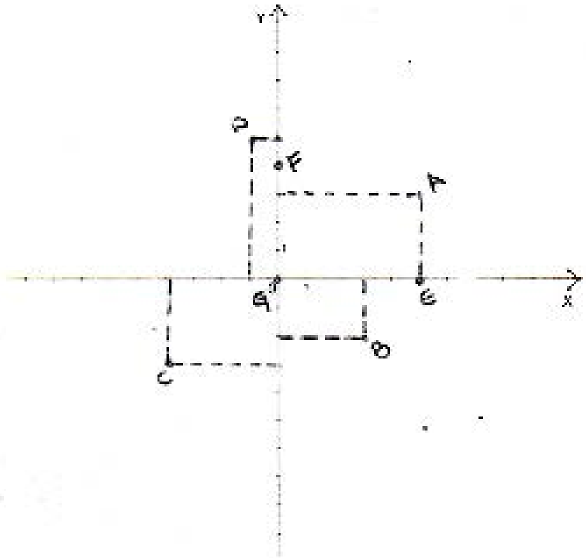


Figura 34 – Resposta certa à questão 5 da atividade diagnóstica

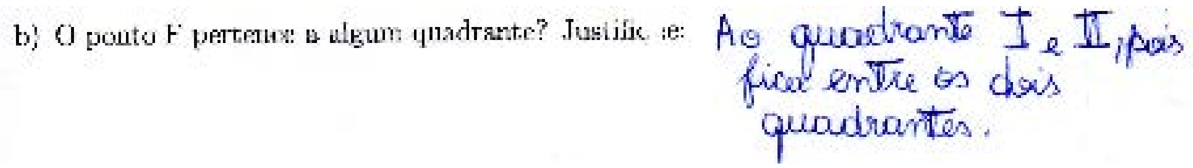


Figura 35 – Resposta errada à questão 5 item b da atividade diagnóstica

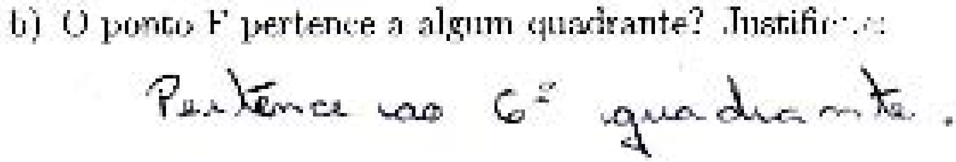


Figura 36 – Resposta errada à questão 5 item b da atividade diagnóstica

6. Trace os segmentos de reta $\overline{AB}$; $\overline{CD}$; e $\overline{EF}$ cujas extremidades são: $A(0,0)$; $B(-3,3)$; $C(2,1)$; $D(8,4)$; $E(1,-1)$ e $F(4,-6)$ (Figura 37)

Observação 4.2 *Objetivos a serem alcançados:*

Neste item o aluno deverá, além de localizar os pontos dados no plano cartesiano, consolidar o conceito de segmento de reta como um subconjunto da reta, que possui início e fim (suas extremidades).

Respostas dos alunos:

Quase a totalidade dos alunos acertou à questão. Alguns poucos alunos esqueceram de traçar os segmentos, apenas localizando suas extremidades. (Figura 38)

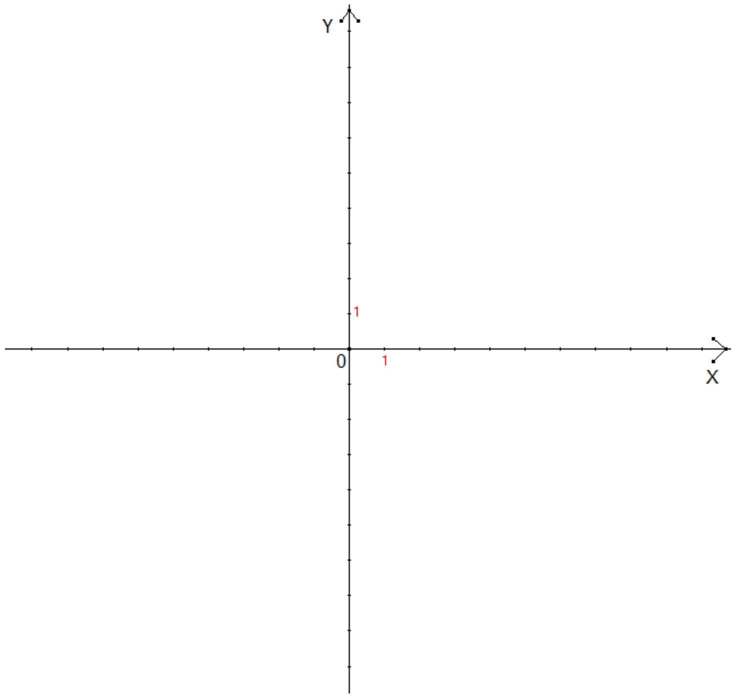


Figura 37 – Plano Cartesiano

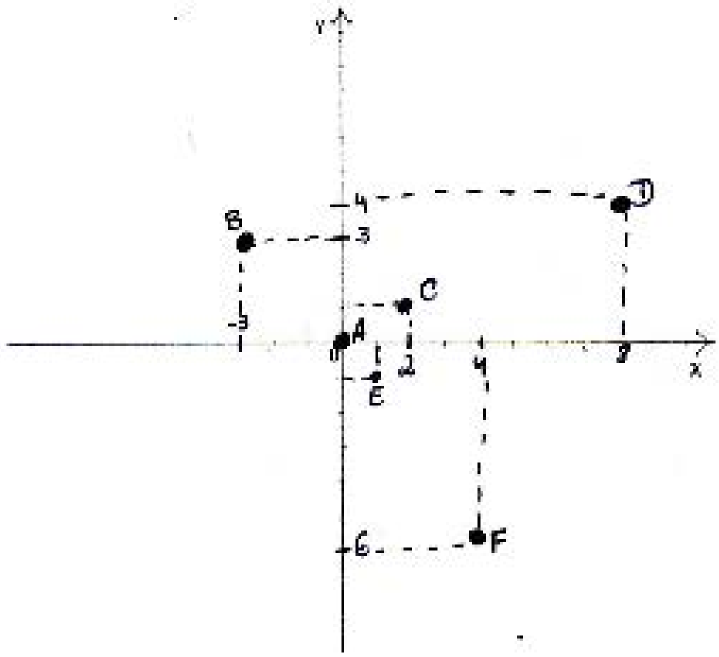


Figura 38 – Resposta errada à questão 5

7. Esboce a reta que passa pelos pontos $A(-2,7)$ e $B(4,-3)$.(Figura 39)

Observação 4.3 *Objetivos a serem alcançados:*

Neste item expõe-se o conceito de quantos pontos são necessários para se traçar uma reta.

O aluno deverá ser capaz de compreender que quando se tem apenas um ponto,

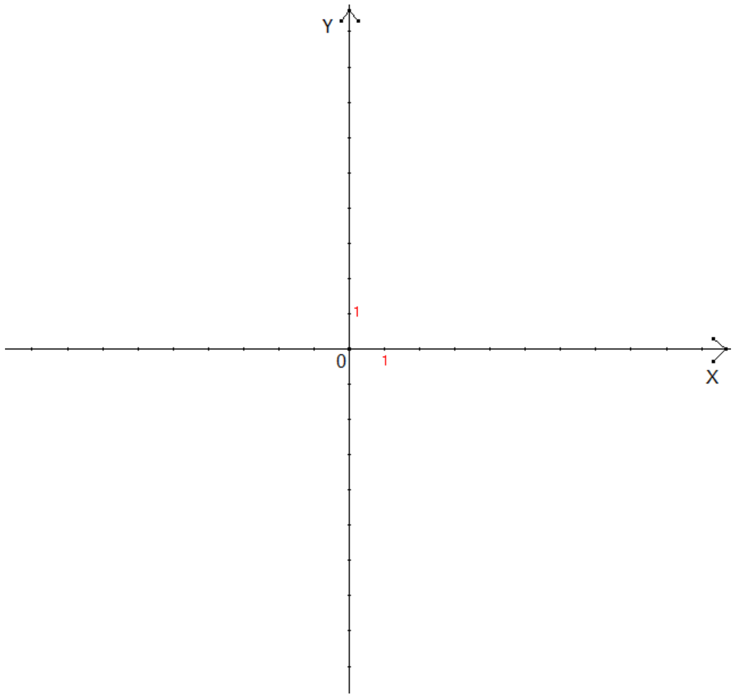


Figura 39 – Plano Cartesiano

infinitas retas podem ser traçadas passando por ele. E quando se tem dois pontos, apenas uma reta pode ser construída, interceptando estes dois pontos.

Pode-se, também reforçar o conceito de reta e de densidade do conjunto $\Re$.

Respostas dos alunos:

Também foi grande o número de acertos à esta questão, com apenas alguns alunos que representarem segmento e não reta. (Figura 40).

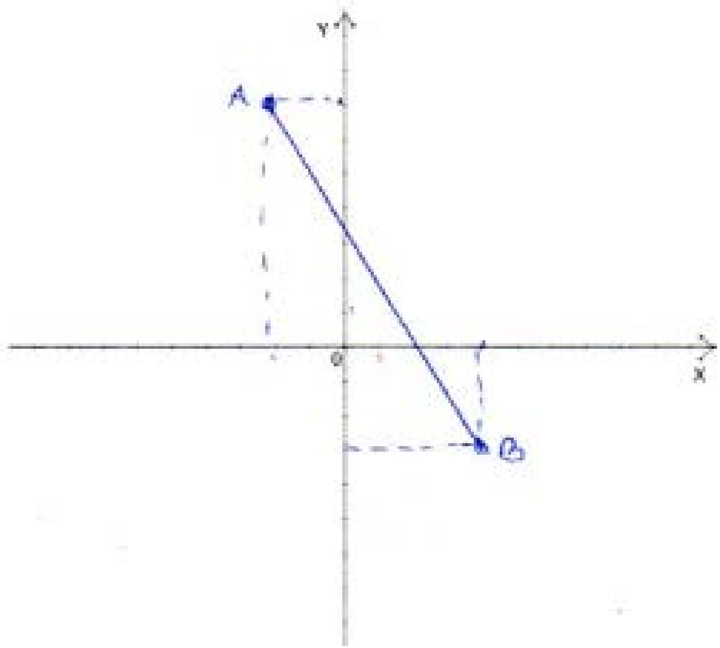


Figura 40 – Resposta errada à questão 7

8. A reta r possui equações paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$ Esboce esta reta r. (Figura 41)

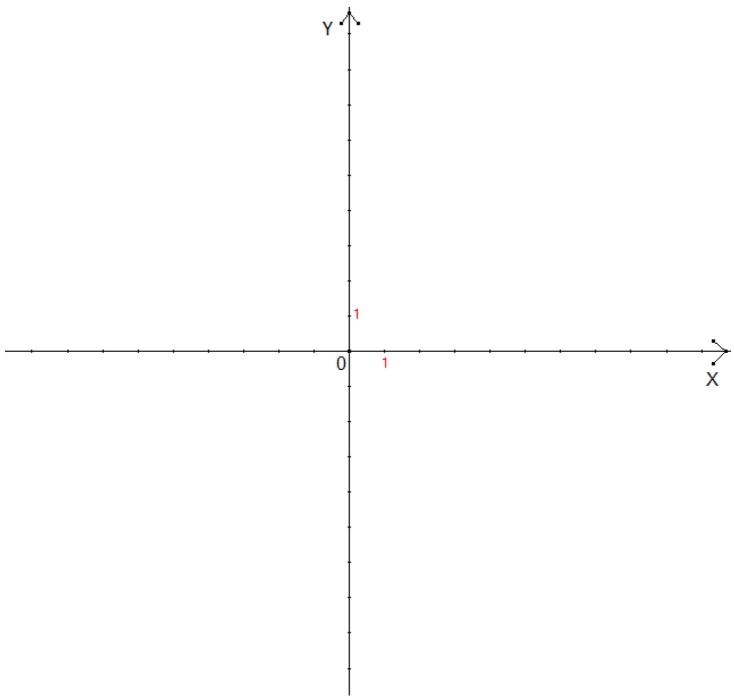


Figura 41 – Plano Cartesiano

Observação 4.4 *Objetivos a serem alcançados:*

O aluno deverá compreender que as equações fornecidas possuem uma relação estreita com uma outra variável chamada de parâmetro. E que, sendo atribuídos valores quaisquer a este parâmetro, vão sendo criados pares ordenados que localizarão pontos pertencentes a uma mesma reta, ditos pontos colineares.

Vale ressaltar que podem ser escolhidos quaisquer valores ao parâmetro, negativos, positivos ou o valor nulo.

Respostas dos alunos:

Apenas uma aluna do 3º ano do ensino médio já tinha lido algo sobre equações paramétricas.

Ao me questionar: - Professor, equações paramétricas são aquelas que têm o "t"?"

Logo que respondi afirmativamente, ela me sorriu e voltou a se debruçar sobre a questão.

Vale ressaltar que nossa expectativa de acerto para esta questão era realmente baixa.

Eis a resposta da aluna: (Figura 42)

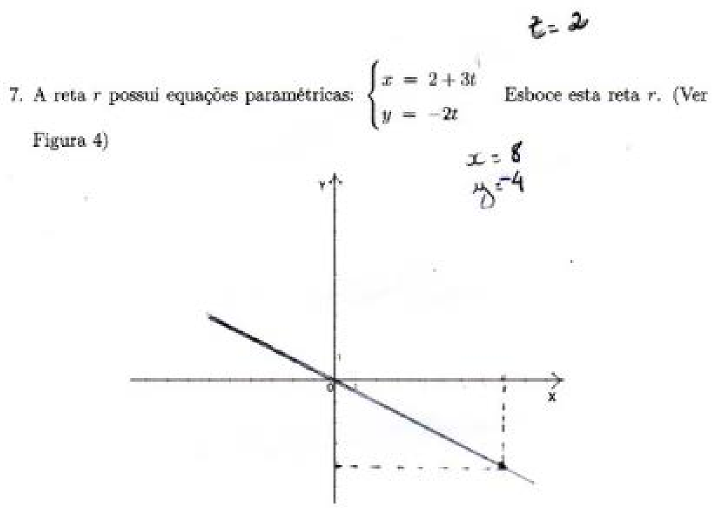


Figura 42 – Resposta correta à questão 8

9. Ao se girar o segmento $\overline{AB}$, onde $A(3,2)$ e $B(5,5)$ em torno dos eixos x e, em seguida, em torno do eixo y; que figuras são formadas? (Use a Figura 43)

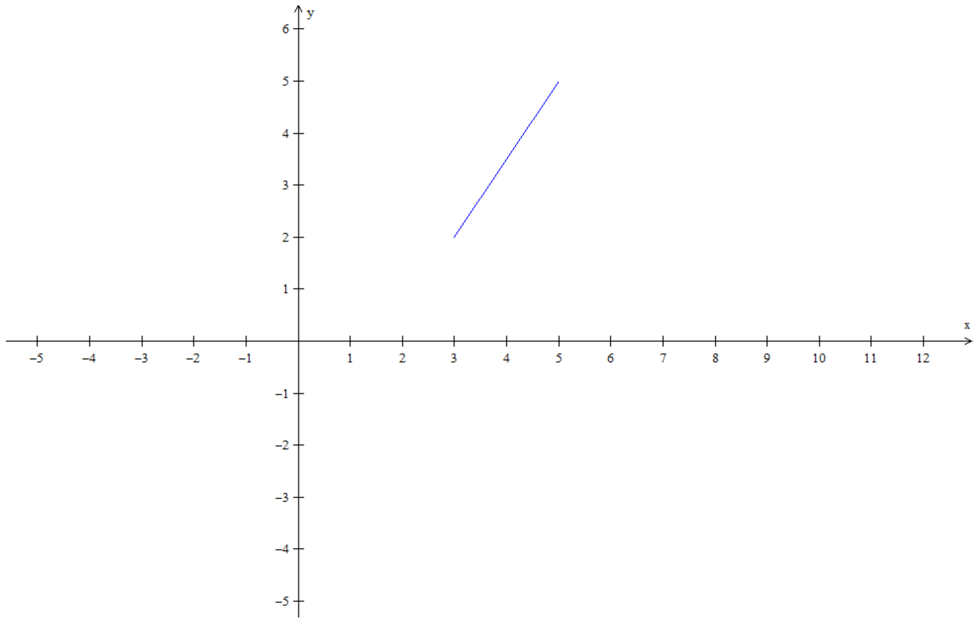


Figura 43 – Plano Cartesiano

Observação 4.5 *Objetivos a serem alcançados:*

O objetivo a ser alcançado neste item é fazer com que o aluno comece a imaginar sólidos de revolução. Em outras palavras, aqui uma visão espacial começa a ser exigida, quando, a partir do plano, gira-se um elemento matemático e este produz, no espaço, uma superfície de revolução.

Além de reconhecer, talvez ainda não utilizando nomenclaturas corretas, as figuras formadas desta rotação do segmento AB em torno dos eixos x e y.

Respostas dos alunos:

Quase todos os alunos, exceto uma aluna, não conseguiu ter a visão espacial necessária de girar o segmento de reta. Não conseguiram visualizar um movimento circular ao redor dos eixos. A grande maioria apenas criou as imagens simétricas, alguns até com certo exagero, como o aluno que elaborou a resposta: (Use a Figura 44)

Mais uma vez, a única aluna que acertou a superfície gerada, mas sem saber o nome desta superfície, foi a aluna de 9º ano.

Eis sua resposta quase totalmente correta: (Use a Figura 45)

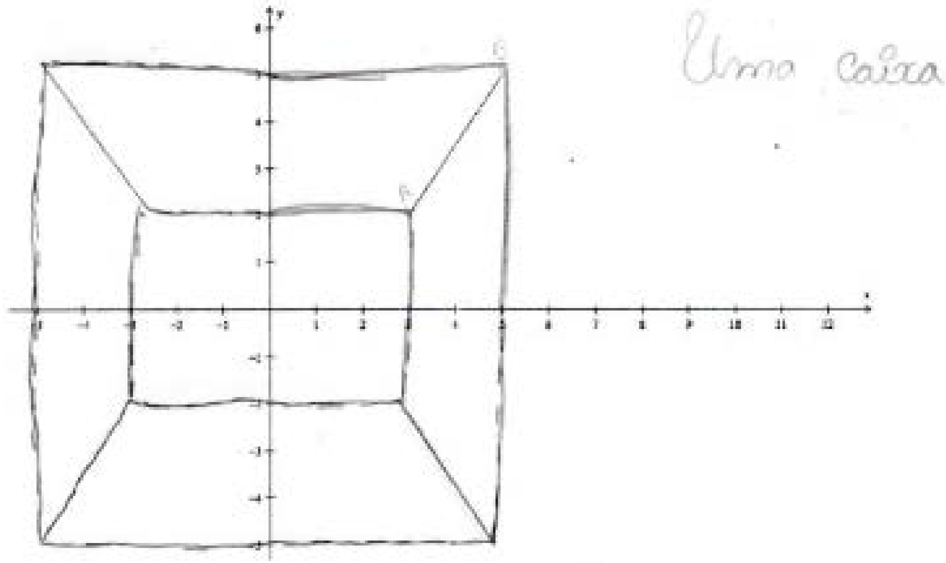


Figura 44 – Resposta errada à questão 9

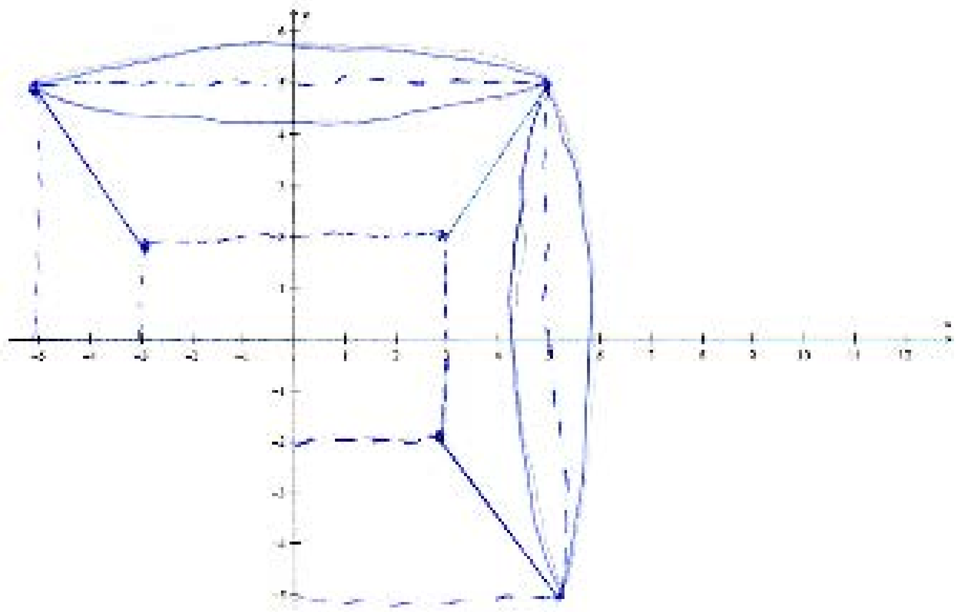


Figura 45 – Resposta certa à questão 9

10. No plano cartesiano (Use a Figura 46), está o fragmento/trecho de parábola $y = x^2$ cujo domínio é $[0, 3]$. Agora imagine esta parábola girando ao redor do eixo y. Depois gire-a em torno do eixo x. Tente esboçar as trajetórias e as figuras formadas ao redor destes eixos.

Observação 4.6 *Objetivos a serem alcançados:*

Aqui neste item o poder de abstração ao se imaginar a superfície de revolução é ainda maior. Já que não se trata de um segmento de reta e sim de uma curva de equação matemática, a parábola.

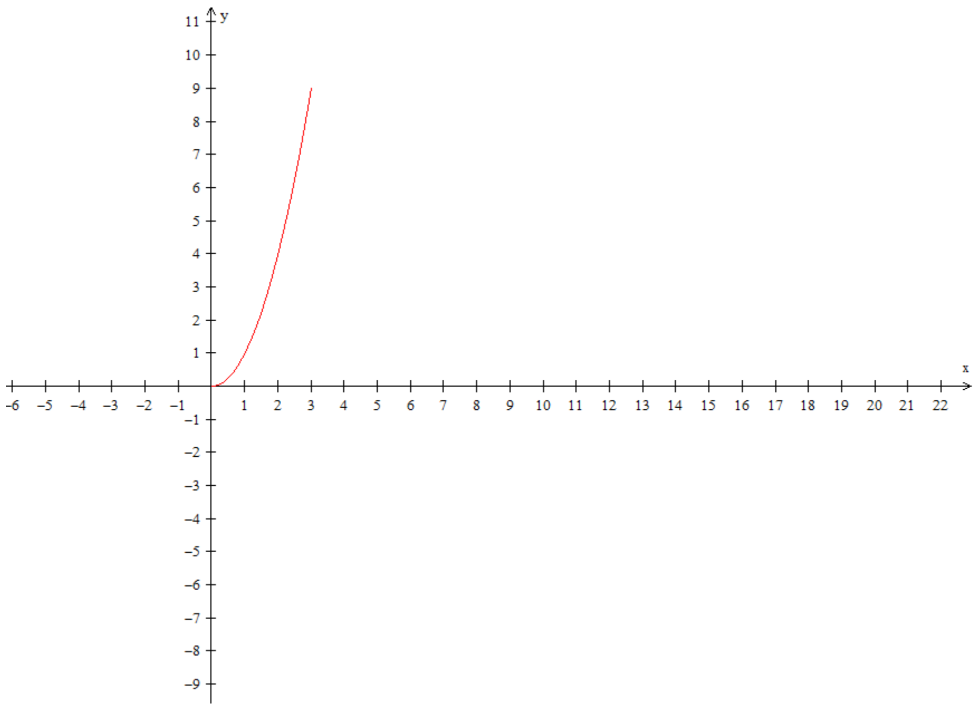


Figura 46 – Plano Cartesiano

Vale ressaltar aos alunos que pode-se criar superfícies de revolução a partir de uma curva qualquer.

Respostas dos alunos:

Novamente, quase a totalidade dos alunos deixou a resposta em branco, confirmando a nossa hipótese que a visão espacial de nossos alunos de ensino médio está muito deficiente.

Como na questão anterior, apenas aquela aluna de 9º ano conseguiu acertar o item.

Eis o esboço da aluna: (Use a Figura 47)

Foi possível observar que todos os alunos apresentaram, até aqui, a maior parte dos conhecimentos abordados, com apenas algumas trocas de nomenclaturas ou de simples esquecimento. Foi confirmado que o conceito mais fácil (localizar pontos) está bem fixado, mas algumas definições teóricas não foram por completo aprendidas. Vide noção de segmento de reta, onde o aluno não relaciona o conceito de ter início e fim, com o traçar do segmento, que às vezes ultrapassa os pontos limites do segmento. Confundindo com isto, ou não distinguindo segmento de reta com a reta propriamente dita.

No que diz respeito às superfícies de revolução, percebe-se que nenhuma espécie de exercício foi "treinado"com este aluno em anos escolares anteriores. O aluno não consegue visualizar um elemento matemático (objeto) girando ao redor de um eixo, por exemplo.

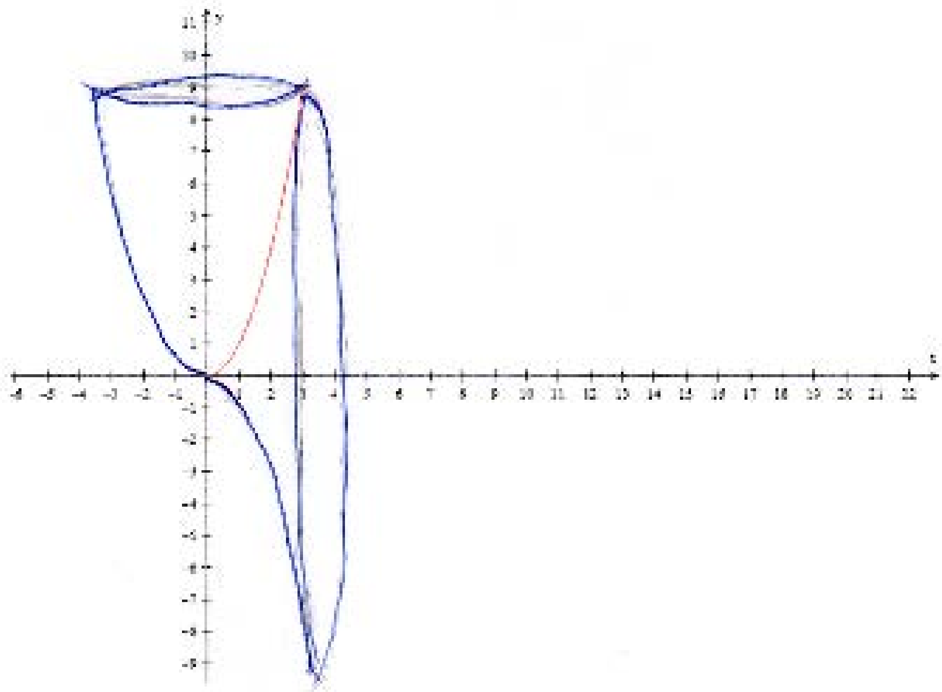


Figura 47 – Resposta certa à questão 10

As sugestões para se tentar minimizar este déficit seria uma abordagem mais profunda e constante dos conceitos teóricos dos elementos geométricos (ponto, segmento de reta, reta, etc...) e uma apresentação do espaço tridimensional também já a partir do 8º ou 9º anos de escolaridade, com vasta aplicação de exercícios teóricos e que envolvam cálculos. É interessante esclarecer ao aluno que esta visão espacial é necessária também em outras disciplinas acadêmicas bem como em sua vida social.

4.1.2 Grupo 2 - Espaço Tridimensional $\mathbb{R}^3$

O grupo 2 de atividades, refere-se ao espaço tridimensional. Também possui a intenção de verificar os conhecimentos adquiridos sobre localização de pontos e construção de segmentos de retas. Agora com um exercício bem maior da visão espacial do aluno, exigindo-se bem mais, pois a inclusão do eixo das cotas, proporciona uma maior dificuldade. O aluno deverá responder aos itens sem qualquer ajuda externa e de livros didáticos.

1. Existe algum plano cartesiano que você conheça onde podemos localizar o ponto P(2,1,3)? R:

2. Você saberia traçar um plano cartesiano com 3 eixos perpendiculares entre si? R:

3. O que são octantes? Que outro nome é dado ao eixo z? R:

Observação 4.7 *Objetivos a serem alcançados:*

Nas questões de 1 a 3, verifica-se se o aluno possui algum conhecimento sobre o plano cartesiano tridimensional, primeiramente apresentando-lhe uma terna ordenada (coordenadas tridimensionais).

Em seguida, é analisado se o estudante consegue traçar os três eixos coordenados. Tendo a clareza de que está se representando três dimensões numa folha de papel, local bidimensional. Assim, surge a necessidade de usar perspectiva. Na folha, os três eixos não possuem 90º entre si, apenas dois possuem, mas admite-se que sim.

Mais uma vez é observada a importância da divisão dos eixos em graduações de mesma medida para os eixos vertical e horizontal, haja vista que o terceiro eixo encontra-se em perspectiva e, por isso, sua divisão pode diferir um pouco dos outros dois eixos.

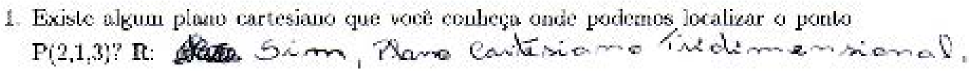
A noção de octantes é apresentada, sendo eficiente também, saber a numeração e localização de cada um deles.

Respostas dos alunos:

A maior parte dos alunos avaliados deixou a questão 1 em branco. Alguns alunos responderam afirmativamente, demonstrando uma certa "malandragem", pois observaram o plano cartesiano tridimensional plotado na questão 4 que se apresenta na mesma folha.

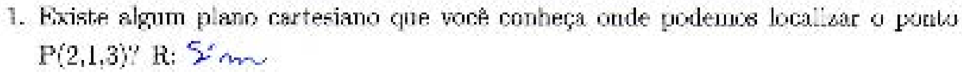
Eis algumas respostas: (Figura 48) e (Figura 49)

Na questão 2, todos os alunos a deixaram em branco. Há de se ressaltar a honestidade de todos, pois havia um gráfico logo abaixo na questão 4.



1. Existe algum plano cartesiano que você conheça onde podemos localizar o ponto P(2,1,3)? R: Sim, Plano Cartesiano Tridimensional.

Figura 48 – Resposta à questão 1 - grupo 2



1. Existe algum plano cartesiano que você conheça onde podemos localizar o ponto P(2,1,3)? R: Sim

Figura 49 – Resposta à questão 1 - grupo 2

A questão 3 foi igualmente deixada em branco por todos os alunos, confirmando a nossa hipótese do desconhecimento do terceiro eixo, o eixo das cotas. Mostrando, assim, que a visão espacial está completamente comprometida.

4. Localize no espaço tridimensional a seguir (Use a Figura 50) os seguintes pontos:

   $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$ $E(0,0,3)$ $F(2,0,3)$ $G(2,1,3)$ $H(0,1,3)$
   Se "ligarmos"os segmentos:$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{EH}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG} e \overline{DH}$, que sólido geométrico será formado?

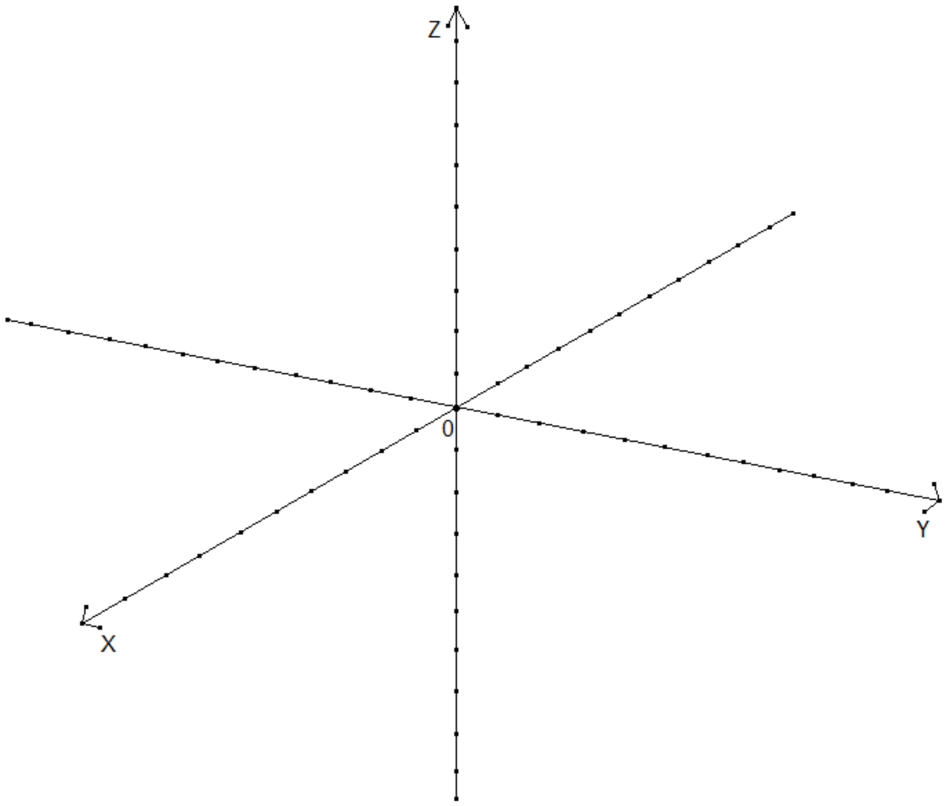


Figura 50 – Plano Cartesiano Tridimensional

Observação 4.8 *Objetivos a serem alcançados:*

Aqui o objetivo é de verificar o conhecimento do conceito de terno ordenado, sendo a terceira coordenada referente ao eixo das cotas. Perceber que apenas localizar um ponto no espaço é um pouco mais difícil que no $\mathbb{R}^2$.

O aluno deverá perceber que cada ponto fornecido é o vértice de um sólido geométrico muito comum.

Respostas dos alunos:

Novamente, quase a totalidade dos alunos apresentou a questão em branco. Apenas a aluna de 9º ano apresentou a resposta quase perfeita, errando apenas a localização do ponto G.

Eis a resposta da aluna: (Veja a Figura 51)

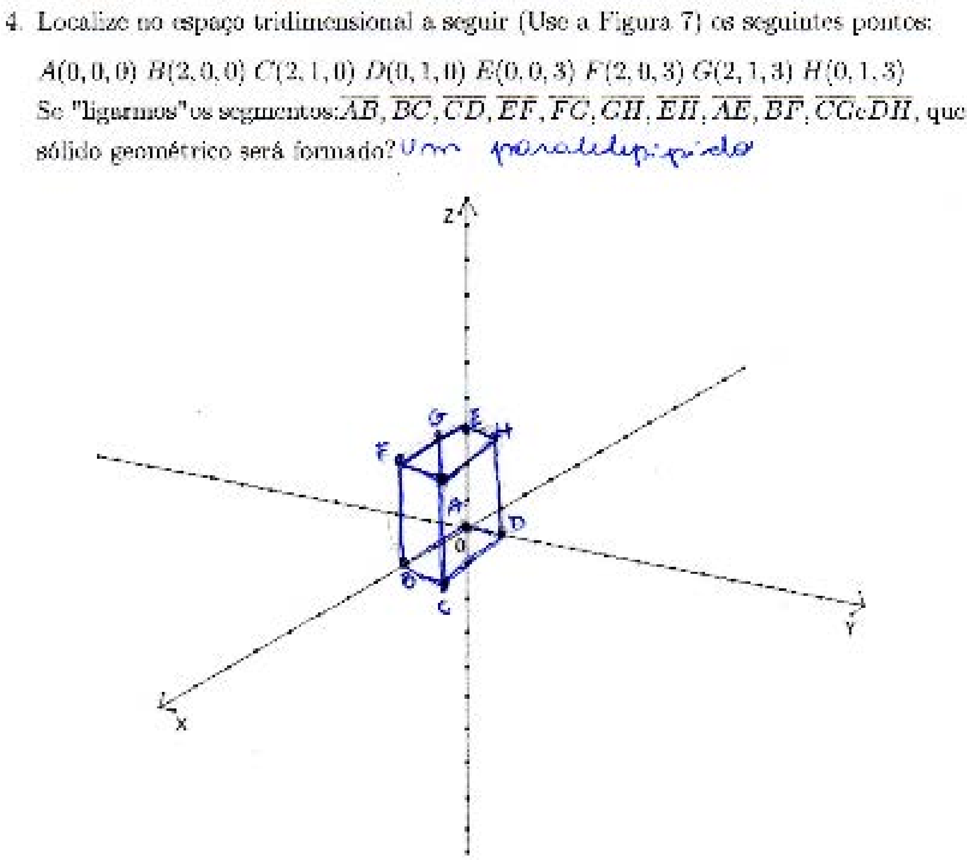

4. Localize no espaço tridimensional a seguir (Use a Figura 7) os seguintes pontos:
$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$ $E(0,0,3)$ $F(2,0,3)$ $G(2,1,3)$ $H(0,1,3)$
Se "ligarmos" os segmentos: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{FC}, \overline{GH}, \overline{EH}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$, que sólido geométrico será formado? Um paralelepípedo

Figura 51 – Resposta certa à questão 4 - grupo 2

5. Construa o segmento de reta $\overline{AB}$ que passa pelos pontos $A(5, 1, 3)$ *e* $B(-7, 8, 2)$.(Use a Figura 52).
Que octantes este segmento atravessa?

Observação 4.9 *Objetivos a serem alcançados:*

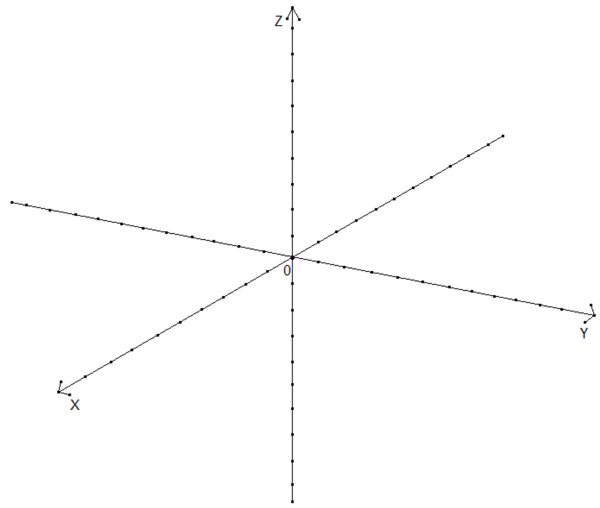


Figura 52 – Plano Cartesiano Tridimensional

O objetivo aqui é o de verificar o conhecimento do conceito sobre a localização de pontos no espaço tridimensional, construindo um segmento de reta AB, num constante objetivo de imaginar em três dimensões.

Interpretar e definir por que octantes este subconjunto da reta passa, reconhecendo com isto a localização de cada um dos octantes.

Exercitar o contato constante com a terceira coordenada, o eixo z.

Respostas dos alunos:

Nesta questão todos os alunos apresentaram total desconhecimento do assunto abordado, deixando-a em branco.

6. Usando o espaço tridimensional, esboce a reta cujas equações paramétricas são:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \ (t \in \Re) \end{cases}$$
(Use a Figura 53)

Observação 4.10 *Objetivos a serem alcançados:*

O aluno deverá compreender que assim como no espaço bidimensional, temos uma terceira variável, o parâmetro.

Para cada valor atribuído à variável parâmetro, encontram-se valores para suas coordenadas (terna).

Estes pontos, a partir do momento que forem plotados no espaço tridimensional, serão percebidos como pontos colineares.

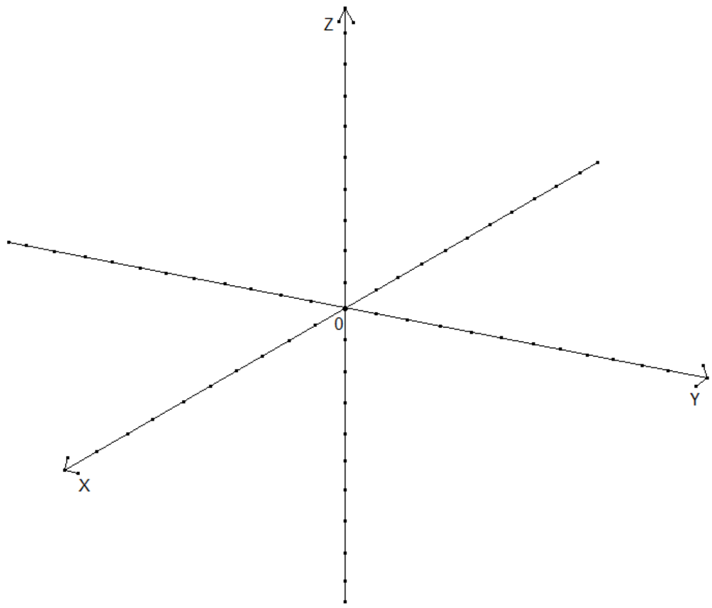


Figura 53 – Plano Cartesiano Tridimensional

Enfim, o aluno deve perceber que qualquer que seja o valor atribuído ao parâmetro, todos os ternos originados serão colineares,e assim, pode-se traçar a reta.

Respostas dos alunos:

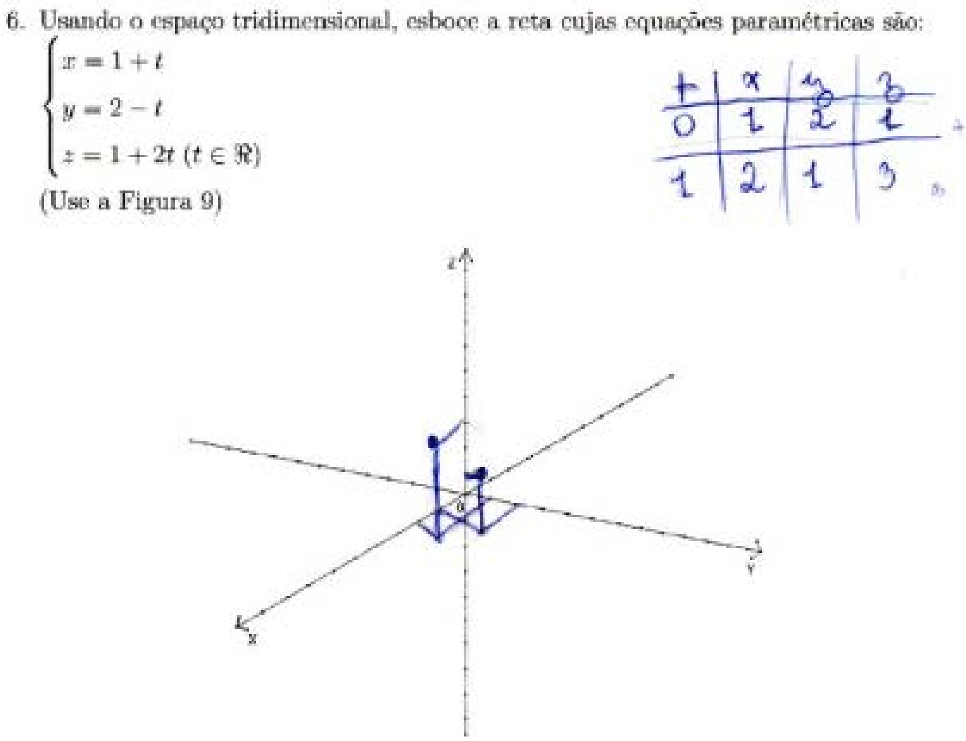
Somente a aluna de 9º ano conseguiu iniciar um raciocínio na questão, elaborando apenas duas ternas que produziriam a reta desejada. Mas a aluna não conseguiu esboçar a reta no plano cartesiano tridimensional. Acredito que foi derrotada pelo cansaço.

Eis sua resposta parcial: (Figura 54)

Neste momento fica claro que quase nenhum aluno apresenta o conceito de três dimensões abordado desta forma. A grande maioria sequer conhecia o plano cartesiano tridimensional.

A localização dos pontos no espaço tridimensional só ficou clara para os alunos após a atividade, onde foi esclarecido que o terceiro valor da terna ordenada representa o eixo z, eixo perpendicular aos outros dois eixos ordenados. A partir daí, boa parte dos alunos conseguiu localizar melhor os pontos, mas ainda com algum grau de dificuldade.

As sugestões para se tentar minimizar este déficit seria uma abordagem mais constante dos conceitos teóricos dos elementos do espaço tridimensional e uma apresentação do espaço tridimensional também já a partir do 8º ou 9º anos de escolaridade com a aplicação frequente de exercícios teóricos.



6. Usando o espaço tridimensional, esboce a reta cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \ (t \in \Re) \end{cases}$$

(Use a Figura 9)

t	x	y	z
0	1	2	1
1	2	1	3

Figura 54 – Resposta errada à questão 6 - grupo 2

4.2 Atividades Extras para Consolidar Conteúdos

Como foi dito anteriormente, estas atividades propostas visam uma melhor fixação dos conteúdos para uma efetiva aprendizagem dos conceitos adquiridos. E assim, tornar o espaço tridimensional, o exercício de rotacionar um segmento de reta ou um trecho de curva, algo mais comum no saber-fazer do aluno.

Capítulo 5

Conclusão

O trabalho apresentado teve o objetivo de sugerir uma antecipação da visão tridimensional aos alunos $1^{\underline{o}}$ ano do ensino médio, tornando o tema ao mesmo tempo mais acessível e seus conceitos, mais frequentemente abordados em nossas salas de aula. Haja visto que existe um grande "buraco"no conhecimento matemático referente ao tema proposto.

Sendo assim, as atividades aqui propostas foram usadas como diagnósticas, mas podem ser usadas como iniciais ao desenvolvimento do tema. A idéia de expor funções matemáticas mais complexas neste primeiro momento fica recusada. Mas, nada invalida uma sequência na apresentação de uma nova temática dentro da disciplina.

A antecipação desta visão tridimensional não requer nenhum conhecimento prévio que não tenha sido estudado por parte de nossos alunos quando encontram-se neste nível de escolaridade. Assim, trata-se de uma questão de abordagem, de ampliação de conhecimentos. Muitas das vezes usamos o caminho inverso no nosso cotidiano escolar.

Enfim, a sugestão para se conseguir minimizar este déficit seria proporcionar ao aluno, desde o $8^{\underline{o}}$ ou $9^{\underline{o}}$ anos de escolaridade, um contato constante e sequencial com o espaço tridimensional. Construindo assim, progressivamente, todo o alicerce necessário ao desenvolvimento da visão espacial; através de constantes exercícios teóricos e também daqueles que envolvam cálculos. Este gradativo aprimoramento da visão espacial também ajudará, e muito, outras disciplinas acadêmicas, bem como a vida social do aluno.

Assim, este aluno que antes ignorava uma visão espacial, pode perceber melhor o mundo à sua volta, dentro do contexto particular em que vive, sendo um pouco mais detalhista nas suas análises.

A maior dificuldade encontrada foi a oposição dos alunos à pesquisa Matemática. Existe um fantasma muito forte que bloqueia a curiosidade e o aprendizado matemático. Colhe-se, ainda hoje, uma idéia de que tal disciplina acadêmica é difícil; o que proporciona, à grande maioria da população, um distanciamento da Matemática.

Este "desinteresse"pela Matemática, com certeza, é o principal causador do sentimento de impotência que permeia o grupo docente. Obviamente, o autor deste trabalho não estaria excluído deste contexto. Lutar contra este "não querer aprender"gera nos profissionais de educação, um desejo de sempre aprimorar nossa abordagem matemática (professor x aluno). Faz-se necessário alcançar o contexto social e nos infiltrar em cada realidade, de cada aluno, para tentar minimizar nosso prejuízo de conhecimento.

Lembremos que grandes descobertas possuem um ponto de partida trivial...

Referências

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual Editora, 1985. Citado 4 vezes nas páginas 25, 27, 28 e 30.

KLBOT2. *Programa Winplot*. 2013. Disponível em: <www.wikipedia.org>. Citado na página 39.

LDB, M. da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasil: MEC, 1996. Citado na página 12.

LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano*. Rio de Janeiro: SBM, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado na página 37.

LUIS, L. *Octantes numerados*. 2006. Disponível em: <www.slideplayer.com.br>. Citado na página 38.

MACHADO, A. dos S. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. São Paulo: Atual Editora, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

PARRA, C.; SAIZ, I. *Didatíca da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. São Paulo: Ed Artmed, 1996. Citado na página 13.

PCN, M. da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasil: MEC, 1999. Citado na página 12.

ROONEY, A. *A História da Matemática - Desde a criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito*. São Paulo: M Books, 2012. Citado na página 17.

Apêndices

APÊNDICE A

Atividades Diagnóstica

A lista de atividades a seguir foi dividida em dois grupos: o grupo1 refere-se ao espaço bidimensional e o grupo 2 ao espaço tridimensional.

A.1 Grupo 1

1. Quantos eixos são necessários para se obter o plano cartesiano? R:

2. Qual o outro nome dado ao eixo x? R:

3. Qual o outro nome dado ao eixo y? R:

4. Como são colocados (posicionados) os eixos x e y entre si? Que tipo de ângulo é formado entre estes eixos ? R:

5. Localize no plano cartesiano (Figura 55) os seguintes pontos:
   $A(5,3); B(3,-2); C(-4,-3); D(-1,5); E(5,0); F(0,4)$ *e* $G(0,0)$

   a) Que ponto pertence ao 2º quadrante? R:

   b) O ponto F pertence a algum quadrante? Justifique:

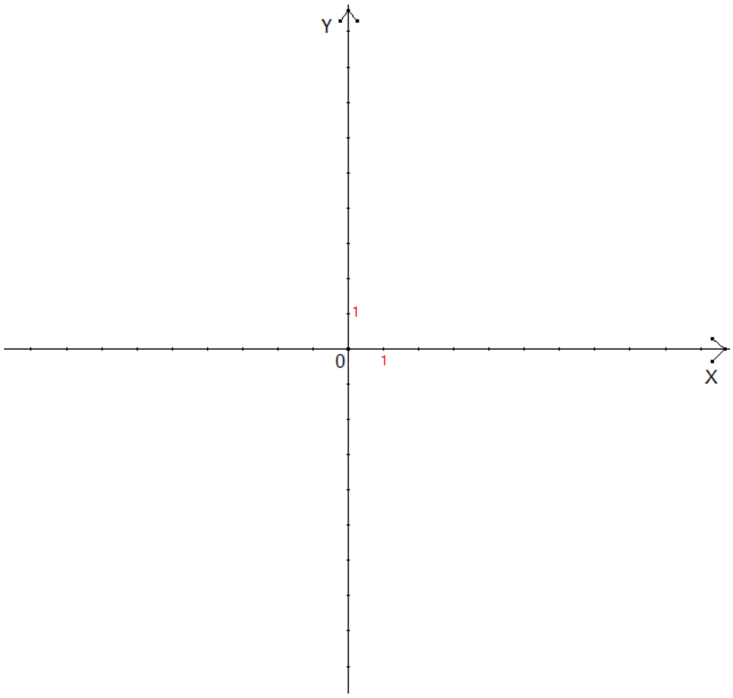


Figura 55 – Plano Cartesiano

6. Trace os segmentos de reta $\overline{AB}$; $\overline{CD}$; e $\overline{EF}$ cujas extremidades são: $A(0,0)$; $B(-3,3)$; $C(2,1)$; $D(8,4)$; $E(1,-1)$ e $F(4,-6)$ (Figura 56)

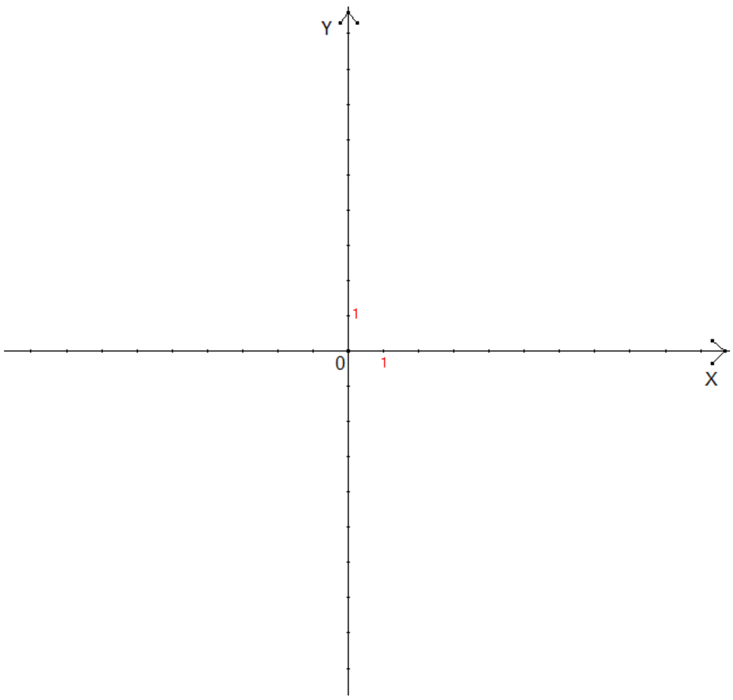


Figura 56 – Plano Cartesiano

7. Esboce a reta que passa pelos pontos $A(-2,7)$ e $B(4,-3)$.(Figura 57)

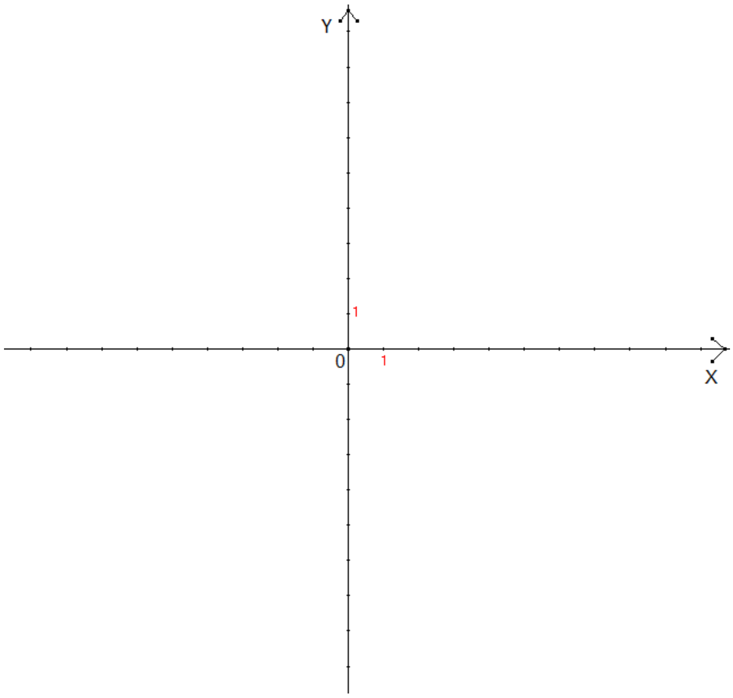


Figura 57 – Plano Cartesiano

8. A reta r possui equações paramétricas: $\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= -2t \end{cases}$ Esboce esta reta r. (Figura 58)

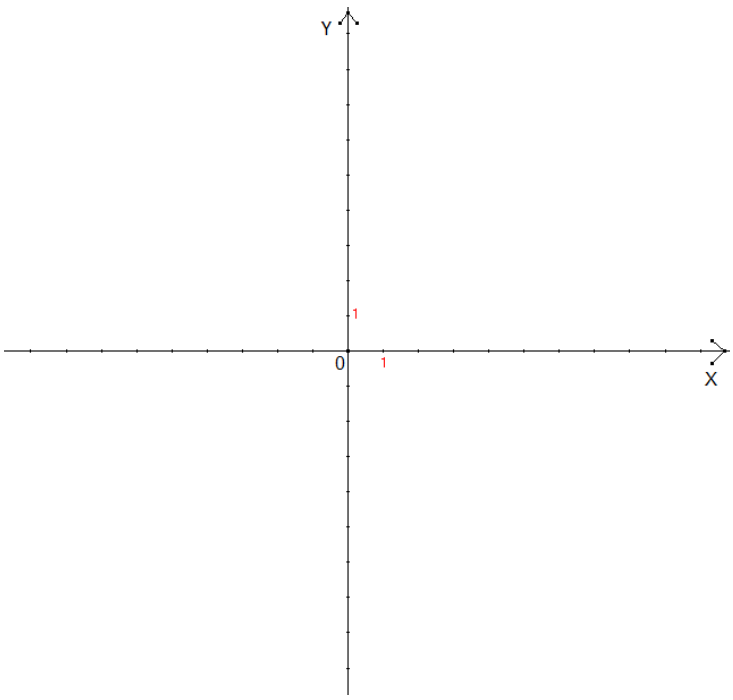


Figura 58 – Plano Cartesiano

9. Ao se girar o segmento $\overline{AB}$, onde $A(3,2)$ e $B(5,5)$ em torno dos eixos x e, em

seguida, em torno do eixo y; que figuras são formadas?(Use a Figura 59)

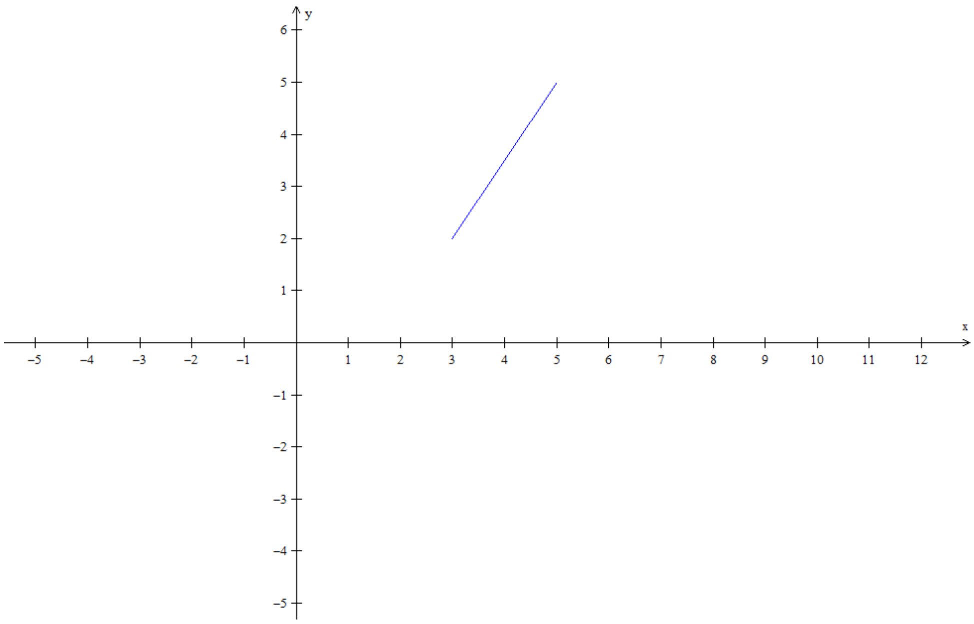


Figura 59 – Plano Cartesiano

10. Usando o plano cartesiano (Use a Figura 60), está a parábola $y = x^2$ cujo domínio é $[0, 3]$. Agora imagine esta parábola girando ao redor do eixo y. Depois gire-a em torno do eixo x. Tente esboçar as trajetórias e as figuras formadas ao redor destes eixos.

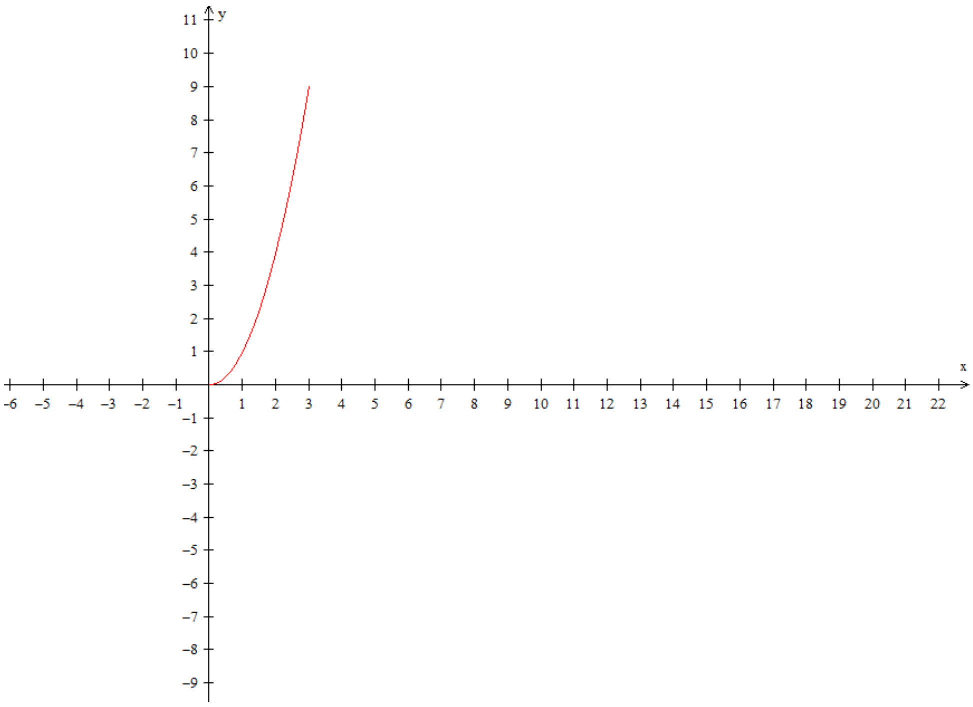


Figura 60 – Plano Cartesiano

A.2 Grupo2

1. Existe algum plano cartesiano que você conheça onde podemos localizar o ponto P(2,1,3)? R:

2. Você saberia traçar um plano cartesiano com 3 eixos perpendiculares entre si? R:

3. O que são octantes? Que outro nome é dado ao eixo z? R:

4. Localize no espaço tridimensional a seguir (Use a Figura 61) os seguintes pontos:

   $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$ $E(0,0,3)$ $F(2,0,3)$ $G(2,1,3)$ $H(0,1,3)$
   Se "ligarmos"os segmentos:$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{EH}, \overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG} e \overline{DH}$, que sólido geométrico será formado?

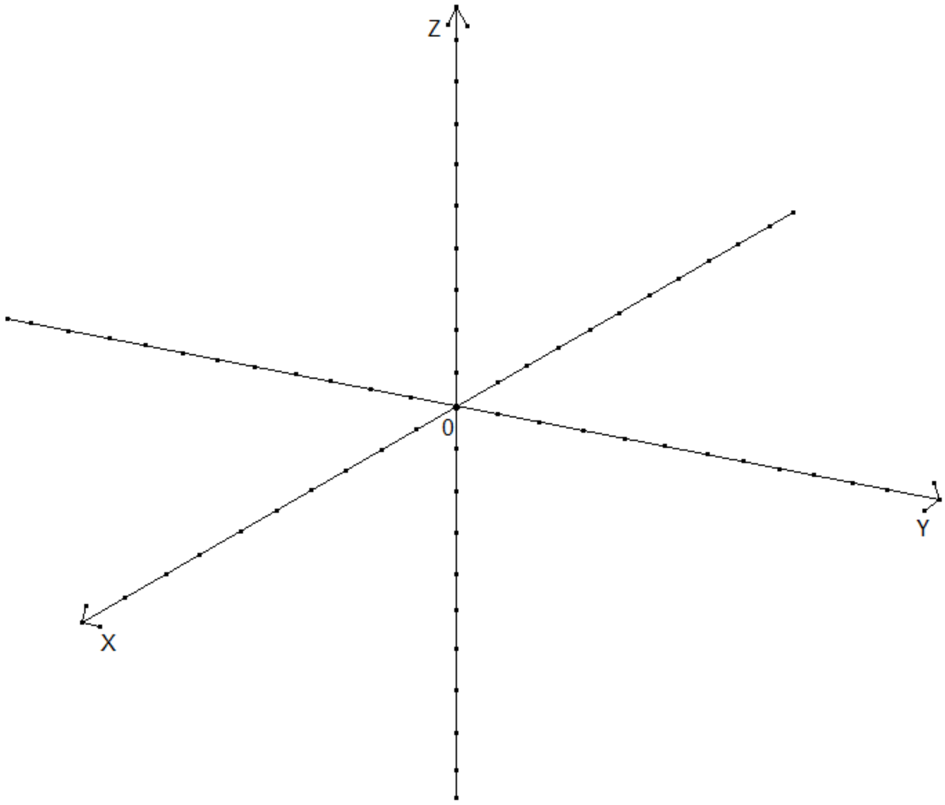


Figura 61 – Plano Cartesiano Tridimensional

5. Construa o segmento de reta $\overline{AB}$ que passa pelos pontos $A(5,1,3)$ e $B(-7,8,2)$.(Use a Figura 62).
   Que octantes este segmento atravessa?

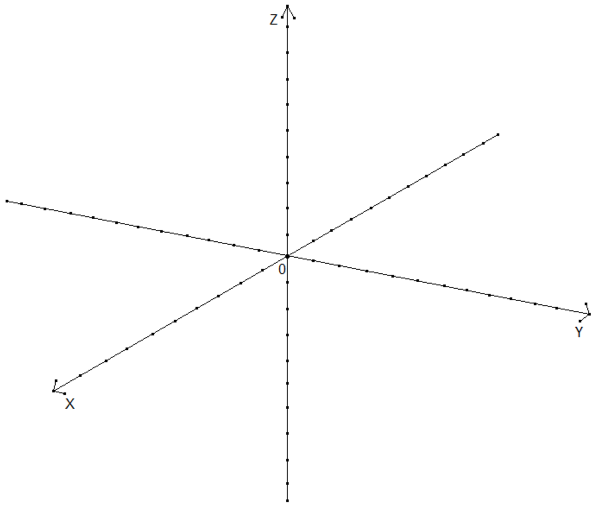


Figura 62 – Plano Cartesiano Tridimensional

6. Usando o espaço tridimensional, esboce a reta cujas equações paramétricas são:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \ (t \in \Re) \end{cases}$$
   (Use a Figura 63)

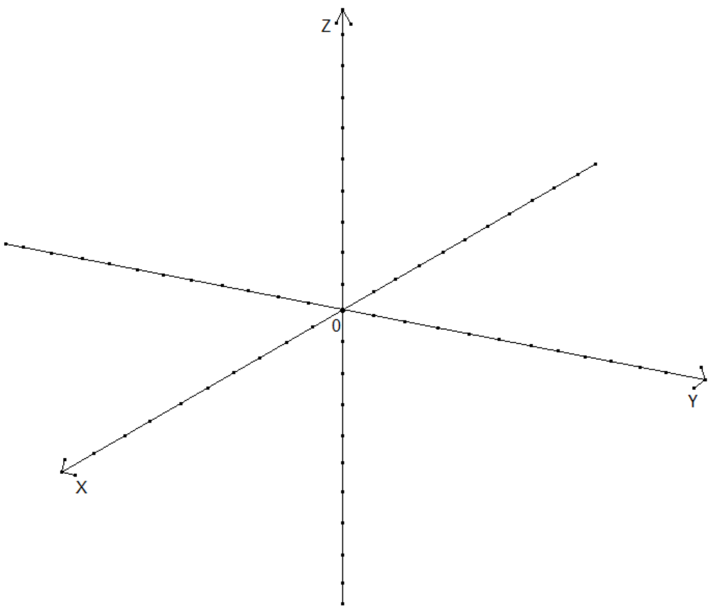


Figura 63 – Plano Cartesiano Tridimensional

APÊNDICE B

Atividades Propostas para Fixação dos Conceitos

1. Localize no plano cartesiano (Figura 64) os seguintes pontos:
   $A(-2,-3); B(8,2); C(5,-5); D(-3,1)E(2,0); F(0,-6)$ *e* $G(0,0)$

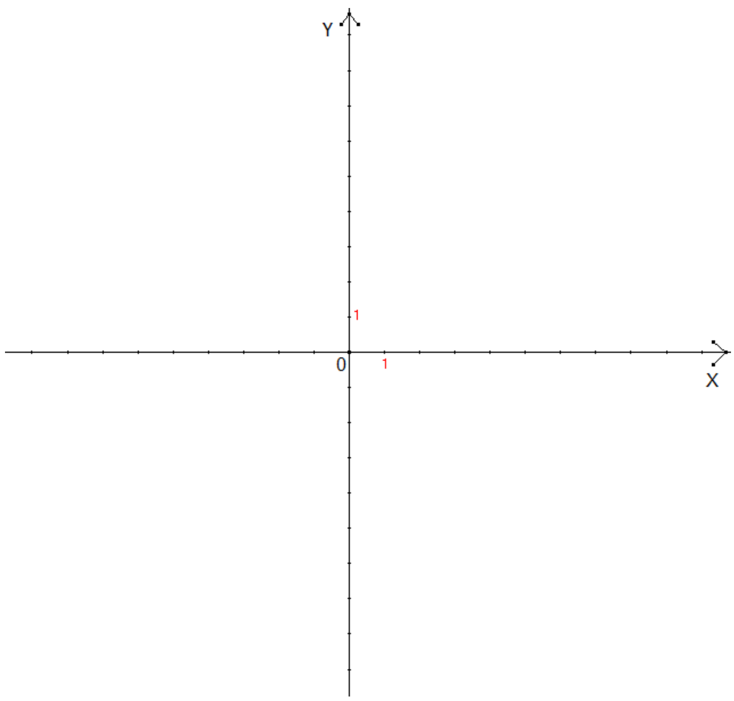


Figura 64 – Plano Cartesiano

a) Que ponto pertence ao 1º quadrante? R:

b) Que ponto pertence ao 2º quadrante? R:

c) Que ponto pertence ao 3º quadrante? R:

d) Que ponto pertence ao 4º quadrante? R:

2. Quantos eixos são necessários para se obter o plano cartesiano? De que modo são posicionados entre si? R:

3. Qual o outro nome dado ao eixo x? R:

4. Qual o outro nome dado ao eixo y? R:

5. Você conseguiria localizar o ponto P(2,1,3) no plano cartesiano da questão 1? R:

6. Trace os segmentos de reta $\overline{AB}$; $\overline{CD}$; e $\overline{EF}$ cujas extremidades são:
   $A(0,0)$; $B(2,-6)$; $C(4,1)$; $D(8,3)$; $E(-2,2)$ e $F(-4,4)$ (Ver Figura 65)

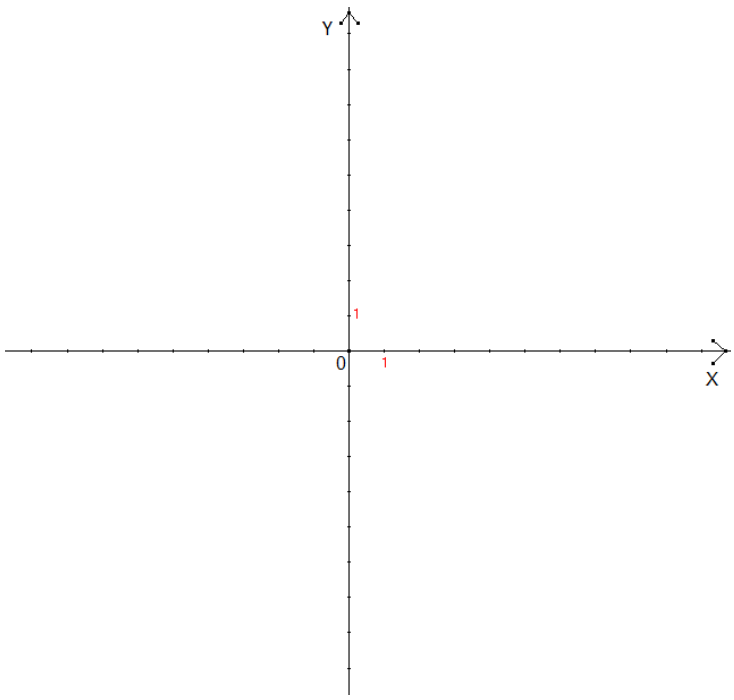


Figura 65 – Plano Cartesiano

7. Você consegue calcular o ponto médio M do segmento $\overline{CD}$ da questão 6 ?
   Determine as coordenadas de M e marque este ponto no segmento.

8. Esboce a reta que passa pelos pontos $A(-2, 8)$ e $B(3, -2)$.(Figura 66)

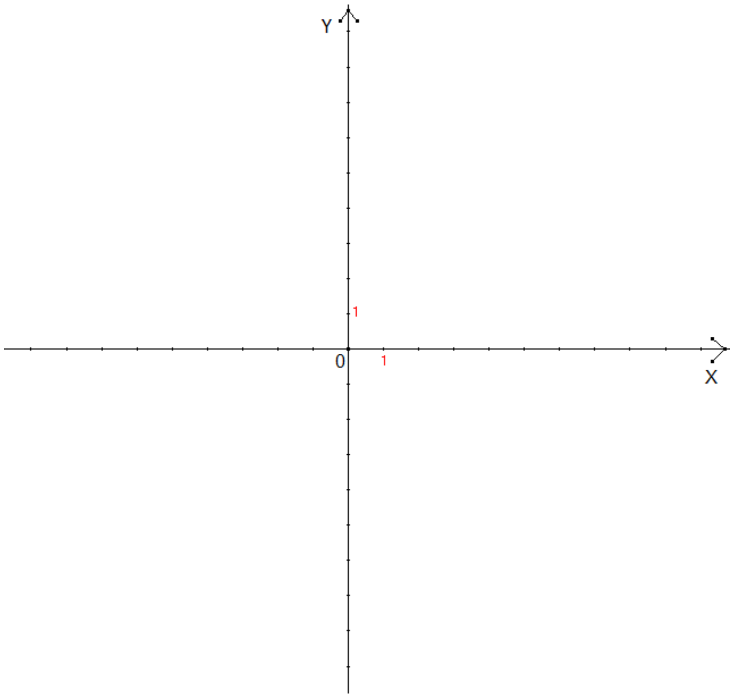


Figura 66 – Plano Cartesiano

9. Esboce a reta de equação geral: $x + y - 5 = 0$.(Figura 67)
   Encontre, também, a sua equação reduzida.

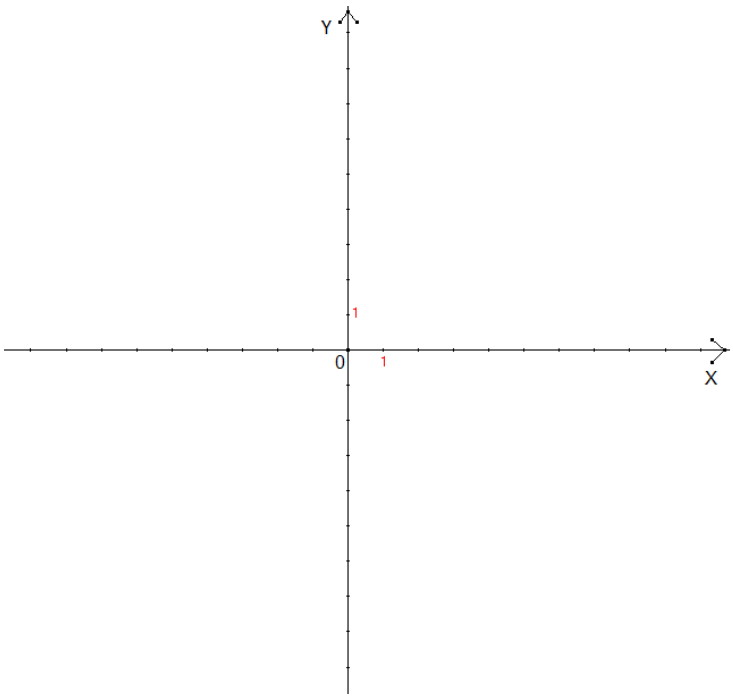


Figura 67 – Plano Cartesiano

10. A reta r possui equações paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2t \end{cases}$$ Esboce esta reta r. (Figura 68)

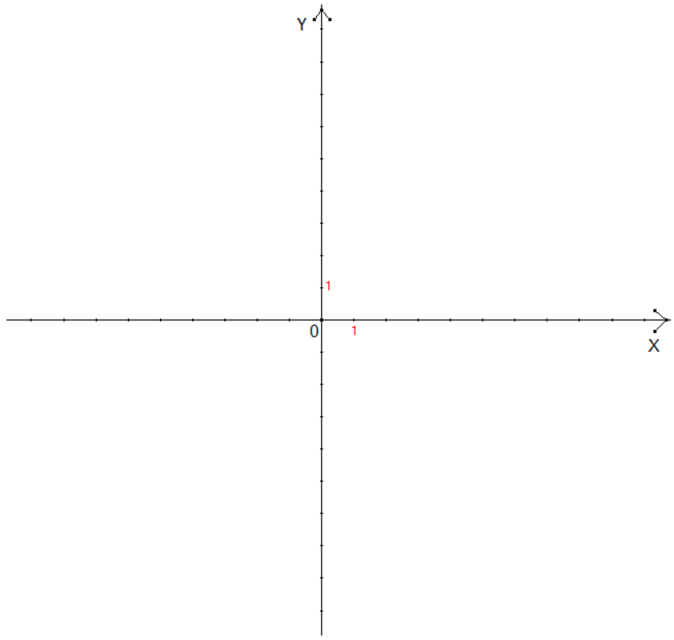


Figura 68 – Plano Cartesiano

11. A reta de equação reduzida $y = 2x - 3$ atravessa (cruza) que quadrantes ? Construa seu gráfico. Os pontos $A(0, -3)$ e $B(2, 1)$ pertencem a esta reta? Calcule a distância entre os pontos A e B. (Use a Figura 69)

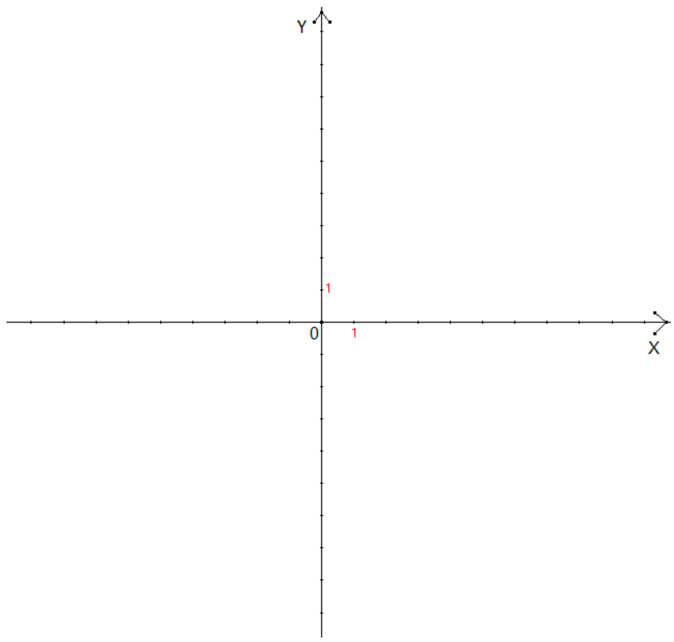


Figura 69 – Plano Cartesiano

12. Sabemos que por dois pontos passa somente uma única reta. Trace a reta r determinada pela função: $f(x) = 2x + 3$. (Use a Figura 70)
    Encontre e trace a reta s paralela à reta r e que passa pelo ponto $P(0, -2)$.

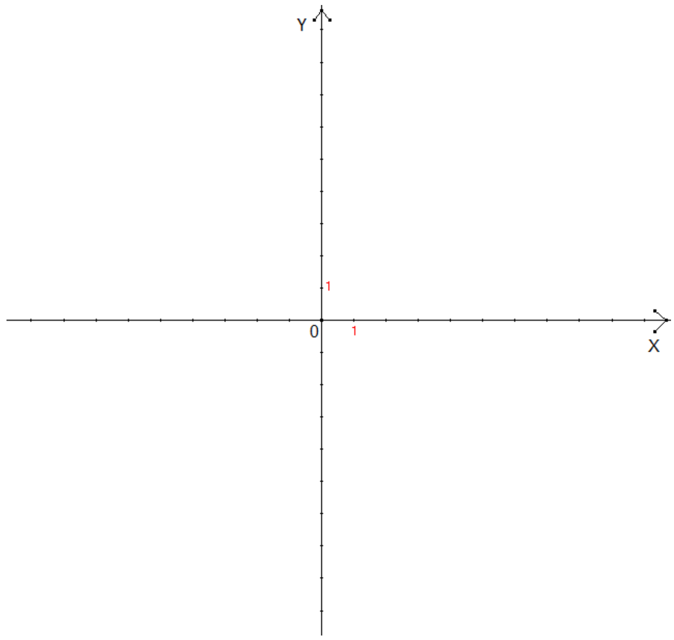


Figura 70 – Plano Cartesiano

13. Utilize o plano cartesiano (Use a Figura 71) para traçar a reta que passe pelos pontos $A(-3, 1)$ e $B(1, -3)$.
    Qual é o seu coeficiente angular? E o seu coeficiente linear?

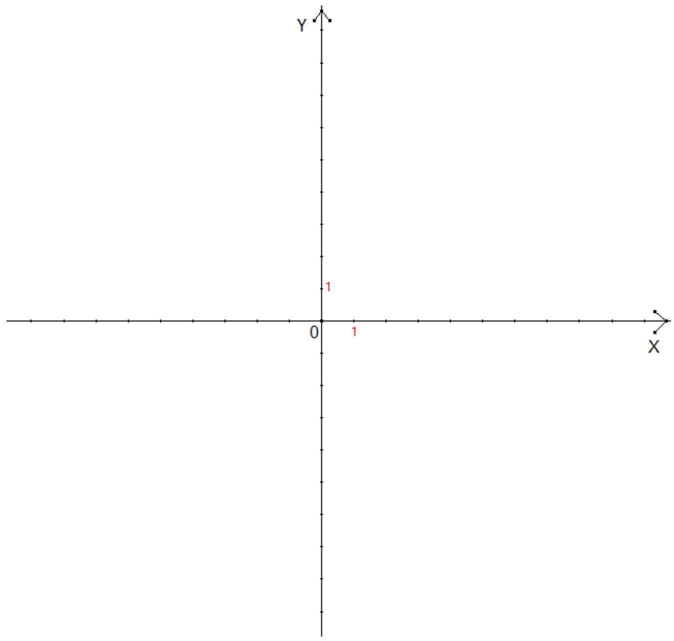


Figura 71 – Plano Cartesiano

14. Trace o segmento $\overline{AB}$ no plano cartesiano (Use a Figura 72), onde $A(0,0)$ *e* $B(3,0)$. Você é capaz de construir dois quadrados (ABCD e ABEF) tendo como base o lado AB?

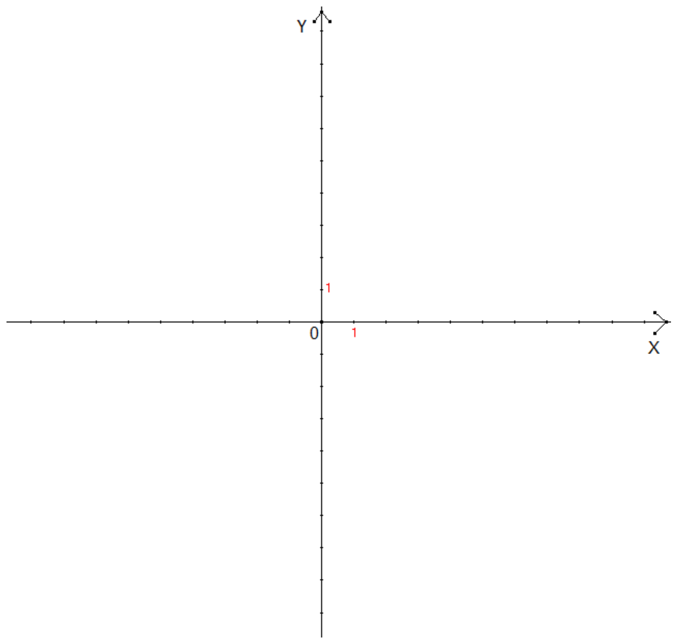


Figura 72 – Plano Cartesiano

15. Ao se girar o segmento $\overline{AB}$, onde $A(0,0)$ e $B(-3,3)$ em torno dos eixos x e, em seguida, em torno do eixo y; que figuras são formadas?(Use a Figura 73)

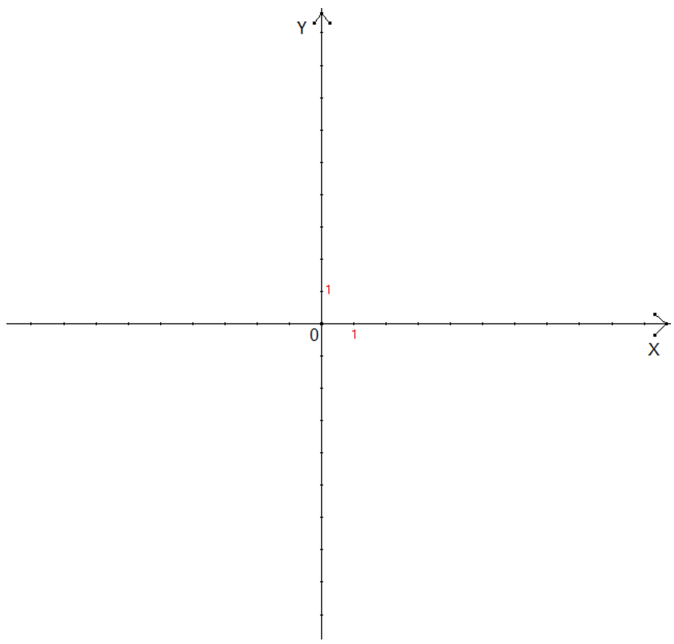


Figura 73 – Plano Cartesiano

16. Aproveitando esta mesma idéia, experimente rotacionar o segmento $\overline{AB}$ onde $A(3,2)$ e $B(5,5)$ ao redor dos eixos x e y, respectivamente. (Use a Figura 74). Que figuras são formadas?

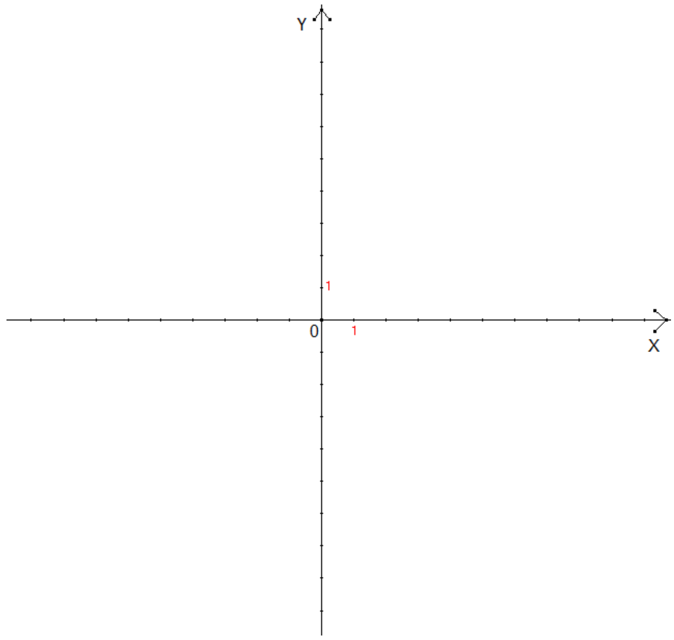


Figura 74 – Plano Cartesiano

17. Usando o plano cartesiano (Use a Figura 75), esboce a parábola $y = x^2$ cujo domínio é $[-3,3]$. Agora imagine esta parábola girando ao redor do eixo y. Depois gire-a em torno do eixo x. Tente esboçar as trajetórias e as figuras formadas ao redor destes eixos.

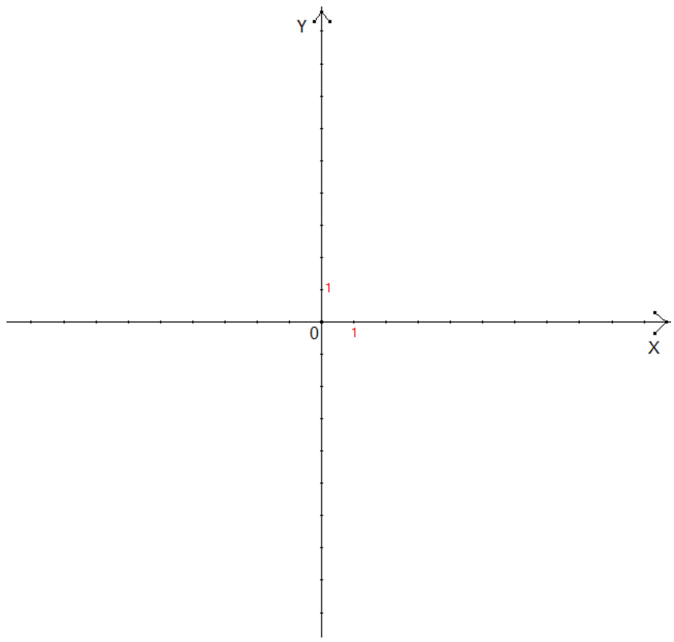


Figura 75 – Plano Cartesiano

Atividades referentes ao grupo 2 (Espaço Tridimensional).

1. Existe algum plano cartesiano que você conheça onde podemos localizar o ponto P(2,1,3)? R:

2. Você saberia traçar um plano cartesiano com 3 eixos perpendiculares entre si? R:

3. O que são octantes? Que outro nome é dado ao eixo z? R:

4. Localize no espaço tridimensional a seguir (Use a Figura 76) os seguintes pontos: $A(3,2,5)$ $B(-4,1,2)$ $C(2,-5,2)$ $D(-3,-5,3)$ $E(5,2,-4)$

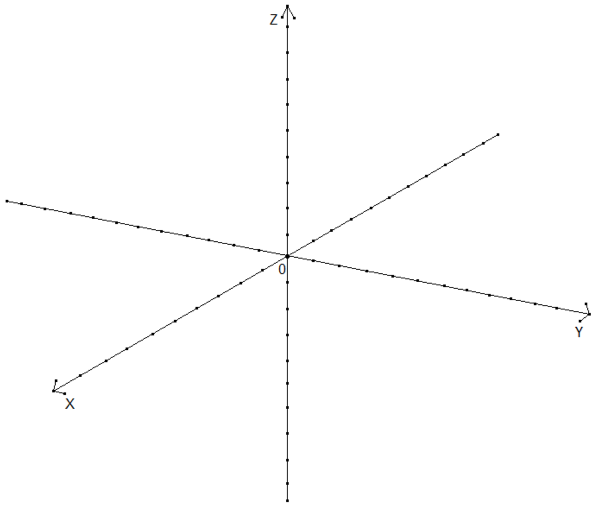


Figura 76 – Plano Cartesiano Tridimensional

5. Construa o segmento de reta $\overline{AB}$ que passa pelos pontos $A(5,1,3)$ e $B(7,8,2)$.(Use a Figura 77)

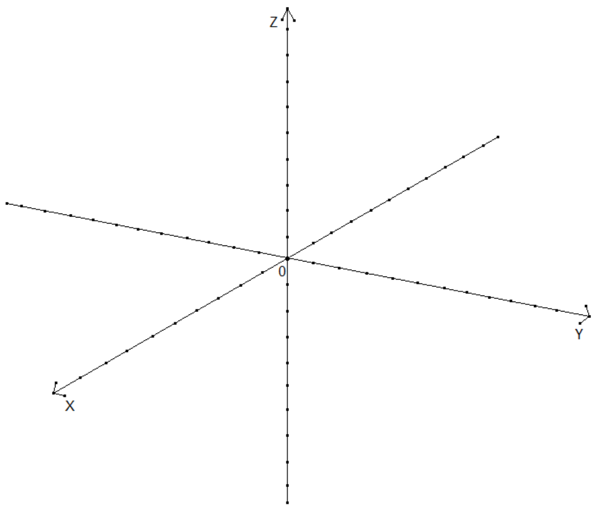


Figura 77 – Plano Cartesiano Tridimensional

6. Você consegue traçar um segmento de reta que vai da origem do espaço tridimensional até o ponto $A(2,7,2)$? (Use a Figura 78)

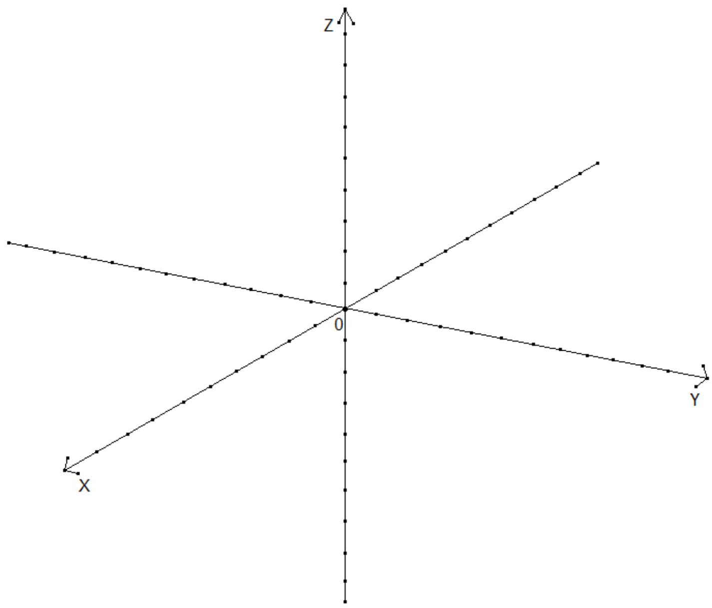


Figura 78 – Plano Cartesiano Tridimensional

7. Usando o espaço tridimensional, esboce a reta cujas equações paramétricas são:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = 4 - 2t \; (t \in \Re) \end{cases}$$
(Use a Figura 79)

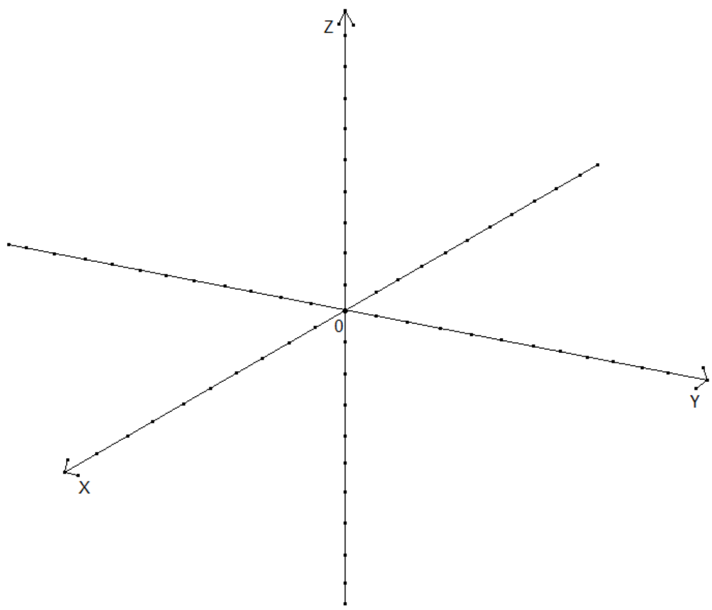


Figura 79 – Plano Cartesiano Tridimensional

8. Trace o segmento de reta $\overline{AB}$, onde A está na origem e o ponto B possui coordenadas $B(0,3,5)$. Agora gire este segmento em torno do eixo das cotas. Que figura você consegue observar? (Use a Figura 80)

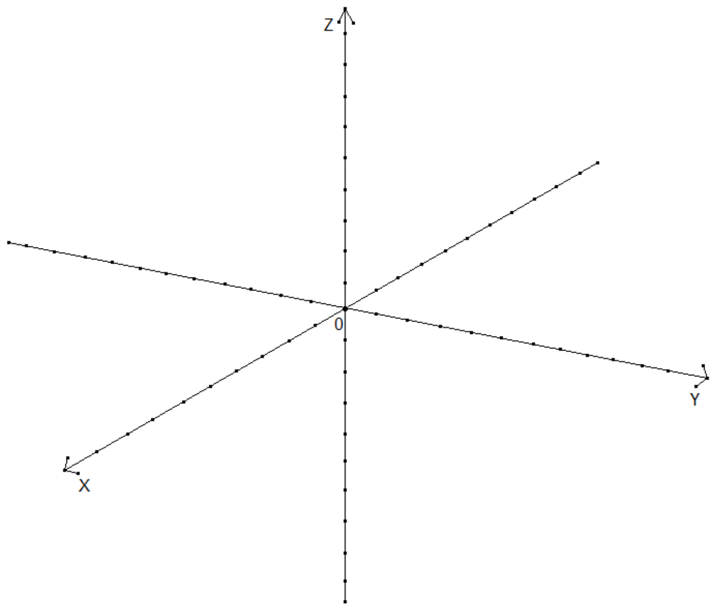


Figura 80 – Plano Cartesiano Tridimensional