MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO UTILIZANDO ORIGAMI

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2014

MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO UTILIZANDO ORIGAMI

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **60/2014**

Almeida, Mikelle Rodrigues de
Introdução dos pontos notáveis de um triângulo utilizando origami / Mikelle Rodrigues de Almeida. – Campos dos Goytacazes, 2014.
56 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2014.
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 41-43. .
1. GEOMETRIA PLANA 2. ORIGAMI 3. PONTOS NOTÁVEIS 4. TRIÂNGULOS 5. MATEMÁTICA (ENSINO FUNDAMENTAL) – ESTUDO E ENSINO I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516.22

MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO UTILIZANDO ORIGAMI

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 28 de novembro de 2014.

Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Arilise Moraes de Almeida Lopes
D.Sc. - IF Fluminense

Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF

Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Agradecimentos

A DEUS, por ter me dado forças para prosseguir na caminhada e permitido realizar mais este sonho.

Aos meus pais, pelo amor, carinho e pelo apoio em todos os momentos, mas principalmente porque me deram a educação sem a qual eu não teria chegado a lugar algum.

Aos meus irmãos, Michelle e Maurício, pela força, amizade e incentivo.

Aos meus sobrinhos, Brayan, Julia e Pietro, que me proporcionaram alegrias em momentos difíceis.

Ao meu marido, Márcio, pelo amor, incentivo, paciência e companheirismo.

Aos meus colegas de mestrado, que compartilharam momentos de saber e amizade no decorrer dessa trajetória.

A todos os meus amigos, de modo especial a Josie Vasconcellos, Lívia Azelman e Paula Eveline pelos momentos de muito estudo, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos.

A todos os professores do PROFMAT, que contribuíram, cada um a seu modo, para minha formação.

Ao orientador, Geraldo Oliveira, por acreditar em meu trabalho.

Aos professores Arilise Lopes, Liliana Mescua e Oscar La Torre por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho e pelas valorosas contribuições para o mesmo.

Aos participantes da experimentação das atividades, que contribuíram para a realização deste trabalho.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a concretização desta pesquisa.

"Ninguém começa a ser professor numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanente na prática e na reflexão sobre a prática."

Paulo Freire

Resumo

O trabalho de pesquisa desenvolvido nesta dissertação tem como objetivo investigar as possibilidades de se utilizar a técnica de dobradura denominada Origami como apoio no ensino de Matemática. Sendo assim, foi realizada uma pesquisa qualitativa na qual foi usado o método de estudo de caso, que teve como entidade estudada um grupo de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Foram elaboradas e experimentadas atividades, com instruções e ilustrações, que utilizam o origami para introduzir conceitos de Geometria, sendo o foco do trabalho os pontos notáveis de um triângulo. Os dados foram obtidos por meio de observações. A análise dos mesmos aponta que este estudo contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem do tema proposto.

Palavras-chaves: geometria plana, origami, pontos notáveis, triângulos, matemática (ensino fundamental) - estudo e ensino.

Abstract

The research developed in this thesis aims to investigate the possibilities of using the technique of folding called Origami for support in teaching Mathematics. Therefore, a qualitative study in which we used the method of case study, which had the organization studied a group of 8th graders of elementary school was held. Were prepared and experienced activities with instructions and illustrations, using origami to introduce concepts of Geometry, being a focus of the work notable points of a triangle. Data were collected through observations. The analysis of the data indicates that this study has contributed to the process of teaching and learning of the subject.

Key-words: planar geometry, origami, notable points, triangles, mathematics (elementary school) - study and teaching.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Diante das dificuldades encontradas em ensinar matemática, professores estão utilizando novos recursos no qual o objetivo é fazer com que os alunos despertem um maior interesse pelo estudo desta matéria (WANDERLINDE, 1998).

Partindo deste pressuposto, este trabalho foi desenvolvido com o intuito de apresentar uma proposta didática e habilitar os participantes desta atividade na utilização de dobraduras para o ensino e aprendizagem de Pontos Notáveis, possibilitando a construção de conceitos e traçar relações matemáticas de maneira dinâmica, lúdica e manipulável, de modo a contribuir no Ensino de Matemática.

Dessa forma, o uso do origami contribui para o desenvolvimento intelectual do aluno, pois exige concentração, observação, persistência, atenção, autoconfiança, esforço pessoal, além de estimular a imaginação e desenvolver a destreza manual (FOELKER, 2003). Sendo assim, os alunos ampliarão seus conhecimentos, interagindo a Matemática com a Arte, ou seja, propiciando uma abordagem de trabalho interdisciplinar.

De acordo com Borba (2006) o uso de dobraduras no Ensino de Matemática está tornando-se cada vez mais reconhecido como um instrumento pedagógico interessante e muitas vezes eficaz, tanto pelo seu caráter lúdico quanto pela sensação de descoberta que por vezes provoca. E Wanderlinde (1998) afirma ainda que ao utilizarem materiais exploratórios os educandos tornam-se mais criativos, concentrados, participativos e motivados.

Van Hiele (1986 *apud* RANCAN,GIRAFFA, 2012) cita outros fatores quando considera que a visualização é muito importante para a construção do conhecimento geométrico. No início, o aluno percebe a figura como um todo e, aos poucos, passa a perceber suas relações e propriedades. Desse modo, o origami pode ser uma ferramenta para o ensino de matemática.

Para os PCN (1997),

> *Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 39)*

Diante do exposto, defini-se a seguinte questão de pesquisa: **Como o uso de origami auxilia no estudo de Pontos Notáveis de um triângulo?** Com base neste contexto, esta pesquisa busca dar uma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dos Pontos Notáveis. Pretende-se aliar conceitos e propriedades de pontos notáveis à técnica do Origami, o qual será utilizado como recurso para construção dos mesmos de modo a favorecer a compreensão de alguns conceitos e propriedades de pontos notáveis.

Para responder à questão de pesquisa, foi realizado um estudo de Pontos Notáveis por meio do Origami. E foi escolhida como entidade de pesquisa uma turma de 8º ano de uma escola pública de Campos dos Goytacazes.

Este trabalho consta de três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, encontra-se os conceitos básicos desta pesquisa estruturado em três seções: Origami, Definições e Teoremas e Pontos Notáveis. Na seção de Origami, abordam-se alguns aspectos e fatos da mesma. A seção de Definições e Teoremas é composta por definições e teoremas relativos ao uso dos mesmos nas demonstrações de pontos notáveis. A seção referente aos Pontos Notáveis contém as demonstrações dos pontos notáveis utilizados neste trabalho.

No segundo capítulo, constam a metodologia utilizada nesta pesquisa e a elaboração das atividades propostas. Foi utilizada a metodologia da pesquisa qualitativa e empregou-se o método de pesquisa de estudo de caso, no qual utilizaram-se técnicas para a coleta de dados que foi a observação. Na seção referente a elaboração das atividades, descrevem-se as atividades desenvolvidas bem como os seus objetivos.

O terceiro capítulo apresenta a descrição e análise do processo de aplicação das atividades desenvolvidas com o público alvo da pesquisa.

Nas considerações finais, são destacados pontos relevantes do trabalho, bem como a resposta à questão da pesquisa, sugestões de outros recursos pedagógicos para o desenvolvimento da atividade proposta e sugestões para pesquisas futuras.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Origami

1.1.1 Parte Histórica

A origem da palavra origami advém do japonês cuja denominação é “Ori” que significa dobrar e “Kami” que significa ao mesmo tempo papel e Deus, uma indicação da importância do papel para os japoneses.

Apesar do Japão ser considerado o berço do origami, diz-se também que ele pode ter surgido na China, onde a história do papel é bem mais antiga. Na China a invenção do papel foi creditada a T'sai Lao em 105 d C., administrador no palácio do imperador chinês, que começou a misturar cascas de árvores, panos e redes de pesca na tentativa de substituir a sofisticada seda que se utilizava para escrever. Somente no século VI d.C. o papel chegou ao Japão. Hoje em dia o papel ainda é amplamente utilizado na cultura daquele país e tem uma grande importância no cotidiano dos japoneses. Não apenas para confecção do origami, mas também em biombos, esteiras, luminárias, bolsas e sombrinhas.

De acordo com Braz (2013), o trabalho com origami pode ser dividido em dois tipos: o origami tradicional, que utiliza apenas uma peça de papel e não envolve o uso de cortes nem colagem, e o origami modular, que se baseia na construção de módulos ou unidades, na qual se dobram várias peças independentes transformando-as em módulos, que possuem aberturas que serão unidas entre si e cujo objetivo é dar origem, quase sempre, a corpos geométricos.

No Origami tradicional, o papel utilizado para as dobragens tem a forma geométrica de um quadrado, que pode ter várias cores, de forma a permitir a construção de objetos mais apelativos. No entanto, a forma do papel não é uma característica obrigatória.

Existem vários tipos de Origami: Origami simples, que se obtém ao fazer dobragens diversas num pedaço de papel; Origami composto, que se obtém por união de vários origami simples; Origami modular, que consiste num origami composto em que as peças são todas geometricamente iguais.

Monteiro (2008) afirma que, na década de 1970 começou-se a realizar estudos para enumerar as possíveis dobragens em Origami e a estudar combinações entre elas. Destacou-se nesta área Humiaki Huzita, que descreveu seis operações básicas para definir um único vinco que por si só, alinha várias combinações de pontos e retas já existentes. Estas seis operações tornaram-se conhecidas por Axiomas de Huzita e forneceram a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com origami.

E ainda segundo Monteiro (2008), mais tarde, em 1989, Jacques Justin publicou um artigo em que apresentava não seis, mas sim sete combinações possíveis com uma única dobragem. No entanto, foi apenas em 2002, quando Koshiro Hatori apresentou uma dobragem que não era descrita pelos axiomas de Huzita, que surgiu formalmente um sétimo axioma.

Os sete axiomas tornaram-se conhecidos por Axiomas de Huzita-Hatori e vieram contribuir para o mundo científico do origami relativamente à completude da lista.

Em 2003, o físico americano Robert Lang dá a dúvida por terminada. Afirma que não existem mais axiomas e publica, na sua página da internet, um estudo que demonstra a sua convicção.

Dentro da teoria matemática de construções geométricas do origami, os sete axiomas de Huzita-Hatori definem o que é possível construir com uma única dobragem, fazendo incidir combinações de pontos e retas.

1.1.2 Origami como ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem

Origami é a arte tradicional japonesa de dobrar papéis. Trata-se de uma forma de representação visual/escultural definida principalmente pela dobradura de papéis. De uma ou mais folhas simples de papel, emerge um universo de formas. Genova (2008) afirma que o Origami é uma forma de expressão. Quem manipula o papel abre uma porta de comunicação com o outro, além de valorizar o movimento das mãos, estimular as articulações e o cérebro.

As atividades com dobraduras manuais possuem uma dinâmica que valoriza a descoberta, a conceituação, a construção manipulativa, a visualização e a representação geométrica. O Origami pode ser utilizado de várias maneiras como um recurso para a exploração das propriedades geométricas das figuras planas e espaciais. A construção e utilização de exemplos e sua análise detalhada trazem algumas sugestões, para bem aproveitar essa alternativa de trabalho no ensino da Geometria, uma vez que a manipulação com objetos permite a construção dos modelos mentais dos diversos elementos geométricos. Segundo Rancan e Giraffa (2012, p. 2), "no processo de construção e de desconstrução de um Origami, são desenvolvidos aspectos como a observação, o raciocínio, a lógica, a visão espacial e artística, a perseverança, a paciência e a criatividade."De modo que, ao avaliar os passos de construção de um Origami, percebe-se que diversas dobraduras foram utilizadas para se chegar ao resultado. E ao observar mais atentamente os passos utilizados, verifica-se que novos padrões foram gerados. Além de, poder compreender, por meio da visualização dos ângulos e das linhas vincadas no papel definições como plano, ponto, retas paralelas, retas concorrentes, bissetriz e diagonal, entre outras.

De acordo com Lazzari e Lima (2013), o alemão Friedrich Froebel, inventor do Jardim da Infância no século XIX, foi um dos primeiros educadores a utilizar as dobraduras em suas práticas pedagógicas, ele dividiu esta arte em três estágios. Um destes estágios denominado dobras da verdade o qual de acordo com Froebel se refere às dobraduras que trabalham com a geometria elementar tendo esta o propósito de deixar que o educando descobrisse por si só os fundamentos da Geometria Euclidiana.

Percebe-se que a utilização desta arte milenar para viabilizar o processo de ensino e aprendizagem vem sendo utilizado a tempo e em diversas abordagens incluindo o ensino da Matemática, sendo que nesta o uso desta arte de dobrar papel se tornou uma alternativa para os educadores no desenvolvimento do pensamento geométrico e raciocínio visual além de trabalhar a matemática intuitiva no educando.

Com relação ao uso do Origami como recurso para contribuir e facilitar no ensino da geometria Rêgo, R. G.; Rêgo, R. M. e Gaudêncio (2003, p.18) destacam que:

> *O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte.*

Nesse sentido, ao empregar as dobraduras como recurso auxiliador e inovador para o ensino da Geometria é possível a construção do conhecimento matemático por meio de um material concreto, este que permite ainda ao educando representar conceitos e relações matemáticas favorecendo no processo de visualização, análise e assimilação de definições geométricas, estas que, por muitas vezes é de difícil compreensão para o educando de maneira inteiramente abstrata.

Leroy (2010) afirma que com o intuito de propiciar aulas mais dinâmicas e melhor compreensão dos conceitos estudados, é possível, por meio do origami, formular relações entre a confecção do material concreto e abstrações de conceitos estudados. Sendo assim, os educandos podem verificar os conceitos geométricos estudados por meio das dobraduras, sem abordar a demonstração matemática dos mesmos.

De acordo com Rêgo, R. G.; Rêgo, R. M. e Gaudêncio (2003), o uso do origami permite o desenvolvimento de atividades voltadas para:

- A construção de conceitos: por mais simples, as dobraduras apresentam elementos que podem ser explorados na construção de conceitos matemáticos diversos.

- A discriminação de forma, posição e tamanho: ao dobrar um quadrado de papel realiza-se transformações de forma, posição ou tamanho de uma figura, estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico, aritmético e algébrico.

- A leitura e interpretação de diagramas: constituindo uma linguagem simbólica completa e diferenciada de outras linguagens usadas para a comunicação de idéias, a linguagem do origami é universal, sua interpretação facilita o uso de qualquer livro de dobraduras, além de introduzir o desenho técnico em sala de aula;

- A construção de figuras planas e espaciais: a grande possibilidade de construção de formas sejam geométricas ou não, plana ou espacial, torna o origami uma arte que pode ser explorada em diversas formas;

- O uso de termos geométricos em um contexto: a descrição oral dos passos de uma dobradura, tradição mantida por séculos por artistas do oriente, é facilitada quando quem o faz conhece os elementos geométricos, sua definição e nomenclatura, presentes em cada passo. O uso dos termos geométricos corretos, em um contexto, estimula a aprendizagem;

- O desenvolvimento da percepção e descriminação de relações planas e espaciais: a percepção geométrica plana e espacial, bem como a capacidade de estabelecer relações entre elementos geométricos planos e espaciais, tem seu desenvolvimento estimulado com a prática das dobraduras. Ações como observar, compor, decompor, transformar, representar e comunicar são facilidades com o desenvolvimento de atividades geométricas envolvendo o origami;

- A exploração de padrões geométricos: a habilidade em perceber padrões, sejam numéricos ou geométricos, promove a aplicação de conceitos matemáticos em outros campos do conhecimento;

- O desenvolvimento do raciocínio tipo passo a passo: cada dobra envolve uma sequência de passos, que constitui uma maneira de resolução presente em problemas matemáticos diversos;

- O desenvolvimento do senso de localização espacial: por meio da exploração dos elementos de linguagem relativos à posição no espaço, como "cima", "baixo", "esquerda", "direita", etc.

Desta forma, o trabalho com dobraduras é enriquecedor, no que se refere às inúmeras possibilidades que ele oferece-nos diversos ramos da Matemática. A exploração geométrica que é possível ser feita com o Origami utiliza conceitos básicos relacionados a ângulos, planos, vértices, paralelismo, semelhança de figuras, entre outros, as noções de proporcionalidade, frações, aritmética, álgebra e funções, são fortemente evidenciadas nesta prática.

1.2 Definições e teoremas

Nesta seção serão apresentados algumas definições e teoremas que serão utilizados na demonstração dos pontos notáveis apresentados neste trabalho. As demonstrações a seguir tem como referência Dolce e Pompeo (2005) e Muniz Neto (2012). **Ponto médio de um segmento**

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ (Figura 1).

$$M \in \overline{AB} \text{ e } \overline{MA} \equiv \overline{MB}.$$

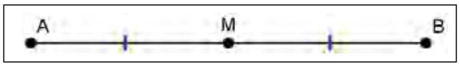


Figura 1 – Ponto médio de um segmento

Retas perpendiculares

Duas retas são *perpendiculares* (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes

$$a \perp b \iff (a \cap b = P \text{ e } a_1\hat{\mathrm{P}}b_1 = a_1\hat{\mathrm{P}}b_2)$$

em que a_1 é umas das semirretas de a de origem P e b_1 e b_2 são semirretas opostas de b com origem em P (Figura 2).

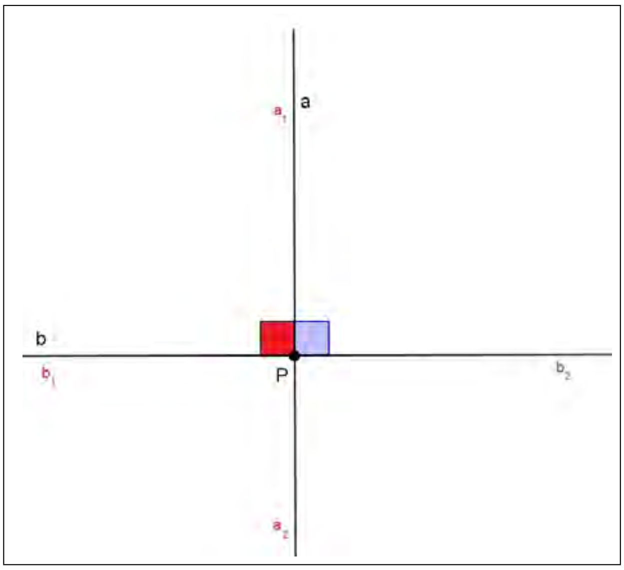


Figura 2 – Retas perpendiculares

Duas semirretas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidos em retas perpendiculares e têm um ponto comum.

Um Ângulo $a_1\hat{\mathrm{P}}b_1$ é reto se a semirreta a_1 é perpendicular à semirreta b_1.

Bissetriz de um ângulo

Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais (Figura 3). Assim,

$$\overrightarrow{OC} \text{ é bissetriz de } \angle AOB \iff A\hat{O}C = B\hat{O}C.$$

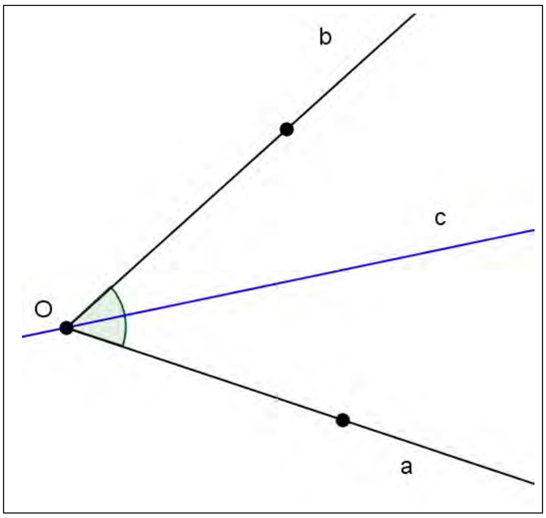


Figura 3 – Bissetriz de um ângulo

Pode-se provar que a bissetriz interna de um ângulo, caso exista, é única.

Proposição 1: Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \iff P \in$ (bissetriz de $\angle AOB$).

Demonstração: Suponhamos, primeiro, que P pertence à bissetriz de $\angle AOB$ (Figura) e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Como $M\hat{O}P = N\hat{O}P$, $O\hat{M}P = O\hat{N}P = 90°$e OP é comum, segue que os triângulos OMP e ONP são congruentes por Lado, Ângulo e Ângulo oposto (LAA$_O$). Logo, $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO})$ (Figura 4).

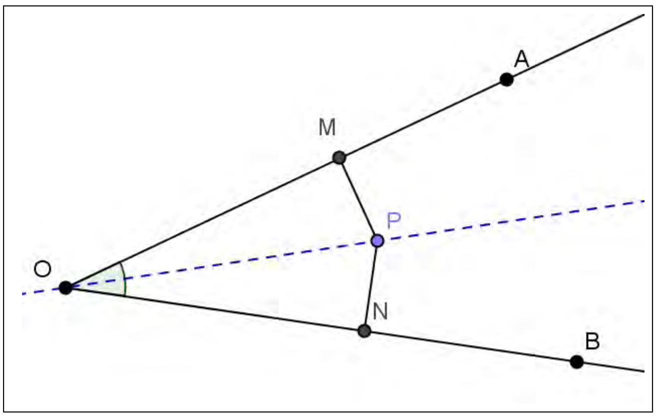


Figura 4 – P pertence a bissetriz do ângulo AOB implica na distância de P a semirreta AO ser igual a distância de P a semirreta BO

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, no qual M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Então, os triângulos MOP e NOP são novamente congruentes ($\overline{PM} = \overline{PN}$ e OP comum). Daí, $M\hat{O}P = N\hat{O}P$, donde P está sobre a bissetriz de $\angle AOB$.

Proposição 2: Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz de AB é o lugar geométrico (LG) dos pontos do plano que equidistam de A e de B.
Demonstração: Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB (Figura 5). Se $P \in m$, então, no triângulo PAB, PM é mediana e altura e, portanto, o triângulo PAB é isósceles de base AB. Logo, $\overline{PA} = \overline{PB}$.

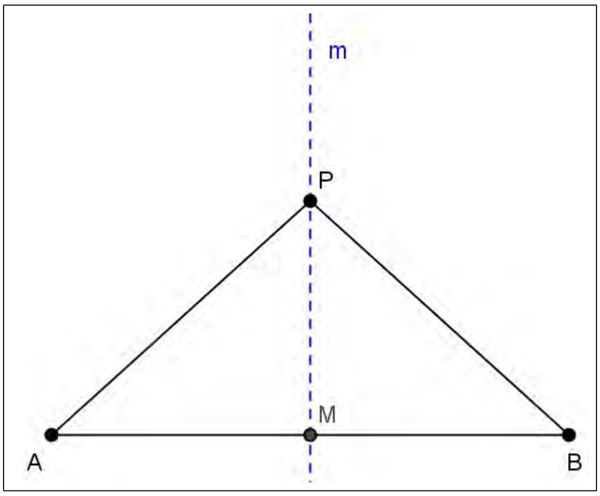


Figura 5 – P pertence a mediatriz de AB implica em $PA = PB$

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$ (Figura 6). Logo, o triângulo PAB é isósceles de base AB, do qual segue que a mediana e a altura relativa à base coincidem. Como a mediana de PAB relativa a AB é $\overline{PM}$, segue que $PM \perp AB$, o que significa dizer que $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de AB.

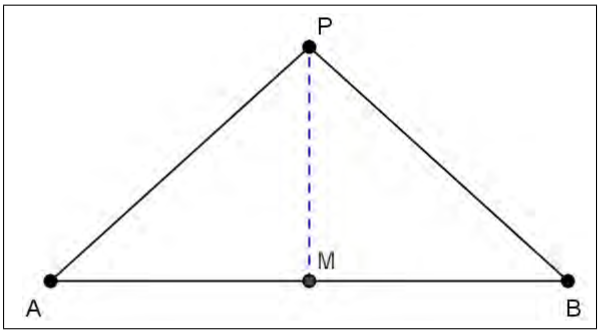


Figura 6 – $PA = PB$ implica em P pertence a mediatriz de AB

1.3 Pontos Notáveis

Nesta seção será apresentado alguns pontos notáveis de um triângulo, bem como algumas de suas propriedades. As demonstrações , a seguir, tem como base Muniz Neto (2012).

1.3.1 Incentro

Proposição 1.3.1 As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o **incentro** do triângulo.
Demonstração:
Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle$A, $\angle$B e $\angle$C do triângulo ABC (Figura 7) e I o ponto de interseção das r e s. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como lugar geométrico que I equidista dos lados AB e AC de ABC. Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista dos lados AB e BC. Portanto, I equidista de AC e BC e, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\angle$C, ou seja, à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I.

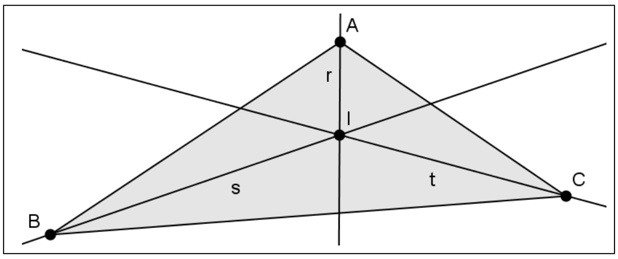


Figura 7 – Incentro de um triângulo

1.3.2 Circuncentro

Proposição 1.3.2 Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o **circuncentro** do mesmo.
Demonstração:
Seja ABC um triângulo qualquer, r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados BC, CA e AB, e O o ponto de interseção das retas r e t (Figura 8).

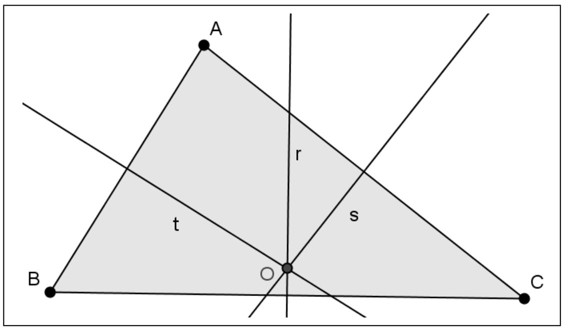


Figura 8 – Circuncentro de um triângulo

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como lugar geométrico, temos $\overline{OB} = \overline{OC}$ (pois $O \in r$) e $\overline{OC} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$ e segue novamente da caracterização da mediatriz como lugar geométrico que $O \in t$.

1.3.3 Baricentro

Proposição 1.3.3 Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o **baricentro** do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2:1.

Demonstração:

Sejam N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AC e AB, e seja $BN \cap CP = G_1$ (Figura 9). Sejam, ainda, S e T os pontos médios dos segmentos BG_1 e CG_1, respectivamente. Pelo teorema da base média, tanto NP quanto ST são paralelos à BC e têm comprimento igual à metade de $\overline{BC}$. Portanto, $\overline{NP} = \overline{ST}$ e $\overleftrightarrow{NP} \| \overleftrightarrow{ST}$, de modo que $NPST$ é um paralelogramo. Assim,$\overline{PG_1} = \overline{G_1T}$ e $\overline{NG_1} = \overline{G_1S}$. Como $\overline{BS} = \overline{SG_1}$ e $\overline{CT} = \overline{TG_1}$, segue que $\overline{BS} = \overline{SG_1} = \overline{G_1N}$ e $\overline{CT} = \overline{TG_1} = \overline{G_1P}$ o que garante ser $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1P}$.

Se M for o ponto médio de BC e G_2 for o ponto de interseção das medianas AM e BN, concluímos, analogamente, que G_2 divide AM e BN na razão $2 : 1$ a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos G_1 e G_2 são tais que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2N}$. Isso implica em $G_1 \equiv G_2$. Chamando de G o ponto $G_1 \equiv G_2$, segue que AM, BN e CP concorrem em G e que G divide cada uma das medianas na razão $2 : 1$ a partir do vértice.

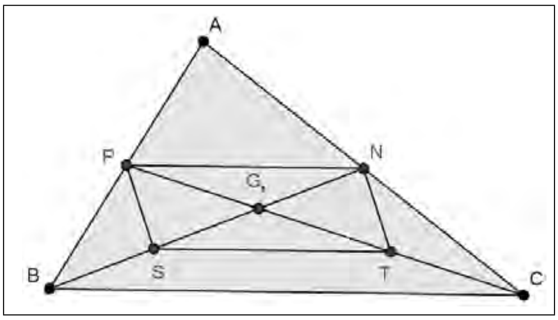


Figura 9 – Medianas e o Baricentro de um triângulo

1.3.4 Ortocentro

Proposição 1.3.4 Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o **ortocentro** do triângulo.
Demonstração:
Seja ABC um triângulo qualquer. Há de se considerar três casos:

Primeiro caso: ABC é retângulo (Figura 10). Suponha-se, sem perda de generalidade, que $\widehat{BAC} = 90°$. Então, A é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC. Como a altura relativa ao lado BC passa (por definição) por A, segue que as alturas de ABC concorrem em A.

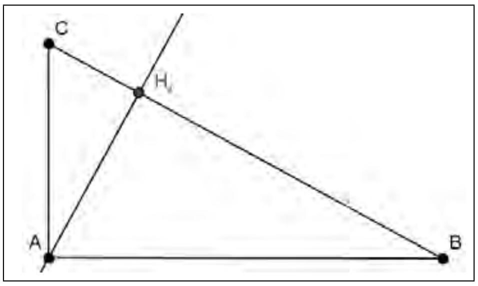


Figura 10 – Ortocentro de um triângulo retângulo

Segundo caso: ABC é acutângulo (Figura 11). Traça-se por A, B, C, respectivamente, retas r, s, t paralelas a BC, CA, AB, também respectivamente, e sejam $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$, $t \cap r = \{N\}$. Como os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, segue que $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$ e, daí, C é o ponto médio de MN. Analogamente, B é o ponto médio de MP e A o ponto médio de PN.

Por outro lado, a altura relativa a BC também é perpendicular a PN, já que BC e PN são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são perpendiculares, respectivamente, a MP e MN. Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo MNP. Contudo já foi provado que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de ABC devem ser concorrentes.

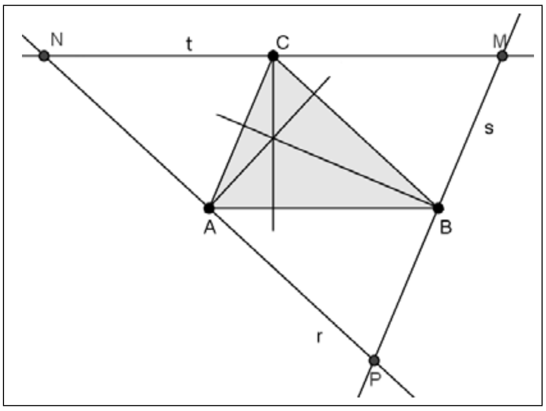


Figura 11 – Ortocentro de um triângulo acutângulo

Terceiro caso: ABC é obtusângulo. A demonstração é totalmente análoga à do segundo caso.

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

2.1 Pesquisa Qualitativa

Este trabalho tem por questão de pesquisa **Como o uso de origami auxilia no estudo de Pontos Notáveis de um triângulo?** Realizou-se, então, uma pesquisa qualitativa por meio do estudo de caso. Questões que se concentram em "como"e "por quê"são mais explicativas e por isso favorecem o uso do método de pesquisa de estudo de caso (YIN, 2010).

Oliveira (2010, p. 37) conceitua pesquisa qualitativa "como sendo um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação". Esta autora afirma, ainda, que uma abordagem qualitativa requer uma base teórica relativa ao objeto de estudo, observações e análise de dados (OLIVEIRA, 2010).

O método de estudo de caso, segundo Ponte (2006), visa conhecer em profundidade uma entidade e ressalta características que lhe são próprias, selecionando para o pesquisador aspectos de seu maior interesse. Neste trabalho, a entidade estudada é uma turma de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. A aplicação deste método assume uma investigação que busca descobrir o que existe de mais fundamental e característico e que, assim, possa colaborar para a compreensão total de determinado fato ou fenômeno da realidade empírica (PONTE, 2006; OLIVEIRA, 2010).

As técnicas utilizadas nesta pesquisa para coleta de dados foi a observação participante. É importante destacar que o estudo de caso favorece a utilização de diferentes fontes para coleta de dados, o que permite ao pesquisador levantar as características e compreender o objeto de estudo com maior relevância.

Segundo Creswell (2010, p. 214), "observações qualitativas são aquelas em que o pesquisador faz anotações de campo sobre o comportamento e as atividades dos indivíduos no local de pesquisa."Na técnica de observação, o pesquisador deve registrar as informações mais relevantes mediante ao observado, pois nem tudo pode ser registrado, para que posteriormente possa desenvolvê-las melhor (MOREIRA; CALEFFE, 2008).

Apesar de esta técnica ter algumas desvantagens como, por exemplo, o pesquisador não ter habilidades para a observação e poder existir dificuldades ao tentar observar mais de uma coisa ao mesmo tempo, as mesmas podem ser superadas e este recurso pode ser considerado confiável e válido para a pesquisa (MOREIRA; CALEFFE, 2008).

Nessa pesquisa, foi utilizada a observação durante a experimentação das atividades. Buscou-se por meio dessa técnica uma análise mais real do processo de construção do conhecimento. Anotações sobre as reações e descobertas durante a realização das mesmas foram feitas em todos os encontros. Estas foram muito importantes na análise final dos resultados dessa pesquisa.

Na próxima seção, serão descritas as atividades desenvolvidas para a proposta referente ao objeto de estudo, bem como o objetivo de cada uma.

2.2 Elaboração das atividades

As atividades elaboradas neste trabalho monográfico têm como objetivo introduzir os pontos notáveis de um triângulo com a utilização do origami.

Esse estudo promove a inserção do origami em sala de aula e a percepção das relações matemáticas presentes nos origamis. Elaborou-se uma apostila (Anexo A) constituída de construções e atividades. A parte referente às construções é subdividida em Axiomas de Huzita-Hatori, construções iniciais e de lugares geométricos. A parte referente às atividades foi dividida em seis atividades, sendo às quatro primeiras com as construções dos pontos notáveis e as atividades 5 e 6 para verificar algumas propriedades de pontos notáveis.

A seguir, serão expostas as atividades bem como os objetivos de cada uma.

2.2.1 Atividade 1

Essa atividade compõe-se de duas partes. A primeira tem como objetivo fazer com que os alunos façam as bissetrizes do triângulo e determinem o ponto de interseção com o auxílio do esquema de construção, disposto na apostila. A segunda é constituída de questões que têm por objetivo verificar propriedades referente ao incentro de um triângulo.

A questão 1.1 (Figura 12) tem como objetivo reconhecer a relação existente entre as bissetrizes de um triângulo, verificando que as mesmas se intersectam em um único ponto.

1.1) O que se pode observar em relação as três bissetrizes do triângulo?

Comentário:

Figura 12 – Atividade 1.1

O objetivo da questão 1.2 (Figura 13) é fazer com que os alunos, por meio da construção, observem que todo triângulo admite um círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Sendo tal círculo inscrito no triângulo e com centro no incentro do mesmo.

1.2) Com a construção das bissetrizes no triângulo, faça uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo passando pelo ponto I. Marque o ponto P de interseção entre a reta perpendicular com o lado do triângulo. Em seguida, faça uma circunferência com centro no ponto I (Incentro) e abertura até o ponto P. O que se pode observar em relação à circunferência?

Figura 13 – Atividade 1.2

2.2.2 Atividade 2

Assim como na Atividade 1, essa atividade também é composta de duas partes. A primeira tem como objetivo fazer com que os alunos construam as mediatrizes dos lados do triângulo com o auxílio do esquema de construção, disposto na apostila. Da mesma forma, ao final desta, é apresentada questões que têm por objetivo verificar propriedades do circuncentro de um triângulo.

A questão 2.1 (Figura 14) possibilita o reconhecimento da relação existente entre as mediatrizes de um triângulo, verificando que as mesmas se intersectam em um único ponto.

2.1) O que se pode observar em relação as três mediatrizes do triângulo?

Comentário:

Figura 14 – Atividade 2.1

A questão 2.2 (Figura 15) tem por objetivo perceber, por meio das construções, que todo triângulo admite um círculo passando por seus vértices. E que tal círculo é dito circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

> 2.2) Com a construção das mediatrizes no triângulo, faça uma circunferência com centro no ponto O (Circuncentro) e abertura até um dos vértices. O que se pode observar em relação aos outros vértices do triângulo? E com relação a circunferência?
>
> ____
>
> ____
>
> ____

Figura 15 – Atividade 2.2

2.2.3 Atividade 3

Da mesma forma que as atividades anteriores, essa atividade é composta de duas partes. A primeira propõe à construção das medianas dos lados de um triângulo tendo como suporte o esquema de construção, disposto na apostila. Ao final, é proposta a atividade 3.1 (Figura 16) para que os alunos possam verificar que em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o baricentro do triângulo.

> 3.1) O que se pode observar em relação as três medianas do triângulo?
>
> ____
>
> ____
>
> Comentário:__________________________________
>
> ____

Figura 16 – Atividade 3.1

2.2.4 Atividade 4

Essa atividade também é composta de duas partes. A primeira propõe à construção das alturas dos lados de um triângulo tendo como suporte o esquema de construção, disposto na apostila. Ao final, é proposta a atividade 4.1 (Figura 17) na qual os alunos verificam que em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o ortocentro do triângulo.

> 4.1) O que se pode observar em relação as três alturas do triângulo?
>
> ____
>
> ____
>
> Comentário:__________________________________
>
> ____

Figura 17 – Atividade 4.1

2.2.5 Atividade 5

A quinta atividade (Figura 18) busca verificar que em um triângulo equilátero os quatro pontos notáveis, estudados nas atividades anteriores, coincidem. Para tal atividade, os alunos devem fazer a construção, num triângulo equilátero, dos quatro pontos notáveis e, por meio de conjecturas, chegarem a conclusão de que os mesmos coincidem.

5) Faça a construção de todos os pontos notáveis no triângulo equilátero. Verifique o que pode ser observado com os quatros pontos notáveis?

Figura 18 – Atividade 5

2.2.6 Atividade 6

A atividade 6 (Figura 19) visa a verificar se num triângulo isósceles a mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base se sobrepõem. Nesta atividade, os alunos devem fazer a construção da mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base e chegarem a conclusão da propriedade proposta.

6) Em um triângulo isósceles, construa a mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base. O que se pode concluir em relação a esses segmentos?

Figura 19 – Atividade 6

Capítulo 3

Relato de experiência

A experimentação das atividades foi realizada com alunos de uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes. Esse trabalho ocorreu durante o horário de aula da referida turma, pois a autora do trabalho é professora da turma. O trabalho foi realizado em quatro encontros com duração de duas horas aulas cada um.

Como citado anteriormente, utilizou-se uma apostila (Anexo A), constituída de construções e atividades. O plano de ação encontra-se no Anexo B.

A seguir, serão descritos os quatro encontros.

3.1 Primeiro encontro

No início da aula, a professora explicou os objetivos da pesquisa e entregou a apostila e papéis, que seriam utilizados na construção dos entes geométricos solicitados, aos alunos. Perguntou-se aos mesmos se já tinham ouvido falar em Origami. Alguns disseram que sim, e foi perguntado em que momento ou o que eles lembravam. Disseram que pelo *tsuru*. De acordo com Rancan e Giraffa (2012), quando é mencionado o termo Origami, há uma associação com figuras de animais e objetos, geralmente planos, construídos por meio de dobraduras. O tema, então, foi introduzido fazendo a relação entre a Geometria Euclidiana e o Origami, para tal foi apresentado os axiomas de HUZITA-HATORI, dos quais foram utilizados nas atividades os axiomas 1, 2 e 4. Tais axiomas estão dispostos na apostila entregue aos alunos, com o objetivo de apresentar e facilitar a compreensão do Origami. Borba (2006) afirma que, a intenção não é apenas que o aluno siga as instruções e execute-as, mas que experimente e reflita e, sempre que possível, chegue às suas próprias conclusões verbalizando-as para os seus colegas. Os alunos entenderam os quatro primeiros axiomas, porém sentiram dificuldades nos três últimos, os quais envolviam mais entes geométricos, tais como retas e pontos num mesmo axioma.

Em seguida, deu-se início às construções iniciais, que servem de pré-requisitos para a construção dos pontos notáveis. A primeira construção foi de uma reta que passa por dois pontos distintos. Foi solicitado aos alunos que marcassem dois pontos distintos no papel entregue. E após, que fizessem uma dobra que passa por A e B (Figura 20), essa dobra representa a reta que passa pelos pontos A e B. Esta construção foi feita sem dificuldades pelos alunos.

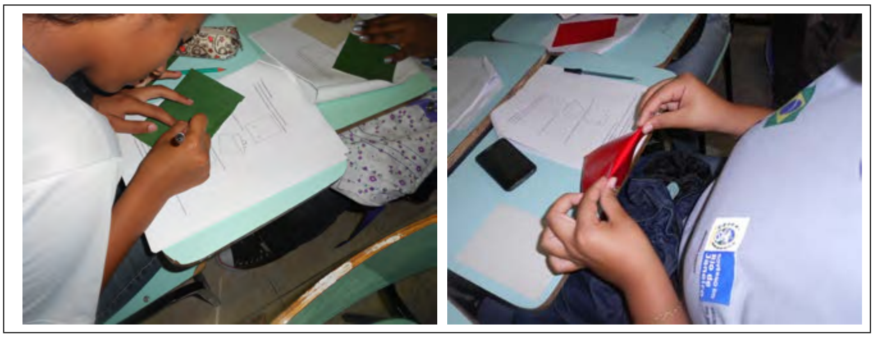


Figura 20 – Alunos construindo a reta que passa pelos pontos A e B

A próxima construção foi a de ponto médio de um segmento. Os alunos fizeram o segmento AB para iniciar a construção, utilizando a construção anterior. Foi pedido que fizessem uma dobra de modo a coincidir os pontos A e B. Nessa construção os alunos, também, fizeram sem dificuldades (Figura 21).

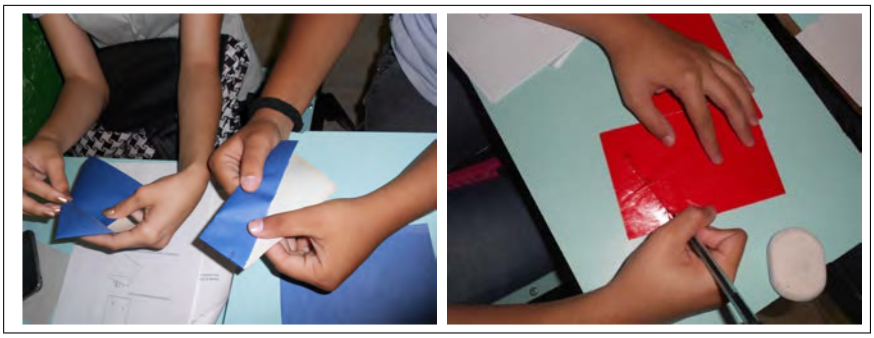


Figura 21 – Alunos construindo o ponto médio de um segmento

No entanto, para construção da reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto P, alguns alunos tiveram dificuldades sendo necessária a mediação da professora (Figura 22). Soligo(2003) afirma que "a intervenção direta do professor durante as atividades, evidentemente, é condição para que os alunos avancem em seus conhecimentos". A dificuldade se deu pelo fato de ter que coincidir as duas semirretas originadas por essa dobradura e ainda passar pelo ponto P. Após a explicação, os alunos terminaram a construção (Figura 23) sem apresentar grandes dificuldades.

Figura 22 – Mediação da professora

Figura 23 – Alunos realizando a construção da reta perpendicular

Em seguida, os alunos iniciaram a construção da bissetriz. Verificou-se se os alunos sabiam o que era uma bissetriz, alguns disseram que: "fica em dois", "se sobrepõem". Foi, então, explicada a definição e assim completaram a ideia inicial sobre o conceito.Segundo Borba (2006), o professor orientador tem um papel importante não só em aprofundar as discussões, trazendo novas situações e problemas , mas também apresentando fatos geométricos e conceitos que possam ser explorados nas justificativas das construções.

Após a explicação, foi solicitado que os alunos construíssem duas retas concorrentes quaisquer. Alguns deles começaram a construir duas retas paralelas, neste caso, é possível verificar que os mesmos não possuem uma ideia formalizada de retas concorrentes e paralelas. A professora, então, explicou o que são retas concorrentes e os alunos prosseguiram com a construção. No momento de sobrepor os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ foi necessária a mediação da professora, pois alguns alunos não estavam construindo com exatidão. No entanto, a maior parte dos alunos realizaram sem problemas (Figura 24).

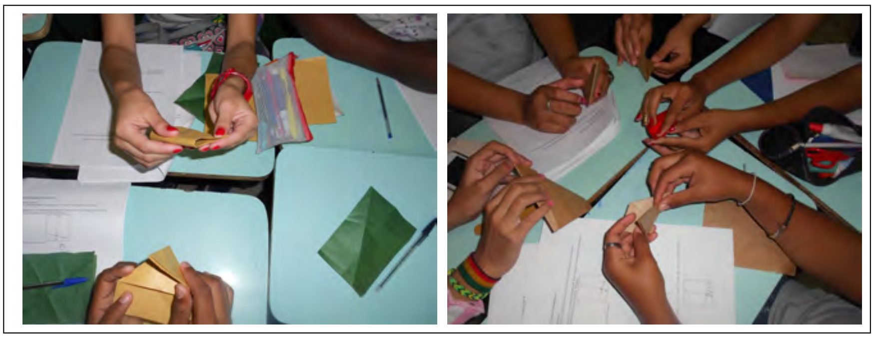


Figura 24 – Alunos realizando a construção da bissetriz

A última construção desse encontro foi a da mediatriz (Figura 25). Após a definição, a construção foi feita sem grandes dificuldades, pois na construção era necessário que os alunos fizessem uma reta passando por dois pontos distintos A e B e que dobrassem de modo a coincidir ambos os pontos.

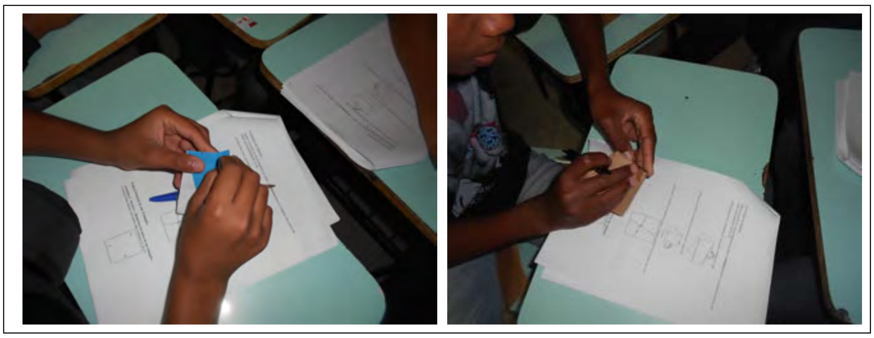


Figura 25 – Alunos realizando a construção da mediatriz

3.2 Segundo encontro

O segundo encontro foi iniciado pela atividade 1 que se refere ao incentro do triângulo. No início da construção não houve problema, mas na construção das três bissetrizes os alunos tiveram dificuldades, sendo necessário o suporte da pesquisadora nos grupos (Figura 26).

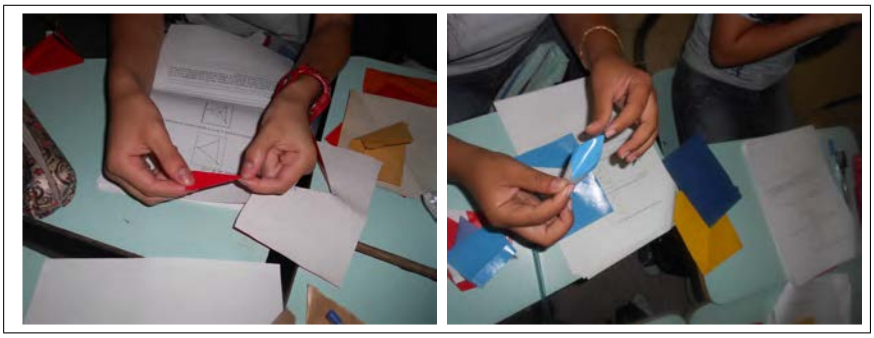
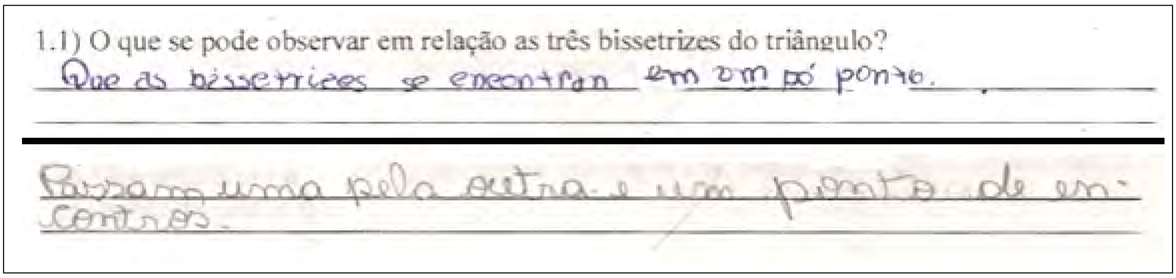


Figura 26 – Alunos realizando a construção do incentro

Em seguida, os alunos responderam o item 1.1, no qual era perguntado sobre a relação das três bissetrizes do triângulo. Os alunos logo responderam que se encontravam, ou passam uma pela outra em um ponto (Figura 27). Sendo assim, foi possível observar que o objetivo foi alcançado. Ao final, a professora formalizou dizendo que o ponto de encontro das bissetrizes é nomeado de incentro.


1.1) O que se pode observar em relação as três bissetrizes do triângulo?

Que as bissetrices se encontran em um só ponto.

Passam uma pela outra e um ponto de encontros.

Figura 27 – Resposta da atividade 1.1 de dois dos alunos

No item 1.2 os alunos construíram a reta perpendicular sem grandes dificuldades, porém na construção da circunferência tiveram dificuldades com o manuseio do compasso, mas assim que surgiam dúvidas e questionamentos, o auxílio era fornecido por parte de algum colega do grupo e/ou da professora (Figura 28).

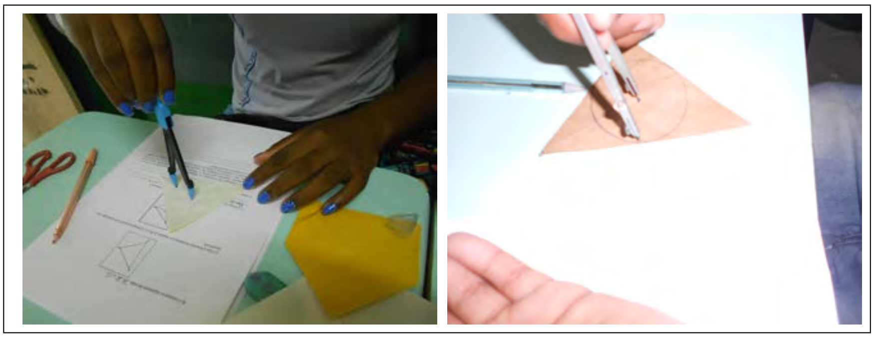
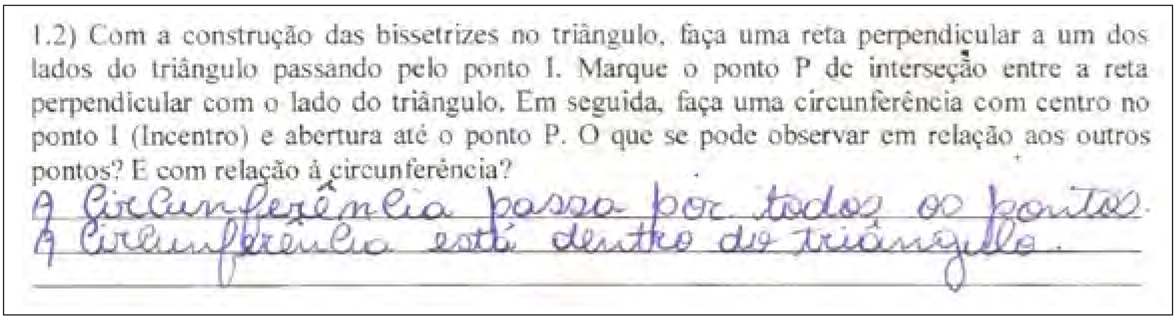


Figura 28 – Alunos realizando a construção da circunferência inscrita ao triângulo

Com relação à pergunta sobre a observação da circunferência com os pontos tangentes ao triângulo a maioria disseram que a circunferência passava pelos os outros pontos. E sobre a circunferência e o triângulo, disseram que eram duas formas geométricas, ou que a circunferência está dentro do triângulo, neste momento foi dito que matematicamente dizemos que a circunferência está inscrita no triângulo (Figura 29).


1.2) Com a construção das bissetrizes no triângulo, faça uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo passando pelo ponto I. Marque o ponto P de interseção entre a reta perpendicular com o lado do triângulo. Em seguida, faça uma circunferência com centro no ponto I (Incentro) e abertura até o ponto P. O que se pode observar em relação aos outros pontos? E com relação à circunferência?

A Circunferência passa por todos os pontos.
A Circunferência está dentro do triângulo.

Figura 29 – Resposta da atividade 1.2 de um dos alunos

Na atividade 2 os alunos construíram as mediatrizes dos lados de um triângulo com o intuito de chegar no circuncentro do triângulo. Essa construção foi feita sem grandes dificuldades, pois tinham que fazer dobras de modo a coincidir os vértices do triângulo (Figura 30).

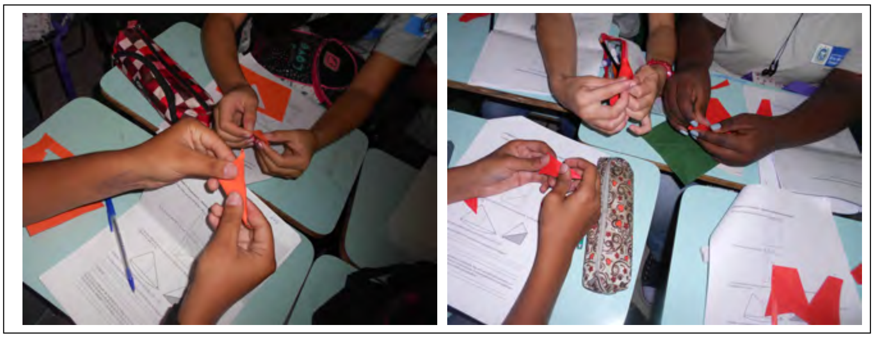


Figura 30 – Alunos realizando a construção do circuncentro

No item 2.1, os alunos logo observaram que as três mediatrizes se encontravam em um ponto. E no item 2.2 construíram uma circunferência com centro no circuncentro do triângulo e abertura até um dos vértices (Figura 31). E foi perguntado sobre os outros vértices do triângulo, e os alunos responderam que passa por todos os outros vértices. E com relação a circunferência disseram que passa por fora (Figura 32). Da mesma forma, foi explicado aos alunos que matematicamente dizemos que a circunferência é circunscrita ao triângulo.

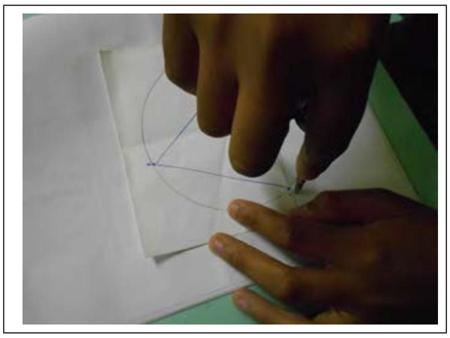
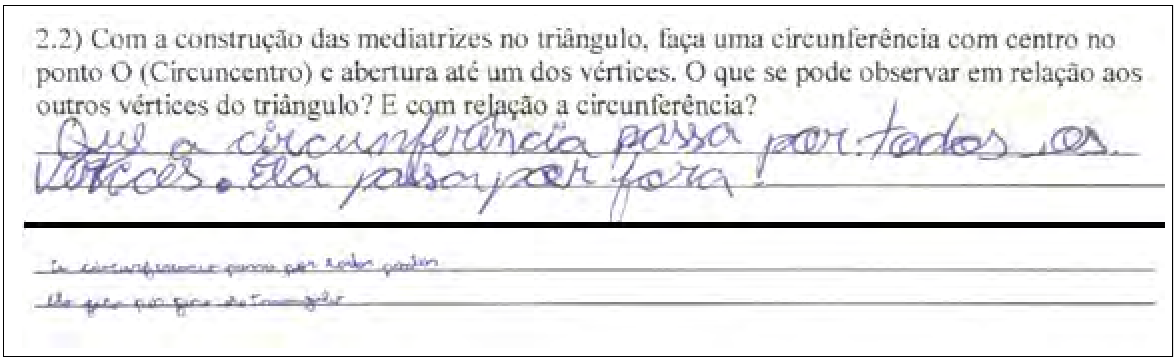


Figura 31 – Aluno realizando a construção da circunferência circunscrita ao triângulo


2.2) Com a construção das mediatrizes no triângulo, faça uma circunferência com centro no ponto O (Circuncentro) e abertura até um dos vértices. O que se pode observar em relação aos outros vértices do triângulo? E com relação a circunferência?

Que a circunferência passa por todos os vértices. Ela passa por fora!

Figura 32 – Resposta da atividade 2.2 de dois dos alunos

3.3 Terceiro encontro

Nesse encontro deu-se início a atividade 3 referente ao baricentro de um triângulo. A construção foi iniciada pela determinação do ponto médio dos lados do triângulo e em seguida as respectivas medianas (Figura 33). Houve dificuldade na construção da mediana, pois a maior parte dos alunos queriam construir a mediatriz do lado do triângulo. Nesse momento, foi feita a mediação da pesquisadora para dar enfoque na diferença da mediatriz e mediana.

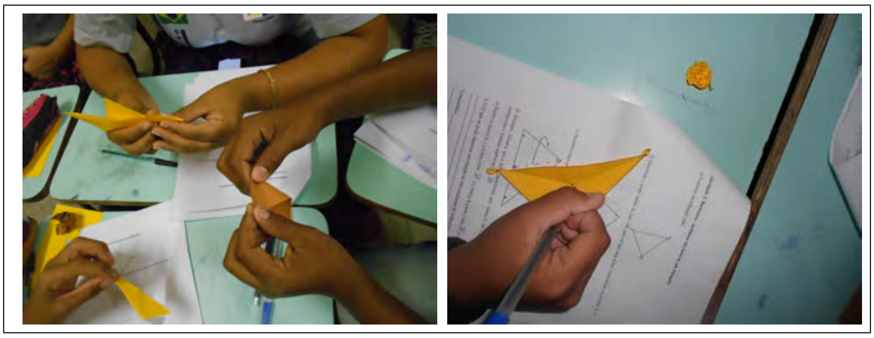
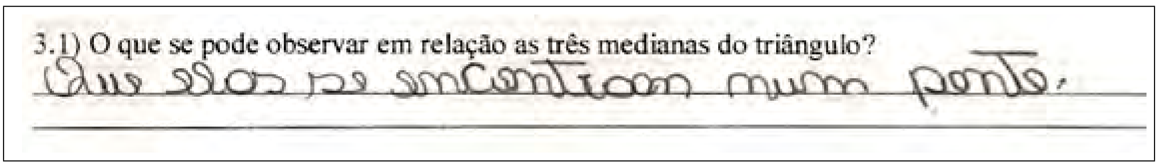


Figura 33 – Alunos realizando a construção do baricentro

Após a explicação, os alunos conseguiram proceder com a construção e observação chegando a conclusão que as medianas se intersectam em um ponto (Figura 34). Foi dado ênfase que este ponto de encontro é o baricentro do triângulo.


3.1) O que se pode observar em relação as três medianas do triângulo?

Que elas se encontram num ponto.

Figura 34 – Resposta da atividade 3 de um dos alunos

Na atividade 4, referente ao último ponto notável à ser estudado, foi pedido a construção das alturas dos lados do triângulo. Os educandos realizaram a construção sem grandes dificuldades, as poucas dificuldades apresentadas a pesquisadora e os colegas de grupo auxiliaram. Quando todos os alunos terminaram a construção, iniciaram a atividade 4.1 que se refere a observação das três alturas do triângulo, os alunos responderam que se intersectavam ou passam por um ponto (Figura 35) e a professora fez a socialização das respostas concluindo que esse ponto de encontro das alturas é o ortocentro do triângulo. Considera-se que o objetivo dessa atividade foi atingido plenamente, visto que as respostas dadas pelos educandos satisfazem ao objetivo proposto.

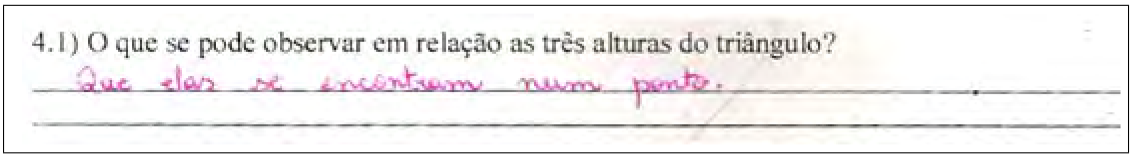
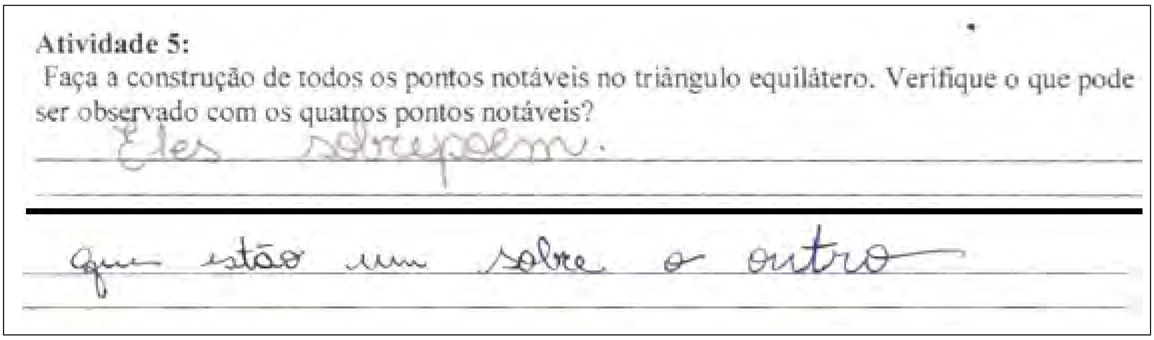

4.1) O que se pode observar em relação as três alturas do triângulo?
Que elas se encontram num ponto.

Figura 35 – Resposta da atividade 4 de um dos alunos

3.4 Quarto encontro

O último encontro foi destinado a realização das atividades 5 e 6. Na atividade 5 foi entregue a cada grupo quatro triângulos equiláteros com o lado de mesmo tamanho, para que pudessem construir os quatros pontos notáveis. Neste momento, os alunos tiveram dificuldades, pois o grupo não estava fazendo todos a mesma construção, então a professora pediu que com posse das construções anteriores fossem tomando como exemplo. E além disso a pesquisadora foi mediando as construções. Após algumas mediações, os educandos realizaram as construções e foi solicitado que verificassem o que pode ser observado com os quatro pontos notáveis, para tal foi falado que era necessário sobrepor os triângulos e assim os alunos responderam surpresos que os pontos estavam um em cima do outro, ou seja, que se sobrepõem (Figura 36). Foi pedido aos alunos para sobrepor os quatro triângulo, pois o objetivo inicial da atividade era a construção dos pontos notáveis em um triângulo. Porém, as construções iriam ficar confusas para os alunos, por esse motivo houve a necessidade de tal pedido. Ao final da atividade, foi explicado que tal fato ocorre, pois as medianas, as alturas, as bissetrizes e as mediatrizes coincidem e portanto possuem a mesma medida. Consequentemente, o baricentro, o ortocentro, o incentro e circuncentro são representados pelo mesmo ponto no triângulo equilátero.



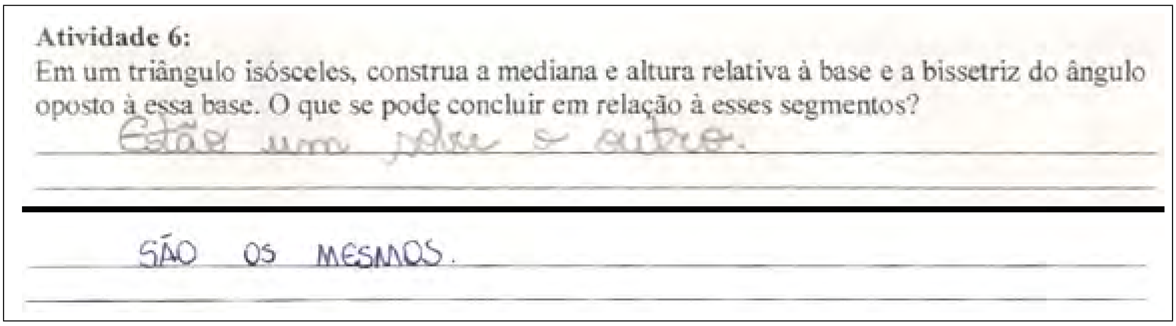
Atividade 5:
Faça a construção de todos os pontos notáveis no triângulo equilátero. Verifique o que pode ser observado com os quatros pontos notáveis?

Eles sobrepoem.

que estão um sobre o outro

Figura 36 – Resposta da atividade 5 de dois dos alunos

Na atividade 6, foi entregue aos alunos triângulos isósceles para que construíssem a mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base. Houve a necessidade de antes de iniciar a atividade relembrar, de forma dialogada, os conceitos de triângulo isósceles enfatizando à base. Em seguida, os educandos iniciaram as construções e a medida que surgiram dúvidas, alguns olharam as construções anteriores como suporte ou o passo a passo disposto na apostila. Alguns estavam com dúvida, pois as dobras eram as mesmas e questionavam se estava correto. E ao serem perguntados sobre o que se pôde concluir em relação aos segmentos construídos responderam que eram os mesmos, ou ficavam um em cima do outro (Figura 37). A atividade foi finalizada com a explicação de que em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice é também a mediana e a altura relativa à base.



Atividade 6:
Em um triângulo isósceles, construa a mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base. O que se pode concluir em relação à esses segmentos?

Estão um sobre o outro.

SÃO OS MESMOS.

Figura 37 – Resposta da atividade 6 de dois dos alunos

Conclusão

Neste capítulo apresenta-se as conclusões obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho. Serão analisados e relatados alguns resultados, assim como expostas contribuições e dificuldades encontradas durante a realização deste trabalho.

Para que o ensino da Matemática contribua para a formação do aluno, é fundamental explorar temas que possam encontrar na Matemática uma ferramenta indispensável para serem compreendidos. O Origami, no presente trabalho, procura mesclar conteúdos significativos que promovam a compreensão das ideias matemáticas, gerando como resultado a construção da Arte. Sendo assim, atividades com dobraduras favorecem o aumento do conhecimento sobre os elementos geométricos, além de estimular a participação, criatividade e motivação, tornando as aulas mais prazerosas e produtivas. Com este intuito foi elaborada uma proposta de ensino e realizou-se um estudo de caso numa turma de Ensino Médio que teve por objetivo investigar como o uso de Origami auxilia na introdução dos pontos notáveis de um triângulo. Esta proposta permitiu ao aluno explorar propriedades geométricas dos pontos notáveis, utilizando como recurso o Origami.

No estudo de caso realizado na turma do Ensino Fundamental pôde-se perceber o bom desempenho dos alunos na resolução das atividades. Mesmo com as dificuldades que alguns tiveram com as dobraduras, os participantes permaneceram persistentes, apresentando determinação e real desejo de aprender. Pôde-se perceber a motivação e a curiosidade durante todo o tempo de aula, além de uma forte integração de todo o grupo.

As discussões surgidas e o comportamento dos educandos demonstraram que o uso de técnicas de dobraduras como instrumento pedagógico é bem sucedido no que tange ao ensino de Geometria, pois proporciona trocas de experiências enriquecedoras. Sendo assim, pode-se responder à questão de pesquisa proposta de modo afirmativo, ou seja, pode-se afirmar que por meio das atividades propostas e com a utilização da técnica do Origami para construção dos pontos notáveis, os alunos puderam explorar propriedades geométricas, contribuindo significativamente para o processo de ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos pertinentes ao conteúdo de pontos notáveis de um triângulo.

O trabalho colaborativo proporcionou momentos de trocas de experiência entre os envolvidos, podendo assim ser corroborado que o Origami é um material de trabalho capaz de envolver alunos em sua própria aprendizagem, bem como no trabalho em grupo. Assim sendo, atividades com dobraduras favorecem o aumento do conhecimento sobre os elementos geométricos, além de estimular a participação, a criatividade e a motivação, tornando as aulas mais prazerosas e produtivas.

Esta proposta utilizou como recurso pedagógico a técnica do Origami para construção dos pontos notáveis de um triângulo que favoreceu a visualização de propriedades. No entanto, propõe-se o uso de outros recursos, tais como: o uso de softwares e instrumentos de desenhos para a exploração destas propriedades. Vale ressaltar que o Brasil possui realidades muito distintas, assim a sugestão de outros materiais é pertinente no que tange a oferta desse trabalho, mesmo que adaptado, às diversas situações.

Espera-se que este trabalho possa sinalizar para a importância de novas abordagens na aquisição de conceitos matemáticos. Em particular, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Pontos Notáveis, neste caso, utilizando o Origami.

Referências Bibliográficas

BORBA, M. C. *OFICINA de Dobraduras* - Parte I. OBMEP, 2006. Disponível em <http://miltonborba.org/OBMEP/oficina-parte01.pdf>. Acesso em jan. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria do Ensino Fundamental. Matemática. In: *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1997. BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria do Ensino Fundamental. Matemática. In: Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 1997.

BRAZ, L. H. C. *Uma abordagem didática da geometria dos pontos notáveis de triângulos utilizando origami*. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br>. Acesso em: jun. 2014.

CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa*: métodos qualitativos, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9*: geometria plana. 8. Ed., São Paulo: Atual, 2005.

FOELKER, R. *Objetos decorativos em Origami*. São Paulo: Global, 2003.

GENOVA, C. *Origami, contos e encantos*. São Paulo: Escrituras Editora, 2008.

LAZZARI, L.; LIMA, M. P. Ensinar e Aprender com a Geometria das Dobraduras. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11.,2013, Curitiba. *Anais*.

LEROY, L. *Aprendendo Geometria com Origami*. 2010. 79 f. Dissertação (Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico)- Curso de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/MonografiaLeroy.pdf>. Acesso em: set. 2014.

MONTEIRO, L. C. N. *Origami*: História de uma Geometria Axiomática. 2008. 119f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <http://19575ulfc091371tmOrigamiHistoriadeumaGeometriaAxiomatica.p Acesso em: jun.2014.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L.G. *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar*: geometria euclidiana plana. 1. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, M. M. de. *Como fazer pesquisa qualitativa*. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, n. 25, p. 105-132, 2006.

RANCAN, G; GIRAFFA, L. M. M. *Geometria do origami*: investigando possibilidades para ensinar geometria. Ciências e Ideias, vol. 3, n.2, outubro/2011-março/2012

RANCAN, G , GIRAFFA, L. M. M. *Geometria com Origami:* incentivando futuros professores. 2012. IX ANPED.

REGO, R. G.; REGO, R. M.;GAUDÊNCIO JUNIOR, S. *A geometria do Origami.* João Pessoa, Paraíba: Editora Universitária/UFPB, 2003.

SOLIGO, R. A. *Dez importantes questões a considerar*. Caderno dos Professores. São Luís - MA: Secretaria Municipal de Educação de São Luís, 2003, v. 1, p. 109-131.

WANDERLINDE, J. *Ambiente hipermídia como auxiliar na aprendizagem de geometria*. 1998. Disponível em: <http://scholar.google.com.br>. Acesso em: abr. 2014

YIN, R. K. *Estudo de caso:* planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Anexos

ANEXO A

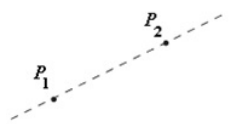
Apostila

Mestrado Profissional em Matemática - LCMAT/UENF
Mestranda: Mikelle Rodrigues de Almeida
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho

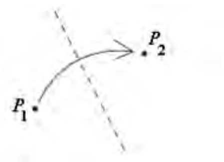
Introdução dos Pontos Notáveis de um Triângulo utilizando Origami

Axiomas de HUZITA-HATORI

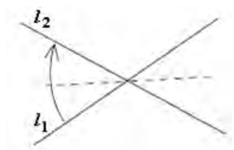
Axioma 1: Dados dois pontos distintos, P1 e P2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos.



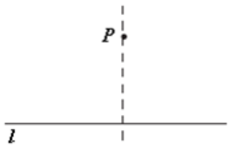
Axioma 2: Dados dois pontos distintos, P1 e P2, há uma única dobra que os torna coincidentes.



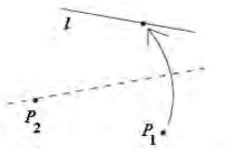
Axioma 3: Dadas duas retas, l1 e l2, há uma única dobra que as torna coincidentes.



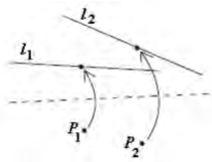
Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta l, há uma única dobra perpendicular a l que passa por P.



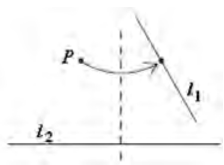
Axioma 5: Dados dois pontos, P1 e P2, e uma reta, l, há uma dobra que faz incidir P1 em l e que passa por P2.



Axioma 6: Dados dois pontos, P1 e P2, e duas retas, l1 e l2, há uma dobra que faz incidir P1 em l1 e P2 em l2.



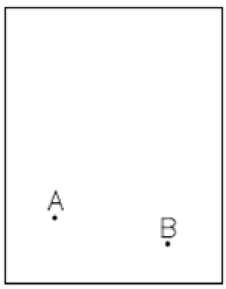
Axioma 7: Dado um ponto, P, e duas retas, l1 e l2, há uma dobra que faz incidir P em l1 e é perpendicular a l2.



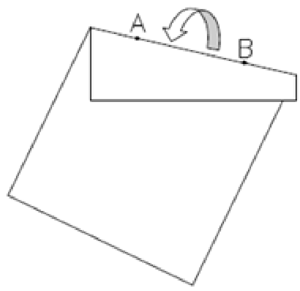
Construções Iniciais

Construção da reta que passa por dois pontos distintos.

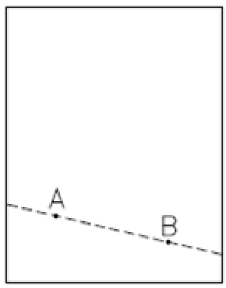
a) Marque dois pontos distintos A e B em uma folha de papel.



b) Faça uma dobra passando por A e B.

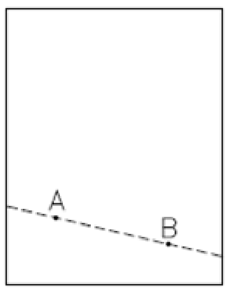


c) Desdobre. A dobra representa a reta que passa pelos pontos A e B.

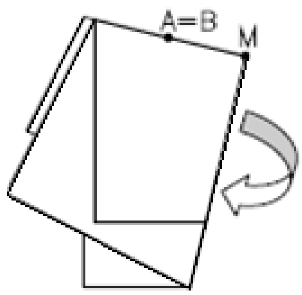


Construção do ponto médio de um segmento.
Chama-se de **ponto médio** do segmento AB o ponto M neste segmento tal que os segmentos AM e MB são congruentes.

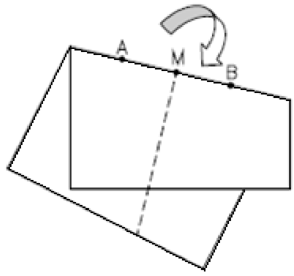
a) Faça uma reta qualquer, marcando dois pontos distintos A e B.



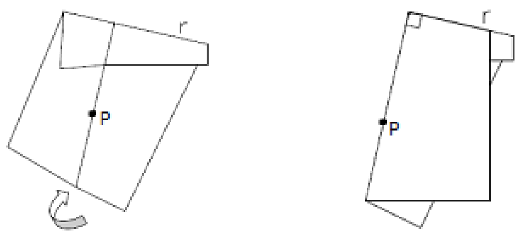
b) Faça uma dobra de modo a coincidir os pontos A e B.



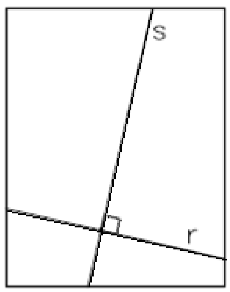
c) Desdobre. Marque o ponto médio M na interseção das duas dobras.



Construção de uma reta perpendicular a uma reta dada.
Dado uma reta r e um ponto P, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular à reta r.
a) Faça uma reta qualquer r.
b) Faça uma dobra de modo a coincidir as duas semirretas originadas por essa dobradura.

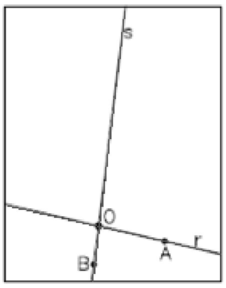


c) Desdobre. Verifique que há duas retas formadas r e s.

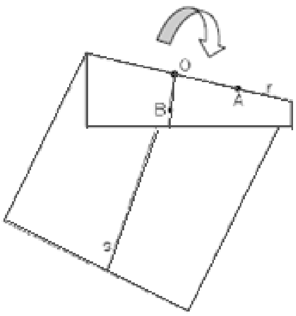


Construções de Lugares Geométricos
Construção da Bissetriz
Bissetriz é semirreta interior ao ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

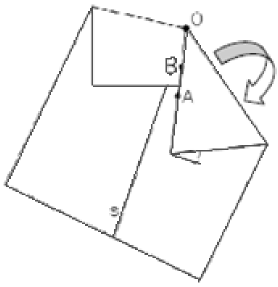
a) Construa duas retas r e s concorrentes quaisquer. Seja o ponto O a interseção das duas retas. Seja o ponto A pertencente à reta r e o ponto B à reta s.



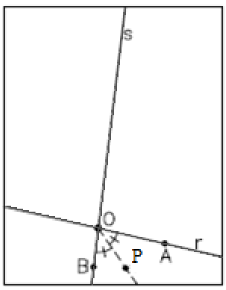
b) Faça a dobradura sobre a reta r.



c) Faça uma dobradura sobrepondo os segmentos OA e OB.



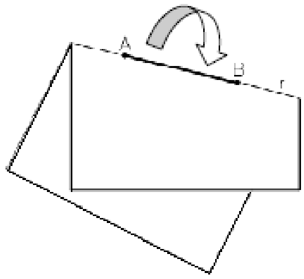
d) Desfaça as dobras e marque o ponto P sobre a dobra que ficou na região interna às semirretas OA e OB.



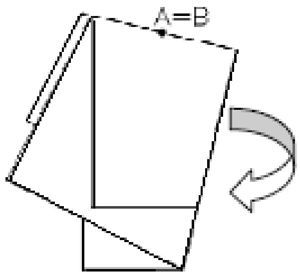
Construção da Mediatriz

Dados os pontos A e B pertencentes ao plano, a **mediatriz** deles é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de A e B.

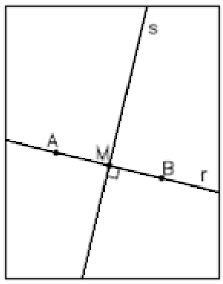
a) Faça uma reta r, passando por dois pontos distintos A e B.



b) Faça uma dobra coincidindo o ponto A com o ponto B.



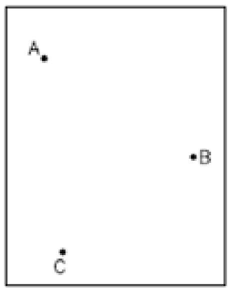
c) Desdobre. A dobradura determina a reta s. Marque o ponto M na interseção das retas.



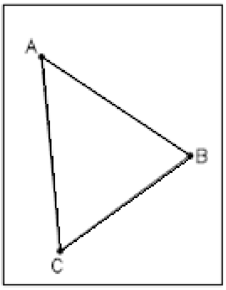
Pontos Notáveis de um Triângulo

Atividade 1: Incentro – Bissetrizes dos lados de um triângulo.

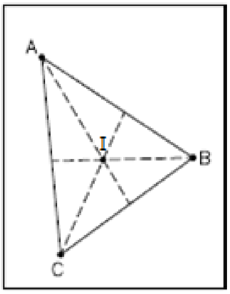
a) Numa folha marque três pontos não colineares A, B e C.



b) Construa os segmentos de retas AB, BC e CA.



c) Faça a bissetriz referente aos ângulos A, B e C. E marque o ponto I de interseção das bissetrizes.

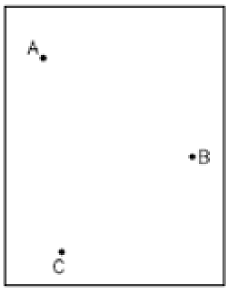


1.1) O que se pode observar em relação as três bissetrizes do triângulo?

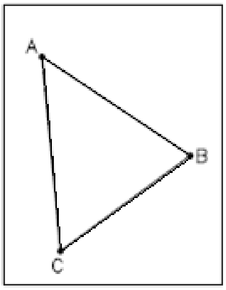
Comentário:

1.2) Com a construção das bissetrizes no triângulo, faça uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo passando pelo ponto I. Marque o ponto P de interseção entre a reta perpendicular com o lado do triângulo. Em seguida, faça uma circunferência com centro no ponto I (Incentro) e abertura até o ponto P. O que se pode observar em relação à circunferência?

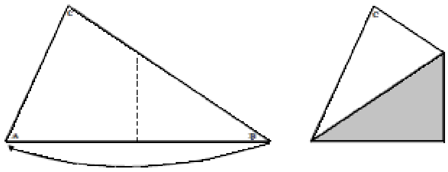
Atividade 2: Circuncentro – Mediatrizes dos lados de um triângulo.
a) Numa folha marque três pontos não colineares A, B e C.



b) Construa os segmentos de retas AB, BC e CA.



c) Faça uma dobra de modo a coincidir os vértices A e B. Desdobre. A dobra determinada é a mediatriz do lado A e B.



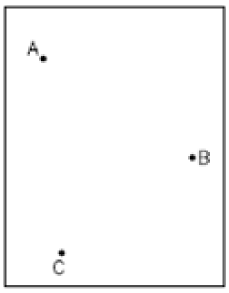
d) Repita o passo anterior para os outros dois lados (BC e AC).

2.1) O que se pode observar em relação as três mediatrizes do triângulo?

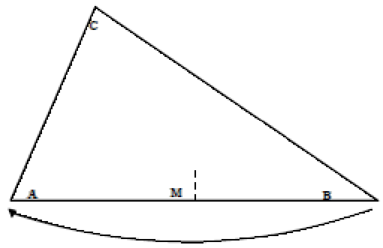
Comentário:

2.2) Com a construção das mediatrizes no triângulo, faça uma circunferência com centro no ponto O (Circuncentro) e abertura até um dos vértices. O que se pode observar em relação aos outros vértices do triângulo? E com relação a circunferência?

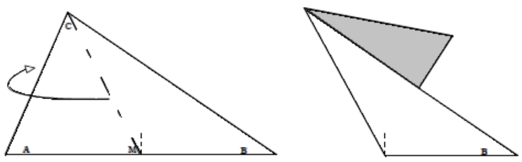
Atividade 3: Baricentro - medianas dos lados de um triângulo.
a) Construa um triângulo ABC.



b) Determine o ponto médio do lado AB, para tal faça uma dobra coincidindo os pontos A e B.



c) Desdobre e faça uma dobra que passe pelos pontos C e M.

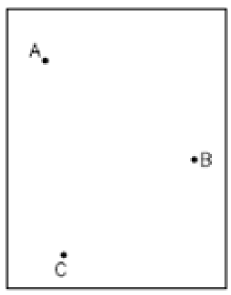


d) Desdobre. Observe que a dobra determinada pelo vértice C até o ponto médio do lado oposto corresponde à mediana relativa ao lado AB.
e) Repita os passos b, c e d para o lado AC e o vértice B e para o lado BC e o vértice A.

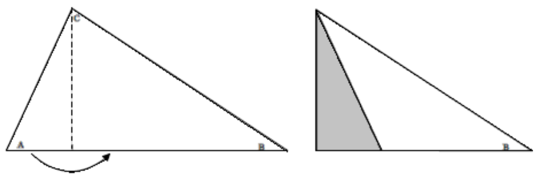
3.1) O que se pode observar em relação as três medianas do triângulo?

Comentário:

Atividade 4: Ortocentro – alturas dos lados de um triângulo.
a) Construa um triângulo ABC.



b) Faça uma dobra que passe pelo ponto C e de modo que as duas semirretas originadas em A e B coincidam.



c) Repita o passo anterior para o lado BC e o vértice A e para o lado AC e o vértice B.

4.1) O que se pode observar em relação as três alturas do triângulo?

Comentário:

Atividade 5
Faça a construção de todos os pontos notáveis no triângulo equilátero. Verifique o que pode ser observado com os quatros pontos notáveis?

Atividade 6
Em um triângulo isósceles, construa a mediana e altura relativa à base e a bissetriz do ângulo oposto à essa base. O que se pode concluir em relação à esses segmentos?

ANEXO B

Plano de ação

PLANO DE AÇÃO

1- IDENTIFICAÇÃO

INSTITUIÇÃO DE ENSINO: Colégio Estadual Coronel João Batista de Paula Barroso

SÉRIE: 8º ano do Ensino Fundamental

DISCIPLINA: Matemática

TEMA: Pontos Notáveis de um Triângulo

HORAS AULAS PREVISTAS: 8 horas/aula

2- OBJETIVOS

• Introduzir a técnica do origami;

• Introduzir os pontos notáveis de um triângulo;

• Apresentar e verificar algumas propriedades referentes ao referido tema.

3 - MATERIAIS NECESSÁRIO

Os materiais utilizados serão: apostila, papel para confecção das atividades, compasso e régua.

4 - CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS

Axiomas referente à Origami, Lugares Geométricos e Pontos Notáveis de um triângulo.

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente será introduzido os axiomas referente à técnica do Origami para que os alunos possam realizar as atividades. Em seguida, os alunos serão separados em grupos para serem realizadas algumas construções tais como reta, ponto médio, reta perpendicular, e também construções de lugares geométricos (bissetriz, mediatriz).

Em seguida, serão feitas construções dos pontos notáveis. Em cada construção, os alunos receberão papel para confecção dos triângulos e estará, também, disposto na apostila o passo a passo para a construção dos pontos notáveis.

Ao final das construções dos quatro pontos notáveis, os alunos irão verificar algumas propriedades referente aos triângulos equiláteros (Atividade 5) e isósceles (Atividade 6). Primeiro será entregue ao grupo triângulos equiláteros com mesmo tamanho de lado e cada um do grupo fará um ponto notável e ao final irão sobrepor os triângulos para que possam observar que os pontos também se sobrepõem.

Para verificar outra propriedade (Atividade 6), será entregue aos alunos triângulos isósceles com tamanhos de lados diferentes e será feita a construção da bissetriz do ângulo, mediana e altura relativa à base. Os alunos poderão verificar que esses segmentos coincidirão.