

FLÁVIO MIRANDA DOS SANTOS

ROBÓTICA EDUCACIONAL -
POTENCIALIZANDO O ENSINO DA
MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2014

FLÁVIO MIRANDA DOS SANTOS

ROBÓTICA EDUCACIONAL - POTENCIALIZANDO
O ENSINO DA MATEMÁTICA

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2014

FLÁVIO MIRANDA DOS SANTOS

**ROBÓTICA EDUCACIONAL - POTENCIALIZANDO
O ENSINO DA MATEMÁTICA**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 29 de Julho de 2014.

Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva
D.Sc. - UENF

Prof^ª. Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF

Prof^ª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IF-Fluminense

Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha esposa Juliana Maria e ao meu filho Yuri.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força espiritual para a realização desse trabalho; aos meus pais Helena Miranda dos Santos e Gilson Damião Machado dos Santos pela vida; a minha esposa Juliana Maria Portilho dos Santos e ao meu filho Yuri Portilho dos Santos por todo carinho e compreensão nesta caminhada; ao meu amigo Flávio Ornellas que me aturou nas viagens e apoiou nos estudos e, em fim, ao meu orientador Rigoberto G. Sanabria Castro por suas aulas, paciência, competência e humor ao ensinar.

"Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar."

François Viète

Resumo

Neste trabalho, propomos a utilização da robótica educacional como ferramenta facilitadora e potencializadora no ensino da matemática, tendo em vista as dificuldades que os docentes possuem em ensinar devido ao baixo interesse por parte dos alunos. Por meio da abordagem pedagógica construcionista, propomos que o aluno se torne o agente no processo de aprendizagem, interferindo e construindo o conhecimento. Mostrando que é necessária uma postura ativa e inovadora do docente para enfrentar tal dificuldade. Esta proposta é aplicada em uma turma do 7° ano do ensino fundamental, em que foi apresentada atividades e desafios contextualizados que abordam o conceito de proporcionalidade de maneira a viabilizar a proposta e facilitar uma possível continuidade nesta linha de estudos.

Palavras Chave: Robótica educacional, Mindstorm NXT 9797, proporcionalidade e construcionismo.

Abstract

In this paper, we propose the use of educational robotics as a facilitator and potentiating tool in teaching mathematics, in view of the difficulties that teachers have in teaching due to low interest from students. Through constructionist pedagogical approach, we propose that the student becomes the agent in the learning process, interfering and building knowledge. Showing that an active and innovative approach of teaching is needed to address this difficulty. This proposal is applied to a class of seventh grade of elementary school, which was presented and contextualized activities that address challenges the concept of proportionality in order to enable and facilitate the proposal can continue this line of research.

Key Words: Educational Robotics, Mindstorm NXT 9797, proportionality and constructionism.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Funcionamento interno do Robotic Knight e seu exterior	15
Figura 2 – Desenho animado década de 60 e linha de produção do setor automotivo	17
Figura 3 – Processo recursivo de como se aprende	21
Figura 4 – Kit Lego NXT 9797 Education	23
Figura 5 – Brick NXT - O cérebro do robô	24
Figura 6 – Servo Motor	24
Figura 7 – Sensor Ultrassônico	25
Figura 8 – Sensor de Som	25
Figura 9 – Sensor de Toque	26
Figura 10 – Sensor de Luz	26
Figura 11 – Janela do <i>Software</i> responsável pela programação do Robô	26
Figura 12 – Mindstorm NXT 9797 - Modelo com sensor de ultrassônico de luz e som	27
Figura 13 – Paleta de Programação	28
Figura 14 – Fluxo Sequencial com bloco Mover	28
Figura 15 – Barra configurações - Bloco Mover	29
Figura 16 – Porta responsável pelo funcionamento do motor de uma das rodas, neste caso a da direita.	29
Figura 17 – Porta responsável pelo funcionamento do motor de uma das rodas, neste caso a da esquerda.	30
Figura 18 – Letras associadas aos motores	30
Figura 19 – Quantidade de giros do motor	30
Figura 20 – Botão para executar imediatamente a ação programada	30
Figura 21 – Fluxo sequencial programado para percurso em forma de quadrado . .	31
Figura 22 – Fluxo sequencial programado para o percurso em forma de quadrado com Loop	31
Figura 23 – Configuração do Bloco Loop	32
Figura 24 – Fluxo sequencial com Sensor Ultrassônico (Distância)	32
Figura 25 – Corolário do Teorema de Tales	37
Figura 26 – Divisão do segmento AB	38

Figura 27 – Divisão do lado AB	39
Figura 28 – Retas paralelas passando por P_i	40
Figura 29 – Grandeza Inversamente Proporcional redução a unidade	43
Figura 30 – Ângulo \widehat{AOB}	44
Figura 31 – Transferidor 180°	45
Figura 32 – Ângulo de 180°	45
Figura 33 – Ângulo de 0°	46
Figura 34 – Interseção de Semiplanos e Setor Angular	46
Figura 35 – Ponto Interior	47
Figura 36 – Ponto Exterior	47
Figura 37 – Ângulos consecutivos 1 e 2	48
Figura 38 – Ângulos adjacentes	48
Figura 39 – Bissetriz	49
Figura 40 – Ângulo reto	50
Figura 41 – Ângulo agudo	50
Figura 42 – Ângulo obtuso	50
Figura 43 – Ângulos complementares	51
Figura 44 – Ângulos suplementares	51
Figura 45 – Ângulos Opostos pelo vértice	52
Figura 46 – Retas Perpendiculares	52
Figura 47 – Mediatriz	53
Figura 48 – Modelo 1 batizado Wally	55
Figura 49 – Fator de Proporcionalidade	58
Figura 50 – Figura da Atividade 13	59
Figura 51 – Figura da Atividade 15	59
Figura 52 – Figura da Atividade 16	60
Figura 53 – Figura do Desafio 1	61
Figura 54 – Planejando uma estratégia	63
Figura 55 – Estratégia Planejada	64
Figura 56 – Aplicação do desafio de Fukushima	65
Figura 57 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 1-3	70
Figura 58 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 4-9	71
Figura 59 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 10-12	71
Figura 60 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 13-14	72
Figura 61 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 15	72
Figura 62 – Resposta do Grupo Conectados Atividade 16-17	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela Atividade 1	57
Tabela 2 – Tabela Atividade 5	57
Tabela 3 – Tabela Atividade 7	58
Tabela 4 – Tabela Atividade 10	58
Tabela 5 – Tabela Atividade 14	59
Tabela 6 – Tabela Atividade 15	60
Tabela 7 – Tabela Atividade 17	60
Tabela 8 – Tabela Desafio 1	61
Tabela 9 – Tabela Atividade 20	62

Sumário

Introdução	12
1 Uma breve história sobre a Robótica	14
1.1 Uma reflexão a cerca de robôs e robótica	14
1.2 Motivação para utilização de robôs no ensino da matemática	16
2 Pressupostos Teóricos	19
2.1 O Surgimento da Abordagem Construcionista	19
2.2 Processo de Aprendizagem	21
3 Conhecendo o Kit Lego NXT 9797 Education	23
3.1 Porquê utilizar Lego Mindstorm?	33
4 Tópicos de Matemática para o Desenvolvimento do Trabalho	34
4.1 Razão	34
4.2 Escalas	35
4.3 Teorema Fundamental da Proporcionalidade - TFP - Visão Algébrica	35
4.4 Teorema Fundamental da Proporcionalidade - TFP - Visão Geométrica	36
4.5 Grandezas proporcionais	41
4.6 Grandezas Inversamente Proporcionais	42
4.7 Ângulos	44
4.8 Setor angular	46
4.9 Interior e exterior de um ângulo	47
4.10 Congruência e Comparação	49
4.11 Ângulo Reto, Agudo e Obtuso - Medida de um Ângulo	49
5 Metodologia e Aplicação das Atividades	54
5.1 Atividades para a sala de Aula utilizando o NXT 9797	54
5.2 Discussão das Atividades feitas em sala de aula	62
Considerações Finais	66
Referências	67
Anexos	69
ANEXO A Atividades Solucionadas	70

Introdução

Os desafios de ensinar matemática e na atual conjuntura que a educação no Brasil encontra-se (desinteresse dos alunos às aulas), revelam uma inquietude na busca de mecanismos e metodologias para tornar as aulas mais dinâmicas. Para tanto, os profissionais da educação, como em uma busca incessante, trabalham para criar ou aprimorar práticas pedagógicas que objetivam a elevação do potencial dos alunos no que diz respeito ao aproveitamento das disciplinas e que, de certa forma, transversalmente, agregue conhecimentos e atribua qualidade ao ensino, em particular, ao da matemática.

A evolução dos microprocessadores vem ajudando a modificar, a cada dia, o perfil dos alunos que acessam as redes de ensino. A grande gama de equipamentos que o mercado disponibiliza, tais como: notebooks, consoles de jogos, smartphones entre outros estão presentes, desde a infância, na vida de muitos direta ou indiretamente. Com este fato, a introdução de dispositivos eletrônicos como suporte para dinamizar aulas é uma vertente que vem ganhando grandes proporções nos últimos anos, seguindo certa tendência de direcionar a educação para esta realidade tecnológica que os alunos se relacionam em seu cotidiano.(CIT, 2012)

Os avanços tecnológicos, além de modificar indiretamente o perfil dos alunos, modificam as linhas de produção, a forma de estabelecer relações empregatícias e sociais, tornando o mundo do trabalho mais competitivo pela qualificação diferenciada que os indivíduos devem apresentar e redução da mão de obra pela automatização dos processos. Contudo, a educação, mais do que nunca, precisa se reestruturar para agregar novos conhecimentos aos alunos facilitando a sua integração social e sua inserção no mundo do trabalho.

A luz dos (BRASIL, 1997, p.26), em específico do trecho a seguir,

“Novas competências demandam novos conhecimentos: o mundo do trabalho requer pessoas preparadas para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita), instalando novos ritmos de produção, de assimilação rápida de informações, resolvendo e propondo problemas em equipe.”

norteio minha dissertação, pois, vejo que mecanismos e metodologias podem ser elaborados e aplicados de diferentes formas aumentando o interesse dos alunos às aulas,

sendo que, entre as diversas possibilidades tecnológicas o presente trabalho focaliza a utilização de robôs no ensino, em que este, dependendo da abordagem, facilitará e agregará diversos valores ao ensino da matemática.

Este trabalho visa apresentar uma abordagem lúdica e contextualizadora da aplicação de conceitos de proporcionalidade com o auxílio de uma metodologia voltada à tecnologia, pautando-se, em específico, na utilização da robótica com a programação de robôs. Este trabalho, também, prima pela: criatividade, trabalho em equipe (coletividade) e resolução de problemas. A robótica educacional aplicada ao ensino da matemática integra e põe em prática os preceitos dos PCNs uma vez que a mediação da aprendizagem com a utilização destes recursos reforçam as relações interpessoais, o exercício da cidadania (com as propostas de atividades para serem desenvolvidas e resolvidas em equipe) fortalecendo a construção do conhecimento e desenvolvendo múltiplas competências, como encontramos em (BRASIL, 1997, Objetivos Gerais):

"...desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;"

A motivação dos alunos, mediante a estas novidades tecnológicas apresentadas pelos dispositivos, tende a aumentar e, sem nem mesmo se darem conta, os alunos estarão aprendendo a matemática com uma série de valores agregados ao aprendizado. O Kit de robótica "Mindstorm Education" será utilizado como ferramenta base para o desenvolvimento do conteúdo. O software necessário para operar o robô é de fácil utilização o que faz com que as dificuldades em manipular os comandos seja baixa.

O capítulo 1 traz uma breve reflexão sobre personalidades que contribuíram, de determinada forma, para o crescimento da robótica em geral e da robótica educativa.

O capítulo 2 mostra a fundamentação pedagógica com conceitos que prima pela construção do conhecimento e pela abordagem voltada ao uso de tecnologia.

O capítulo 3 apresenta a descrição do kit de robótica Lego Mindstorm 9797 e exemplos que auxiliarão em sua operacionalização básica.

O capítulo 4 traz, de maneira formal, conteúdos matemáticos, tais como: proporcionalidade e ângulos; que fazem parte da matriz curricular da educação básica que serão abordados na utilização do kit robótico, mas friso que vários outros conteúdos poderão ser abordados também.

Capítulo 1

Uma breve história sobre a Robótica

Neste capítulo, procuramos mostrar personalidades que ao longo do tempo contribuíram, de alguma forma, para o crescimento da robótica e uma possível motivação para o seu uso em sala de aula.

1.1 Uma reflexão a cerca de robôs e robótica

Robô é um equipamento que realiza operações de simples à complexas e de forma autônoma, diferentemente de uma máquina que necessita de um humano para ser operada. Historicamente os robôs figuram na vida das pessoas, atualmente eles influenciam imensamente a vida de todos, seja ela direta ou indiretamente.

Foi Leonardo Da Vinci que iniciou os estudos para um maior entendimento ao complexo mundo dos robôs. Da Vinci desenvolveu uma extensiva investigação no domínio da anatomia humana que permitiu o alargamento de conhecimentos para a criação de articulações mecânicas. Como resultado deste estudo, surgiram diversos exemplares de bonecos que moviam as mãos, os olhos e as pernas, e que conseguiam realizar ações simples como escrever ou tocar alguns instrumentos. Segundo [Terra \(2013\)](#) um de seus autômatos (robôs) que tocava tambor foi criado para que pudesse acompanhar soldados em paradas militares.

Com sua mente inovadora, Leonardo Da Vinci utilizava polias, pesos e engrenagens em suas invenções. Ele utilizou estes mecanismos para construir um carrinho automotor que muitos consideram o primeiro robô. Posteriormente, utilizou estas peças para construir o conhecido "Robotic Knight" como vemos na Figura 1, uma espécie de humanoide¹ que passou a ser o sonho da maioria das pessoas que estão, de certa forma, envolvida com a robótica de criar um robô à imagem e semelhança do ser humano ([TERRA, 2013](#)). Um importante e novo conceito à ideia de robôs, foi proposta por cientistas árabes de maneira que o objetivo principal era atribuir funções aos robôs que estivessem relacionada

¹ É todo o ser que tem aparência semelhante ou que mesmo lembre um humano, não o sendo.



Figura 1: Funcionamento interno do Robotic Knight e seu exterior

Fonte: <http://lighthouserobotics.webs.com/humanoids>

as necessidades humanas. A ideia foi marcante devido ao vislumbamento da possível utilização dos robôs em tarefas do cotidiano. Vukobratovic¹ (2006) diz que o cientista Nikola Tesla foi um conceituado colaborador para o crescimento da robótica no final do século XVIII e início do século XIX. Tesla também formulou uma teoria de que todas as nossas vibrações espirituais, de pensamento, sentimento ou ação voluntária tem sua causa nos fenômenos externos e impressões que, na maioria das vezes, por causa da falta de formação, não são registrados em toda a sua riqueza e diversidade. Ele afirmou que todos os seres vivos são autômatos² impulsionado por impulsos externos, e isso, eventualmente, o inspirou a construir um automato, que seria análogo com o corpo humano em suas características.

Com relação a registros sobre como começaram os trabalhos em robótica educativa sabe-se pouco. O que sabe-se é que W. Ross Ashby, um médico psiquiatra britânico, desenvolveu vários trabalhos em Cibernética³. Tentava-se interpretar a Inteligência Artificial⁴ criando situações que fossem fonte de estudo para o entendimento dos processos de aprendizagem no final da década de 40 e início de 50. Planejava modelos mecânicos de comportamento, entre eles o Homeostat⁵, para enfatizar que a inteligência não reside num único local privilegiado, mas na estrutura do todo segundo Ashby (2008). Ashby fazia parte de um grupo chamado "Macy Conferences" que teve grande contribuição para

² É uma latinização da palavra grega, significando "agindo pela vontade própria".

³ É um campo de estudo que procura compreender a comunicação e o controle de máquinas, seres vivos e grupos sociais através de analogias com as máquinas eletrônicas.

⁴ É a inteligência similar a humana, porém oriunda de mecanismos ou *softwares*

⁵ Homeostat é a propriedade de um sistema de ser rejeitado ou mantido constante por ações de variáveis de controle.

consolidar o conceito de cibernética, Norbert Wiener também fazia parte deste grupo e sua teoria acerca da cibernética contribuiu para o crescimento de pesquisas em diversas áreas de sistemas de controle que trabalham com tratamento da informação (VALLEE, 2001).

Grey Walter, um reconhecido neurofisiologista, na mesma época que Ashby, elaborava robôs para analisar suas ações e compará-las sempre no sentido de aprendizagem através deles. Conectou a eletrônica à biologia, para criar os primeiros animais robóticos autônomos. As tartarugas, chamadas de Elsie e Elmer, que foram programadas para executar duas ações que consistia em evitar obstáculos grandes e recuar quando colidissem num e procurar uma fonte de luz. Gray Walter estudava o “sistema nervoso” de suas tartarugas para afirmar que a interação com o meio ambiente resulta num comportamento inesperado e complexo (WINFIELD, 2005).

Entretanto, Seymour Papert quando foi fazer parte do Laboratório de Inteligência Artificial do MIT⁶, em 1964, que passou a desenvolver estruturas e programas que pudessem ser usados por estudantes ainda pequenos e através deles desenvolvessem atividades intelectuais bastante relevantes. Trabalhando com Marvin Minsky, associou as idéias centrais de Piaget à alta tecnologia desenvolvida no MIT. Seu principal interesse estava sempre voltado a maneira como se processa a aprendizagem, viu nos computadores um meio de atração maior e um facilitador da aprendizagem. Nesta época já existia um movimento denominado Instrução Auxiliada por Computador CAI (Computer Aided Instruction) que originou-se junto do advento da computação, mas que não frutificou, pois os objetivos eram o de programar um computador com os mesmos tipos de exercícios aplicados por um professor tradicional que usa o quadro-negro, livros didáticos ou folhas de exercícios. Papert teve uma visão progressista, percebendo que os computadores poderiam ser usados com o mesmo objetivo educacional, mas de outra forma. Surgiu o Movimento de Tecnologia Educacional Progressista PEI⁷ a partir de um de seus mais famosos trabalhos que é a tartaruga controlada em LOGO⁸, uma linguagem de programação bastante acessível até para crianças. As primeiras tartarugas eram grandes e resistentes com capacidade de resistir ao peso de uma criança. Mais tarde se converteram em modelos reduzidos com motores, sensores e sintetizadores de voz (INÊS, 2013).

1.2 Motivação para utilização de robôs no ensino da matemática

"A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conheci-

⁶ Massachusetts Institute Of Tecnology - Instituto Tecnológico de Massachusetts

⁷ Progressive Educational Technology Movement

⁸ Logo é o nome de uma filosofia da educação e uma família em constante evolução das linguagens de programação que ajuda na sua realização.

tos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar (BRASIL, 1997, p. 19)."

Os robôs se apresentavam na vida das pessoas, em filmes, desenhos animados, seriados, sempre alimentando a imaginação de todos com as possíveis facilidades trazidas por eles e com a gama de possibilidades do mundo automatizado (Figura 2). Com o passar dos anos eles foram se tornando cada vez mais presentes no cotidiano de todos mais diretamente.

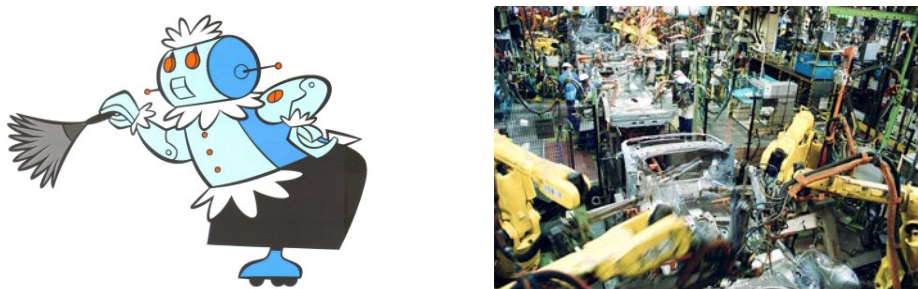


Figura 2: Desenho animado década de 60 e linha de produção do setor automotivo

Fonte: http://www.maxpressnet.com.br/e/gm/Atualmente_moderna.jpg

O crescimento tecnológico nos últimos tempos trouxe um avanço considerável para a robótica, deste advento podemos destacar fatores positivos e negativos. Desenvolvimentos de robôs para executar tarefas que para um ser humano seria um risco é um fator positivo, mas os robôs desenvolvidos para substituir a mão de obra humana é um fator a ser refletido, pois uma máquina, por vezes, substitui vários seres humanos, aumentando o desemprego. Ou seja, as relações sofreram modificações seja ela empregatícia ou pessoal com o avanço da tecnologia.

Por mais que se saiba que a tecnologia é uma aliada para a educação, alguns fatores, durante os anos, fazem com que haja certa resistência de sua utilização. Entre elas estão: o alto custo de equipamentos, o preparo que os profissionais precisariam ter para se tornarem capazes de utilizá-las e, dependendo da tecnologia, o aprendizado se tornaria mais complexo e especializado. No entanto, este paradigma vem sofrendo alterações, as instituições de ensino estão cada vez mais preparadas para esta nova realidade no que diz respeito a equipamentos: laboratórios de informática, datashows entre outros, mas o preparo dos profissionais ainda é precário.

Um dos grandes empecilhos para a inserção da robótica no ambiente educacional girava em torno dos conhecimentos específicos de linhas de códigos das linguagens de programação que os alunos, e até mesmo os professores, precisavam deter para a operacionalização dos robôs. Nos últimos anos, novas tecnologias foram desenvolvidas, em que estas permitem que a programação seja executada de forma simples, não sendo necessário

um conhecimento específico de linhas de códigos, mas sendo de fundamental importância o conhecimento por parte do professor do *software*. O MIT vem aprimorando uma tecnologia que está revolucionando os ambientes de programação, como anteriormente citado. Com uma interface amigável e de fácil operação os *softwares* de programação, a partir de módulos de encaixe, facilitam o entendimento e, de forma intuitiva o usuário pode evoluir operacionalizando-o.

Além da facilidade de programação dos robôs, pedagogicamente, a forma com que a robótica pode ser abordada e as diversas competências que os alunos poderão adquirir com auxílio desta ferramenta é, sem dúvidas, mais do que um motivo para a sua utilização. Com o kit robótico podemos estimular a *criatividade* ao propormos aos alunos, que em grupo, encontrem uma solução para determinada questão, esta atividade por sua vez estimula a troca de ideias e a *convivência em sociedade*, além de estimular o *raciocínio lógico* atribuindo uma finalidade clara à aprendizagem tendo em vista a ótica do aluno. Essas são as novas competências a serem aprendidas e as diferentes formas de agregarmos valores a educação e ao ensino da matemática de acordo com os PCN (BRASIL, 1997).

Capítulo 2

Pressupostos Teóricos

Neste capítulo procuramos estabelecer a teoria pedagógica utilizada, mostrando a origem da teoria e também buscando elucidar a mediação¹ como fundamental peça para a obtenção de resultados satisfatórios na utilização de tecnologias na educação.

"Quanto mais eficaz for o processo de mediação, maior será a capacidade da criança de se beneficiar e de se tornar modificável pela exposição direta ao estímulo"

Feuervtein

2.1 O Surgimento da Abordagem Construcionista

Segundo [Valente \(1998\)](#), no final da década de 50 o computador era visto como "máquina de ensinar"², programas eram desenvolvidos com o intuito de ensinar e eles eram categorizados como: tutoriais, exercício e prática, jogos e simulação, mas com a limitação computacional da época e a dificuldade de formar equipes multidisciplinares, para desenvolver os programas e os que surgiam no mercado eram bem limitados. No mesmo período, o conceito de "Instrução Programada", que consiste em: dividir o material a ser ensinado em módulos, ou seja, pequenos segmentos logicamente encadeados proposta por Skinner, ganhava corpo. Sem os computadores, a aplicabilidade deste conceito se tornava difícil, pois a quantidade e a variedade de materiais impressos, para sua aplicação, era tanta que dificultava a sua implementação.

Os módulos de aprendizado eram apresentados diretamente pelo computador e na década de 60 os programas de "Instrução Programada" se consolidavam. Com o passar dos tempos os métodos de aprendizagem também evoluíam e a utilização de computadores

¹ Processo de abordagem necessária para a interlocução entre as partes em questão, que no caso procura interligar os alunos às ferramentas tecnológicas tendo como foco o resultado na aprendizagem do conteúdo

² O ensino em seus moldes tradicionais a partir do computador.

como máquina de ensinar já sofrera alterações, o computador começava a ser visto como uma ferramenta no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com MIT (1996) na década de 60, com uma visão futurista, o matemático e professor Seymour Papert já dizia que toda criança deveria ter um computador em sala de aula. Suas teorias eram vistas como de ficção científica, ele trabalhou do final da década de 50 a início da década de 60 com Jean Piaget, em que fez uma adaptação da teoria construtivista de Piaget dando origem a abordagem do construcionismo³. Papert, agora, co-fundador do laboratório de inteligência artificial do MIT, baseando-se em suas visões futuristas e na teoria de Piaget, no final da década de 60, desenvolveu a linguagem de programação voltada para a educação chamada Logo⁴. Esta linguagem foi criada de forma a obter um melhor desempenho do modo como as crianças pensam, estimulando suas capacidades e procurando ampliar os seus conhecimentos.

A linguagem Logo foi criada para a comunicação do indivíduo com o computador. Suas características envolvem uma metodologia de ensino baseada no computador e que visa explorar o processo de aprendizagem. As chamadas atividades espaciais, desenvolvida com esta linguagem, são fundamentais para auxiliar nesta comunicação e são produzidas a partir de uma Tartaruga que se move no chão ou virtualmente (direto da tela do computador). Segundo Valente (1998), em uma simples atividade de comandar uma tartaruga de um local a outro, dependendo da forma que se trabalhe com esta informação, podem ser desenvolvidos diversos conceitos, tais como: espaciais, numéricos, geométricos entre outros.

Já na década de 80 Papert publicou o livro chamado "Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas" e a partir daí que suas ideias passaram a ser melhor difundidas na sociedade pedagógica da época (MIT, 1996). Na metade da década de 80 a partir da abordagem construcionista, da filosofia aplicada à linguagem Logo e de uma parceira feita com a empresa dinamarquesa *Lego*, foi desenvolvido o brinquedo *Lego-Logo* que eram baseados nos conhecidos blocos de encaixe, engrenagens, sensores e motores que futuramente daria origem ao *Lego Mindstorm*. A fundamental ideia desta abordagem é a noção de concreto. A ação desempenhada pelo aluno na interação com o computador, favorecendo o desenvolvimento e a construção mental, que por sua vez gera outras ações concretas de forma dialética entre o concreto e o abstrato. Com a utilização do robô a materialização das ações executadas aumentam o poder de percepção do aluno para que este possa fazer a depuração e assim atingir mais facilmente o seu objetivo.

³ Teoria que defende a permissibilidade ao educando de construir o seu próprio conhecimento por intermédio de alguma ferramenta como o computador e no nosso caso a robótica

⁴ Essa linguagem foi desenvolvida de maneira que todo aluno desenvolvesse os comandos de acordo com suas necessidades e em tempos diferentes e interesses, sendo fundamental o respeito do professor ao ritmo de cada um.

2.2 Processo de Aprendizagem

É sabido que o aluno pode aprender algo sem que este algo esteja relacionado a um contexto, apenas memorizando um conteúdo. Eles podem utilizar o que foi pré memorizado para solucionar determinado problema, porém sem entender exatamente o que estão realmente fazendo.

A ideia central deste trabalho é tornar a aprendizagem significativa, ou seja, dar um sentido a aprendizagem. Em [Lima et al. \(2006, p. 1\)](#) quando inicialmente é apresentada a questão sobre proporcionalidade "*Uma empresa de engenharia asfaltou uma estrada de 36km em 14 dias. Quantos dias seriam necessários para a mesma firma asfaltar uma estrada de 54km?*" os autores procuram atribuir um sentido ao conteúdo que será ministrado vislumbrando uma abertura no horizonte por parte do alunado, para que ao discorrer sobre o conteúdo em questão o aluno tenha a percepção de contexto e aplicabilidade, que consideramos fundamental para iniciar a abordagem de conteúdos. Para Papert, segundo sua abordagem construcionista, a presença de ferramentas para o auxílio no processo de aprendizagem é fundamental para a construção do conhecimento e para a dinamização do processo, pois a forma como se aprende, dá-se de forma diferenciada e colaborativa, a [Figura 3](#) ilustra o processo de aprendizagem segundo [Valente \(1998\)](#).



Figura 3: Processo recursivo de como se aprende

[Valente \(1998\)](#) diz que a reflexão sobre determinado problema determinará como se aprende: por meio da elaboração de conjecturas, teste, re-elaboração das conjecturas, novo teste repetindo o processo recursivamente. A abstração do aluno permite deduzir algum conhecimento da sua própria ação ou do que foi proposto. Com isso o aluno tem o papel de agente no processo. Cometer erros inesperadamente durante a execução da tarefa faz parte processo, pois estes poderão ser novamente refletidos e testados de acordo com o processo recursivo até encontrar um denominador comum.

Além da ferramenta que fará parte do processo de mediação, outro elemento importante para a aprendizagem é o mediador, este será "facilitador" da aprendizagem

criando o ambiente propício para que o desafio proposto mantenha-se vivo - realizando indagações, intervindo no processo, para que cada vez mais a etapa de reflexividade esteja presente o que, certamente, otimizará os resultados. É de fundamental importância para o processo que o mediador, além de ter conhecimento do conteúdo a ser abordado, tenha domínio sobre os elementos da etapa de depuração, para que possa intervir da melhor forma no processo. Logo, o docente deverá fazer perguntas que acentuem a aprendizagem e não o seu produto. A descrição de como o mediador deve intervir é definida através do conceito de Vygotsky que diz que o mediador é efetivo quando ele age dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD⁵).

Para tanto, deverá ser criado um ambiente de aprendizagem que oportunize o desenvolvimento das habilidades e que aproxime o alunado de situações que possivelmente encontraria em seu cotidiano. O ponto crucial para o estabelecimento do ambiente favorável é o docente, a abordagem que ele utilizará e sua compreensão acerca da educação.

O conteúdo deve ser significativo em sua essência sendo potencialmente estruturado do ponto de vista lógico, pois precisamos aumentar o poder de concentração, de assimilação e de performance do alunado. O aspecto psicológico da abordagem do conteúdo deve ser igualmente contemplada, pois o alunado precisa, de certa forma, agregar novas informações e conhecimentos aos já existentes e a robótica permite criar situações em um ambiente propício para evidenciar o potencial de cada um.

De acordo com Piaget (1995) aprender ou gostar de Matemática não é inato e sim o resultado da maneira de ensinar e da abordagem metodológica de ensino utilizada pelo professor. Para uma aprendizagem significativa, é preciso uma ação favorável do aluno que aprende, sua interação do aluno é fundamental para que haja maiores relações das novas ideias com o que já se conhece para que não se limite à memorização. A habilidade do docente em estimular o alunado é fundamental. O docente intervindo ponderadamente despertará o aluno para a efetivação destas relações e a medida que estiverem construindo significados também estarão melhorando esquemas já existentes, ou seja, melhorarão suas capacidades de estabelecer novas relações seja ela em qualquer situação que estiver.

⁵ É a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de resolver um problema sem ajuda, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através de resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro.

Capítulo 3

Conhecendo o Kit Lego NXT 9797 Education

O Kit 9797 foi desenvolvido especificamente com recursos educacionais para ser devidamente utilizado em sala de aula, depois da escola ou até mesmo em casa com o intuito de facilitar a aprendizagem, por parte dos alunos, de programação, projetos e controle de modelos funcionais automatizados que realizam tarefas realistas. Na Figura 4 temos o Kit Lego Mindstorm, que surgiu em 1998, a partir de uma parceria entre a empresa Lego e o MIT Media Lab. Em 2006 foi lançada a nova geração do bloco inteligente conhecido como NXT Brick. O NXT é o "cérebro" do robô Lego Mindstorm Education, além desse bloco principal o Kit é composto por sensores, blocos e roldanas encaixáveis (LEGO, 2006).



Figura 4: Kit Lego NXT 9797 Education

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

A Figura 5 mostra o **Brick NXT** que é um bloco programável de 32 bits que possui comunicação via bluetooth, porta USB, um monitor LCD, um alto-falante, 4 portas *input* e 3 *output*. É possível utilizar comandos básicos predefinidos diretamente no bloco, mas caso queira uma programação mais avançada basta instalar o *software* que acompanha o Kit. O tijolo é alimentado por 6 pilhas AA ou uma bateria própria recarregável.



Figura 5: Brick NXT - O cérebro do robô

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

O **Servo Motor** é mostrado na Figura 6, o mesmo é responsável por atribuir movimento ao conjunto e possui um sensor de rotação que mede a velocidade, a distância e as reporta ao tijolo NXT. Três motores acompanham o kit, porém vários motores poderão compor um sistema, dependendo do trabalho a ser desenvolvido uma vez que possuem um grau precisão bem elevado para o sincronismo, caso necessário.



Figura 6: Servo Motor

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

O **Ultrasonic Sensor (Sensor Ultrassônico)** apresentado na Figura 7 é um sensor ultrassônico capaz de detectar um objeto e medir sua proximidade em polegadas

ou centímetros. Esse sensor utiliza o mesmo princípio dos morcegos: mede a distância calculando o tempo em que uma onda de som incide sobre um objeto e retorna ao mesmo, como um eco, também, sendo capaz de medir distâncias de 0 a 2,5 metros com precisão de mais ou menos 3 cm. Objetos de grandes dimensões e de superfície rígida proporcionam uma melhor leitura da distância, enquanto, objetos pequenos, curvos ou muito finos podem dificultar a leitura do sensor.



Figura 7: Sensor Ultrassônico

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

Na Figura 8 podemos ver o **Sound Sensor (sensor de som)**, o mesmo é capaz de detectar os níveis de decibéis: a suavidade ou a intensidade de um som. O sensor pode medir níveis de sons acima de 90 dB - aproximadamente ao som de um cortador de gramas. O display exibe os sons em porcentagem (%), para fins de parâmetro: de 4 a 5% é como uma sala de estar em silêncio e de 5 a 10% é como alguém falar algo a uma certa distância. De 10 a 30% é como se duas pessoas estivessem conversando próximo ao sensor, de 30 a 100% é como se pessoas estivessem cantando uma musica que já estivesse em um alto volume a cerca de um metro de distância do sensor de som. Exemplo de utilização: O NXT pode ser programado de maneira a identificar um determinado som e assim alterar sua ação: mudança de trajetória ativação de determinado motor entre outras.



Figura 8: Sensor de Som

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

O **Touch Sensor (Sensor de Toque)** da Figura 9 é um interruptor que pode ser programado para executar uma ação quando pressionado ou liberado.



Figura 9: Sensor de Toque

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

O **Light Sensor (Sensor de Luz)** apresentado na Figura 10 disponibiliza ao robô distinguir luz de escuridão, com este sensor ele é capaz de medir intensidade de luz em superfícies coloridas.



Figura 10: Sensor de Luz

Fonte: <http://education.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>

O **Software - (NXT 2.0)** (Figura 11) pode ser instalado em plataforma Windows ou Mac OSX e, como anteriormente mencionado, torna fácil o procedimento para criar programas. Através de uma linguagem baseada em blocos, o programador necessita apenas de alguns conceitos básicos para estruturar os blocos e desenvolver alguns programas.

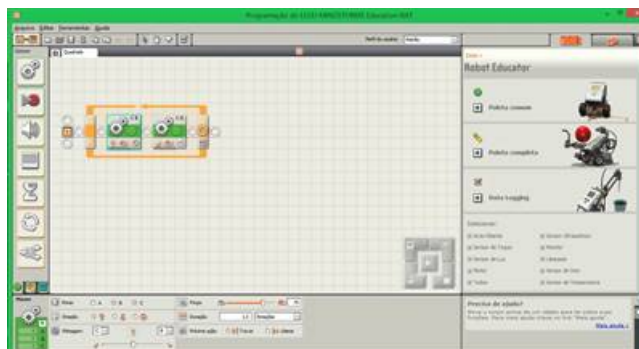


Figura 11: Janela do *Software* responsável pela programação do Robô

Fonte: Print screen do *software* NXT

O modelo utilizado para a execução dos exemplos será o que se apresenta na Figura 12 apenas com variação do tamanho de roda.



Figura 12: Mindstorm NXT 9797 - Modelo com sensor de ultrassônico de luz e som

Fonte: Elaboração Própria

Exemplificando a criação de um simples programa.

Exemplo 3.1 Na "Paleta de Programação" (Figura 13), do lado esquerdo da janela, estão localizados os blocos de programação, sendo eles: Bloco Movimento, Bloco Gravar e Executar, Bloco do Som, Bloco Monitor, Bloco Espera, Bloco Loop e Bloco Condição.

Abra o software MINDSTORM NXT 2.0;

Na Paleta de Programação (Figura 13) clique no Bloco Mover para selecioná-lo;

Com o bloco selecionado clique no "Fluxo Sequencial" para inserir o bloco;

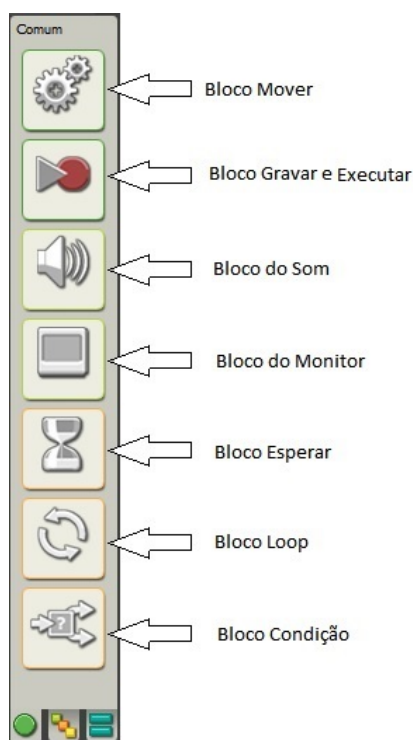


Figura 13: Paleta de Programação

Fonte: *Print screen* do software NXT

Clique, na área de programação, no "fluxo Sequencial" (Figura 14) para inserir o bloco Mover;



Figura 14: Fluxo Sequencial com bloco Mover

Fonte: *Print screen* do software NXT

Ao selecionar o bloco mover no fluxo sequencial o painel de configuração (Figura 15), localizado na parte inferior da janela do software, ficará preparado para receber alterações inerentes ao bloco mover que foi previamente selecionado.



Figura 15: Barra configurações - Bloco Mover

Fonte: *Print screen do software NXT*

Lembrete: Caso selecione outro bloco a barra configurações ficará de acordo com o bloco selecionado.

Cada opção no item **porta** corresponde a qual ou quais motores deverão ser utilizados; podemos definir a **direção** (para frente, para trás ou parar) do robô clicando nas opções; em **pilotagem** pode-se definir qual motor terá maior potência; em **força** determina-se a velocidade do robô; em **duração** podemos controlar a distância através das rotações do motor.

Portanto a barra de configurações, conforme a Figura 15, está configurada da seguinte forma:

- 1 - Utilizar os motores B e C;
- 2 - Força máxima nos motores;
- 3 - Dar 5 rotações (giros) no motor;
- 4 - Ir para frente.

Exemplo 3.2 Fazendo o robô virar para a esquerda ou para direita. Insira um bloco mover (Figura 15) no fluxo sequencial; selecione o bloco inserido e altere as configurações. Caso queira que o robô vá para direita, desligue o motor responsável pela roda direita (Figura 16) e mantenha e atribua um movimento.



Figura 16: Porta responsável pelo funcionamento do motor de uma das rodas, neste caso a da direita.

Fonte: *Print screen do software NXT*

Caso queira que ele vire para esquerda, desmarque o motor responsável pela roda esquerda Figura 17 e faça movimentar a outra roda.



Figura 17: Porta responsável pelo funcionamento do motor de uma das rodas, neste caso a da esquerda.

Fonte: *Print screen* do software NXT

Observação 3.1 Para saber qual letra corresponde ao motor da direita e ao da esquerda basta observar em que motor está ligado o fio que sai cada uma das letras na parte superior do bloco de programação de acordo com a Figura 18.



Figura 18: Letras associadas aos motores

Fonte: *Print screen* do software NXT

Exemplo 3.3 Identificado quantos giros no motor são necessários para o robô rotacionar 90° em torno de uma de suas rodas.

Posicione o robô sobre a cópia de um transferidor ou sobre algo plano que represente um ângulo de 90° ;

Mantenha o motor de uma das rodas desligado;

em duração (Figura 19) insira uma rotação.



Figura 19: Quantidade de giros do motor

Fonte: *Print screen* do software NXT

Execute o programa (Figura 20), caso a virada tenha ultrapassado a marcação de 90° , reduza as rotações, caso contrário aumente até ajustar para que ele vire o ângulo solicitado.



Figura 20: Botão para executar imediatamente a ação programada

Fonte: *Print screen* do software NXT

Supondo que 1 giro no motor seja suficiente para ele virar 90° concluímos esta tarefa.

Exemplo 3.4 Programando o robô para percorrer uma trajetória no formato de um quadrado

No Exemplo 3.3 aprendemos a determinar o quanto o robô irá virar, em graus, que no caso foi 90° . Para executarmos esta tarefa basta fazermos o robô se mover em linha reta e depois virar 90° e repetir este processo mais três vezes. Veja na Figura 21 como ficará o fluxo sequencial.



Figura 21: Fluxo sequencial programado para percurso em forma de quadrado

Fonte: Print screen do software NXT

Em cada bloco da Figura 21 podemos ver as letras *C* e *B* aparecem juntas e a letra *B* aparece só, o que nos mostra que o robô utilizará dois motores, em seguida, um motor, depois dois e assim até terminar de executar. Configurando a mesma quantidade de giros para quando os dois motores tiverem marcados teremos lados iguais e configurando quando um motor tiver marcado tal como o Exemplo 3.3 teremos os ângulos de 90° , que nesta ordem formará um quadrado.

Porém, a programação pode ficar melhor estruturada utilizando o "Bloco Loop", pois necessitamos somente do primeiro e do segundo bloco e fazer com que a tarefa se repita a quantidade de vezes que determinarmos de acordo com a Figura 22.

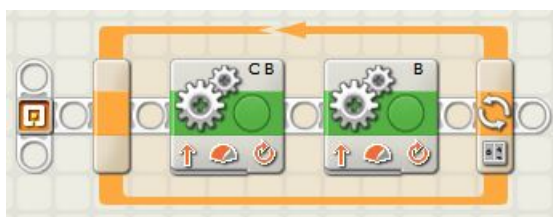


Figura 22: Fluxo sequencial programado para o percurso em forma de quadrado com Loop

Fonte: Print screen do software NXT

Utilizamos o "Bloco Loop" Figura 13 e, em seguida, inserimos os dois blocos responsáveis por se mover em linha reta e virar 90° . Configuramos o controle do "Bloco Loop" para **contar** até 4 vezes Figura (23), ou seja, executar 4 vezes os blocos que estão ali inseridos no "Bloco Loop".

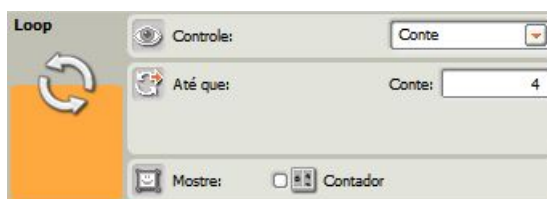


Figura 23: Configuração do Bloco Loop

Fonte: *Print screen do software NXT*

Exemplo 3.5 Utilizando o Sensor Ultrassônico

Queremos que o robô movimente-se, em linha reta, indefinidamente e toda vez que encontrar um obstáculo deverá parar e, em seguida, virar e depois continuar a se mover, em linha reta, indefinidamente repetindo todo o processo.

O fluxo sequencial mostrado na Figura 24 poderá estar configurado da forma abaixo.



Figura 24: Fluxo sequencial com Sensor Ultrassônico (Distância)

Fonte: *Print screen do software NXT*

O primeiro Bloco que envolve os quatro outros blocos é o Loop, seu controle está configurado "para sempre" (ele repetirá o processo uma quantidade indefinida de vezes), o segundo fará com que o robô utilize o motor C e B configurado para mover em linha reta indefinidamente (para tanto troque a duração da rotação do motor para ilimitado). Repare que aparece o símbolo de infinito no bloco; o terceiro bloco está configurado para parar, reparem o símbolo (stop) no bloco; o quarto bloco está configurado para virar.

Com o hábito de mexerem em dispositivos eletrônicos, os alunos aprendem rapidamente a configuração destes comandos. Com cerca de 2 tempos de aula, aproximadamente, e explorando de forma intuitiva, os demais comandos, também, são aprendidos neste período.

Caso se queira que o robô execute mais alguma tarefa, basta inserir mais blocos no fluxo sequencial e o mesmo executará cada tarefa de acordo com a ordem que os blocos aparecem no fluxo.

Os recursos deste equipamento permitem inúmeras outras atividades, porém não vem ao caso tentar expô-las neste trabalho.

3.1 Porquê utilizar Lego Mindstorm?

O Kit Lego Mindstorm (Education) é composto por blocos e roldanas encaixáveis, servo motores, uma central inteligente (programável), sensores de som e ultrassônico entre outros sensores. A combinação das construções de blocos encaixáveis com a tecnologia envolvida neste equipamento tornam dinâmicas as abordagens que os inclua, permitindo o desenvolvimento do trabalho em equipe, da criatividade na resolução de problemas. Atualmente existe a comercialização de Kits de diversos modelos de robôs, a proposta deste trabalho é a utilização do Kit Mindstorm Education 9797.

O computador por si já proporcionou uma possibilidade de mudança de paradigma pedagógico na educação, há alguns anos muitos acreditavam que seria difícil ter computadores nas escolas, e hoje em dia, a maioria das escolas possuem pelo menos um laboratório de informática. Vislumbramos que daqui a alguns anos teremos pelo menos um laboratório de robótica em cada escola, embora saber que o sistema educacional ainda é precário. O fato de existir um laboratório de robótica não quer dizer que deverá ser oferecido apenas cursos de robótica, mas, também, para ser utilizada de forma agregadora que facilitará o ensino de conteúdos regulares na educação básica em particular o da matemática estimulando: o desenvolvimento do raciocínio, situações que envolvam resoluções de problemas de forma enriquecedora, a criatividade e o trabalho em equipe.

De acordo com [Recife \(2014\)](#) a Prefeitura Municipal do Recife foi a pioneira em utilizar a robótica no ensino básico da educação pública no Brasil. Cerca de 80 mil estudantes da rede tem acesso a este novo recurso, onde acreditamos que seja um tendencia na educação.

Capítulo 4

Tópicos de Matemática para o Desenvolvimento do Trabalho

Neste capítulo, buscamos definir, de maneira formal, alguns conteúdos matemáticos que poderão ser abordados com a aplicação das atividades com o auxílio da robótica. Lembramos que diversos outros assuntos poderão ser abordados com a utilização do kit.

4.1 Razão

A palavra **razão** vem da palavra em latim **Ratio** que significa divisão. A palavra rateio e racional também se origina da palavra ratio. Exemplo: "Vamos ratear (dividir) a conta?"

Definição 4.1 *Dados dois números, a e b , com $b \neq 0$, a razão de a para b é o quociente da divisão de a por b ($a \div b$)*

Notação:

Razão de 2 para 5

$2 \div 5$ ou $\frac{2}{5}$ ou 0,4

Razão de 5 para 2

$5 \div 2$ ou $\frac{5}{2}$ ou 2,5

Definição 4.2 *Duas razões são inversas quando o produto entre elas é igual a 1.*

Exemplo 4.1 *A razão de 2 para 5 é inversa a razão 5 para 2, pois $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$*

4.2 Escalas

Definição 4.3 Na escala $1:n$, tem-se:

$$\frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real correspondente}} = \frac{1}{n}$$

4.3 Teorema Fundamental da Proporcionalidade - TFP - Visão Algébrica

Teorema 4.1 Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

$$i) f(kx) = kf(x) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ e todo } x \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

$$ii) \text{Pondo } a = f(1), \text{ tem-se } f(x) = ax \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

$$iii) f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Demonstração: Provaremos as implicações (4.1) \Rightarrow (4.2), (4.2) \Rightarrow (4.3) e (4.3) \Rightarrow (4.1). Inicialmente demonstraremos (4.1) \Rightarrow (4.2), mas para isso temos que ter em vista que: para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ a hipótese (4.1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

Então, temos:

$$nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x)$$

Logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$$

Seja $a = f(1)$, como $f(0) = f(0 \cdot 1) = 0 \cdot f(1) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que exista algum número $x \in \mathbb{I}$ tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$.

$$\text{Temos } \frac{f(x)}{a} < x:$$

Tomemos um número racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$ então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Então, por contradição (4.1) \implies (4.2).

Agora vamos mostrar que (4.2) \implies (4.3) para isso tomemos $a = f(1)$, com $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tem-se que $f(x+y) = a(x+y) = ax+ay = f(x)+f(y)$.

E agora por indução demonstramos que (4.3) \implies (4.1). Seja $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Tomando $x = y$ temos $f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$, ou seja, a proposição é válida para $k = 2$.

Suponha a proposição válida para certo $k \in \mathbb{N}$ temos $f(k.x) = k.f(x)$. Temos que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ então para $k+1$ teremos $f((k+1)x) = f((k.x)+x) = f(k.x)+f(x) = k.f(x)+f(x) = (k+1)f(x)$. Como $f(0) = 0$ então $f(0) = f(x+(-x)) = f(x)+f(-x) \iff f(-x) = -f(x)$ daí tomando $m = -n$, $n \in \mathbb{R}$ temos $f(m.x) = f(-n.x) = -f(n.(-x)) = n.f(-x) = n.(-f(x)) = -n.f(x) = m.f(x)$.

□

4.4 Teorema Fundamental da Proporcionalidade - TFP - Visão Geométrica

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade é uma consequência do teorema de Tales, portanto:

Utilizaremos a seguinte propriedade dos números reais.

Propriedade 4.1 (*Arquimediana dos números reais*). *Dado um número real, existe um número natural maior que ele.*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < \epsilon \quad (4.4)$$

Teorema 4.2 (*Tales*). *Se três retas paralelas determinam (dois) segmentos congruentes a uma reta concorrente, então determinam (dois) segmentos congruentes em qualquer das retas concorrentes.*

Significado. Sejam r_1, r_2 e r_3 três retas paralelas entre si. Suponha que s seja concorrentes a estas retas e A_1, A_2 e A_3 são pontos de intersecções de s com r_1, r_2 e r_3 respectivamente de modo que $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$. Neste caso, para qualquer reta t intersectando r_1, r_2 e r_3 em B_1, B_2 e B_3 respectivamente, tem-se que $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$.

Uma consequência do teorema de Tales

Proposição 4.1 (Corolário do Teorema de Tales). *Se um conjunto das retas paralelas determinam segmentos congruentes numa reta concorrente, então determina segmentos congruentes em qualquer das retas concorrentes.*

Significado. Sejam r_i com $i = 0, \dots, n$ as retas paralelas. Se s_1 é uma reta concorrente a estas na qual os pontos A_i determinado como intersecção com r_i são igualmente espaçados, então para toda reta concorrente s_2 , os pontos B_i determinados como intersecção com r_i também são igualmente espaçados.

Demonstração. Consideremos as retas paralelas r_0, r_1, \dots, r_n que cortam a reta t_1 nos pontos P_i respectivamente, determinando segmentos congruentes, isto é, $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$ para $i = 0, \dots, n - 2$. Se t_2 for reta concorrente a r_0 , será concorrente a todos r_i . Consideremos o ponto de intersecção Q_i de t_2 com r_i (Figura 25).

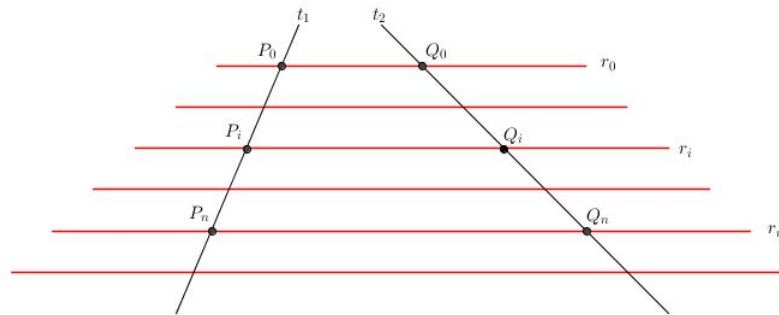


Figura 25: Corolário do Teorema de Tales

Para cada $i = 0, \dots, n - 2$, $\overline{P_iP_{i+1}} = \overline{P_{i+1}P_{i+2}}$ implica que $\overline{Q_iQ_{i+1}} = \overline{Q_{i+1}Q_{i+2}}$ pelo Teorema de Tales, por r_i, r_{i+1} e r_{i+2} serem retas paralelas. Logo, r_i determinam segmentos congruentes sobre t_2 .

Proposição 4.2 *Dado um número inteiro positivo n , qualquer segmento AB pode ser dividido em n partes iguais.*

Demonstração. Seja AB um segmento e $n > 0$ um número inteiro. Considere o ponto C fora da reta suporte do segmento AB . Considere $P_0 = A = Q_0$ e $P_1 = C$ e sejam os pontos P_i ordenados e igualmente espaçados sobre a semirreta \overrightarrow{AC} com espaçamentos \overline{AC} entre eles, com $i = 0, \dots, n$. (Figura 26)

Passando retas r_i paralelas a P_nB pelos pontos P_i , e sejam Q_i a intersecção destas retas com a semirreta AB . Como r_i não pode cruzar a reta r_n e os pontos P_i estão no mesmo lado de Q_0 relativamente a r_n , os pontos Q_i também estarão. Da mesma forma, os pontos Q_i estarão no mesmo lado de B relativamente a reta r_0 passando por Q_0 . Desta forma, os pontos Q_i estão sobre AB . Como os pontos P_i estão igualmente espaçados, Q_i também serão igualmente espaçados pelo corolário do Teorema de Tales (Proposição 4.1).

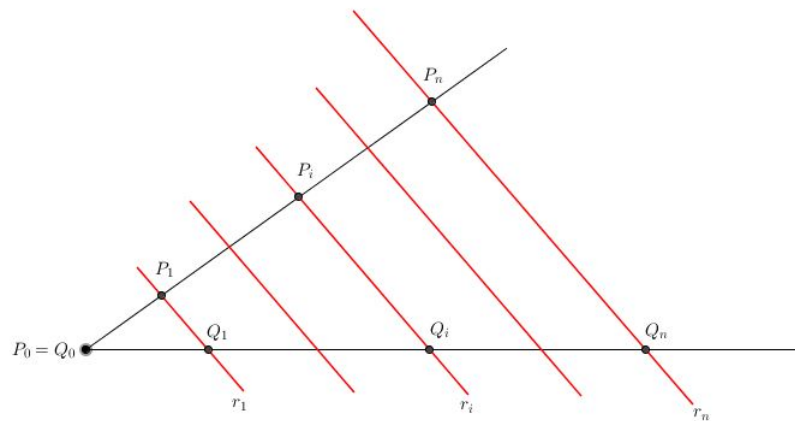


Figura 26: Divisão do segmento AB

□

Dois conjuntos dos números $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ são ditos proporcionais se existir um número λ talque $b_i = \lambda a_i$ para todo i . Quando a divisão é permitida, é equivalente a dizer que $\frac{a_i}{b_i} = \lambda$ para todo i . Tal λ é denominado de razão ou fator de proporcionalidade.

Definição 4.4 *Dois triângulos são ditos semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.*

Os $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes se $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda$.

A razão das medidas entre os lados correspondentes num triângulo semelhante é denominado de razão da semelhança.

Teorema 4.3 *(Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Dois triângulos tem ângulos correspondentes congruentes se, e somente se, têm os lados correspondentes proporcionais.*

$\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes se $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \lambda$.

Demonstração. (\implies) Se provarmos que a razão entre um par de lados correspondentes é igual a razão entre outro par de lados correspondentes, podemos concluir que a razão entre qualquer dos lados correspondentes são iguais. Considere $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ com ângulos correspondentes congruentes. Se eles tiverem um lado igual, serão congruentes pelo caso de congruência *ALA* e terão todos lados congruentes e os triângulos são semelhantes com razão de semelhança 1. Agora consideremos o caso de ter lados não congruentes.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Então, podemos construir $\triangle ADE$ congruente à $\triangle A'B'C'$ sobreposto ao $\triangle ABC$. Para isso, considere D sobre AB tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e E sobre AC tal que $\overline{AE} = \overline{A'C'}$, o que garante a congruência de $\triangle ADE$ com $\triangle A'B'C'$ por *LAL*. Como ângulos correspondentes entre $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são iguais, $\angle ADE = \angle B$ que são ângulos correspondentes formado pela interseção de AB com DE e BC . Logo, DE é paralelo a BC . Assim, podemos considerar o caso $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ com D sobre AB e DE paralelo a BC na qual queremos mostrar que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

Inicialmente, consideremos os pontos $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$ de forma que P_i dividam o segmento AB em n partes iguais, isto é, $\overline{P_i P_{i+1}} = \frac{\overline{AB}}{n}$ para $i = 0, \dots, n-1$ (Figura 27). Como o ponto D está no segmento AB , estará em algum segmento $P_{k_n} P_{k_n+1}$ de modo que $\overline{AP_{k_n}} \leq \overline{AD} < \overline{AP_{k_n+1}}$. Como os pontos P_i são igualmente espaçados, $\overline{AP_i} = i \cdot \frac{\overline{AB}}{n}$ e temos

$$k_n \cdot \frac{\overline{AB}}{n} \leq \overline{AD} < (k_n+1) \cdot \frac{\overline{AB}}{n}. \text{ Dividindo por } \overline{AB}, \text{ temos } \frac{k_n}{n} \leq \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{k_n+1}{n} = \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Subtraindo $\frac{k_n}{n}$, temos $0 \leq \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{k_n}{n} < \frac{1}{n}$. Assim,

$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{k_n}{n} \right| < \frac{1}{n} \text{ para todo } n > 0.$$

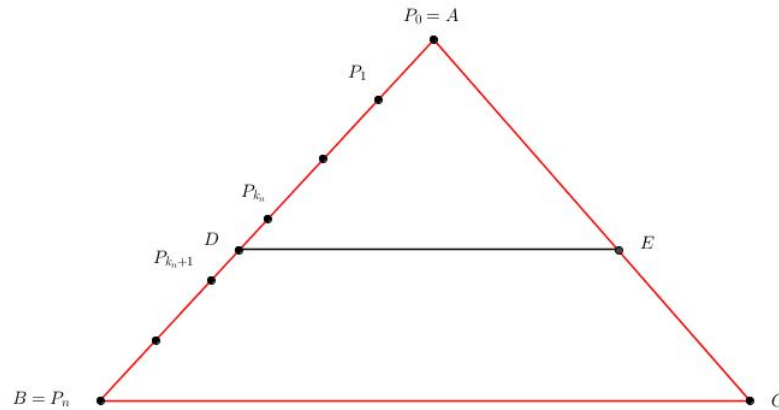


Figura 27: Divisão do lado AB

Agora precisamos verificar o que acontece no lado AC . Traçaremos as retas r_i paralelas a BC (e logo a DE também) pelos pontos P_i e consideremos os pontos Q_i obtidos como intersecção de r_i com o prolongamento do lado AC . Podemos ver que $Q_0 = A$ e $Q_n = C$. Para $i = 1, \dots, n-1 > 1$, como r_i não podem cruzar nem r_0 e nem o r_n , P_i estar entre eles implica que Q_i também estarão entre eles e conseqüentemente, Q_i estão no segmento AC . Como r_i são paralelas e determinam segmentos congruentes sobre AB , também determinará segmentos congruentes sobre AC (Figura 28) pelo corolário do Teorema de Tales (Proposição 4.1).

Como DE é paralelo a r_i , ele não poderá cruzar r_{k_n} nem o r_{k_n+1} de forma que E

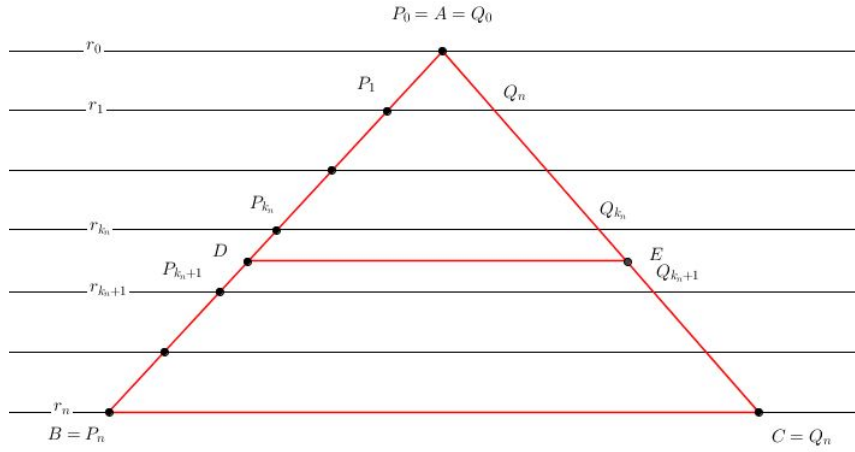


Figura 28: Retas paralelas passando por P_i

deverá ficar entre Q_{k_n} e Q_{k_n+1} . De forma análoga ao caso feito pelo D e P_i , temos que $\left| \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - \frac{k_n}{n} \right| < \frac{1}{n}$ para todo $n > 0$. Assim, temos que $\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| = \left| \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - \frac{k_n}{n} + \frac{k_n}{n} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \right| \leq \left| \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - \frac{k_n}{n} \right| + \left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{k_n}{n} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ para todo $n > 0$. Então $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, pois caso contrário, $\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{2}{n}$ implicaria que $n < \frac{2}{\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right|}$, significando que existe um número real maior que qualquer número inteiro, contradizendo a propriedade arquimediana dos números reais (Propriedade 4.1).

Portanto $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$.

(\Leftarrow) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ com lados proporcionais. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ então dois triângulos são congruentes pelo caso de congruência ALA e, logo, tem ângulos correspondentes congruentes. Se estes lados não forem congruentes, podemos supor sem perda de generalidade que $A'B' < AB$. Seja D um ponto sobre AB de forma que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Considere E sobre AC de forma que a reta suporte de DE é paralela à reta suporte de BC . Então, $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ tem ângulos correspondentes congruentes e pelo que já demonstramos, terá os lados correspondentes proporcionais. Como $AD = A'B'$, a razão de semelhança de $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ com o $\triangle ABC$ é igual, o que implica que $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes por LLL . Logo, $\triangle A'B'C'$ tem ângulos correspondentes congruentes com $\triangle ADE$ que, por sua vez, tem os ângulos correspondentes congruentes com $\triangle ABC$.

□

O Teorema 4.3 garante que os triângulos com ângulos correspondentes congruentes são semelhantes e os triângulos com lados correspondentes proporcionais também são

semelhantes.

O Teorema de Tales generalizado, também conhecido como Teorema da projeção paralela é um resultado equivalente ao Teorema fundamental da proporcionalidade.

Teorema 4.4 (*Tales generalizado*). *Dadas três retas paralelas, elas determinam segmentos com a mesma proporção, independente da reta concorrente.*

Sejam r_i com $i = 1, 2, 3$ as retas paralelas. Se s_1 e s_2 as retas concorrentes à r_i , determinando pontos de interseção A_i e B_i com r_i , então $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}}$.

Demonstração. Sejam r_1, r_2 e r_3 as retas paralelas e s_1 e s_2 são retas concorrentes a r_i . Precisamos mostrar que os segmentos determinados por r_i sobre s_1 são proporcionais aos segmentos determinados sobre s_2 . Consideremos A_1, A_2 e A_3 , os pontos de interseção de s_1 com as retas r_1, r_2 e r_3 respectivamente. Também consideremos B_1, B_2 e B_3 , os pontos de interseção de s_2 com as retas r_1, r_2 e r_3 respectivamente. Queremos provar que $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}}$.

Sejam P e Q , os pontos sobre as retas r_2 e r_3 respectivamente, obtido pela interseção com a reta paralela a s_1 passando pelo ponto B_1 . Então $A_1A_2PB_1$ e A_2A_3QP são paralelogramos e, conseqüentemente, $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1P}$ e $\overline{A_2A_3} = \overline{PQ}$. Logo, basta mostrar que $\frac{\overline{B_1P}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}}$. Como $\angle B_1PB_2 = \angle PQB_3$ por serem ângulos correspondentes formados por B_1Q e as retas paralelas r_1 e r_2 , temos que $\triangle B_1PB_2$ e $\triangle B_1QB_3$ têm ângulos congruentes (pois $\angle B_1$ é comum) e pelo teorema fundamental da proporcionalidade, tem lados proporcionais.

Logo, $\frac{\overline{B_1P}}{\overline{B_1Q}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}$. Mas $\overline{B_1Q} = \overline{B_1P} + \overline{PQ}$ e $\overline{B_1B_3} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$, tendo a igualdade

$$(i) = \frac{\frac{\overline{B_1P}}{\overline{B_1P} + \overline{PQ}}}{\frac{\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}}{\overline{B_1B_2}}} \iff 1 + \frac{\overline{PQ}}{\overline{B_1P}} = 1 + \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_1B_2}} \iff \frac{\overline{PQ}}{\overline{B_1P}} = \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_1B_2}} \iff \frac{\overline{B_1P}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2B_3}}$$

(MASSAGO, 2014).

□

4.5 Grandezas proporcionais

Chamamos grandezas proporcionais, correspondências que a cada valor da grandeza x se associa a um valor y de outra grandeza. A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade sendo y uma função de x . A proporcionalidade $x \mapsto y$ pode ser vista

como $y = f(x)$. Quanto maior for x , maior será y , ou seja, caso $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$. Caso certo valor x_0 corresponda a y_0 e c seja um número qualquer então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0 , portanto se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto cy_0$.

Exemplo 4.2 *Exemplo retirado do livro de (LIMA et al., 2006, p. 2)*

Aplicando x reais na caderneta de poupança no dia 1^o de julho, receberia y reais no dia 1^o agosto. A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade. Quanto maior for a aplicação mais receberei. Portanto se eu fizer dois depósitos de x reais que corresponde a $(2x)$ receberei $y + y = 2y$. Portanto $cx \mapsto cy$, onde c é a quantidade de depósitos.

Quando $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade, existe um número k , chamado de *fator de proporcionalidade* tal que $y = kx$ para todo x de acordo com o Teorema 4.1. Portanto:

$$f(cx) = cf(x) \quad (4.5)$$

4.6 Grandezas Inversamente Proporcionais

Dizemos que duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando dada uma grandeza x e uma y elas se relacionam de modo que cada valor de x está bem determinado para o valor de y . Dizemos que y é função de x tal como as grandezas diretamente proporcionais, porém com a seguinte particularidade: quanto maior for x menor será y . Se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y > y'$. Ou ainda: se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, tem-se a implicação $x < x' \Rightarrow f(x') < f(x)$. Caso y_0 seja o valor de y que corresponda ao valor de x_0 de x e c é qualquer número não nulo então ao valor de cx_0 corresponde a $\frac{1}{c}y_0$. Portanto a partir do Teorema 4.1 temos $f(cx) = \frac{1}{c}f(x)$. Se $y = f(x)$ é inversamente proporcional tem-se:

$$f(x) = f(x.1) = \frac{1}{x}f(1) = \frac{1}{x}k = \frac{k}{x} \quad (4.6)$$

Exemplo 4.3 *Exemplo retirado do livro de (LIMA et al., 2006, p. 14)*

Se três torneiras conseguem encher um tanque em 2 horas, quanto tempo demorará para esse tanque encher quando uma das torneiras não for aberta?

Considerando dois valores específicos de uma grandeza y inversamente proporcional $y_1 = \frac{k}{x_1}$ e $y_2 = \frac{k}{x_2}$ temos um conceito matemático bastante utilizado chamado *Regra de Três Inversa*. Segue portanto:

$$y_1 = \frac{k}{x_1} \text{ e } y_2 = \frac{k}{x_2} \text{ logo } \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2} \quad (4.7)$$

A regra de três consiste supor três dos valores dos valores x_1 , x_2 , y_1 e y_2 e descobrir o quarto deles utilizando a proporção 4.7.

Para o exemplo das torneiras temos:

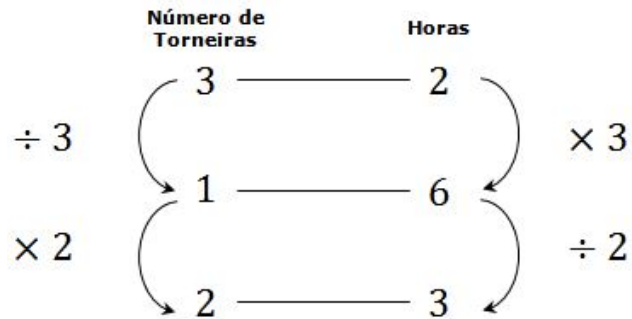


Figura 29: Grandeza Inversamente Proporcional redução a unidade

Utilizando 4.7 teremos:

$$y_1 = 3, y_2 = 2, x_1 = 2$$

$$\text{Aplicando } \frac{2}{3} = \frac{2}{x_2} \therefore x_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = 3$$

Logo, com duas torneiras o tanque encherá em 3 horas.

4.7 Ângulos

Definição 4.5 *Ângulo geométrico é a reunião de duas semirretas de mesma origem e não colineares.*

Notação: \widehat{AOB} , em que O é a origem das semirretas e é chamado de vértice.

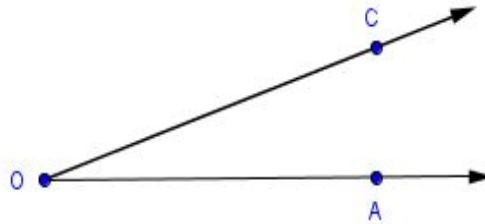


Figura 30: Ângulo \widehat{AOB}

Fonte: Elaboração própria

As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

Unidades de medidas de ângulos

(i) Sistema sexagesimal

Unidade: grau, notação $n^\circ \rightarrow n$ graus, $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.6 *Um grau é $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.*

$$1^\circ = \frac{90^\circ}{90} \quad (4.8)$$

Submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

Ângulo de um minuto, notação $m' \rightarrow m$ minutos, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 60$, temos então:

$$1' = \frac{1^\circ}{60} \quad (4.9)$$

Ângulo de Segundo, notação $s'' \rightarrow s$ segundos, $s \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < 60$, temos então:

$$1'' = \frac{1'}{60} \quad (4.10)$$

Segue de 4.9 e 4.10 a seguinte relação:

$$1^\circ = 60'$$

e

$$1' = 60''.$$

(ii) Sistema decimal

Unidade: grado, notação: $ngr \rightarrow n$ grados.

Definição 4.7 Um grado é $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto.

Postulado 4.1 Um ângulo pode ser medido por meio de um instrumento chamado transferidor, que tem o grau como unidade. O número de graus de um ângulo é a sua medida. A medida de um ângulo geométrico é um número real α , tal que $0 < \alpha < 180^\circ$.

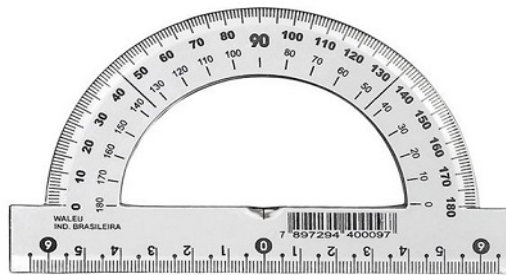


Figura 31: Transferidor 180°

Fonte: http://papelariaajato.com.br/loja/product_info.php?products_id=341

Notação: $\widehat{A\hat{O}B}$ é ângulo geométrico e $m(\widehat{A\hat{O}B})$ é a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$

Observação 4.1 O ângulo de 180° é chamado raso quando os lados são semirretas opostas.

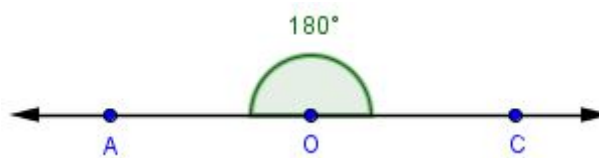


Figura 32: Ângulo de 180°

Fonte: Elaboração própria

Observação 4.2 O ângulo de 0° é quando os lados coincidem.

Observação 4.3 Toda vez que houver referência a ângulo, entenda-se **ângulo geométrico**.

Observação 4.4 Dois ângulos são chamados **congruentes** se têm a mesma medida, na mesma unidade.

$$\text{Notação: } \widehat{A\hat{O}B} \equiv \widehat{C\hat{Q}D} \iff m(\widehat{A\hat{O}B}) = m(\widehat{C\hat{Q}D})$$

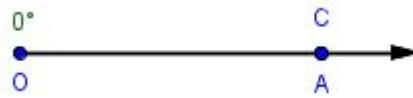


Figura 33: Ângulo de 0°

Fonte: Elaboração própria

4.8 Setor angular

Definição 4.8 *Seja um ângulo $A\hat{O}C$ num plano α e consideremos os semiplanos α_1 de origem na reta \overleftrightarrow{OA} que contém o lado \overrightarrow{OC} e α_2 , de origem na reta \overleftrightarrow{OC} e que contém \overrightarrow{OA} conforme a Figura 34. O conjunto dos pontos comuns aos semiplanos α_1 e α_2 denominamos de setor angular. Na Figura 34 podemos ver o setor angular.*

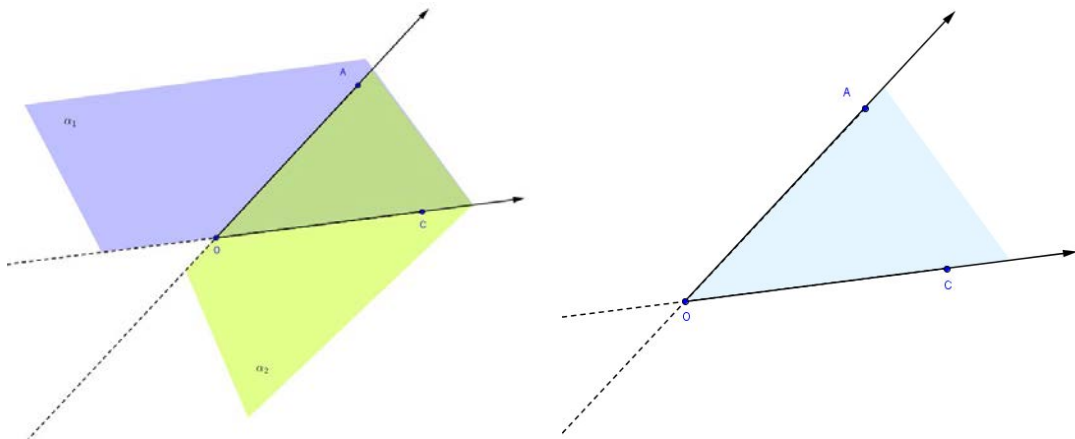


Figura 34: Interseção de Semiplanos e Setor Angular

Fonte: Elaboração própria

4.9 Interior e exterior de um ângulo

Definição 4.9 Um ponto que pertence ao setor angular e não pertence ao ângulo diz-se ponto interior ao ângulo \widehat{AOC} .

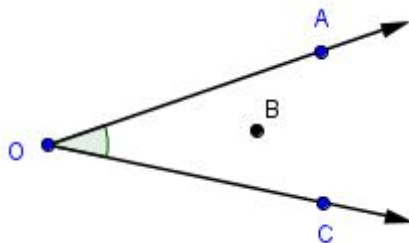


Figura 35: Ponto Interior

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.10 Um ponto do plano que não pertence ao setor angular diz-se ponto exterior ao ângulo. O ponto B, na Figura 36, é exterior ao ângulo \widehat{AOC} .

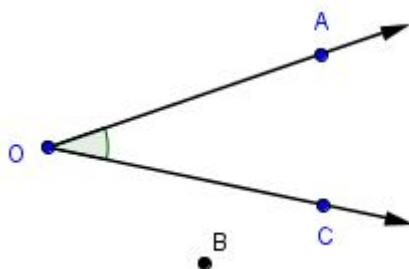


Figura 36: Ponto Exterior

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.11 Ângulos que possuem o mesmo vértice e um lado comum são denominados ângulos consecutivos. Na Figura 37 os ângulos \widehat{AOD} e \widehat{AOC} são consecutivos e os ângulos \widehat{AOD} e \widehat{DOC} também.

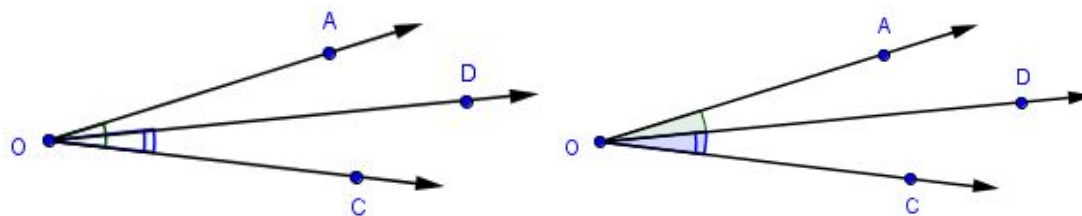


Figura 37: Ângulos consecutivos 1 e 2

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.12 Dois ângulos consecutivos que não possuem ponto interior comum são denominados ângulos adjacentes.

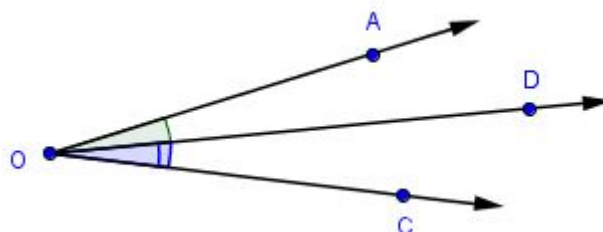


Figura 38: Ângulos adjacentes

Fonte: Elaboração própria

Os ângulos \widehat{AOD} e \widehat{DOC} são adjacentes.

Definição 4.13 *Bissetriz de um ângulo é a semirreta interior ao ângulo, que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes. Na Figura 39, \overrightarrow{OD} é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$.*

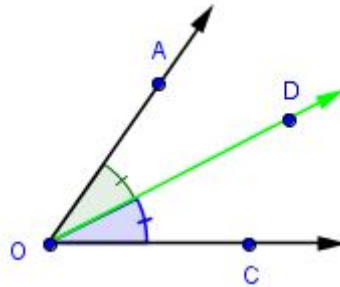


Figura 39: Bissetriz

Fonte: Elaboração própria

4.10 Congruência e Comparação

Congruência (símbolo \equiv) entre ângulos é a noção primitiva que satisfaz aos seguintes postulados:

- (i) Reflexiva. Todo ângulo é congruente a si mesmo: $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$;
- (ii) Simétrica. Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$, então $C\hat{O}D \equiv A\hat{O}B$;
- (iii) Transitiva. Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv E\hat{O}F$, então $A\hat{O}B \equiv E\hat{O}F$;

Postulado 4.2 *Postulado de transporte de ângulos. Dado um ângulo $A\hat{O}C$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre esse plano e num dos semiplanos que $\overrightarrow{OA'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{OC'}$ que forma com $\overrightarrow{OA'}$ um ângulo $A'\hat{O}C'$ congruente ao ângulo $A\hat{O}C$.*

4.11 Ângulo Reto, Agudo e Obtuso - Medida de um Ângulo

Definição 4.14 *Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar cuja medida é 90° . Na Figura 40 $A\hat{O}C$ é reto, o símbolo \square representa um ângulo reto.*

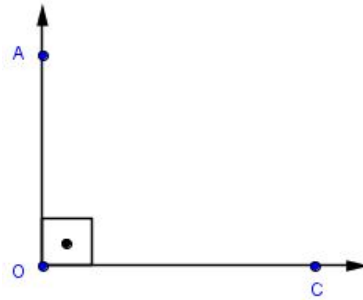


Figura 40: Ângulo reto

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.15 *Ângulo agudo é um ângulo cuja medida é menor do que o ângulo reto (90°). Na Figura 41, $\widehat{D\hat{O}C} < 90^\circ$ é ângulo agudo.*

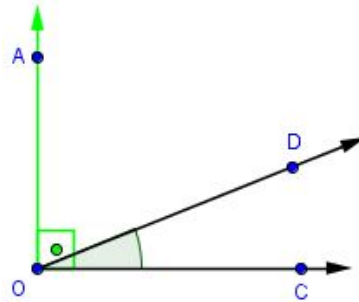


Figura 41: Ângulo agudo

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.16 *Ângulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior do que o ângulo reto (90°). Na Figura 42, $\widehat{D\hat{O}C}$ é um ângulo obtuso.*

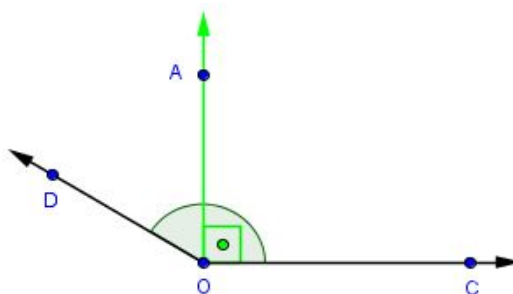


Figura 42: Ângulo obtuso

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.17 *Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é igual a 90° (Figura 43).*

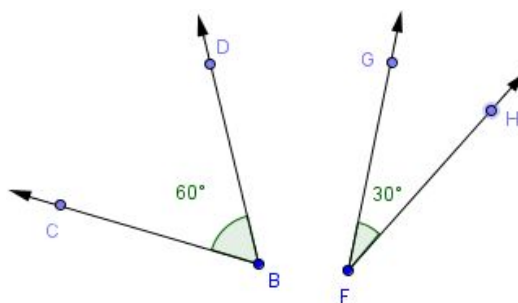


Figura 43: Ângulos complementares

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.18 *Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é igual a 180° (Figura 44).*

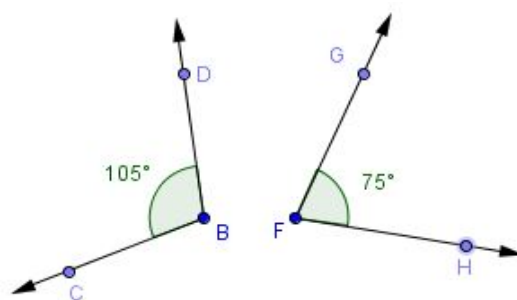


Figura 44: Ângulos suplementares

Fonte: Elaboração própria

Definição 4.19 *Dois ângulos são denominados opostos pelo vértice, se os lados de um são as semirretas opostas dos lados do outro. Na Figura 45, os ângulos $E\hat{O}G$ e $F\hat{O}H$ são opostos pelo vértice.*

Teorema 4.5 *Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração

Seja $A\hat{O}C$ e $A'\hat{O}C'$ dois ângulos opostos pelo vértice.

Denominamos $m(A\hat{O}C) = X$ e $A'\hat{O}C' = Y$.

Temos que:

$$m(A\hat{O}A') = 180^\circ \Rightarrow m(C\hat{O}A') = 180 - a \tag{4.11}$$

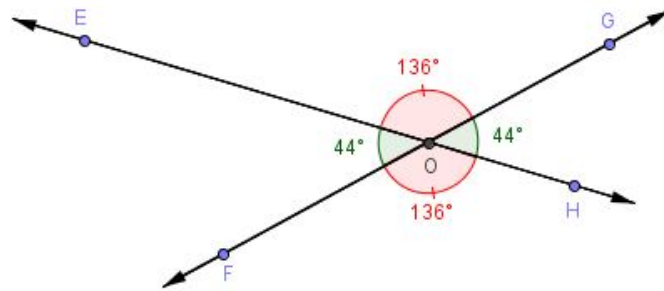


Figura 45: Ângulos Opostos pelo vértice

Fonte: Elaboração própria

$$m(\widehat{COC'}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOC'}) = 180 - b \quad (4.12)$$

De (4.11) e (4.12) vem:

$$180 - a = 180 - b \Rightarrow a = b$$

Logo, $\widehat{AOC} = \widehat{A'OC'}$.

Definição 4.20 *Duas retas são perpendiculares se são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes. Na Figura 46, r e s são perpendiculares.*

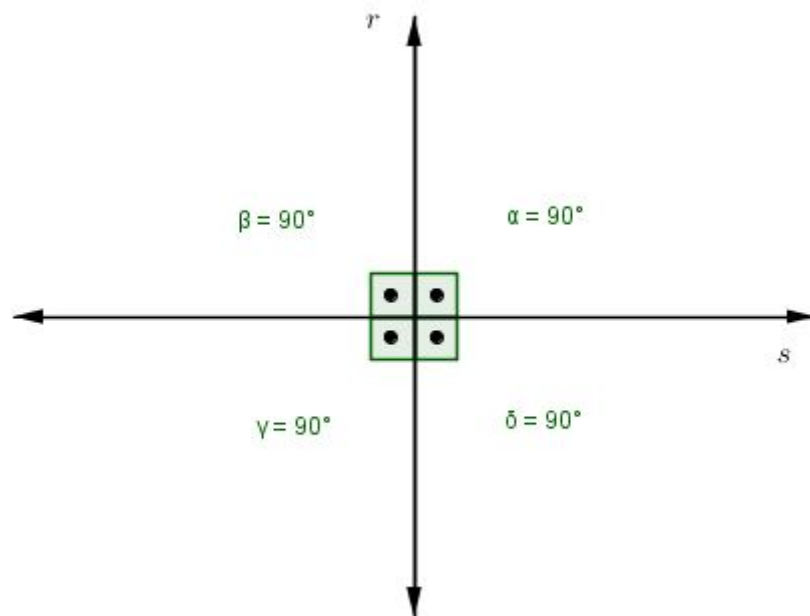


Figura 46: Retas Perpendiculares

Fonte: Elaboração própria

Decorre da definição que duas retas perpendiculares formam 4 ângulos retos.

Definição 4.21 *Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a este segmento que passa pelo ponto médio M desse segmento. A Figura 47 mostra a reta m , mediatriz do segmento AB .*

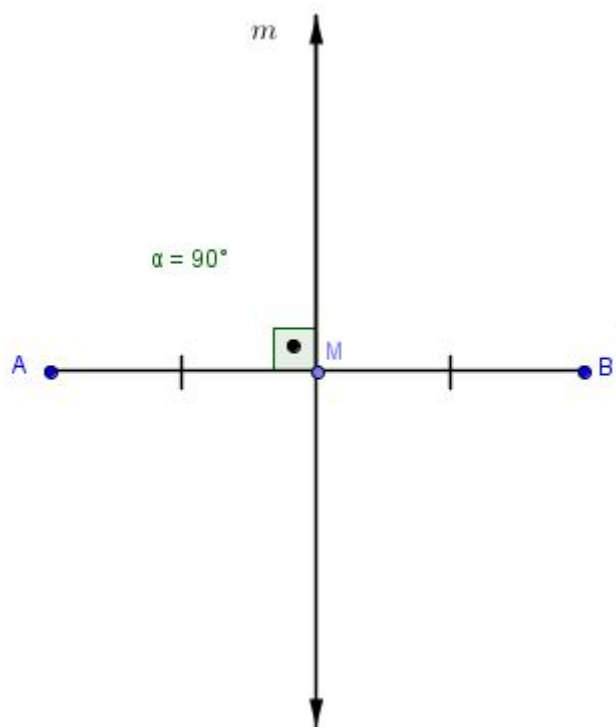


Figura 47: Mediatriz

Fonte: Elaboração própria

Capítulo 5

Metodologia e Aplicação das Atividades

Neste capítulo, apresentamos as atividades que servirão para auxiliar a construção e fixação do conhecimento inerentes aos conteúdos: Proporcionalidade, Escala, Regra de Três, Ângulos entre outros. Estas atividades oportunizam, aos professores, um melhor direcionamento do conteúdo. Ao final das atividades encontram-se desafios que são aplicados para estimular e fixar os conhecimentos aprendidos.

5.1 Atividades para a sala de Aula utilizando o NXT 9797

Nesta seção, apresentaremos as atividades em sala de aula e que foram aplicadas utilizando o kit robótico NXT 9797. Objetivamos para estas atividades um melhor aproveitamento aos conteúdos matemáticos agregando valores a seus conhecimentos. Para tanto, dividimos em "duas" etapas fundamentais, em que a primeira se resume em explicar a operacionalização do robô e a segunda a aplicação e a abordagem dos conteúdos.

Para podermos integrar as disciplinas e obtermos um melhor aproveitamento por parte dos alunos, foi conversado com o professor de geografia para a possível aplicação, em suas aulas, do conteúdo inerente a sua matéria ligado diretamente ao desafio (atividade) principal deste trabalho que chamamos de "Desafio de FUKUSHIMA - desafio 5.2". O professor de geografia prontamente entendeu e atendeu ao pedido e ponderou que falaria sobre conceitos: geograficos, econômicos e políticos da região a ser citada no desafio; em que antecipo que foi de grande valia pois ao aplicar o desafio os alunos associavam ao que já haviam aprendido na disciplina de geografia.

Para realizar este trabalho utilizamos um kit robótico (de minha propriedade), pois a escola não possuía tal recurso, uma TV ou data show para adaptação dos alunos ao *software* e uma facilitação no momento de desenvolver as atividades e um notebook. Durante a aplicação de determinadas atividades foram utilizados pequenos outros materiais que serão posteriormente mencionados.

Evidencio que o ideal seria que além dos itens citados para a realização do trabalho,

cada grupo de 4 ou 5 alunos tivessem os mesmo kit robótico. A aplicação deste trabalho foi realizada com um grupo de 5 alunos.

Etapa 0

Ambientar, antecipadamente, os profissionais envolvidos na atividade;

Etapa 1 Inicialmente, os alunos foram apresentados ao Kit Robótico. Eles tiveram acesso ao kit, conheceram o funcionamento de cada dispositivo e aprenderam a fazer pequenas adaptações em um modelo (Figura 48) já construído, tendo em vista que os alunos não tiveram nenhum contato com nenhuma ferramenta parecida. Na sequência, através de um computador conectado a TV os alunos foram apresentados ao *software* responsável pela programação do robô, por meio do qual eles também tiveram a oportunidade, a partir da prévia e básica explicação, de criar seus próprios programas.



Figura 48: Modelo 1 batizado Wally

Fonte: Elaboração própria

Nossa preocupação, na apresentação inicial do *software*, se resumiu em fazer com que os alunos tivessem conhecimento das funcionalidades de cada Bloco de Programação, porém dando ênfase ao Bloco Mover (Figura 15) e suas propriedades, pois este serve de base no desenvolvimento das atividades propostas. A adaptação dos alunos às funcionalidades do robô foi surpreendente, pois durante a explicação sobre os Blocos de programação, eles, de forma intuitiva, começavam a fazer colocações sobre o comportamento futuro do robô, tendo por base somente as informações basicamente transmitidas e também aprenderam a utilizar outros blocos que não foram explicados tão detalhadamente. Os exemplos do capítulo 3 descrevem os passos para a execução desta etapa.

De acordo com Valente (1998), e como anteriormente mencionado, o mediador, neste caso o professor, é de fundamental importância para o processo de aprendizagem. Nesta etapa, foi possível observar essa importância, pois para conseguir um resultado positivo e satisfatório são necessárias indagações a serem feitas para encaminhar o alunado

ao objetivo. Como por exemplo: "...Uma vez que com este bloco (mover), com estas configurações, o robô se movimenta para frente, como teríamos que fazer para que ele depois de movimentar-se para frente, também virasse para o lado direito?..."

Alguns alunos prontamente tomavam a iniciativa tentando responder - e logo após eram solicitados a executar a tarefa no *software* para ver se o que falaram realmente ocorria. O que eles os alunos sugeriam não funcionava corretamente, mas eles mesmos, por meio de discussão, entravam em consenso e conseguiam solucionar o problema. Por vezes, não de imediato e sim depois de algumas tentativas, mas conseguiam aprender, fazendo jus ao modelo de como se aprende visto na Figura 3 de acordo com MIT (1996).

Os alunos ao final desta aula se tornam capazes de fazer o robô, de forma aleatória, transladar e virar/girar (para a esquerda e direita).

Etapa 2

Nesta etapa, o professor deverá relembrar, de forma breve, o que foi dito na aula anterior e fazer com que os alunos tenham acesso às atividades abaixo. Para sua sua realização será necessário: o kit robótico, fita métrica ou trena. Ao final das atividades o professor sentindo o desempenho fará abordagens significativas sobre o conteúdo matemático a ser aplicado. Perceba que o grau de dificuldade das atividades aumentam de acordo com a sua aplicabilidade. É de suma importância o perfeito aprendizado em cada uma das atividades para que tudo transcorra de maneira favorável, com isso a intervenção por parte do professor e sua sensibilidade e percepção para realizar a mesma são fundamentais. As atividades são propícias para abordagem dos conceitos: razão, proporção, regra de três, sistema de unidade entre outros.

É aconselhável que a turma seja dividida em grupos de no máximo 5 alunos e que cada um dos integrantes dos grupos seja orientado a ser responsável por uma tarefa, onde eles mesmos determinarão o que cada um irá fazer (este momento faz parte do crescimento intelectual).

Atividade 5.1 Esta atividade consiste em programar o robô para se deslocar, tendo como base o número de rotações do motor para atingir determinada distância.

O programador terá que executar o número de rotações que estiver estipulado na Tabela 1 e através de investigação preencher o formulário, no campo “distância percorrida”, com o resultado obtido pelo robô.

Tabela 1: Tabela Atividade 1

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1 rot	
2 rot	
3 rot	
4 rot	
5 rot	

Atividade 5.2 O que ocorre com a distância quando aumentamos o número de rotações do motor.

Atividade 5.3 Quando dividimos a distância pelo número de rotações obtemos o chamado "Fator de Proporcionalidade" descubra qual ou quais são estes valores? Marque a melhor opção que corresponde ao que ocorreu com nas divisões ao aumentar o número de rotações do motor.

() Diminuíram () Aumentaram () Permaneceram Iguais

Atividade 5.4 Sem a utilização do robô responda: Se o motor estivesse programado para dar 500 rotações qual seria a distância, em centímetros, que o robô teria percorrido.

Atividade 5.5 Um robô foi construído para que cada rotação (1 rot) feita por seus motores o deslocasse por 30cm. De acordo com essas informações preencha a Tabela 2.

Tabela 2: Tabela Atividade 5

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1 rot	30
	90
	120
	210

Atividade 5.6 O que ocorre com as rotações do motor quando a distância aumenta?

Atividade 5.7 Altere a roda do robô e preencha a Tabela 3 com as informações que faltam.

Tabela 3: Tabela Atividade 7

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
5 rot	
4 rot	
3 rot	
2 rot	
1 rot	

Atividade 5.8 O que ocorre com o número de rotações do motor quando a distância aumenta?

() Diminui () Aumenta () Permanece o mesmo

Atividade 5.9 O que ocorre com o "fator de proporcionalidade" quando a distância aumenta?

() Diminui () Aumenta () Permanece o mesmo

Atividade 5.10 Observe a Figura 49.

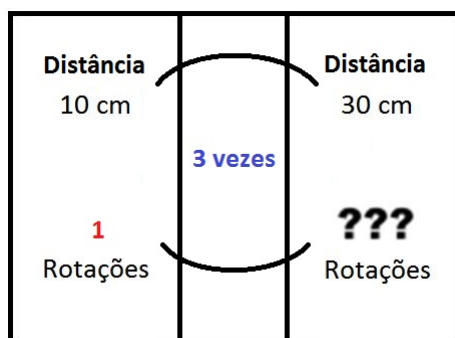


Figura 49: Fator de Proporcionalidade

Preencha a Tabela 4:

Tabela 4: Tabela Atividade 10

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1	10
	30

Atividade 5.11 Se para o robô se movimentar 10 cm o motor deve ser configurado para dar 1,5 rot, qual seria a configuração do motor para ele se movimentar 30cm?

- a) 1,5 rot vezes o fator de escala 3 = $1,5 \times 3 = 4,5$ rot
- b) 30 cm vezes o fator de escala 3 = $30 \times 3 = 90$ cm
- c) 1,5 rot vezes a distância 30 cm = $1,5 \times 30 = 45$ rot
- d) Não tem como saber

Atividade 5.12 Quanto é o "Fator de Proporcionalidade" que se aplica às grandezas "Rotações" e "Distância" na tabela da Atividade 5.10?

Atividade 5.13 Leia as perguntas e preencha as respostas diretamente na Figura 50.

Programa seu robô para se mover com 1,5 rot e meça a distância percorrida por ele. Qual o fator de escala entre 1,5 rot e 3 rot? Com a escala descoberta calcule quantos centímetros o robô se deslocou. (Preencha a Figura 50 com os dados encontrados).

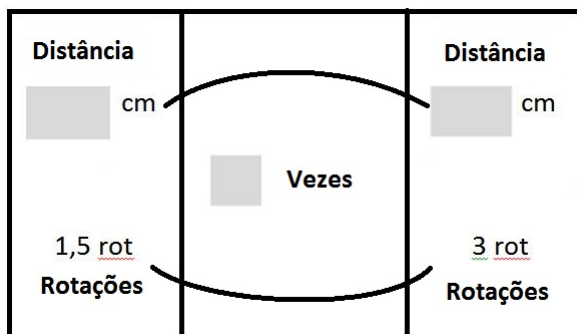


Figura 50: Figura da Atividade 13

Atividade 5.14 Preencha a Tabela 5 com os dados inseridos na (Figura 50) da (Atividade 5.13), não esquecendo de inserir o cabeçalho (Tipo de grandeza) em cada coluna.

Tabela 5: Tabela Atividade 14

Atividade 5.15 Observe a Figura 51 e com o auxílio do robô preencha os dados que faltam.

Após inserir os dados na Figura 51 preencha a Tabela 6.

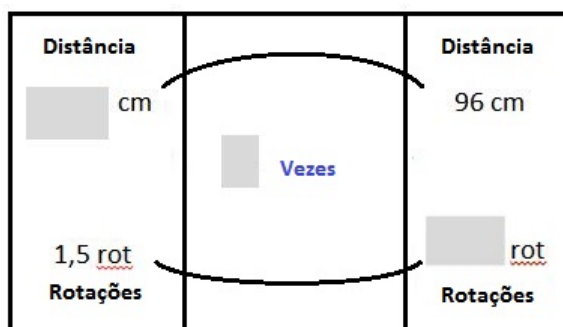


Figura 51: Figura da Atividade 15

Tabela 6: Tabela Atividade 15

Atividade 5.16 Um outro protótipo TJ32 roda 84 cm programado para 120 rotações. A que distância o robô chegará se suas rotações forem configuradas para 90?

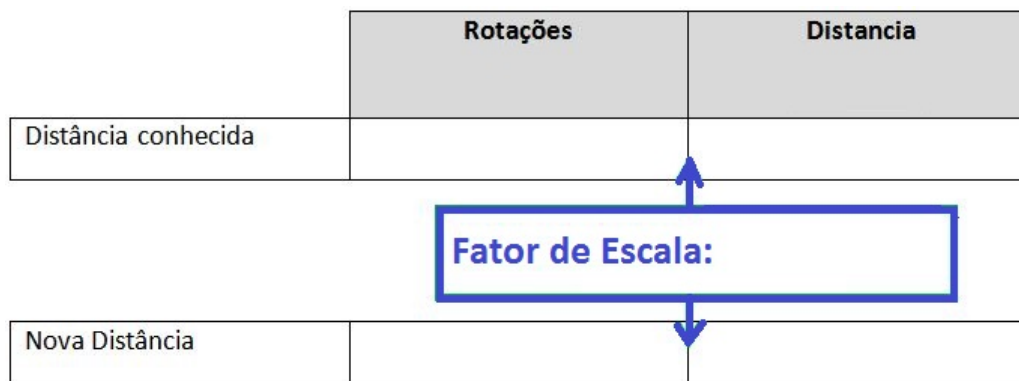


Figura 52: Figura da Atividade 16

Atividade 5.17 Utilizando o robô, encontre quantos giros temos que programar para que o robô vire para realizar uma curva e saibamos quantos graus girou o robô. (Tabela 7)

Tabela 7: Tabela Atividade 17

Número de Rotações dos Motores (rot)	Ângulo (°)
1	
2	
2,5	
3	

Atividade 5.18 O que ocorre com o ângulo quando as rotações aumentam na Atividade 5.17?

() Aumentam () Diminuem () Permanecem o mesmo

Atividade 5.19 O que ocorre com o "fator de proporcionalidade" da atividade 5.17?

() Aumentam () Diminuem () Permanecem o mesmo

Desafio 5.1 *Uma equipe de programadores precisa auxiliar a equipe de segurança em uma grande empresa programando um robô. O robô terá que percorrer uma das laterais do prédio de maneira a garantir a segurança. Sabendo que com uma rotação do motor (1 rot) o robô se desloca 17 cm e baseando-se na Figura 53, determine:*

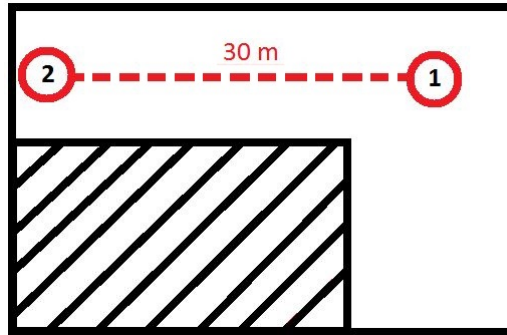


Figura 53: Figura do Desafio 1

Fonte: Elaboração própria

- a) *Quantas rotações serão necessárias para que o robô saia da posição 1 para a posição 2 percorrendo a linha pontilhada.*
- b) *Após chegar na posição 2, quantos graus o robô teria que rotacionar para retornar de frente para a posição 1.*
- c) *Rotacionando parado, sem transladar, o robô rotaciona 45° com o (0.5 rot – meio giro do motor). Quantos giros serão necessários para o robô rotacionar e parar de frente para a posição 1.*
- d) *Programando:*
 - d₁) *Quantos blocos serão necessários inserir no fluxo sequencial para que o robô saia da posição 1 vá até a 2 e retorne para a posição 1. Preencha a Tabela 8 com as informações necessárias.*

Tabela 8: Tabela Desafio 1

Nome do Bloco	Giros do motor (rots)

- d₂) *Programo o robô para que ele possa ir da posição 1 para 2 e retornar para a 1.*

Atividade 5.20 Para calcularmos a velocidade do robô basta dividirmos a distância percorrida pelo tempo que ele demorou para percorrer. Se a distância estiver em centímetros (cm) e o tempo em segundos (s) a velocidade será em centímetro por segundo (cm/s). (Tabela 9)

Tabela 9: Tabela Atividade 20

Giros do Motor (rots)	Potência do Motor	Distância (cm)	Tempo (s)	Velocidade (cm/s)
10	50			
10	60			
10	70			
	80			
	90			

Para esta atividade será necessário o uso de calculadora e cronometro.

Atividade 5.21 O que ocorreu com o tempos conforme aumentou a potência do motor?

Atividade 5.22 A velocidade foi aumentando ou diminuindo de acordo com o tempo?

5.2 Discussão das Atividades feitas em sala de aula

Os alunos realizaram todas as Atividades de forma satisfatória. Com a Atividade 5.1 eles deduziram que conforme os giros do motor vão aumentando, a distância também aumenta (dois giros o dobro, três o triplo da medida inicial e, assim, por diante), foi possível abordar o conceito de razão, proporcionalidade e unidade de medida. Mas eu sugeri que medissem, mesmo assim cada rotação (com o robô), e o fizeram, e viram que em momentos a medida não batia um milímetro a mais ou a menos, e assim, tiveram contato com o conceito de precisão e estimativa. Como realizaram bem as quatro primeiras atividades, então não tiveram problema algum em realizar as demais. Ao realizar a Atividade 5.7 foi indagado aos alunos por quê os valores da tabela desta atividade não são iguais aos valores da tabela da Atividade 5.5 e eles prontamente responderam: "...tamanho da roda é menor professor..." e eu perguntei que medida, que parte da roda, era maior e eles pensaram e responderam "a parte de fora" (perímetro da circunferência). Apenas na Atividade 5.16 houve um erro de impressão na primeira coluna da tabela e, nesta atividade, os alunos perguntaram se existia problema em "dar números quebrados" e eles foram orientados que esses são os números racionais na forma decimal e são números como quaisquer outros e teriam que tomar cuidado com a precisão na hora de programar. Contudo, conseguiram realizar plenamente as atividades. Nestas atividades eles também tiveram contato com o conceito de grandeza, fator de proporcionalidade e escala. Nas atividades 20, 21 e 22 foram trabalhados os conceitos de grandezas inversas e diretas. As atividades aplicadas em sala de aula estão no Anexo A.

Desafio 5.2 *DESAFIO - USINA DE FUKUSHIMA*

A usina de Fukushima (Japão), devido a uma catástrofe natural, foi interditada. Em suas dependências existe uma alta concentração de radiação, de modo que seres humanos não podem ficar diretamente expostos a ela. Para que algo seja feito, na tentativa de evitar o aumento da liberação de radiação é necessária a realização de um plano de emergência. Para tanto, em posse da planta baixa do prédio, sua equipe foi designada para programar o robô Mindstorm (Modelo 1) com uma câmera acoplada para buscar imagens internas da usina - para que se tenha a dimensão do problema no reservatório, e assim, buscar uma futura solução.

Passo 1

Através da planta baixa do prédio, identifique e trace o trajeto a ser percorrido pelo robô;

Passo 2

Uma vez traçado o trajeto calcule quanto realmente o robô terá que percorrer em cada trecho do trajeto;

A Figura 54 mostra os alunos planejando estratégias, antes de executar, para cumprir o desafio.



Figura 54: Planejando uma estratégia

Fonte: Elaboração própria

A Figura 55 apresenta a estratégia elaborada pelos alunos.

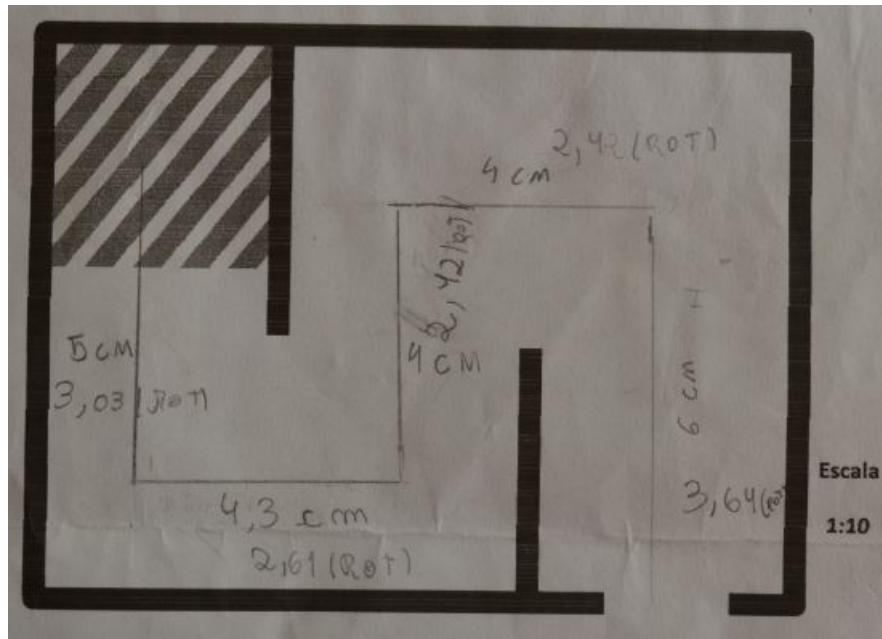


Figura 55: Estratégia Planejada

Fonte: Elaboração própria

Passo 3

Agora tendo noção do trajeto a ser percorrido calcule quantas rotações o motor do robô terá que realizar para se mover em cada trecho e para girar sem correr o risco de colidir com as paredes.

Passo 4

A partir daí é sugerido que eles revejam o planejamento para ver se realmente está conforme eles pensaram e depois são convidados a executar.



Figura 56: Aplicação do desafio de Fukushima

Fonte: Elaboração própria

Considerações Finais

O ensino e a importância da matemática no currículo da Educação Básica tem sido debatido nos últimos anos, o desinteresse por parte dos alunos é um dos tópicos abordados. O nosso objetivo foi apresentar uma proposta para o ensino de conteúdos matemáticos de forma a tornar a aprendizagem dos conteúdos mais significativa e propor uma mudança de postura por parte do professor para que seja de forma mais atuante.

A proposta de utilização da robótica educacional nos permitiu enriquecer, de forma colaborativa, estimular e desenvolver diversas competências nos alunos. Ao dividi-los em grupo e permitir que eles distribuíssem as tarefas, eles desenvolvem a pseudo-autonomia, tomada de decisão, trabalho em equipe, promovendo o seu desenvolvimento social e de raciocínio lógico; o acesso a esta tecnologia, também, os incluiu, de forma consistente, neste ambiente automatizado e bem próximo à uma realidade profissional que muitos encontrarão ao entrarem no mundo do trabalho. Além de todos estes valores agregados, também temos o aprendizado da matemática construído de acordo com o desempenho e que além de se tornar significativo foi apresentado de forma a ser perceptível, aos olhos do alunado, a sua finalidade e importância. O fator motivacional foi de suma importância para o desenvolvimento dos conteúdos e, este, foi conquistado brilhantemente com a utilização de um ambiente propício com atividades em níveis relevantes e a articulação interdisciplinar.

Com esta proposta, destaco a robótica como uma poderosa ferramenta para a associação e assimilação de conteúdos matemáticos e de grande importância a ser estudada e possivelmente aplicada.

Referências

- ASHBY, J. *The W. Ross Ashby Digital Archive*. 2008. Visitado em: 12 de Dezembro de 2013. Disponível em: <<http://www.rossashby.info/>>. Citado na página 15.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 17 e 18.
- CIT. *Comitê Gestor da Internet do Brasil*. São Paulo, 2012. Disponível em: <<http://cetic.br/pesquisa/educacao/>>. Citado na página 12.
- INÊS, M. 2013. Disponível em: <<http://www.pucrs.br/eventos/desafio/mariaines.php>>. Citado na página 16.
- LEGO. *NXT User Guide Mindstorm Education*. 2006. Disponível em: <<http://education-1.lego.com/en-us/lego-education-product-database/mindstorms/9797-lego-mindstorms-education-base-set>>. Citado na página 23.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas Elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 246 p. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 42.
- MASSAGO, S. *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. São Paulo: [s.n.], 2014. Visitado em: 05/03/2014. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/~sadao/student.php?lang=pt>>. Citado na página 41.
- MIT. *MIT Web Media*. 1996. Visitado em: Fevereiro de 2014. Disponível em: <<http://web.media.mit.edu/~papert/>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 56.
- PIAGET, J. *Abstração Reflexionante: Relações Logico-aritmeticas e Ordem das Relações Espaciais*. Porto Alegre: Artes Medicas, 1995. Citado na página 22.
- RECIFE, P. M. do. *Recife lança programa de robotica escolar pioneiro no Brasil*. 2014. Visitado em: Março de 2014. Disponível em: <<http://www2.recife.pe.gov.br/recife-lanca-programa-de-robotica-escolar-pioneiro-no-brasil/>>. Citado na página 33.
- TERRA. *Robô Tamborilador*. 2013. Disponível em: <<http://www.terra.com.br/noticias-educacao/infograficos/vc-sabia-davinci/>>. Citado na página 14.
- VALENTE, J. A. *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação*. 2. ed. São Paulo: UNICAMP/NIED, 1998. 501 p. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 55.
- VALLEE, R. 2001. Visitado em: Julho de 2014. Disponível em: <<http://www.iss.org/lumwiener.htm>>. Citado na página 16.

VUKOBRATOVIC1, M. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, v. 3, p. 163–175, Novembro 2006. Citado na página 15.

WINFIELD, A. *The Grey Walter Online Archive*. 2005. Visitado em: 29 de outubro de 2013. Disponível em: <<http://www.ias.uwe.ac.uk/Robots/gwonline/gwonline.html>>. Citado na página 16.

Anexos

ANEXO A

Atividades Solucionadas

Nome do Grupo: Conectados
 Professor: Flávio M. dos Santos

Atividades de Matemática e Robótica Educacional

Atividade 5.1 Esta atividade consiste em programar o robô para se deslocar, tendo como base o número de rotações do motor para atingir determinada distância.
 O programador terá que executar o número de rotações que estiver estipulada na tabela e através de investigação preencher o formulário, no campo "distância percorrida", o resultado obtido pelo robô.

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1 rot	17
2 rot	34
3 rot	51
4 rot	68
5 rot	85

Tabela 1: Tabela Atividade 1

Atividade 5.2 O que ocorre com a distância quando aumentamos o número de rotações do motor.
A distancia aumenta

Atividade 5.3 Quando dividimos a distância pela rotações obtemos o chamado "Fator de Proporcionalidade" descubra qual ou quais são estes valores? Marque a melhor opção que corresponde o que o correu com os números encontrados ao aumentar o número de rotações do motor.
 Diminuíram Aumentaram Permaneceram Iguais

Figura 57: Resposta do Grupo Conectados Atividade 1-3

Atividade 5.4 Sem a utilização do robô responda: Se o motor estivesse programado para dar 500 rotações qual seria a distância, em centímetros, que o robô teria percorrido.

$$\begin{array}{r} 500 \\ \times 17 \\ \hline 8.500 \end{array}$$

Atividade 5.5 Um robô foi construído para que cada rotação (1 rot) feita por seus motores o deslocasse por 30cm. De acordo com essas informações preencha a tabela abaixo.

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1 rot	30
2 rot	90
3 rot	120
4 rot	210

Tabela 2: Tabela Atividade 5

Atividade 5.6 O que ocorre com as rotações do motor quando a distância aumenta?

A distancia aumenta

Atividade 5.7 Altere a roda do robô e preencha a tabela abaixo com as informações que faltam.

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
5 rot	45
4 rot	26
3 rot	27
2 rot	18
1 rot	9

Tabela 3: Tabela Atividade 7

Atividade 5.8 O que ocorre com as rotações do motor quando a distância aumenta?
 Diminui Aumenta Permanece o mesmo

Atividade 5.9 O que ocorre com o "fator de proporcionalidade" quando a distância aumenta?
 Diminui Aumenta Permanece o mesmo

Figura 58: Resposta do Grupo Conectados Atividade 4-9

Atividade 5.10 Observe a (Figura 38).

Distância 10 cm	3 vezes	Distância 30 cm
1 Rotações		??? Rotações

Preencha a tabela:

Número de Rotações dos Motores (rot)	Distância Percorrida (cm)
1	10
3	30

Tabela 3: Tabela Atividade 9

Atividade 5.11 Se para o robô se movimentar 10 cm o motor deve ser configurado para dar 1, 5 rot, qual seria a configuração do motor para ele se movimentar 30cm?

a) 1, 5 rot vezes o fator de escala 3 = 1, 5 × 3 = 4, 5 rot
 b) 30 cm vezes o fator de escala 3 = 30 × 3 = 90 cm
 c) 1, 5 rot vezes a distância 30 cm = 1, 5 × 30 = 45 rot
 d) Não tem como saber

Atividade 5.12 Quanto é o "Fator de Proporcionalidade" que se aplica as grandezas "Rotações" e "Distância"?

3

Figura 59: Resposta do Grupo Conectados Atividade 10-12

Atividade 5.13 Preencha as perguntas abaixo diretamente na (Figura 39). Programe seu robô para se mover com 1, 5 rot e meça a distância percorrida por ele. Qual o fator de escala entre 1, 5 rot e 3 rot? Com a escala descoberta calcule quantos centímetros o robô se deslocou. (Preencha a (Figura 39) com os dados encontrados).

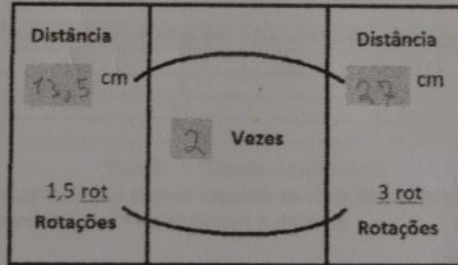


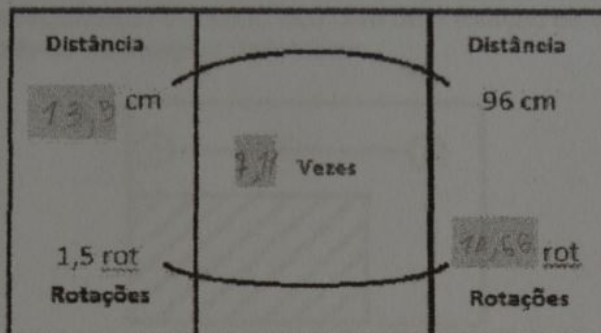
Figura 3: Figura da Atividade 12

Atividade 5.14 Preencha a tabela abaixo com os dados inseridos na (Figura 39) da (Atividade 5.12), não esquecendo de inserir o cabeçalho (Tipo de grandeza) em cada coluna.

distância	rotações
13,5	1,5
27	3

Figura 60: Resposta do Grupo Conectados Atividade 13-14

Atividade 5.15 Observe a (Figura 40) e com o auxílio do robô preencha os dados que faltam.



Após inserir os dados na (Figura 40) preencha a tabela abaixo.

distância	rotações
13,5 cm	1,5 rot
96 cm	71,66 rot

Figura 61: Resposta do Grupo Conectados Atividade 15

Atividade 5.16 Um outro protótipo TJ32 roda 84 cm programado para 120 rotações. A que distância o robô chegará se suas rotações forem configuradas para 90?

	Rotações	Distancia
Distância conhecida	120 rot	84 cm
Fator de Escala: 1,33		
Nova Distância	90 rot	111,72

Figura 5: Figura da Atividade 15

Atividade 5.17 Utilizando o robô, encontre quantos giros temos que programar para que o robô vire para realizar uma curva e saibamos quantos graus girou o robô.

Número de Rotações dos Motores (rot)	Ângulo (°)
1	90
2	180
2,5	225
3	270

Tabela 4: Tabela Atividade 9

Figura 62: Resposta do Grupo Conectados Atividade 16-17