

CARLOS EDUARDO GOMES DE OLIVEIRA

A MATEMÁTICA FUNDAMENTAL COMO
PRÉ-CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

CARLOS EDUARDO GOMES DE OLIVEIRA

A MATEMÁTICA FUNDAMENTAL COMO
PRÉ-CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

74/2015

Oliveira, Carlos Eduardo Gomes

A matemática fundamental como pré-cálculo no ensino médio / Carlos Eduardo Gomes Oliveira. – Campos dos Goytacazes, 2015.

93 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.

Orientador: Paulo Sérgio Dias da Silva.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 43.

1. MATEMÁTICA (ENSINO FUNDAMENTAL) 2. MATEMÁTICA (ENSINO MÉDIO) 3. PRÉ-CÁLCULO I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 515

CARLOS EDUARDO GOMES DE OLIVEIRA

A MATEMÁTICA FUNDAMENTAL COMO
PRÉ-CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 31 de Agosto de 2015.



Prof. Mikhail Petrovich Vishnevskii
D.Sc. - UENF



Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF



Prof. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF



Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

À Rogeria Gomes, minha mãe, e Maurício Gomes, meu pai, por quem sou muito grato. Sempre investiram na minha educação me apoiando e incentivando nas minhas escolhas.

À Roberta Chaves, minha amada esposa, que me apoiou em cada momento do curso se abdicando de muitas coisas para que eu pudesse concluí-lo.

Aos meus filhos Breno de Oliveira e Isabela de Oliveira, razão de tudo em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por nos dar o dom da vida e estar ao nosso lado em todos os momentos dela. Tenho certeza que em cada etapa vencida durante o curso, Ele estava lá, olhando por cada um de nós e nos permitindo adquirir sabedoria e conhecimento.

A todos os envolvidos na implantação deste projeto maravilhoso que é o PROFMAT, pois, oportuniza uma formação significativa e necessária aos professores de matemática de todo Brasil.

A cada amigo da turma, onde nunca hesitavam em se ajudar. Este companheirismo foi muito importante para se conseguir concluir o curso, guardarei cada um com carinho.

Aos professores que foram incansáveis em atender nossos pedidos de socorro, muitas vezes ficando até depois de seus horários ou atendendo fora deles para sanar nossas dúvidas.

Um agradecimento especial a Roberta Chaves, minha esposa, que durante todo período do curso se dedicou a cuidar ainda mais dos filhos e da casa para que eu pudesse estudar. Adiou alguns de seus projetos de vida para que eu pudesse realizar um dos meus.

Agradeço com lágrimas nos olhos ao meu filho Breno de Oliveira, que tinha apenas 7 anos de idade quando comecei o curso e teve que ser muito compreensivo quando ouvia um “não posso agora” em várias vezes que me chamava pra brincar.

“Na vida, não vale tanto o que temos,
nem tanto importa o que somos.
Vale o que realizamos com aquilo que possuímos e,
acima de tudo, importa o que fazemos de nós!”

Chico Xavier

Resumo

Os elevados índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior vêm sendo tema de inúmeros debates a nível nacional e internacional. Levando isso em consideração, o presente trabalho tem o intuito de propor atividades a serem aplicadas ao aluno do Ensino Médio, versando sobre as primeiras noções desta disciplina. As atividades consistem de uma apostila com conteúdos do Ensino Fundamental que sejam necessários para o estudo do pré-cálculo, e de uma lista de exercícios a nível de vestibular a fim de motivar os alunos a participarem efetivamente de sua aplicação. Além dos conteúdos básicos do Ensino Fundamental, há na apostila algumas passagens que trazem conceitos básicos do cálculo, como limites e derivadas. As atividades possuem orientação para aplicação, para que o professor do Ensino médio interessado possa utilizá-las facilmente. Acreditamos que este trabalho ajudará não só o aluno quando ingressar no Ensino Superior, como também o ajudará durante sua passagem pelo Ensino Médio.

Palavras-chaves: Ensino fundamental, Ensino médio e Pré-Cálculo.

Abstract

The high rates of failure in the discipline of Differential and Integral Calculus in Higher Education has been the subject of numerous debates at national and international level. Taking this in account, the present work aims to propose activities to be applied to the High School Student, versing about the first notions of this discipline. The activities consist of a booklet with contentes of Elementary School that are necessary for the study of pre-calculus, and by a list of exercises at entrance exam level, in order to motivate the students to take part effektivly of its aplication. Besides the contentes of the Elementary School, there is some passages ub the booklet whose bring basic concepts from Calculus, as limits and derivatives. The activities have an aplication orientation, so that the interested High School teacher can use it with ease. We believe that this work will help not only the student when he joins the Higher Education, and also will help during his passage by the High School.

Key-words:Elementary School, High School, Pre Calculus.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pesquisa de Cursos na UENF	20
Figura 2 – Levantamento de desenho dos alunos	21
Figura 3 – Exemplo de exercício de Cálculo	27
Figura 4 – Parte da apostila elaborada	28
Figura 5 – Representação dos conjuntos numéricos	48
Figura 6 – Representação de números reais	48
Figura 7 – Localização do número 1,46	49
Figura 8 – Localização aproximada de $\sqrt{2}$	49
Figura 9 – Representação geométrica de frações	55
Figura 10 – sistema cartesiano	58
Figura 11 – Localização de pontos no plano cartesiano	59
Figura 12 – Gráfico de $f(x)=x+3$	60
Figura 13 – Sequência de figuras	61
Figura 14 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$	62
Figura 15 – Gráfico do $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)$	63
Figura 16 – Gráfico de $p(x)$	68
Figura 17 – Representação geométrica do quadrado da soma	69
Figura 18 – Representação geométrica de $(x + 3)^2$	70
Figura 19 – Gráfico de $y - 2x = -3$	80
Figura 20 – Representação geométrica de $x^2 + 10x + c$	83
Figura 21 – Representação geométrica de $(x + 5)^2$	83
Figura 22 – Concavidade da parábola	85
Figura 23 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x - 5$	86
Figura 24 – Gráfico de $L(x) = -3x^2 + 60x - 50$	87
Figura 25 – Gráfico de $f(x) = 10x - 5x$	88

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela para solução da questão 10	39
Tabela 2 – Localização do número 1,46	49
Tabela 3 – Tabela para construção do gráfico de $f(x)=x+3$	60
Tabela 4 – Tabela para resolução da sequência	61
Tabela 5 – Tabela para construção do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$	62
Tabela 6 – x tendendo a 3 pela esquerda	63
Tabela 7 – x tendendo a 3 pela direita	63
Tabela 8 – Tabela de valores para construção do gráfico de $y - 2x = -3$	80

Lista de abreviaturas e siglas

CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IFRJ	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
PUC	Pontifícia Universidade Católica
UNIFESP	Universidade Federal de São Paulo

Sumário

INTRODUÇÃO	12
1 O ENSINO DE CÁLCULO	15
1.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO DO BRASIL	16
1.2 TRABALHAR OU NÃO CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?	19
2 O PRÉ-CÁLCULO	22
2.1 DIFICULDADES AO ENSINAR CÁLCULO	23
2.2 DIFICULDADES NO APRENDER CÁLCULO	24
3 METODOLOGIA	26
3.1 ESCOLHA DAS ATIVIDADES	26
3.2 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES	27
3.3 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES	28
3.4 LISTA DE EXERCÍCIOS (VERSÃO DO PROFESSOR)	30
CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS	43
APÊNDICES	44
APÊNDICE A – APOSTILA DE MATEMÁTICA FUNDAMENTAL	45
APÊNDICE B – LISTA DE EXERCÍCIOS (VERSÃO DO ALUNO)	89

Introdução

O processo de transição do ensino médio para o ensino superior vem sendo foco de diversas discussões em âmbito Nacional e internacional, tais como, o V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, realizado em outubro de 2012 na cidade de Itaipava e também o Encontro Nacional em Educação Matemática, realizado em julho de 2013 na cidade de Curitiba. As dificuldades trazidas pelos alunos em conceitos matemáticos básicos são uma constante. Uma problemática que se vê nesse contexto, é o fato dos alunos não conseguirem relacionar os conteúdos aplicados a situações do cotidiano, o que ocasiona a falta de interesse e conseqüentemente prejudica toda uma seqüência de conhecimentos na matéria.

A necessidade da mudança da forma de se ensinar matemática, principalmente no que diz respeito à sua aplicação prática, vem se tornando cada vez mais necessária. É de se concordar que é muito difícil fazer com que o aluno se interesse por um conteúdo cuja aplicação não é perceptível. Na maioria das vezes, o estudo das funções no Ensino Médio, por exemplo, é promovido por meio de muitas definições e teoremas, o que é pertinente, visto que são muito importantes para se compreender um conceito, mas, infelizmente, na maioria das vezes tal estudo fica desassociado de questões do cotidiano, o que o tornaria mais prazeroso.

Podemos dizer que não só o ensino de funções sem aplicações práticas, mas o de vários outros conteúdos que começam no ensino fundamental, refletem em um mau desempenho na matéria de Cálculo no ensino superior, levando muitos alunos à reprovação e até mesmo à desistência dos cursos.

Muito se fala, muito se tem dito no meio acadêmico, a respeito do “fracasso no ensino de Cálculo”. Creio, no entanto, que, se investigarmos a origem histórica de tal “fracasso”, verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo. (REZENDE, 2003, p.1)

Estas colocações nos fazem pensar: A que se deve esse fracasso no ensino de Cálculo? Existe um fracasso no ensino do Cálculo ou uma deficiência na estrutura do ensino? Quais conteúdos são indispensáveis para o aluno saber como pré-requisito da aprendizagem de Cálculo? O que se pode fazer para diminuir esse alto índice de reprovação?

Não só estes mais vários outros questionamentos nos vêm a mente quando refletimos sobre o assunto.

Considerando as questões apresentadas, este trabalho tem o intuito de analisar os fatores que fazem da matéria de Cálculo Diferencial e Integral uma das disciplinas cujo os estudantes apresentam maior dificuldade de compreensão no Ensino superior, bem como apresentar propostas de atividades que poderão servir como base no ensino de tal matéria.

O trabalho apresentará duas atividades a serem aplicadas no ensino médio: uma apostila com conteúdos básicos do ensino fundamental, porém de extrema importância para as aulas de cálculo, e uma lista de exercícios, em nível de vestibular, que complementa a apostila. A proposta do trabalho possui como uma de suas justificativas uma pesquisa, realizada pelo autor deste trabalho, na Universidade Estadual do Rio de Janeiro Darcy Ribeiro, na qual foi feita um levantamento com o número de cursos oferecidos que possuem a disciplina de cálculo em sua grade curricular.

Não há a pretensão de se modificar o currículo do Ensino Médio, mas sim propor atividades que poderão ser trabalhados pelo professor durante um período do ano letivo sem que haja prejuízo no seu planejamento. Devemos levar em consideração o que objetiva as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio no que diz respeito ao ensino de Matemática:

A terceira série ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangentes que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade.(BRASIL, 2002, p.128)

Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar maneiras diferenciadas de se trabalhar determinados conteúdos do ensino fundamental (Conjuntos Numéricos, Potências, Radiciação, Frações, Plano Cartesiano, Funções e Gráficos, Sequências, Polinômios, Produtos Notáveis, Racionalização, Fatoração, Equações do 1º e 2º grau), a fim de levar o aluno a aprender e compreender a matemática de maneira significativa, levando-o a fazer uso da mesma prevendo situações que serão exigidas no estudo do Cálculo.

No capítulo 2, será apresentado de uma forma bem sucinta, um relato histórico do ensino de Cálculo no Brasil, desde seu início e introdução na grade curricular do Ensino Médio, até sua retirada do mesmo. Em seguida, tendo como meta justificar um dos porquês deste trabalho, teremos uma pesquisa que consiste no levantamento de cursos oferecidos no nível superior que possuem Cálculo no currículo.

No terceiro capítulo, será levantada uma discussão a cerca das maiores dificuldades encontradas em se ensinar e aprender Cálculo, para a partir daí, escolher, elaborar e aplicar as atividades matemáticas que são foco deste trabalho.

No capítulo 4, serão expostas as atividades elaboradas, bem como a sugestão de aplicação por meio de um roteiro para cada atividade. Esta parte do trabalho tem como intuito principal, fazer com que o professor, ao aplicar tais atividades, faça com que o aluno tenha um grande ganho matemático sem que seja prejudicado seu planejamento anual. O último capítulo, traz as considerações finais sobre o assunto, expondo nossas expectativas com as aplicações das atividades, oferecendo uma pequenas mudanças na forma de ensino, almejando um grande ganho no estudo futuro de Cálculo.

Capítulo 1

O ENSINO DE CÁLCULO

Se pararmos para analisar o currículo de matemática do ensino fundamental e médio, vamos perceber que intrinsecamente alguns conteúdos necessários ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral estão contidos nele, ou seja, o Cálculo não é uma matéria exclusiva do ensino superior. Estes conteúdos são ensinados, por alguns professores, na educação básica de forma mecânica sem associá-los aos conceitos do Cálculo, privando-os de tal conhecimento.

É do conhecimento de todos que estão envolvidos com a educação matemática do nível superior, que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral possui alto índice de reprovação e evasão principalmente nos primeiros anos de graduação. Podemos apontar como as principais causas para tal desempenho a baixa qualidade do ensino básico, a falta de interesse por parte dos alunos e a ausência de um contato prévio com a matéria. Outro motivo bem relevante para tais índices são as metodologias pedagógicas adotadas pelos cursos universitários. Este problema já era apontado por (PALIS, 1995, p.22) quando afirmava que:

Os cursos de Cálculo, principalmente o primeiro da sequência, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso. Estes índices, por si só, já apontam a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, possam dar conta desse problema que, desde muitos anos, subsiste na Universidade.

Há ainda, questionamentos por parte dos professores que se dizem contrários à inclusão de tópicos de Cálculo no ensino médio, devido ao excesso de conteúdos matemáticos a serem abordados.

Os fatos apresentados nos levam a defender a visão de que o estudo de alguns conteúdos específicos do Cálculo, se trabalhados já no ensino fundamental e/ou no ensino médio, trariam grandes benefícios aos alunos quando se deparassem com a matéria em questão no ensino superior. A ideia de se inserir tópicos do cálculo no ensino médio não é

inovadora, tal fato já ocorreu na educação básica do Brasil e infelizmente não se confirmou por motivos diversos, como veremos em um dos tópicos abaixo.

1.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO DO BRASIL

Para entendermos como se introduziu o ensino de cálculo no Brasil, é necessário lembrar o nome de grandes pensadores que foram os precursores da matemática mundial. É claro que se formos falar de todos os envolvidos neste longo processo, gastaríamos inúmeras páginas deste trabalho, o que não é nossa intenção.

A história cita Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz como os precursores do cálculo entre o século XVII e XVIII. Porém, há indícios de que já existiam desde a época da Grécia antiga, algumas noções de ideias de cálculo, muitas atribuídas a Arquimedes (cerca de 287-212 a.C.).

Os trabalhos de Euler, dos irmãos Nicolas Bernoulli e Daniel Bernoulli, D'Alembert, Robins, Lagrange, Laplace, Cauchy, Kleper, Cavalieri e outros deixaram suas participações na construção histórica do cálculo, trabalhos estes que influenciaram fortemente o ensino da matemática no Brasil, como observa Miorim (1998).

O ensino escolar no Brasil se deu com a fundação de uma escola jesuíta no Rio de Janeiro em 1573, onde os mestres jesuítas por cerca de 200 anos defendiam uma educação de concepção clássico-humanista. *O Ratio atque instituto Studiorum Societatis Jesus*, segundo Miorim (1998, p.45) este

Era chamado de código educacional Máximo da Companhia de Jesus. Nessa proposta, na parte equivalente ao ensino médio -os studia inferiora-, defendia-se uma educação baseada apenas nas humanidades clássicas, cujas disciplinas eram a retórica, as humanidades e a gramática. As ciências e em particular as matemáticas eram reservadas apenas aos studia superiora. Entretanto, mesmo nesses estudos superiores, desenvolvidos no curso de filosofia e ciências, ou de artes, pouco estudavam as matemáticas.

Ainda, segundo a autora, com a expulsão dos jesuítas do Brasil, em 1759, houve um desmoronamento do sistema educacional brasileiro. A partir de 1772, tiveram início as "aulas-régias", numa tentativa de suprir a escola jesuíta. Uma problemática das aulas de matemática oferecidas em tal modelo, era o fato de serem reduzidas e ministradas por professores sem formação adequada.

Uma tentativa de mudança no sistema de ensino, foi a criação em 1837 do Colégio Pedro II. A instituição foi a primeira escola pública do estado do Rio de Janeiro, que tinha como plano de ensino a promoção por séries e não mais por disciplina. Neste momento,

as disciplinas de Álgebra, Aritmética e Geometria ocupavam todas as oito séries do curso (MIORIM, 1998).

Em 8 de novembro de 1890, o então primeiro ministro Benjamin Constant, baixou um decreto que marcou uma grande reforma no sistema educacional brasileiro. Tal decreto eliminava algumas disciplinas tradicionais e incorporava outras no ensino secundário, que se daria em sete anos, visando introduzir uma formação mais científica ao invés da formação literária da época. Dentre as novas disciplinas inseridas, destaca-se nos tópicos relativos à matemática, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral como disciplina no 3º ano de ensino. Porém, como relata Euclides Roxo:

o estudo do Cálculo não tinha ligação com o resto do curso, onde não era desenvolvida a ideia de função, e foi feito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente (SPINA, 2002, p.39)

Apesar da introdução da matéria de Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário, esta não obteve muito êxito devido ao seu cunho extremamente formal, que visava prioritariamente dar enfoques ao estudo da mecânica geral. Desta forma, em 1900, houve a retirada de tal conteúdo, dos programas de ensino. Durante um longo período, o Brasil ficou em tal situação sem passar por outra reforma educacional que fosse significativa para a matemática.

Em um ato inovador, o então diretor do colégio Pedro II, professor Euclides Roxo, inspirado nas ideias e discussões mundiais sobre a matemática na época, propõe uma mudança na grade curricular do ensino da matemática. A mudança aconteceu com a homologação de um decreto que dentre outras providências unificava o ensino da matemática no ensino secundário, desta forma, as disciplinas de álgebra, aritmética e geometria eram estudadas em conjuntos e não mais separadamente. Pretendia-se que tal modelo servisse de exemplo para todas as instituições de ensino secundário da época, visto o prestígio que o colégio Pedro II possuía.

Só em 1931, com a Reforma Francisco Campos, é que houve uma grande mudança no sistema educacional brasileiro. Além do currículo seriado e da frequência obrigatória, foi neste momento que passou a existir dois ciclos de estudo: um fundamental e outro complementar, sendo obrigatória a conclusão dos dois para ter acesso ao ensino superior. Assim como no colégio Pedro II, a matemática passava a ser lecionada em conjunto e alguns tópicos do cálculo voltaram ao currículo do ensino secundário. Podemos observar esta inclusão como segue no trecho da reforma:

[...] como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões,

geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física [...]

[...] a noção de função constituirá a ideia coordenadora do ensino. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. (Decreto nº 19890, 1931, [Miorim \(1998, p.47\)](#)).

Infelizmente, o ensino de Cálculo não obteve muito êxito após a reforma, pois muitos professores encontraram dificuldades em trabalhar o conteúdo de forma diferente a que estavam habituados. A falta de livros didáticos que abordassem a matéria da forma proposta, foi mais um agravante para o insucesso da implementação da reforma. Conforme relata [Spina \(2002, p.65\)](#): “[...]os professores, em sua maioria, continuavam a trabalhar os conteúdos de forma desconectada e excessivamente rigorosa”.

Novamente, em 1942, tivemos uma nova reforma, a Reforma Capanema, onde se dividiu o ensino secundário em dois ciclos: ginásial e científico. Os conteúdos de cálculo passaram a fazer parte dos programas regulares científico, mas, após analisar vários livros didáticos da época, [Spina \(2002, p.64\)](#), conclui que: “[...]apesar de todas as discussões a respeito do assunto, prevalece a abordagem rigorosa, linear e formal dos conteúdos, assim como a total desarticulação destes com os demais conteúdos”.

Finalmente, com a Lei de diretrizes e bases da educação em 1961, houve uma nova reestruturação no programa de ensino, em que o sistema educacional ficou dividido em: primário, ginásial, colegial e superior. Nesta época, as várias esferas governamentais possuíam certa abertura, concedida pelo Ministério da educação, que autorizava cada um a elaborar seu programa de ensino. Desta forma os conteúdos de cálculo foram retirados das grades curriculares do ensino colegial.

Podemos concluir após os fatos ocorridos, que tal situação associada ao fato dos conteúdos matemáticos não serem bem ensinados em cada etapa, são uma das razões pela qual o aprendizado de cálculo vem se demonstrando tão dificultoso por parte dos alunos no ensino superior.

Entretanto, não temos a intenção com este trabalho, de defender a inserção de conteúdos de Cálculo como, limites, derivadas e integrais no currículo do ensino médio, temos a certeza de que tais conteúdos devem continuar sendo oferecidos no ensino superior. O que podemos fazer, e é o que iremos propor, é trabalhar alguns assuntos do ensino fundamental que servirão para facilitar a aprendizagem do Cálculo.

1.2 TRABALHAR OU NÃO CONCEITOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?

Atualmente, o estudo do Cálculo Diferencial e integral no ensino superior, se faz necessário devido à grande usabilidade que tal conteúdo possui nas mais diversas áreas de conhecimento. No entanto, a sua aprendizagem em nível de ensino médio, vem sendo deixado de lado, o que nos leva a refletir sobre: a que ponto estudar cálculo no ensino médio é viável? Conteúdos específicos do Cálculo Diferencial e integral poderiam ser abordados neste nível de ensino?

A introdução de conceitos do Cálculo no Ensino médio é um desejo de alguns profissionais da área da educação matemática que acreditam ser esta a solução para a melhora de seu aprendizado. É concebível o desejo de tal inclusão, devido à revolução tecnológica que vivemos atualmente, onde a necessidade de se aprender surge cada vez mais cedo. Em uma de suas publicações, (ÁVILA, 1991, p.2) já tinha essa visão e defendia que ideias elementares de limites e derivadas poderiam ser trabalhados de forma simples no Ensino médio adequando-se ao ensino das funções. Veja uma de suas afirmações:

O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Podemos observar, que esta fala do autor se deu há 24 anos, mostrando como se defendia a introdução de certos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio. Acreditamos não ser esse o caminho, pois, aumentar o número de conteúdos nesta etapa do ensino só dificultará mais ainda uma aprendizagem significativa da matemática.

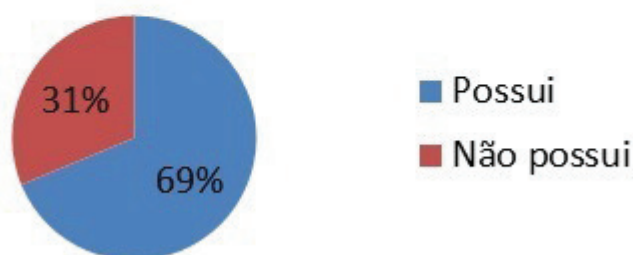
Ainda segundo (ÁVILA, 1991, p.2), o retorno do ensino do Cálculo no Ensino médio, deve ser retornado não para corrigir um erro do passado, com a retirada do mesmo do ensino secundário, mas sim, pela sua importância e relevância que vem desempenhado frente ao desenvolvimento científico-tecnológico. Esta importância fica clara quando nos diz:

O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2.º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2.º grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento.

Outra questão pertinente e que deve ser levantada, é o número de cursos oferecidos pelas instituições de nível Superior cuja matéria de Cálculo Diferencial e Integral é um de seus componentes curriculares. Este fato foi um dos motivos pelo qual este trabalho de pesquisa foi realizado. Para efeitos justificativos, foi feito um levantamento com todos os dezesseis cursos presenciais oferecidos pela Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro no ano de 2014, e o resultado obtido está expresso no gráfico a seguir (figura 1).

Figura 1 – Pesquisa de Cursos na UENF

Cursos oferecidos pela UENF que possuem a matéria Cálculo I em sua grade curricular (Ano base: 2014)

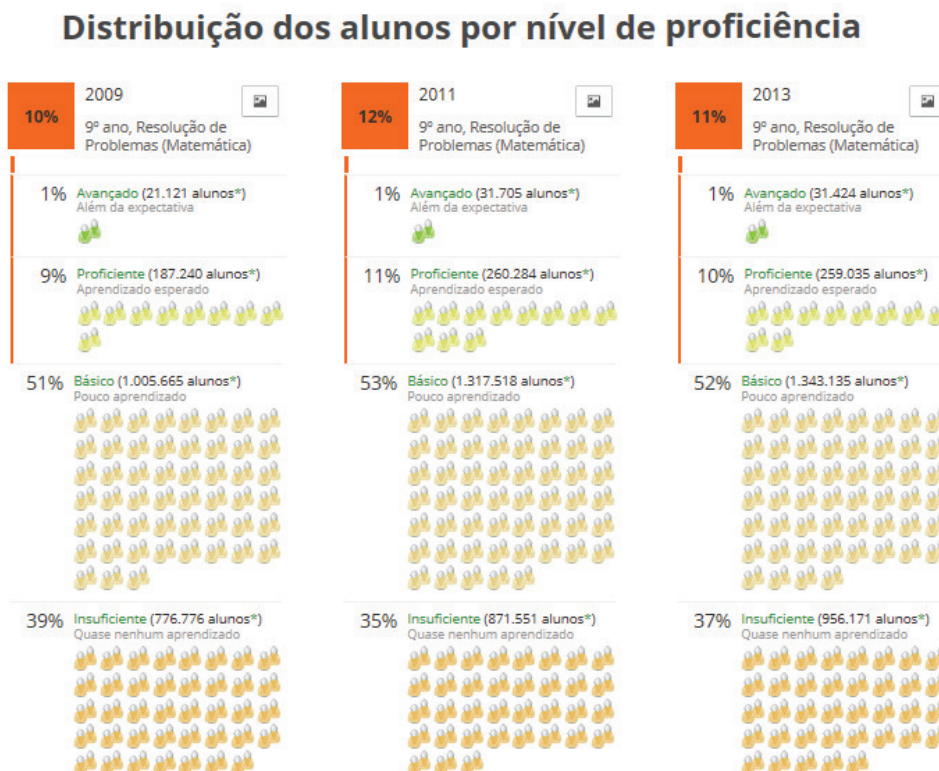


Fonte: Elaboração própria

Outro fator que justifica de forma incontestável a intenção deste trabalho é o alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo no Ensino Superior, uma vez que os alunos, em sua maioria, são recém-chegados do ensino médio. Não podemos afirmar que apenas o conhecimento matemático trazido pelo aluno é responsável pelo seu mau desempenho em Cálculo, mas, com certeza tem uma grande parcela de culpa.

O baixo aprendizado em matemática é uma triste realidade de nosso país que vem se arrastando pelos vários níveis de ensino. É comum um professor diagnosticar no ensino superior, que um aluno não domina os conhecimentos básicos em matemática, porém, o mesmo acontece com um professor de ensino médio quando recebe seus alunos oriundos do ensino fundamental. Esse baixo aprendizado pode ser verificado por meio dos índices apontados pela prova Brasil, em que o Movimento Todos pela Educação faz um levantamento do desempenho dos alunos separando-os em uma escala de quatro níveis de proficiência. Vejamos a figura 2:

Figura 2 – Levantamento de desempenho dos alunos



Fonte: <http://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>

Como podemos perceber o problema não está no ensino médio, mas sim na base que é o ensino fundamental. Se formos levantar os dados do aprendizado em matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, também nos depararíamos com baixos rendimentos. É notório que são necessárias políticas públicas para se reverter este quadro, o que não quer dizer que devemos deixar de buscar meios para reverter tal situação.

A proposta deste trabalho tem exatamente este caráter, buscar conteúdos matemáticos que foram ofertados ao aluno no ensino fundamental e trabalhá-los no ensino médio com uma abordagem diferente da que foi proposta. Porém, deverão ser selecionados conteúdos que venham a facilitar a compreensão do aluno quando estiver cursando a disciplina de cálculo no ensino superior. Ressaltamos que a intenção não é aumentar o conteúdo de matemática ensinado no ensino médio e sim rever conteúdos específicos, aplicando as atividades que serão propostas, que poderão ser dadas paralelamente ao planejamento do professor.

Capítulo 2

O PRÉ-CÁLCULO

A fim de minimizar o alto índice de reprovação na matéria de Cálculo Diferencial e Integral, foi criada a matéria Pré-Cálculo ou Cálculo zero ou algum nome similar a ser oferecido no ensino superior. Tal matéria, na maioria das vezes, não faz parte das disciplinas obrigatórias na qual o aluno deve cursar, normalmente, ela é oferecida como uma disciplina optativa sem contar para o histórico escolar.

O Pré-Cálculo costuma ser oferecido em apostilas construídas pela própria universidade ou pelo professor que irá ministrar as aulas, em que se busca relembrar ao aluno alguns tópicos da Matemática e da Geometria que foram abordados no ensino fundamental e no ensino médio e que servirão de base para o estudo do Cálculo. E é exatamente em alguns conteúdos específicos do ensino fundamental que desenvolvemos este trabalho, a fim de servir como base não só para o ensino superior, mas de forma indireta para o ensino médio.

Temos que os conteúdos matemáticos ensinados do 6º ao 9º ano do Ensino fundamental são a base do raciocínio abstrato desenvolvido pelos alunos. É nesta fase que começam os primeiros contatos mais superficiais com análise numérica, álgebra e geometria, e que serão aprimorados no ensino médio.

Podemos dizer que o Pré-Cálculo já começa a ser visto pelos estudantes no Ensino Fundamental, por exemplo, no momento em que eles começam a pensar nos diferentes tipos de números que existem classificando-os quanto ao seu conjunto numérico. Algumas ideias de limites já são vistas, quando ele se defronta com a reta numérica e sua continuidade podendo andar infinitamente para à direita ou à esquerda, bem como quando precisa localizar na mesma reta números decimais cada vez mais próximo de um ponto dado. É também nesta fase que ela aprenderá as manipulações algébricas como produtos notáveis, fatoração, operações com polinômios, entre outras, que ajudarão no cálculo de limites. Em fim, vários conteúdos significativos de “Pré-Cálculo”.

Esta base que se inicia nos anos finais do ensino fundamental, se não for bem

trabalhada, implicará negativamente não só no ensino superior, mas como no ensino médio, ainda mais porque o aluno na maioria das vezes não terá a oportunidade de recuperar, dentro do ambiente escolar, o conteúdo que não foi compreendido. É ainda nesta fase que boa parte dos estudantes começa a formar sua opinião a cerca da Matemática, sentindo-se atraídos ou não por ela.

No entanto, para que seja construída uma base sólida de conhecimento, é preciso que o aluno ainda no ensino fundamental passe por uma aprendizagem matemática baseada em explicações minuciosas, discussões e muitos exercícios que o levem a compreender a necessidade de se aprender esta matéria. O aluno deve ser questionado, instigado a pesquisar e experimentar a matemática a fim de querer entendê-la cada vez mais. Porém, o que se vê hoje em dia é um ensino que não ajuda a compreensão da matemática.

Desta forma, temos um método de ensino que cada vez mais afasta os alunos da realidade desejável para se ingressar no ensino superior. Portanto, este é um problema que surge antes de se chegar ao ensino superior e que pode ser tratado ainda no momento anterior a este. Nos itens que se seguem, veremos as dificuldades encontradas pelos dois lados, docentes e discentes, no estudo do Cálculo.

2.1 DIFICULDADES AO ENSINAR CÁLCULO

Como já foi dito em linhas anteriores, os índices de reprovação em cálculo I e em outras matérias que estejam ligadas ao Cálculo Diferencial e Integral são muito elevados. A principal justificativa dada pelas universidades e pelos docentes são praticamente as mesmas, em que o ensino médio carrega o grande peso de não preparar adequadamente o aluno para o próximo nível de ensino.

Muitos acreditam que vestibulares mais rigorosos e até mesmo o ENEM, seria capaz de filtrar alunos mais preparados para o ensino superior, porém, não é o que acontece na prática. Se analisarmos de forma mais criteriosa, mesmo em década anteriores quando os vestibulares ficavam a cargo da própria instituição, as reprovações em Cálculo já atingiam números elevados, ou seja, o problema não é atual e muito menos do sistema de seleção de alunos. Então, de quem é a culpa?

Estamos diante de um questionamento que é impossível de se precisar, entretanto, o que deveríamos nos perguntar é: o sistema de ensino atual, prepara de forma significativa o aluno a pensar matemática já na educação básica? Temos, que esta fase de ensino possui um grande peso na vida do estudante, fazendo a diferença futura em um aluno que cursará disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral como destaca [Rezende \(2003, p.403\)](#).

Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação / ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático.

Evidentemente, este é um fator que atrapalha bastante a ação do docente, visto que, como conseguirá ensinar para um aluno que não traz uma bagagem de conhecimento mínimo necessário. O conteúdo de Cálculo segue uma sequência lógica e progressiva, assim como se dá com toda a matemática, a ausência de certas habilidades atrapalhará todo o processo de construção de conhecimento em tal disciplina.

Este, não deixa de ser mais um argumento que justifique o propósito deste trabalho, que se dá pela necessidade da inserção de certas ideias do Cálculo ainda no ensino médio. Atividades que envolvam noções de limites, explorem conceitos básicos de derivadas e que sirvam para cálculos simples de integração.

2.2 DIFICULDADES NO APRENDER CÁLCULO

O problema apresentado no item anterior referente à falta de base matemática no ensino básico, também é claramente um problema na hora de se aprender cálculo. Este fato resulta em dificuldades encontradas nas primeiras aulas e levam o aluno a não conseguir acompanhar a sequência e desenvolvimento da matéria.

A partir daí, acontecem sucessões de fatos que levarão ao insucesso em cálculo: faltas constantes, trancamento de matrícula, evasão escolar, entre outros. Estes são mais alguns problemas que contribuem para os altos níveis de reprovação.

Alguns alunos justificam as dificuldades encontradas em cálculo, ao excesso de conteúdos a serem trabalhados em tão pouco tempo. O que leva a um estudo maçante em que, segundo os mesmos, é necessário se decorar várias fórmulas e resolver exercícios de forma mecânica sem entender a verdadeira aplicabilidade da disciplina.

O quantitativo de alunos por sala de aula, também entra na lista de reclamações dos estudantes, o que não deixa de ser pertinente, uma vez que fica claro que o desempenho e entendimento no conteúdo por parte do aluno ficam facilitados quando o professor trabalha com uma turma mais reduzida.

Apesar das inúmeras reclamações apresentadas pelos alunos, é difícil acreditar que nos dias atuais, em que a tecnologia é uma grande aliada aos estudos, ainda tenhamos um índice tão alto de reprovação em Cálculo.

Temos consciência de que o problema não pertence a um único personagem, mas sim a um sistema educacional que deve rever seus métodos de ensino desde a sua base até seu nível mais alto. Porém, o que está a nosso alcance é tentar amenizar este problema trabalhando já no ensino médio alguns conteúdos que ajudarão no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, como será proposto neste trabalho.

Capítulo 3

METODOLOGIA

Na introdução foi descrito de maneira bem sucinta, os objetivos no qual se pretende alcançar com este trabalho. Neste capítulo detalharemos melhor como se deu todo o processo de pesquisa.

De acordo com as regras do PROFMAT, o trabalho de conclusão de curso deve, preferencialmente, ter aplicação direta na sala de aula de matemática na educação básica, contribuindo para o enriquecimento do ensino da disciplina. E uma das opções de modalidades a ser seguida deve ser a elaboração de atividades educacionais abordando conteúdos matemáticos do ensino fundamental ou do ensino médio, especificando seus objetivos, público alvo, materiais a serem usados, recomendações metodológicas e uma descrição geral. Desta forma, este foi o modelo seguido para a elaboração deste trabalho.

Buscou-se de uma forma geral, harmonizar as atividades a serem apresentadas aos alunos com o período de estudo em que os mesmos estão vivenciando e que muitos vivenciarão. Levando-os ao interesse a todo o trabalho que será desenvolvido com eles.

3.1 ESCOLHA DAS ATIVIDADES

Uma das principais dúvidas na elaboração deste trabalho foi a escolha da atividade. Precisava-se pensar em algo que pudesse ser introduzido nas aulas de matemática do ensino médio sem que causasse uma sobrecarga de informações tanto para o aluno quanto para o professor. Além do mais, não seria introduzir um conteúdo, seria introduzir noções de pré-cálculo.

Decidiu-se trabalhar com conteúdos do ensino fundamental, pois, é uma fala comum a professores do ensino médio e do ensino superior os alunos possuem uma base matemática defasada trazida desta fase de ensino. E como sabemos, o estudo do Cálculo Diferencial e Integral é muito facilitado quando os alunos já possuem estes conhecimentos prévios.

A criação de uma apostila com alguns conteúdos do ensino fundamental, tem como objetivo resgatar alguns conhecimentos que ficaram perdidos pelo aluno durante o processo de ensino aprendizagem, e visa servir de base para vários conteúdos que serão vistos por ele durante o ensino médio e principalmente no ensino superior para quem tiver pela frente o estudo do Cálculo.

Sabemos que os alunos já possuem uma carga grande de matérias e conteúdos a serem encarados, mas, esta apostila não tem um cunho avaliativo e sim aditivo. A ideia é fornecer mais um instrumento de estudo aos alunos ajudando-os na matéria de matemática e preparando-os pelo que vem pela frente.

Apesar das dificuldades apresentadas pela maioria dos alunos em matemática, muitos pensam em cursar o ensino superior e buscam ajuda para superar tal dificuldade. Desta forma, foi criada também uma lista com dez exercícios em nível de vestibular, para que possam ser trabalhados os conteúdos da apostila. Assim, teríamos alunos estudando os conteúdos de pré-cálculo de uma maneira indireta, porém, se preparando para o vestibular.

3.2 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Na elaboração da apostila (Apêndice A), buscou-se inserir conteúdos do ensino fundamental que aparecem com muita frequência no estudo de disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral. Sabemos que o ideal seria o aluno dominar todo o conteúdo do ensino fundamental, mas, na realidade isto não ocorre. Desta forma, foram levantados por meio de pesquisas em livros de cálculo e em trabalhos científicos, quais conteúdos do ensino fundamental são necessários para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral e que os alunos possuem mais dificuldades.

Podemos ver abaixo na figura 3, um exemplo de exercício proposto em um livro de Cálculo, no qual, caso o aluno não domine alguns conteúdos básicos do ensino fundamental, ele não será capaz de resolvê-lo.

Figura 3 – Exemplo de exercício de Cálculo

4. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

Fonte: [Guidorizi \(2011, p.59\)](#)

Assim como este exercício, existem muitos outros em que é necessário o conhecimento prévio de vários conteúdos do ensino fundamental.

A fim de tornar o material de fácil compreensão, buscou-se usar uma linguagem mais informal e sem demonstrações, entendendo que as demonstrações e teoremas já serão trabalhados nos cursos superiores e o material em questão tem como público alvo alunos do ensino médio.

Na figura 4 temos uma parte da apostila na qual se usa uma linguagem menos formal e mais ao nível de entendimento do aluno, vejamos a seguir:

Figura 4 – Parte da apostila elaborada

4.3 Multiplicação de Frações

Este caso é bem direto, basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

Ex:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

Fonte: Elaboração Própria

No final de alguns assuntos tratados na apostila, foi criada uma seção chamada de “Calculando no Ensino Superior”, na qual são apresentadas algumas situações em que o conteúdo abordado será usado na matéria de cálculo. Buscou-se com isso, mostrar ao aluno que o conteúdo aprendido por ele no ensino fundamental, poderá ser usado pela sua passagem nos mais diversos níveis de ensino, e de certa forma faz com que ele tenha um primeiro contato com os conteúdos do Cálculo.

Assim como nos conteúdos do ensino fundamental, na seção que fala de cálculo, também foi usada uma linguagem mais acessível aos nossos alunos, deixando o formalismo para o momento devido caso venham a precisar.

Alguns livros didáticos do ensino fundamental serviram como estudo na criação da apostila por possuírem no nosso entendimento uma linguagem de fácil compreensão, como são os casos dos livros escritos por Soares (2007) e também por Andrini (2012).

Quanto à elaboração da lista de exercícios, buscou-se por questões que envolvessem os assuntos apresentados na apostila e que já foram utilizados em vestibulares ou que tenham ligações com os conteúdos abordados nos mesmos. Todas as questões possuem uma ideia intuitiva do cálculo e algumas podem ser solucionadas através do uso das técnicas aprendidas em Cálculo Diferencial e Integral.

3.3 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Como já dito em vários momentos deste trabalho, não se quer com este inserir mais um conteúdo formal ao programa do ensino médio. A ideia principal é introduzir noções de

cálculo através de atividades que servirão como um complemento de estudo para o próprio ensino médio.

Nesta fase, o professor torna-se o protagonista do trabalho, caberá a ele motivar os alunos a realizarem as atividades, leitura da apostila e lista de exercícios, assim como organizar de acordo com as instruções que aqui serão sugeridas a aplicação do material. O docente poderá dar um enfoque diferente aos assuntos abordados, buscando um melhor aproveitamento da turma.

Os temas abordados na apostila bem como a lista de exercícios, poderão ser trabalhados em qualquer ano do Ensino médio, dando preferência ao 1º e 3º anos. Se trabalhada com alunos do 1º ano, servirá para lembrar assuntos bem recentes vistos por eles e introduzir desde cedo as noções de Cálculo. Ao se trabalhar com alunos do 3º ano, possibilitará um interesse um pouco maior, devido a prévia ao vestibular, além de fazer com os conceitos de Cálculo aqui apresentados, sejam lembrados mais facilmente quando exigidos no ensino superior.

Como sugestão inicial, o docente deverá entregar uma cópia da apostila e da lista de exercícios para cada aluno. Neste momento, deverá abordar com eles a importância do conteúdo da apostila, que servirá como um resgate de conteúdos que foram vistos no ensino fundamental e que servirão para alguns momentos do ensino médio. Enfatizar que tais conteúdos são cobrados nos vestibulares, inclusive no ENEM. Deverá aproveitar e comentar de forma despretensiosa a existência da matéria Cálculo Diferencial e Integral, e como estes conteúdos estarão presentes na vida de muitos que ali estão quando chegarem ao ensino superior.

Para uma maior aprendizagem dos conteúdos apresentados, sugere-se que a apostila e os exercícios fossem trabalhados de forma gradativa, gastando-se aproximadamente 10 semanas, ou seja, resolver um exercício por semana. Estima-se que o professor irá gastar uma aula de 50 minutos para resolver cada exercício, pois, o mesmo deverá apresentar os tópicos da apostila que servirão para resolver uma determinada questão, rever estes tópicos sanando possíveis dúvidas que apareçam e fazer qualquer adição que seja pertinente.

Aconselhamos ao professor a deixar que os alunos, após a explicação dos tópicos necessários à realização da questão, discutam a questão entre si tentando chegar a resposta da mesma. A ideia é despertar uma discussão saudável levando todos a pensar em uma forma de resolver o exercício.

A lista de exercícios na versão do professor (Apêndice B), que segue logo a seguir, possui as sugestões e orientações na resolução de cada questão. Para se destacar do texto original da lista, as orientações encontram-se em itálico.

3.4 LISTA DE EXERCÍCIOS (VERSÃO DO PROFESSOR)

Abaixo serão enumeradas as questões das listas de exercícios, com suas orientações de como solucioná-las e a noção de cálculo que está implícita na maioria delas. O docente deve ficar à vontade para fazer qualquer comentário a mais do que o sugerido caso ache pertinente.

QUESTÃO 1 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

1) (PUC – RS – 2010) Pitágoras estabeleceu a seguinte relação entre as sete notas musicais e números racionais:

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Para encontrarmos o número $\frac{16}{27}$ relativo à nota LÁ, multiplicamos $\frac{2}{3}$ (o correspondente da nota SOL) por $\frac{8}{9}$. Assim, para obtermos $\frac{3}{4}$ (relativo à nota FÁ), devemos multiplicar $\frac{64}{81}$ (da nota MI) por:

- A) $\frac{8}{9}$
- B) $\frac{192}{324}$
- C) $\frac{9}{8}$
- D) $\frac{243}{256}$
- E) $\frac{256}{243}$

Requisitos: O aluno deverá ter estudado o item 4, 13 e 13.1 da apostila.

Orientação: Professor, peça aos alunos para lerem, na apostila, os itens citados acima. Depois, explique cada item tirando possíveis dúvidas. Após esta etapa, peça para que tentem resolver a questão. Enalteça o conhecimento deles, dizendo que a questão possui um nível fácil apesar de ser de um vestibular, faça com que eles se sintam capazes de resolver. Após chegar a resposta, crie situações com as frações para relembrar outras

operações.

Solução: Alternativa D

$$\frac{64}{81} \cdot x = \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot 64 \cdot x = 3 \cdot 81$$

$$256x = 243$$

$$x = \frac{243}{256}$$

QUESTÃO 2 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

2) Sendo a e b números reais positivos, analise os cálculos abaixo, quanto a sua correção e indique quais das igualdades estão incorretas.

$$1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}-2ab}{a+b} = \frac{a+b-2ab}{a+b} = \frac{2(a+b)}{a+b} = 2$$

①
②
③
④
⑤

- A) 1,2,3,4,e 5
- B) 1 e 3 apenas
- C) 4 e 5 apenas
- D) 1, 2 e 4 apenas
- E) 2 e 4 apenas

Requisitos: Estudar, na apostila, os itens 3, 4, 9, 10, 11 e 12.

Orientação: Professor, esta questão exige um conhecimento de muitos conteúdos da apostila, desta forma poderá ser gasto mais de 50 minutos para revisar todos os itens necessários e resolvê-la. Comece explicando cada item da apostila, seus exemplos e dando exemplos novos se necessário. Mostre o erro em cada passagem, apresentando qual seria a forma correta. Leve o aluno a perceber de imediato que há pelo menos um erro na questão, pois não é possível ter uma igualdade provando que $1=2$.

Solução: Alternativa D.

QUESTÃO 3 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

3) Uma sequência numérica obedece a seguinte lei de formação $x_n = \frac{n^2 + n - 2}{n - 1}$, onde $n \in \mathbb{N}_+^*$. Desta forma, a única afirmação falsa é:

- A) O primeiro termo vale 0.
- B) O décimo termo vale 12.
- C) Todo termo de posição par é um número par.
- D) O primeiro termo maior que 100 é o 99º termo.
- E) Esta sequência é crescente.

Requisitos: Estudar os itens 1, 2, 7, 11.4, 12, 14 e 14.2 da apostila.

Orientação: Professor, é necessário lembrar as ideias de conjunto apresentadas no item 1 devido a notação \mathbb{N}^+ presente na questão. O item 2 lembrará a resolução de potências e o item 7 apresenta um conceito básico de sequências. Dependendo em qual ano de escolaridade estiver sendo realizada a atividade, eles poderão já ter tido um contato mais aprofundado com a matéria de sequências. Monte sequências com os alunos, apresente o significado do termo X_n . Comece a montar a sequência e faça os perceber que para X_1 não se pode ter denominador 0. Relembre então os itens 14 e 14.2 para achar as raízes do numerador e depois o item 12 para fazer a simplificação. Encontre a expressão equivalente a dada e ache a sequência correta. Explique o porque a opção A é a afirmação falsa e as demais são verdadeiras.

Solução: Alternativa A

$$x_n = \frac{n^2 + n - 2}{n - 1} = \frac{(n + 2)(n - 1)}{n - 1} = n + 2$$

$$X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 5 \dots X_{99} = 101 \dots$$

Noção de Cálculo: Após a resolução desta questão, apresente despretensiosamente aos alunos a noção de limite apresentada na seção Calculando no Ensino Superior contida no item 7 da apostilas. Explique que existem sequências que tendem a um número e ao infinito explicando o gráfico mostrado. Este primeiro contato com o termo limite pode abrir muito o campo de conhecimento do aluno.

QUESTÃO 4 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

4) (IFRJ – CEFET Química 2011/2012) Numa sociedade de informações, o computador

trabalha agilizando os processos que muitas vezes podem ser modelados matematicamente. Para otimizar o tempo gasto em um processo, algumas vezes, o computador simplifica uma expressão matemática. Dessa maneira, é possível obter o resultado desejado, realizando menos operações. Simplificando a expressão $\frac{(x^4 - 6x^3 + 9x^2)(x + 3)}{x^4 - 9x^2}$, o valor numérico para $x=2011$ é igual a:

- A) 2008
- B) 2009
- C) 2010
- D) 2011
- E) 2012

Requisito: itens 9, 11 e 12 da apostila.

Orientação: Mais uma vez ressalte com os alunos que esta questão é de vestibular, e que é possível resolver apenas com conhecimentos do ensino fundamental. Explique todos os processos envolvidos na expressão até se chegar na simplificação. Dê um enfoque maior no denominador, onde aparece o produto da soma pela diferença, conteúdo de uso constante em cálculo.

solução: Alternativa A

$$\frac{(x^4 - 6x^3 + 9x^2)(x + 3)}{x^4 - 9x^2} = \frac{x^2(x^2 - 6x + 9)(x + 3)}{x^2(x^2 - 9)} = \frac{(x - 3)(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = x - 3 = 2011 - 3 = 2008$$

Noção de Cálculo: Após a solução do exercício, retome ao assunto de limite e explique o exemplo que aparece na seção Calculando no Ensino Superior do item 12. Comente que o artifício da fatoração é muito usado para calcular limites como o apresentado.

QUESTÃO 5 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

5) Um retângulo de lados x e y possui área igual a $24m^2$ e perímetro igual a $16m$. O valor numérico da expressão $4x^2y + 4xy^2$ é:

- A) 192
- B) 384
- C) 768

D) 960

E) 1536

Requisitos: O aluno deverá saber calcular a área e o perímetro de um retângulo e estudar o item 11 da apostila.

Orientação: Mostre para o aluno que esta questão pode ser resolvida de duas formas: montando um sistema ou usando as propriedades do item 11 da apostila. Faça as duas formas e deixe que eles discutam qual foi mais fácil. Atente-os para o método de fatoração de agrupamento, mostrando como ele é o inverso de uma multiplicação em que se usa a propriedade distributiva.

Solução: Alternativa C

$$\text{Perímetro} = 2x+2y=16 \Rightarrow x+y=8$$

$$\text{Área} = x.y= 24$$

$$4x^2y+4xy^2=x(4xy)+y(4xy)=(4xy)(x+y)=4.(xy).(x+y) = 4.24.8=768$$

QUESTÃO 6 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

6) Dados os polinômios: $p(x) = 5 - 2x + 3x^2$, $q(x) = 7 + x + x^2 - x^3$ e $r(x) = 1 - 3x + x^4$. O valor de $p(x) + r(x) - q(x)$ para $x = 2$ é:

a) 5

b) 19

c) 11

d) 24

e) 14

Requisitos: item 8 da apostila.

Orientação: Explicar os conceitos do item 8 dando um enfoque maior as operações básicas de adição e subtração de polinômios. Explique que o resultado pode ser encontrado fazendo os cálculos com os polinômios, reduzindo os termos semelhantes, para somente no polinômio final encontrado substituir o valor de x por 2, ou, poderá substituir o valor de x por 2 em cada polinômio, encontrando seus valores para depois realizar as operações pedidas.

Solução: Alternativa B

$$p(x) + r(x) - q(x) = (5 - 2x + 3x^2) + (1 - 3x + x^4) - (7 + x + x^2 - x^3)$$

$$p(x) + r(x) - q(x) = 5 - 2x + 3x^2 + 1 - 3x + x^4 - 7 - x - x^2 + x^3$$

$$p(x) + r(x) - q(x) = -1 - 6x + 2x^2 + x^3 + x^4$$

$$p(2) + r(2) - q(2) = -1 - 6(2) + 2(2)^2 + (2)^3 + (2)^4 = -1 - 12 + 8 + 8 + 16 = 19$$

Noção de Cálculo: Explique a noção de limite de um polinômio presente no item 8 na seção Calculando no Ensino Superior. Relembre os limites calculados nas seções anteriores e mostre que nesta seção está se fazendo uma generalização do cálculo do limite.

QUESTÃO 7 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

7) (ENEM - 2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t , em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$. Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a:

- A) 1,3 h
- B) 1,69 h
- C) 10,0 h
- D) 13,0 h
- E) 16,9 h

Requisitos: itens 9.3 e 14 da apostila.

Orientação: Relembre os itens citados acima e já estudados para resolver outra questão. Atente os alunos para as várias formas de resolução que terá este problema. Dê uma dica para eles de que se deve igualar uma equação a outra e como tem dois momentos em que são iguais, isso de alguma forma irá gerar uma equação do segundo grau. Reforce a eles a importância de estudar tais conteúdos, pois os mesmos são temas de prova do ENEM, assim como esta questão.

Solução: Alternativa A

$$\begin{aligned} &\text{Vamos igualar } V_1(t) \text{ e } V_2(t), \text{ logo,} \\ &250t^3 - 100t + 3000 = 150t^3 + 69t + 3000 \end{aligned}$$

$$250t \sim 100t = 150t + 69t + 3000 - 3000$$

$$250t \sim 150t - 100t - 69t = 0$$

$$100t - 169t = 0$$

$$\text{Fatorando, temos: } t(100t - 169) = 0, \text{ logo } t = 0 \text{ ou } t - 169 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1,3h$$

Poderia se resolver usando a fórmula resolvente da equação de segundo grau na equação $100t^2 - 169 = 0$ ou pela fatoração do produto da soma pela diferença.

QUESTÃO 8 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

8) Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $C(x) = x^2 - 80x + 3000$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, então, a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e os valores desse custo mínimo são respectivamente:

- A) 20 e R\$2800,00
- B) 40 e R\$1400,00
- C) 50 e R\$5000,00
- D) 80 e R\$5600,00
- E) 140 e R\$4000,00

Requisito: item 14 da apostila.

Orientação: Explique o conteúdo do item 14 e dê um foco especial nos pontos de mínimo e de máximo da parábola. Peça para que eles construam o esboço do gráfico da função dada seguindo o roteiro que está na apostila. Resolva inicialmente a questão apresentando as fórmulas do X_v e do Y_v , explicando o que cada um significa no problema.

Solução: Alternativa B.

Quantidade de unidades vendidas para que o custo seja mínimo será dada por X_v

$$X_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-80)}{2 \cdot 1} = \frac{80}{2} = 40$$

e

Para que o custo seja mínimo, a empresa deverá produzir somente 40 unidades do produto,

logo

O valor do custo mínimo será dado por Y_v ,

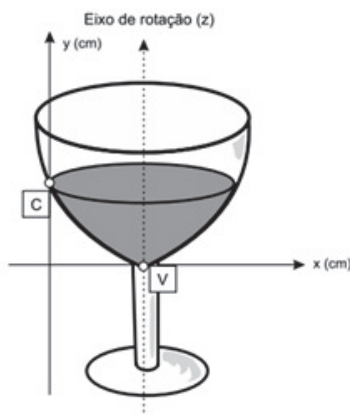
$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{(-80) - 4.1.3000}{4.1} = \frac{6400 - 1200}{4} = \frac{5600}{4} = 1400.$$

O valor do custo mínimo é de R\$1 400,00.

Noção de Cálculo: Professor, na seção *Calculando no Ensino Superior* do item 14.4, há um exemplo em que se resolve um problema parecido com este através do cálculo da derivada. O método usado foi o de calcular apenas a derivada de um polinômio, fica como sugestão explicar de forma simples ao aluno como usar este método para resolver esta questão. Explique para o aluno que pelo método da derivada, não será preciso gravar nenhuma fórmula, ficando como mais uma alternativa para ele resolver um problema deste tipo.

QUESTÃO 9 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

9) (ENEM – 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- A) 1
- B) 2
- C) 4

D) 5

E) 6

Requisitos: item 14 da apostila.

Orientação: comece novamente exaltando o fato de ser uma questão que já foi tema do ENEM. Relembre o item 14 da apostila. Instigue seus alunos a procurarem mais de uma forma de resolver esta questão, muito provavelmente irão resolver usando as propriedades do discriminante ou pelas fórmulas do Y_v e X_v , porém, lembre-os do método da derivada da aula passada e peça-os para tentar por este método.

Solução: Alternativa E

Pela equação temos :

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{6}{3} = 2$$

Pela figura temos que $Y_v = 0$ e sabemos que

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b - 4ac}{4a} = -\frac{(-6) - 4 \cdot (3/2) \cdot C}{4 \cdot (3/2)} = \frac{-36 + 6C}{6} = -6 + C$$

igualando as duas equações, temos $-6 + C = 0 \Rightarrow C = 6$.

A altura do líquido é de 6 cm.

Noção de Cálculo: Para realizar esta questão pelo método da derivada, é preciso que o aluno derive a equação dada e iguale a zero, desta forma ele vai encontrar o X_v . Substituindo o valor na equação original e igualando a zero, pois o ponto de mínimo é zero pela figura, ele encontrará o valor de c .

QUESTÃO 10 – ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

10) Um professor pediu a seus alunos para que construíssem uma figura plana cuja a área pudesse ser expressa pela função $A(x) = x^2 + 8x + 20$. Desta forma, podemos concluir que:

A) não é possível construir um retângulo, onde cada lado possua medidas inteiras.

- B) pode-se construir um quadrado, onde cada lado possua medidas inteiras.
- C) podem-se construir dois quadrados lado a lado, onde cada lado dos dois quadrados possuam medidas inteiras.
- D) Para qualquer valor de x , sempre será possível construir retângulos onde cada lado possua medidas inteiras.
- E) Para qualquer valor de x , sempre será possível construir quadrados onde cada lado possua medidas inteiras.

Requisitos: Saber calcular a área do quadrado e do retângulo. Estudar o item 14 da apostila.

Orientação: Peça aos alunos que atribuam valores para x encontrando suas respectivas áreas e trabalhem em cima da sequência encontrada. Dê uma dica para eles, como nas opções se fala em área do quadrado, peça-os para tentar representar a expressão usando o método de completar quadrados.

Solução: Alternativa C

Vamos construir uma tabela com alguns valores de X e sua respectiva área.

Tabela 1 – Tabela para solução da questão 10

Valor de X	Área ($x^2 + 8x + 20$)
1	$1^2 + 8.1 + 20 = \mathbf{29}$
2	$2^2 + 8.2 + 20 = \mathbf{40}$
3	$3^2 + 8.3 + 20 = \mathbf{53}$
4	$4^2 + 8.4 + 20 = \mathbf{68}$

Fonte:Elaboração própria

Pelas áreas encontradas, podemos eliminar algumas alternativas, vejamos:

Se a área for igual a 40, podemos desenhar um retângulo de lados 4 e 10 por exemplo. Logo a opção A é falsa.

Se x for igual a 1, a área será 29, que não pode ser a área nem de um quadrado nem de um retângulo de lados inteiros. Logo, as opções D e E são falsas.

Repare que a sequência das áreas é da forma $n^2 + 4 = n^2 + 2^2$, logo a resposta correta é a alternativa C.

Noção de cálculo: Na seção *Calculando no Ensino Superior* do item 14.3, é trabalhado um exemplo do método de completar quadrado que poderia ser usado para resolver esta questão, sugeríamos a você professor que proponha este desafio ao seu aluno. Realizando corretamente os cálculos, ele encontrará que a expressão

$$x^2 + 8x + 20 = (x + 4)^2 + 4 = (x + 4)^2 + 2^2$$

ou seja, soma de dois quadrados.

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho é de tornar possível a introdução de conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral ainda no ensino Médio. Como vimos, é de se lamentar que tal conteúdo tenha deixado ao longo da história de fazer parte da vida escolar do aluno nesta fase tão importante da aprendizagem.

Empregamos conceitos básicos de limite, mas que tem como intenção despertar o aluno para questões nunca vista antes, fazendo com que ele comece a entender o comportamento de algumas funções. O mesmo ocorreu com a definição dada de derivada, que foi bem superficial, mas, que já demonstrou uma aplicabilidade em determinados problemas.

Acreditamos que muito ainda se pode adicionar ao conhecimento dos alunos no que se refere ao estudo do cálculo. Gostaríamos que esse trabalho fosse uma ferramenta útil frente às inúmeras possibilidades na qual podemos tentar fazer para reverter este quadro tão crítico que se encontra a educação matemática em nosso país.

Apesar de acreditarmos no sucesso que será a aplicação das atividades aqui propostas em sala de aula, não foi possível realizar a mesma. Porém, convidamos a todos os professores de matemática atuantes no ensino médio, a aplicarem tais atividades destacando os pontos positivos e negativos, bem como dando sugestões que possam aprimorar este trabalho.

Precisamos investir muito para a melhoria da educação, não só investimento financeiro, como investimento de determinação. Devemos lutar por uma educação de qualidade e melhores condições de trabalho. Quem sabe não chegará o dia em que teremos novamente o estudo do cálculo no ensino médio, um estudo com um enfoque diferenciado, onde deixaremos de lado os formalismos, teoremas e demonstrações para estudarmos questões com aplicações práticas, e ai sim melhorar os índices de aprovação no ensino superior de Cálculo Diferencial e Integral.

Sabemos que este trabalho e as atividades propostas por ele, não sanarão todos os problemas referentes ao estudo da matemática no ensino superior, nem tão pouco fará com que o aluno aprenda tudo que deixou de aprender na época certa, mas temos a convicção de que irá despertar noções importantíssimas do cálculo que farão com que ele tenha uma maior facilidade de entender esta matéria quando em contato com ela neste momento único

da aprendizagem.

Assim, com este trabalho esperamos contribuir para melhoria da qualidade do ensino de matemática no país.

Referências

- ANDRINI, A. e. M. J. V. . Coleção Praticando Matemática. 3. ed. Editora do Brasil S.A.. São Paulo, 2012. Citado na página 28.
- ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2 grau. Revista do Professor de Matemática, n.18. SBM. Rio de Janeiro, 1991. Citado na página 19.
- BRASIL. PCN+, Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasil MEC/SEF. Brasília, DF, 2002. Citado na página 13.
- GUIDORIZI, H. I. Um curso de cálculo vol 1. 5. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2011. Citado na página 27.
- MIORIM, M. A. Introdução a história da educação matemática. [S.l.], 1998. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.
- PALIS, G. d. I. R. Computadores em Cálculo uma alternativa que não se justifica por si mesma. Temas e Debates. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. n. 6. São Paulo, 1995. Citado na página 15.
- REZENDE, W. M. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. Tese de Doutorado. São Paulo, 2003. Acessado em 15/01/2015. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php>> Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.
- SOARES, J. E. R. . Construindo consciências matemáticas. 1. ed. SCIPIONE. São Paulo, 2007. Citado na página 28.
- SPINA, C. Modelagem Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

Apêndices

APÊNDICE A

APOSTILA DE MATEMÁTICA FUNDAMENTAL

Esta apostila contém conteúdos matemáticos do ensino fundamental que servirão como base para o Ensino Médio e para boa parte dos cursos de graduação que possuam a matéria Cálculo Diferencial e Integral em sua grade curricular. Espero que lhe seja útil durante sua carreira de estudante e que possa lhe servir como mais um meio de estudos e de estímulo a buscar novos conhecimentos nesta matéria brilhante que é a Matemática.

Autor: Carlos Eduardo Gomes de Oliveira

1 - CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos se classificam de acordo com seus elementos que possuem entre si algumas características comuns. Vejamos quais são eles:

1.1 Conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N})

É formado pelos números inteiros positivos mais o zero.

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

Com a seguinte variação:

$$\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

1.2 Conjunto dos Números Inteiros (\mathbb{Z})

É formado pelo conjunto dos números naturais, mais os inteiros negativos.

$$\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Com as seguintes variações:

$$\mathbb{Z}^* = \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbb{Z}^+ = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbb{Z}^- = \dots, -3, -2, -1, 0$$

$$\mathbb{Z}_+^* = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \dots, -3, -2, -1$$

1.3 Conjunto dos Números Racionais (\mathbb{Q})

É formado pelo conjunto dos números inteiros, mais todos os números que podem ser representados em forma de fração. Por definição temos que:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Obs: As variações apresentadas em \mathbb{Z} , também servem para \mathbb{Q} .

Para facilitar, vamos separar os racionais em dois tipos:

1º) Decimais exatos

Exemplo: 7 -1 $\frac{3}{5} = 0,6$ $-\frac{7}{2} = -3,5$ $\frac{3}{32} = 0,09375$

2º) Dízimas periódicas

Exemplos: $\frac{4}{9} = 0,444\dots = 0,\overline{4}$ $\frac{11}{6} = 0,18333\dots = 0,18\overline{3}$

Obs.: repare que identificamos uma dízima periódica pela repetição infinita de algarismos após a vírgula. A fração que dá origem a dízima, é chamada de fração geratriz.

1.4 Conjunto dos Números Irracionais (\mathbb{I})

São todos os decimais não exatos e não periódicos.

Exemplos.: $3,76394873\dots$ $-5,10111213\dots$

São também exemplos de números irracionais todas as raízes enésimas não exatas:

Exemplos: $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $-\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{2}$

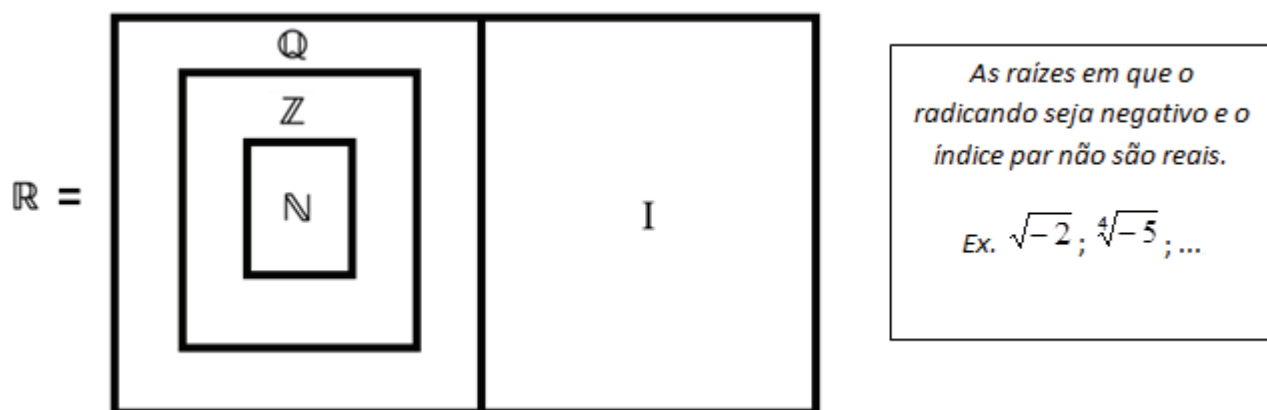
E os célebres números $\pi = 3,1415927\dots$ e $e = 2,7182818\dots$, entre outros.

1.5 Conjunto dos Números Reais (\mathbb{R})

É a união de todos os conjuntos apresentados. Portanto, todo número, seja \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{I} é um número \mathbb{R} (real).

Podemos representar o conjunto dos números reais pelo diagrama a seguir:

Figura 5 – Representação dos conjuntos numéricos



Fonte: Elaboração própria

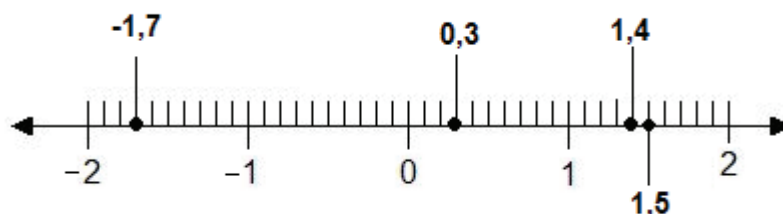
Obs.: As variações apresentadas em \mathbb{Z} , também servem para \mathbb{R} .

1.5.1 Representação geométrica de \mathbb{R}

O conjunto dos números reais pode ser representado geometricamente por pontos de uma reta numérica. Porém, não é possível ter uma localização precisa de um número irracional em tal reta, pois mesmo que a reta seja graduada em valores bem pequenos, não é possível representá-lo na forma decimal para localizá-lo visualmente e em seguida marcá-lo. Para conseguir localizar com exatidão um número irracional na reta, seria preciso utilizar, por exemplo, conteúdos matemáticos (teorema de Pitágoras) e instrumentos de desenho (régua e compasso) para realizá-lo.

Vejamos na reta abaixo, a representação dos números Reais/Racionais: -1,7; 0,3; 1,4 e 1,5.

Figura 6 – Representação de números reais

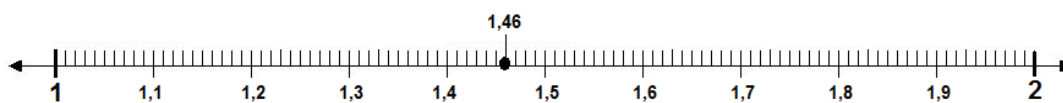


Fonte: Elaboração Própria

Vale ressaltar, que entre o 1,4 e o 1,5 existem infinitas divisões. Vejamos uma ampliação da reta numérica no intervalo entre 1 e 2 e a localização do número 1,46 por

exemplo.

Figura 7 – Localização do número 1,46



Fonte:Elaboração Própria

Logo, temos que 1,46 está entre $1,4=1,40$ e $1,5=1,50$, ou seja, $1,4=1,40 < 1,46 < 1,50=1,5$.

Poderíamos ir ampliando cada vez mais essa reta e localizar números com muito mais precisão.

Por exemplo, onde se localiza o número 1,46184?

Vamos criar uma tabela para facilitar o entendimento.

Tabela 2 – Localização do número 1,46

$1,4 = 1,40 < \mathbf{1,46} < 1,50 = 1,5$
$1,46 = 1,460 < \mathbf{1,461} < 1,470 = 1,47$
$1,461 = 1,4610 < \mathbf{1,4618} < 1,4620 = 1,462$
$1,4618 = 1,46180 < \mathbf{1,46184} < 1,46190 = 1,4619$

Fonte:Elaboração Própria

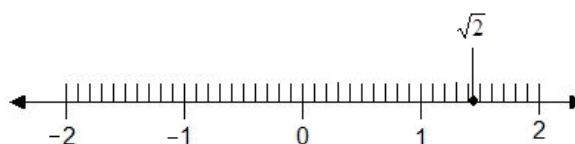
Pela tabela, podemos perceber que é bem difícil fazer uma localização precisa de um número decimal com muitas casas decimais, mas, todo número decimal exato possui uma localização na reta numérica.

Como estamos localizando na reta numérica os números reais, isto inclui a localização dos números irracionais. Desta forma, vamos localizar na reta numérica o número $\sqrt{2}$.

Temos que $\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$, e como já foi mencionado, realizar a sua localização precisa a olho nu se torna inviável, mas podemos fazer uma localização aproximada, vejamos:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623\dots \cong 1,41, \text{ então, } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

Figura 8 – Localização aproximada de $\sqrt{2}$



Fonte:Elaboração Própria

Imagine agora, que teríamos que localizar o número 0,999999... . Essa é uma questão que causa bastante estranheza entre os estudantes, pois, se formos tentar encontrar entre quais números o decimal periódico 0,999999... está, não conseguiríamos encontrar. O número sempre estaria entre 1 e 0,999999... acrescentando quantos nove fossem necessários, desta forma temos:

$$0,999999... = 1$$

2 - POTÊNCIAS

Em um cálculo de potência, temos:

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n \text{ vezes}}, \text{ onde } \begin{cases} a = \text{base} \\ n = \text{expoente} \end{cases}$$

O expoente indica quantas vezes devemos multiplicar a base por ela mesma

Exemplos:

$$5^3 = 5.5.5 = 125$$

$$(-3)^5 = (-3).(-3).(-3).(-3).(-3) = -243$$

$$(-4)^2 = (-4).(-4) = +16$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{49}$$

Conforme os exemplos apresentados, temos que toda potência de expoente par é positiva, qualquer que seja o sinal da base, porém, toda potência de expoente ímpar tem o sinal da base.

2.1 Propriedades das Potências

Para as operações entre potências são validas as seguintes propriedades:

2.1.1 Multiplicação de Potências de mesma base

Devemos repetir a base em comum e somar os expoentes.

Exemplos:

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$$

$$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$$

$$(3^5)^2 = 3^5 \cdot 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

2.1.2 Divisão de potências de mesma base

Devemos repetir a base em comum e subtrair os expoentes.

Exemplos:

$$7^8 : 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$$

$$x^8 : x^6 = x^{8-6} = x^2$$

2.1.3 Potência de expoente nulo

Toda potência de base diferente de zero e com expoente igual a zero, possui como resultado 1.

Exemplo:

$$3^0 = 1, \text{ pois, } 1 = (3^2 : 3^2) = 3^{2-2} = 3^0$$

Aqui foi usado o expoente 2, mas poderia ser usado qualquer outro valor que daria o mesmo resultado.

2.1.4 Potência de expoente negativo

Um número diferente de zero elevado a um número negativo, é igual a uma fração de numerador 1 e o denominador é a mesma base com o mesmo expoente, porém com o sinal positivo.

Exemplos:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$

3 - Radiciação

A radiciação é considerada o oposto da potenciação. Seus elementos são:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ onde, } \begin{cases} n = \text{índice} \\ \sqrt{} = \text{radical} \\ a = \text{radicando} \\ b = \text{resultado} \end{cases}$$

Achar a raiz de a, é encontrar o número b, que multiplicado por ele mesmo n vezes seja igual ao radicando (a)

Exemplos:

$$\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3, \text{ pois, } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ pois, } 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Para os radicais de radicandos positivos, vale a seguinte propriedade:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exemplos:

$$\sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[4]{x^{12}} = x^3, \text{ pois, } (x^3)^4 = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{12}$$

Quando o índice do radical for um número par e o radicando for um número negativo, esta raiz não possuirá solução no conjunto dos números reais.

3.1 Propriedades dos Radicais

Vamos analisar algumas propriedades quando trabalhamos com raízes.

3.1.1 Adição e subtração de radicais

Só podemos somar ou subtrair raízes que possuam o mesmo radicando.

Exemplos:

$$3\sqrt{7} + \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$5\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} = 2\sqrt{xy}$$

3.1.2 Multiplicação e divisão de radicais

Para realizar estas operações, basta que os índices sejam iguais.

Exemplos:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2 \cdot 3} = \sqrt[4]{6}$$

$$(3\sqrt{5}) \cdot (-4\sqrt{2}) = -3 \cdot 4 \sqrt{5 \cdot 2} = -12\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{xy^2}$$

3.1.3 Potência de Radicais

Apesar da potência poder ser resolvida como uma multiplicação entre raízes, é válida a seguinte igualdade:

$$(\sqrt[7]{2})^5 = \sqrt[7]{2^5}$$

3.1.4 Radiciação de radicais

Devemos multiplicar os índices e conservar o radicando.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$$

$$\sqrt{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[2 \cdot 5]{x} = \sqrt[10]{x}$$

3.2 Simplificação de Radicais

Usando algumas propriedades aprendidas, vamos simplificar alguns radicais.

Exemplo 1: Vamos simplificar o número $\sqrt{12}$.

Para isso, devemos fatorar este número, vejamos:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3, \text{ assim,}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Exemplo 2: Vamos simplificar o número $\sqrt{200}$.

Fatorando $\sqrt{200}$, temos:

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	então, $200 = 2^3 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2$, assim

Aqui separamos os fatores em comum de dois em dois, pois estamos simplificando uma raiz de índice 2, caso fosse uma raiz de índice 3, separaríamos de 3 em 3 e assim por diante.

$$\sqrt{200} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 3 \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

3.3 Expoente Fracionário

Potências de expoentes fracionários podem ser representadas na forma de uma raiz, onde a base será o radicando, o numerador da fração será o expoente do radicando e o denominador será o índice do radical. Em geral temos:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}, \text{ onde } x \text{ é um número real e } p \text{ e } q \text{ são números inteiros.}$$

Exemplos:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{5}{4}}$$

4 - FRAÇÕES

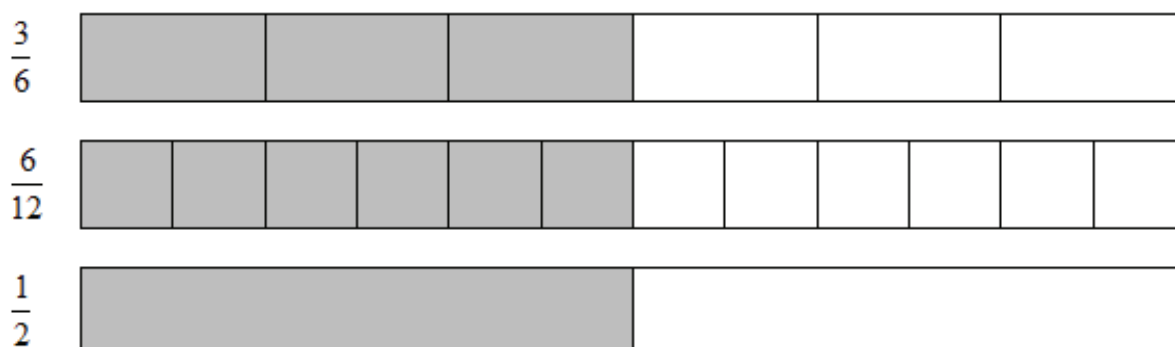
Vamos relembra algumas propriedades das frações e suas operações.

4.1 Frações Equivalentes

Sabemos que fração é um número que pode representar parte de uma unidade ou de uma quantidade que foi dividida em partes iguais, vamos mostrar como mais de uma fração pode representar uma mesma quantidade.

Exemplo: Na figura abaixo, está representada em forma de fração a parte pintada em cada barra. Sabendo que elas possuem o mesmo comprimento, temos:

Figura 9 – Representação geométrica de frações



Fonte:Elaboração Própria

Repare que as três frações representam a mesma quantidade, em que permite concluir que são frações equivalentes.

Para encontrarmos uma fração equivalente a uma fração dada, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

Exemplo: Encontre uma fração equivalente a fração $\frac{1}{7}$, mas que possua o denominador 42.

Para que o denominador seja 42, basta multiplicar a fração por 6, vejamos:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6}{42}, \text{ ou seja, } \frac{1}{7} = \frac{6}{42}$$

Repare que se tivéssemos $\frac{6}{42}$ e quiséssemos encontrar, por exemplo, a menor fração equivalente a esta, bastaria ir dividindo numerador e denominador por um mesmo número até não ser mais possível.

$$\frac{6}{42} = \frac{6}{42} : \frac{2}{2} = \frac{3}{21} : \frac{3}{3} = \frac{1}{7}$$

Este processo se chama simplificação e a

fração $\frac{1}{7}$ é chamada de fração irredutível

4.2 Adição e Subtração de Frações

Só podemos somar ou subtrair frações que possuam o mesmo denominador. Desta forma vamos separar em dois casos:

4.2.1 Adição e subtração de frações com o mesmo denominador

Basta somar ou subtrair os numeradores e repetir o denominador.

Exemplos:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}, \text{ simplificando, } \frac{6}{12} : \frac{6}{6} = \frac{1}{2}$$

4.2.2 Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Neste caso, teremos que encontrar uma forma com que as frações dadas fiquem com o mesmo denominador. Podemos fazer isso encontrando o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre os denominadores das frações dadas e em seguida encontrando frações equivalentes a cada uma, se for necessário, que possua o denominador igual ao m.m.c. encontrado.

Exemplo 1: Vamos realizar a seguinte soma $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

O m.m.c.(5, 4) = 20, logo, devemos encontrar frações equivalentes a cada uma que possuam o denominador 20.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20} \text{ e } \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}, \text{ temos então:}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$$

Exemplo 2: Vamos resolver a seguinte conta $4 - \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$.

Para facilitar, colocamos 1 como denominador do 4, logo m.m.c. (1, 4, 6)=12.

Vamos encontrar frações equivalentes a cada uma cujo denominador seja 12.

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 12} = \frac{48}{12} \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12} \quad \frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{14}{12}$$

assim,

$$4 - \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{48}{12} - \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{48 - 15 + 14}{12} = \frac{47}{12}$$

4.3 Multiplicação de Frações

Este caso é bem direto, basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

Exemplos:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{5} = \frac{x \cdot y}{2 \cdot 5} = \frac{xy}{10}$$

4.4 Divisão de Frações

Devemos repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda.

Exemplos:

$$\frac{6}{7} : \frac{5}{4} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$$

$$\frac{8}{\frac{2}{3}} : \frac{8}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

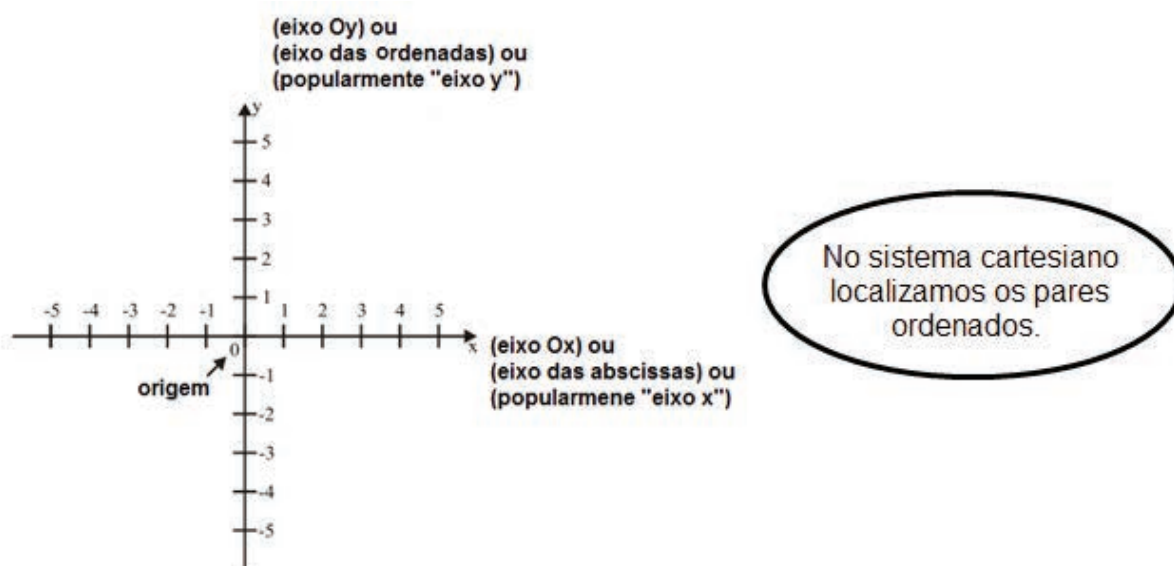
5 - PLANO CARTESIANO

Este assunto, sem dúvida nenhuma, é um dos mais relevantes desta apostila, pois é a base para a construção de gráficos e estudo das mais diversas funções que serão vistas durante todo o ensino médio.

5.1 Sistema Cartesiano

Chamamos de sistema cartesiano, a dois eixos graduados e perpendiculares entre si, com origens coincidentes. Em um sistema cartesiano temos:

Figura 10 – sistema cartesiano

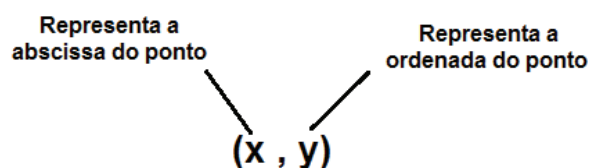


Fonte:Elaboração Própria

5.2 Par ordenado

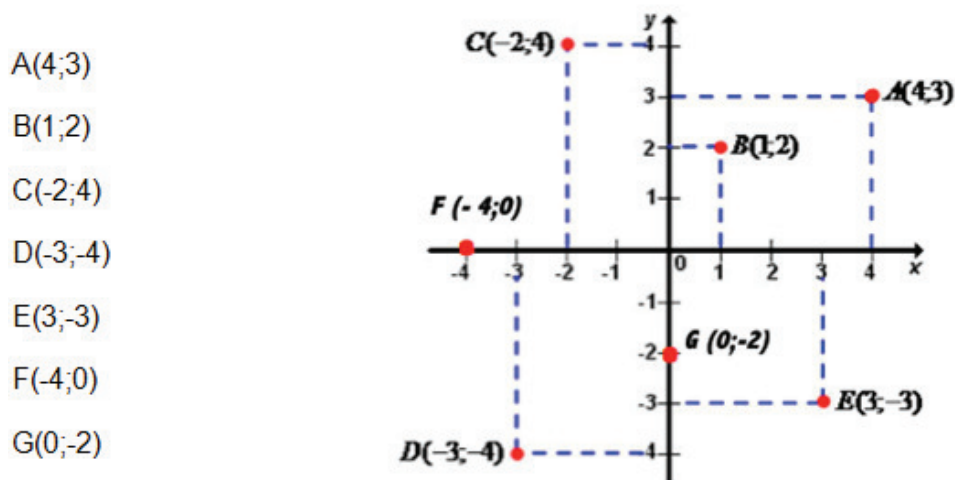
É um conjunto formado por dois números que obedecem a certa ordem. Um par ordenado define a localização de um ponto no plano cartesiano.

Seja o ponto $P(x,y)$, então:



Vejamos a localização dos pontos dados a seguir, no plano cartesiano.

Figura 11 – Localização de pontos no plano cartesiano



Fonte: <http://soumaisenem.com.br/matematica/conhecimentos-de-algebra-linear/sistema-cartesiano-ortogonal>

6 - FUNÇÕES E GRÁFICOS

O estudo de funções é um tanto quanto extenso, por isso, vamos nos preocupar aqui com definições iniciais que nos dará uma noção intuitiva do que é função, bem como na construção gráfica simples de algumas funções.

6.1 Funções definidas por fórmulas

Se x e y são duas variáveis tais que para cada valor de x existe, em correspondência, um único valor para y , dizemos que y é uma função de x .

Exemplo: Seja uma lei de correspondência que associa cada número real x ao número y , sendo y a soma de x com 3. Podemos definir a seguinte fórmula:

$$y = x + 3, \text{ ou } f(x) = x + 3.$$

Assim, nessa função temos:

Para $x = 0$, temos $y = 0 + 3 = 3$, dizemos que

$$f(0) = 3$$

Para $x = 1$, temos $y = 1 + 3 = 4$, ou seja, $f(1) = 4$

$$y=f(x)$$

6.2 Construção de Gráficos

O gráfico de uma função ajuda a descobrir algumas de suas propriedades e a entender seu comportamento. Podemos construir um esboço do gráfico de uma função conhecida a sua lei de formação.

1º) Construimos uma tabela com valores para x e os valores correspondentes para y calculados através da lei $y = f(x)$.

2º) Representamos cada par ordenado da tabela no plano cartesiano.

3º) Ligamos os pontos encontrados no plano cartesiano que será o próprio gráfico da função $y=f(x)$.

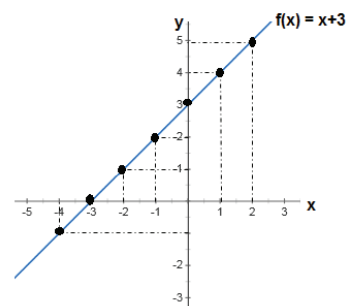
Exemplo 1: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = x + 3$.

Tabela 3 – Tabela para construção do gráfico de $f(x)=x+3$

x	y	Par Ordenado (x,y)
-4	-1	(-4,-1)
-3	0	(-3,0)
-2	1	(-2,1)
-1	2	(-1,2)
0	3	(0,3)
1	4	(1,4)
2	5	(2,5)

Fonte: Elaboração Própria

Figura 12 – Gráfico de $f(x)=x+3$



Fonte: Elaboração Própria

Neste exemplo, temos que o gráfico é uma reta, pois, estamos trabalhando com uma função polinomial do 1º grau. Veremos mais a frente como se comporta de maneira geral tal função e também a função quadrática.

7 - SEQUÊNCIAS

Nesta seção iremos falar um pouco de sequências numéricas, não especificamente de progressões aritméticas e geométricas, mas sim de sequências que podem ser obtidas através de uma lei de formação.

Uma sequência real a é uma função dos números naturais positivos nos reais. Podemos chamar uma sequência qualquer de a_n , onde n representa a posição de cada termo

da sequência.

Exemplo: Considere a sequência definida por $a_n = 2n + 1$. Quais são os termos dessa sequência?

Atribuindo valores naturais para n , temos:

$$a_0 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

...

Onde a sequência será 1,3,5,7,9,11,...

As sequências podem ser observadas também em padrões visuais que poderão ser passados para os numéricos.

Exemplo: Utilizam-se palitos para construir a sequência de figuras.

Figura 13 – Sequência de figuras



Fonte: Elaboração Própria

Quantos palitos são necessários para construir a vigésima figura?

Podemos representar a sequência em uma tabela. Vejamos.

Tabela 4 – Tabela para resolução da sequência

FIGURA	Nº DE PALITOS	PADRÃO
1	4	$3 \cdot 1 + 1$
2	7	$3 \cdot 2 + 1$
3	10	$3 \cdot 3 + 1$
4	13	$3 \cdot 4 + 1$
...
n	...	$3 \cdot n + 1$

Fonte: Elaboração Própria

Assim, observamos que a sequência obedece a lei de formação $a_n = 3n + 1$, logo, $a_{20} = 3 \cdot 20 + 1 = 61$ palitos.

Podemos observar que estas sequências apresentadas até o momento, sempre são crescentes, mas nem sempre isso ocorre.

Tomemos a sequência formada pela seguinte lei de formação: $a_n = \frac{1}{n}$. Vamos escrever os termos desta sequência.

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

$$a_4 = \frac{1}{4} = 0,25$$

...

Como podemos ver, esta sequência já possui valores decrescentes, e a medida que se aumenta o valor de n menor será o valor da sequência.

Vamos analisar esta sequência graficamente, onde podemos interpretá-la como $f(x) = \frac{1}{x}$.

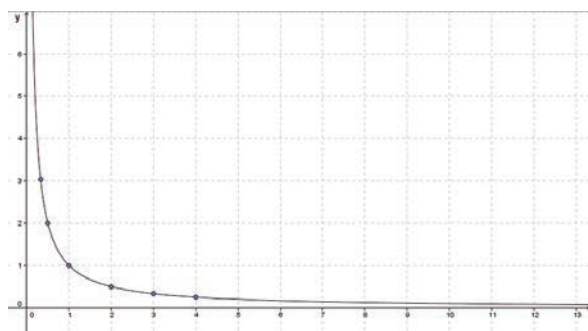
Usando o método já apresentado anteriormente para construção de gráficos, vamos atribuir valores para x associando a sua imagem y .

Tabela 5 – Tabela para construção do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$

x	f(x)=1/x	Par Ordenado (x,y)
1/3	3	(1/3,3)
1/2	2	(1/2,2)
1	1	(1,1)
2	1/2	(2,1/2)
3	1/3	(3,1/3)
4	1/4	(4,1/4)

Fonte: Elaboração própria

Figura 14 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Elaboração própria

Repare que quanto maior é o valor de x , mais próximo de zero esta sequência se aproxima. Podemos observar também que quanto mais próximo de zero o x se aproxima o y toma valores cada vez maiores tendendo ao infinito.

CALCULANDO NO ENSINO SUPERIOR

Um dos assuntos mais tratados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é o estudo de Limites de funções, tal conteúdo estuda o comportamento das funções de forma geral e em um determinado ponto. Mas, o que é limite?

O limite de uma função f quando x tende a a é igual ao número real L se, e somente se, os números reais $f(x)$ para os infinitos valores de x permanecerem próximos de L , sempre que x estiver muito próximo de a . Indicamos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Exemplo 1: Vamos identificar o limite, quando x tende a 3, da função $f(x) = x - 1$. Ou seja, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)$.

Vamos construir tabelas com valores de x se aproximando de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda, para acharmos o limite desta função.

Tabela 6 – x tendendo a 3 pela esquerda

x	$f(x)=x-1$	$f(x)$
2,5	$f(2,5) = 2,5 - 1$	1,5
2,8	$f(2,8) = 2,8 - 1$	1,8
2,9	$f(2,9) = 2,9 - 1$	1,9
2,99	$f(2,99) = 2,99 - 1$	1,99
...

Fonte: Elaboração própria

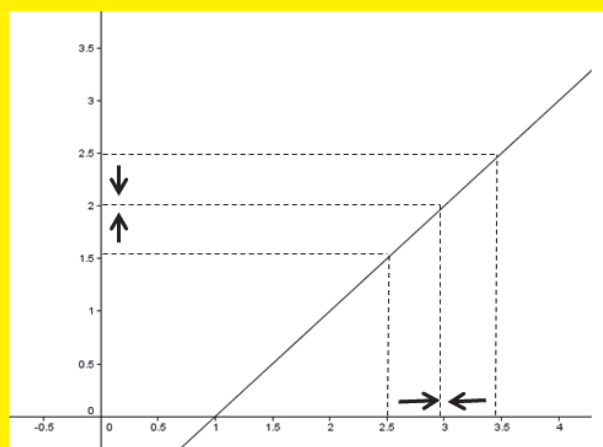
Tabela 7 – x tendendo a 3 pela direita

x	$f(x)=x-1$	$f(x)$
3,5	$f(3,5) = 3,5 - 1$	2,5
3,2	$f(3,2) = 3,2 - 1$	2,2
3,01	$f(3,01) = 3,01 - 1$	2,01
3,001	$f(3,001) = 3,001 - 1$	2,001
...

Fonte: Elaboração própria

Analisando graficamente temos:

Figura 15 – Gráfico do $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)$



Fonte: Elaboração própria

Observe que, quando x tende a 3, tanto por valores menores quanto por valores maiores que 3, $f(x)$ aproxima-se de 2, portanto $\lim_{x \rightarrow 3} x - 1 = 2$.

Poderíamos ter resolvido da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2$$

Exemplo 2: Vamos analisar a função já mostrada anteriormente, $f(x) = \frac{1}{x}$, identificando seu limite quando x assume valores cada vez maiores, ou seja, quando x tende ao infinito.

Solução: Queremos calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

Como já vimos, esta função assume valores cada vez mais próximos de zero a medida que x aumenta, assim, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

8 - POLINÔMIOS

Um polinômio é uma expressão algébrica formada por monômios e operadores aritméticos. O monômio é estruturado por números (coeficientes) e variáveis (parte literal) em um produto, e os operadores aritméticos são: soma, subtração, divisão, multiplicação e potenciação.

Os polinômios podem ser classificados em:

Monômios - Possuem um único termo. *Exemplos:* $3x$ $-6x^2$ $4a^2b$ 18

Binômios – É a adição algébrica de dois termos. *Exemplos:* $x+3$ $-4x+y$ $3x^2 - x$

Trinômios – É a adição algébrica de três termos. *Exemplos:* x^2+3x-5 x^2y+xy^2-xy

Quando a expressão algébrica é formada por mais de três termos, ela é chamada simplesmente de **polinômio**.

O polinômio também pode ser classificado de acordo com seu grau, onde a variável de maior expoente indica o mesmo. Por exemplo, o polinômio $2x^3+2x^2-3$ é chamado de polinômio do terceiro grau ou simplesmente polinômio de grau três.

Um monômio é formado por um número, chamado coeficiente, e por uma ou mais variáveis (letras) chamadas de parte literal.



Dois monômios são ditos semelhantes, quando possuem a mesma parte literal

8.1 Adição e subtração de Polinômios

Só podemos somar ou subtrair os termos que forem semelhantes. Devemos repetir a parte literal e operar com os coeficientes.

Exemplo: Vamos realizar a adição algébrica dos dois polinômios a seguir: $3x^2-5x+7$ e $4x^2+2x-5$.

Solução:

$$\begin{aligned}(3x^2-5x+7)+(4x^2+2x-5) &= 3x^2-5x+7+4x^2+2x-5 \\ &= 3x^2+4x^2-5x+2x+7-5 \\ &= (3+4)x^2 + (-5+2)x + (7-5) \\ &= 7x^2-3x+2\end{aligned}$$

A adição algébrica
também é chamada de
redução de termos

8.2 Multiplicação de Polinômios

Na multiplicação de polinômios temos alguns casos a considerar:

8.2.1 Multiplicação entre monômios

Devemos calcular o produto dos coeficientes e o das partes literais, aplicando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, ou seja, conservamos a base e somamos os expoentes.

Exemplos:

- $3x \cdot 5x = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x = 15x^2$
- $2a^2b^3 \cdot (-7a) = 2 \cdot (-7) \cdot a^2 \cdot a \cdot b^3 = -14a^2b^3$
- $4x^2y \cdot xyz = 4 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z = 4x^3y^2z$

8.2.2 Multiplicação de monômio por polinômio

Neste caso, devemos realizar a propriedade distributiva para multiplicar o monômio por cada termo do polinômio.

Exemplos:

$$\begin{aligned} 2x \cdot (3x+7) &= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 7 \\ &= 6x^2 + 14x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 \cdot (7x - 5y + 1) &= 3x^2 \cdot 7x - 3x^2 \cdot 5y + 3x^2 \cdot 1 \\ &= 21x^3 - 15x^2y + 3x^2 \end{aligned}$$

8.2.3 Multiplicação entre polinômios

Devemos multiplicar cada termo do primeiro fator por todos os termos do segundo fator e reduzir os termos semelhantes caso apareçam.

Exemplos:

$$\begin{aligned} (2x+3) \cdot (5x-1) &= 2x \cdot 5x - 2x \cdot 1 + 3 \cdot 5x - 3 \cdot 1 \\ &= 10x^2 - 2x + 15x - 3 \\ &= 10x^2 + 13x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-7) \cdot (2x^2+3x-1) &= x \cdot 2x^2 + x \cdot 3x - x \cdot 1 - 7 \cdot 2x^2 - 7 \cdot 3x + 7 \cdot 1 \\ &= 2x^3 + 3x^2 - x - 14x^2 - 21x + 7 \end{aligned}$$

8.3 Divisão de polinômios

Assim como na multiplicação de polinômios, devemos analisar separadamente alguns casos da divisão.

8.3.1 Divisão entre monômios

Devemos calcular o quociente (divisão) dos coeficientes e o das partes literais, aplicando a propriedade da divisão de potências de mesma base, ou seja, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Exemplos:

$$\frac{8x^5}{2x^3} = \frac{8}{2} \cdot \frac{x^5}{x^3} = 4x^2$$

$$\frac{2x^3y}{xy} = 2 \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y}{y} = 2x^2$$

8.3.2 Divisão de polinômios por monômio

Devemos dividir cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplos:

$$(6x^3 + 12x^2 - 9x) : (3x) = \frac{6x^3}{3x} + \frac{12x^2}{3x} - \frac{9x}{3x} = 2x^2 + 4x - 3$$

$$(10a^4b^3 - 5a^2b^2 + 15ab) : (-5ab) = \frac{10a^4b^3}{-5ab} - \frac{5a^2b^2}{-5ab} + \frac{15ab}{-5ab} = -2a^3b^2 + ab - 3$$

Obs.: No gráfico de um polinômio a quantidade de vezes que a curva que o representa corta o eixo O_x , equivale a quantidade de raízes reais que ele possui.

CALCULANDO NO ENSINO SUPERIOR

Os polinômios são expressões algébricas cujos seus gráficos, gerados de funções polinomiais, possuem comportamentos bem atípicos. O estudo do limite ajuda a entendermos o comportamento da função em um determinado ponto.

O limite de um polinômio $p(x)$ quando $x \rightarrow a$ é igual ao valor do polinômio em a . Sabendo disso, podemos reduzir os cálculos de limites de polinômios para o simples cálculo do valor do polinômio no ponto apropriado.

Se p é um polinômio qualquer, então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

Exemplo: Se $p(x) = x^3 - 5x^2 - x + 20$ e $a = 2$, temos que:

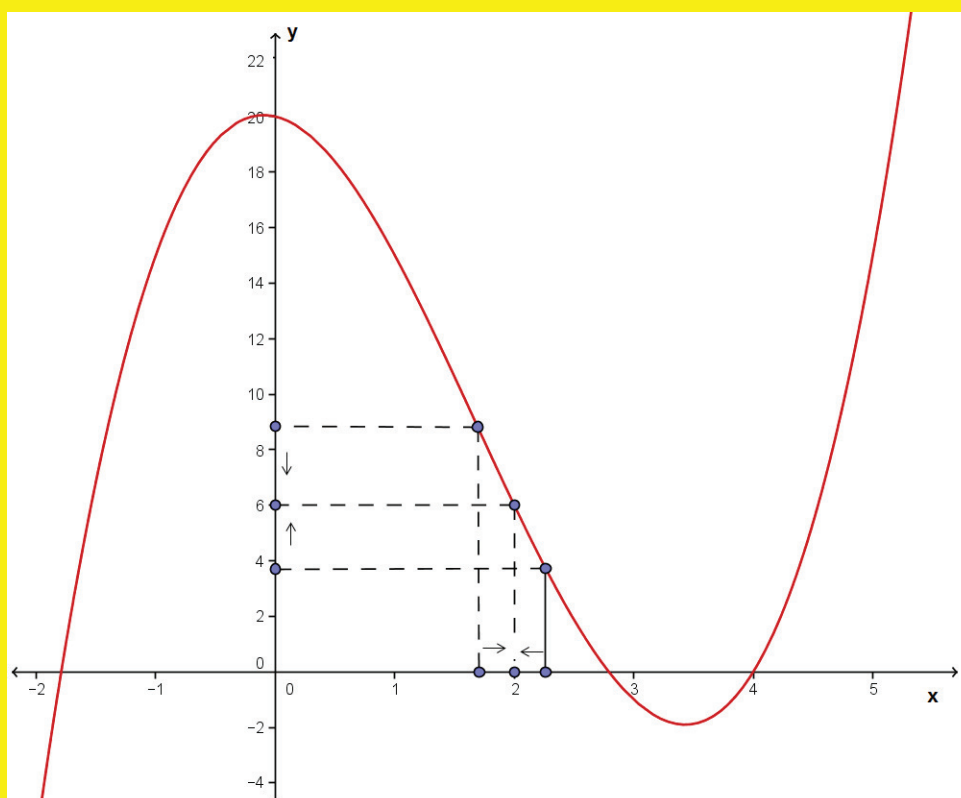
$$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = x^3 - 5x^2 - x + 20 = 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 2 + 20 = 6$$

Em outras palavras, temos que, o limite de $p(x) = x^3 - 5x^2 - x + 20$ quando x tende a 2 é igual a 6.

Quanto mais próximo de 2 os valores se aproximam, tanto pela esquerda quanto pela direita, sua imagem y aproxima-se de seis.

O gráfico de $p(x)$ abaixo ilustra a situação.

Figura 16 – Gráfico de $p(x)$



Fonte: Elaboração própria

9 - PRODUTOS NOTÁVEIS

Algumas multiplicações entre binômios apresentam um padrão em seu resultado, e por isso são chamados de produtos notáveis.

Vejam os três produtos mais comuns.

9.1 Quadrado da soma de dois termos

Dados dois termos, a e b quaisquer, onde a é o primeiro termo e b o segundo termo, temos.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Daí a expressão: *quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.*

Exemplo:

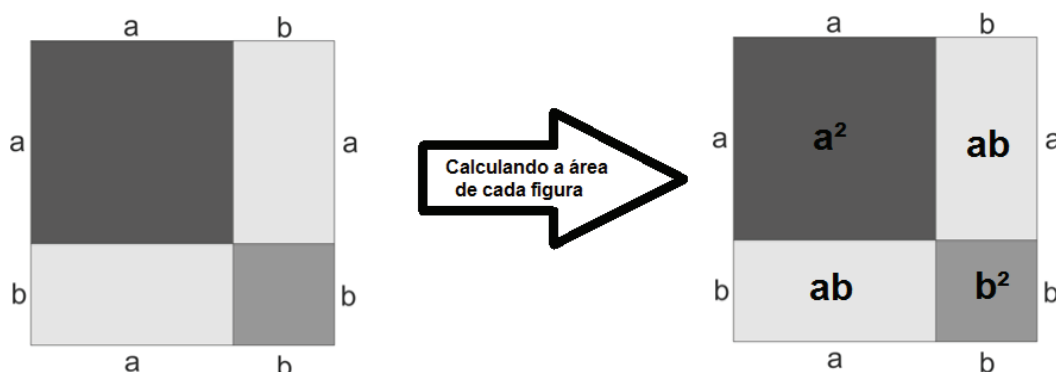
$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= (x+3).(x+3) \\ &= x.x+3x+3x+9 \\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

Observe que, sendo $a=x$ e $b=3$, temos que $a^2+2ab+b^2$ é igual a:
 $x^2+2.x.3+3^2 = x^2+6x+9$

Outra forma de representar e desenvolver este produto notável, é através da forma geométrica. Neste modelo, devemos tomar um quadrado de lado $a + b$, e sua área será o produto notável procurado, uma vez que a área do quadrado é encontrada elevando seu lado ao quadrado, ou seja, $(a + b)^2$.

Devemos separar o quadrado em quatro partes, calcular a área de cada parte e por fim somar essas áreas. Vejam a seguir.

Figura 17 – Representação geométrica do quadrado da soma

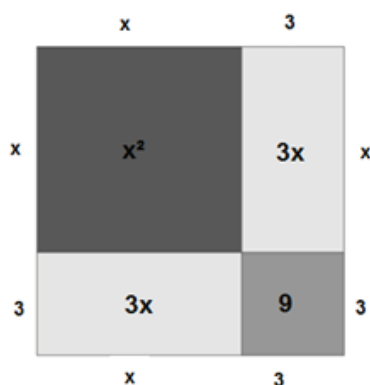


Fonte: Elaboração própria

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vamos usar este método para resolver o produto notável $(x+3)^2$ que foi apresentado no exemplo.

Figura 18 – Representação geométrica de $(x + 3)^2$



Somando as áreas de cada figura temos:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2+3x+3x+9 \\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

Fonte: Elaboração própria

O resultado encontrado é chamado de trinômio quadrado perfeito. Na maioria dos casos ao desenvolver um quadrado da soma, o primeiro e o último termo do trinômio serão quadrados perfeitos.

9.2 Quadrado da diferença de dois termos

Dados dois termos, a e b quaisquer, onde a é o primeiro termo e b o segundo termo, temos.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Daí a expressão: *O quadrado do primeiro menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.*

Exemplo:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 &= (x-3).(x-3) \\ &= x.x-3x-3x+9 \\ &= x^2-6x+9\end{aligned}$$

Observe que o resultado do quadrado da diferença é bem parecido com o resultado do quadrado da soma entre dois termos, mudando apenas o sinal do termo central.

9.3 Produto da soma pela diferença de dois termos.

Dados dois termos, a e b quaisquer, onde a é o primeiro termo e b o segundo termo, temos.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Daí a expressão: *O quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.*

Exemplos:

$$\begin{aligned}(x+7).(x-7) &= x.x - 7x + 7x - 7.7 \\ &= x^2 - 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2}).(1+\sqrt{2}) &= 1^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 1-2 \\ &= -1\end{aligned}$$

Este produto notável é de extrema importância. Seu resultado aparece nos mais diversos cálculos matemáticos.

10 - RACIONALIZAÇÃO

Racionalizar o denominador de uma fração, é encontrar uma fração equivalente à fração na qual se quer racionalizar de forma que seu denominador deixe de ser irracional e passe a ser racional.

Vamos analisar alguns casos de racionalização.

10.1 O denominador é formado de um termo

Sempre que o denominador da fração for um número irracional de um termo, basta multiplicar toda a fração por um fator que faça com que seja possível eliminar o radical, ou seja, que a raiz passe a ter solução exata.

Vamos ver alguns exemplos:

- $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{4\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$
- $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{3^2}} = \frac{6\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{6\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

Aqui foram usadas as propriedades dos radicais apresentadas no item 3.

10.2 O denominador é uma soma ou diferença

No caso a seguir, quando o denominador for uma soma ou diferença entre dois termos onde um deles é uma raiz, devemos usar os conceitos de produtos notáveis, mais precisamente do produto da soma pela diferença.

Vejamos alguns exemplos.

- $\frac{3}{\sqrt{2}+1} = \frac{3}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2^2}-1^2} = \frac{3\sqrt{2}-3}{2-1} = \frac{3\sqrt{2}-3}{1} = 3\sqrt{2}-3$
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3} \sqrt{7}}{\sqrt{5^2}-\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{21}}{5-7} = -\frac{\sqrt{15} + \sqrt{21}}{2}$

O processo de racionalização também pode ser realizado com o numerador da fração, ou seja, será feito o processo inverso da fatoração mostrada.

Exemplo: Vamos fatorar o numerador da fração $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7^2}}{2\sqrt{7}} = \frac{7}{2\sqrt{7}}$$

11 - FATORAÇÃO

A fatoração consiste em escrever uma expressão algébrica na forma de um produto de polinômios. Existem alguns tipos de fatoração, vamos analisar cada caso.

11.1 Fator comum

Devemos procurar em cada termo que forma a expressão algébrica, os fatores que são comuns, estes fatores serão chamados de termos em evidência ou fator comum.

Exemplo 1: Vamos fatorar o polinômio $3x^2 + 9x$

Vamos decompor cada termo do polinômio em produto de fatores:

$$3x^2 + 9x = 3x \cdot x + 3 \cdot 3x$$

Note que $3x$ é o fator comum aos dois termos do polinômio, logo

$$3x^2 + 9x = \mathbf{3x} \cdot x + \mathbf{3 \cdot 3x} = 3x(x + 3)$$

Exemplo 2: Vamos fatorar o polinômio $8x^2 - 12$

$$8x^2 - 12 = \mathbf{4 \cdot 2x^2} - \mathbf{4 \cdot 3} = 4(2x^2 - 3)$$

Repare que o termo em evidência é o máximo divisor comum (mdc) entre 8 e 12, ou seja, 4.

Exemplo 3: Vamos fatorar o polinômio $x^6 + x^4 - 3x^2$

$$x^6 + x^4 - 3x^2 = \mathbf{x^2} \cdot x^4 + \mathbf{x^2} \cdot x^2 - \mathbf{3 \cdot x^2} = x^2(x^4 + x^2 - 3)$$

Em todos os exemplos apresentados, é possível fazer uma “prova real” do resultado, basta multiplicar o termo em evidência por cada termo dentro dos parênteses aplicando a propriedade distributiva. O resultado deve ser o termo inicial a ser fatorado.

11.2 Agrupamento

Neste método não temos um fator comum a cada termo, mas, podemos agrupar os termos comuns para depois usar o método anterior.

Exemplo 1: Vamos fatorar o polinômio $3x + xy + 3a + ay$

$$3x+xy+3a+ay= \mathbf{3 \cdot x} + \mathbf{x \cdot y} + \mathbf{3 \cdot a} + \mathbf{a \cdot y} = x(3+y) + a(3+y)$$

Repare que $(3 + y)$ passou a ser o fator comum da expressão, assim

$$x(\mathbf{3 + y}) + a(\mathbf{3 + y}) = (x + a)(3 + y)$$

Logo, a forma fatorada de $3x + xy + 3a + ay$ é $(x + a)(3 + y)$

Exemplo 2: Vamos fatorar o polinômio $5a^2 - 10a + 4ab - 8b$

$$5a^2 - 10a + 4ab - 8b = \mathbf{5a \cdot a} - \mathbf{2 \cdot 5a + 4b \cdot a} - \mathbf{2 \cdot 4b} = 5a(a - 2) + 4b(a - 2)$$

Temos que $(a - 2)$ é o fator comum, assim

$$5a(\mathbf{a - 2}) + 4b(\mathbf{a - 2}) = (5a + 4b)(a - 2)$$

Logo, a forma fatorada de $5a^2 - 10a + 4ab - 8b$ é $(5a + 4b)(a - 2)$

11.3 Trinômio quadrado perfeito e diferença de dois quadrados

Estes casos nada mais são do que o processo inverso dos produtos notáveis apresentados no item 9. Devemos descobrir qual o produto notável que deu origem ao polinômio no qual se quer fatorar.

Exemplo 1: Vamos fatorar $x^2 + 10x + 25$

Vamos comparar este trinômio com a forma geral do produto da soma

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = a^2 + 2ab + b^2$$

Então, $a=x$ e $b=5$, logo, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

Exemplo 2: Vamos fatorar $4x^2 - 4x + 1$

Comparando com a forma geral do produto da diferença

$$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}, \text{ temos}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Então, $a=2x$ e $b=1$, logo, $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

Exemplo 3: Vamos fatorar $x^2 - 9$

Podemos notar que temos a diferença entre o quadrado de dois termos, que é exatamente o resultado do produto da soma pela diferença de dois termos,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Desta forma, comparando as expressões, temos

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = a^2 - b^2, \text{ logo, } x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

11.4 Fatoração de um trinômio dada suas raízes

A expressão $ax^2 + bx + c$, que representa o trinômio no qual iremos tratar, quando igualada a zero, torna-se uma equação do segundo grau, onde iremos ver mais a frente no ítem 13 como resolvê-la de forma a encontrar suas raízes.

Mediante as raízes (x_1 e x_2) do trinômio, podemos fatorá-lo usando a seguinte notação:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

onde, x_1 e x_2 são as raízes deste polinômio.

Exemplo 1: Vamos fatorar o trinômio $x^2 - 7x + 12$, sabendo que suas raízes são 3 e 4. Temos que $a = 1$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$. Usando a notação fornecida acima concluímos que

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Exemplo 2: Fatorar o trinômio $3x^2 + 2x - 5$, sabendo que suas raízes são $-\frac{5}{3}$ e 1.

Temos que $a = 3$, $x_1 = -\frac{5}{3}$ e $x_2 = 1$. Usando novamente a notação concluímos que

$$3x^2 + 2x - 5 = 3\left(x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right)(x - 1) = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 1)$$

12 - SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Fração algébrica é uma expressão algébrica escrita em forma de fração que possui incógnitas ou variáveis no denominador. Vejamos alguns exemplos.

$$\frac{3}{x} \quad \frac{a+b}{a-b} \quad \frac{2x-y}{xy}$$

A simplificação de frações é um recurso que torna a resolução de determinadas questões mais simples. A fatoração será um dos principais requisitos para realizar tais simplificações.

Antes de realizarmos algumas simplificações, vamos relembrar um conceito muito básico da matemática, mas de extrema importância, que é:

Todo número, diferente de zero, dividido por ele mesmo tem como resultado 1

Exemplos:

$$\frac{x}{x} = 1 \quad \frac{x+3}{x+3} = 1 \quad \frac{2(x-y)}{2(x-y)} = 1$$

Repare que $x+3$ e $2(x-1)$, ambos representam um número desconhecido, e são fatores comuns da fração, por isso, é possível realizar a divisão. Devemos ficar atentos para **não cometer erros do tipo**

$$\frac{x+3}{x} = \frac{\cancel{x}+3}{\cancel{x}} = 3$$

Só podemos simplificar uma fração algébrica, quando temos o mesmo fator comum sendo usado como um dos fatores multiplicativos tanto no numerador quanto no denominador.

Vejamos alguns casos de fatoração.

$$\frac{12x^2}{4x^3} = \frac{3\cancel{4}x^2}{\cancel{4}x^2 \cdot x} = \frac{3}{x} \quad \longrightarrow \quad \text{Foi usado o caso da fatoração do fator comum no numerador e no denominador.}$$

$$\frac{4x^2 - 6x}{2x} = \frac{\cancel{2}x(2x-3)}{\cancel{2}x} = 2x-3 \quad \longrightarrow \quad \text{Mais uma vez usamos o caso da fatoração do fator comum, só que apenas no numerador.}$$

$$\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x+3}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \frac{1}{x-3} \quad \rightarrow \quad \text{Usamos a fatoração do produto da soma pela diferença no denominador, onde apareceu o } (x+3) \text{ como fator comum.}$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x-1 \quad \rightarrow \quad \text{aqui, temos que o numerador é um trinômio quadrado perfeito.}$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}} = x-3 \quad \rightarrow \quad \text{Neste caso, descobriu-se as raízes do polinômio } x^2-5x+6 \text{ que são 2 e 3 e escrevemo-lo na forma fatorada conforme apresentada no item 11.4.}$$

$$\frac{2x^2+4x+5}{2x} = \frac{2x(x+2)+5}{2x} \quad \rightarrow \quad \text{Repare que neste caso não podemos realizar a simplificação de toda a fração, pois, } 2x \text{ não é um fator multiplicativo de todo o numerador.}$$

É importante observar, que as incógnitas presentes no denominador, não poderão assumir valores que o anulem, ou seja, o denominador não poderá ser igual a zero, uma vez que isso configura uma indeterminação.

CALCULANDO NO ENSINO SUPERIOR

Já vimos que os limites das funções, com x tendendo a um determinado valor a , foram iguais ao valor numérico das funções naquele ponto, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$. Mas, em muitos casos precisaremos usar os conteúdos apresentados nos itens **9**, **10**, **11** e **12**, para resolver o limite de um quociente, que possui a seguinte definição:

Sabendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0, \text{ então, } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Vejamos alguns exemplos a seguir:

Exemplo 1: Determinar o seguinte limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Note que a função não está definida para $x=2$, pois, $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ é uma indeterminação. Mas podemos calcular o limite, pois o mesmo se dá para valores próximos de 2, ou seja, para $x \neq 2$. Podemos então aplicar um dos conceitos de fatoração e fazer a seguinte simplificação:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = x + 2, \text{ logo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Exemplo 2: Determinar o seguinte limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x}$

Novamente temos uma função que possui uma indeterminação quando $x=1$, pois,

$$f(1) = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 4}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Usando as propriedades de fatoração e simplificação, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{x(x - 1)} = \frac{x - 4}{x} \implies f(x) = \frac{x - 4}{x} \text{ logo,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{x} = \frac{1 - 4}{1} = -3$$

Exemplo 3: Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Mas uma vez o denominador se anula em $x=1$. Mas, podemos escrever

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\cancel{x - 1}}{(\cancel{x - 1})(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}, \text{ logo,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

13 - EQUAÇÕES DO 1º GRAU

13.1 Equação do 1º grau a uma incógnita

É toda equação da forma $ax + b = 0$ com $a \neq 0$.

Resolver uma equação do 1º grau a uma incógnita consiste em determinar o valor, também chamado de raiz, que torna a proposição verdadeira.

Exemplo: Vamos determinar a raiz da equação $2x - 6 = 0$

Solução: É fácil observar que 3 é a solução da equação dada, pois substituindo x por 3, temos:

$$2 \cdot (3) - 6 = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

Toda equação do 1º grau a uma incógnita possui apenas uma solução.

Para resolver este tipo de equação, devemos basicamente isolar a incógnita no 1º membro e transferindo os termos que não tem incógnita para o segundo membro efetuando-se as operações inversas (adição e subtração; multiplicação e divisão). Vamos analisar alguns exemplos .

- $x + 3 = 8 \Rightarrow x + 3 - 3 = 8 - 3 \Rightarrow x = 5$
- $2x = 10 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$
- $\frac{x}{4} = 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot x}{4} = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 12$
- $-3x - 4 = 14 \Rightarrow -3x - 4 + 4 = 14 + 4 \Rightarrow -3x = 18 \Rightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{18}{-3} \Rightarrow x = -6$

13.2 Equação do 1º grau a duas incógnitas

É toda equação que pode ser reduzida a forma $ax + by = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Uma equação do 1º grau a duas incógnitas terá sua solução representada pelo par ordenado (x, y) , onde ao atribuir o valor a uma das incógnitas automaticamente será possível encontrar o valor da outra.

Exemplo: Vamos encontrar um par ordenado que sirva de solução para a equação $3x + 2y = 10$.

Solução: Fazendo $x = 2$, temos

$$3 \cdot 2 + 2y = 10 \Rightarrow 6 + 2y = 10 \Rightarrow 6 - 6 + 2y = 10 - 6 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2$$

Assim, um par ordenado que é solução da equação $3x + 2y = 10$ é $(2, 2)$.

É notório que estas equações possuem infinitas soluções.

Por exemplo, a equação $x + y = 5$ possui como umas de suas soluções os pares ordenados: $(1, 4); (2, 3); (0, 5); (-1, 6) \dots$

Mas como representar todas as soluções deste tipo de equação? A resposta está

em representar graficamente, o gráfico de uma equação do primeiro grau a duas incógnitas é uma reta onde todos os pontos desta reta são soluções da equação.

Exemplo: Vamos construir o gráfico da equação $y - 2x = -3$.

Para facilitar, podemos isolar o y na equação e atribuir valores a x de modo a encontrar os pares ordenados que nos fornecerão o gráfico, assim, temos

$$y - 2x = -3 \Rightarrow y = 2x - 3$$

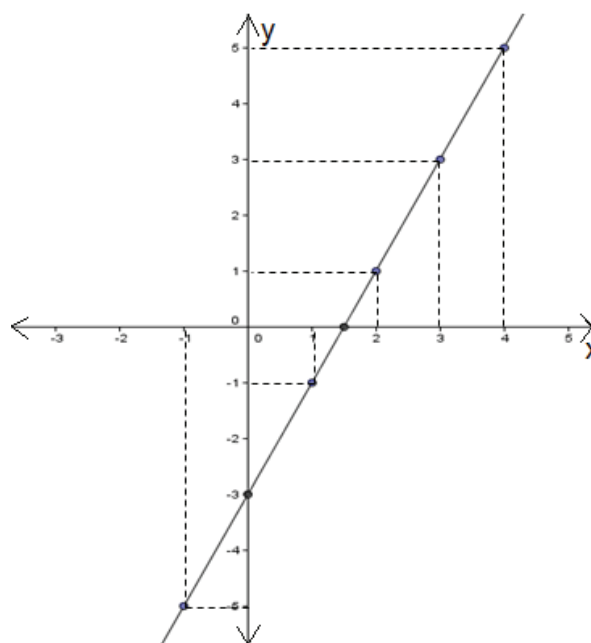
Essa notação nos lembra do estudo de função, onde $y = f(x)$. Na verdade estamos lidando com um tipo de função que é a função polinomial do 1º grau.

Figura 19 – Gráfico de $y - 2x = -3$

Tabela 8 – Tabela de valores para construção do gráfico de $y - 2x = -3$

x	y=2x-3	Par Ordenado (x,y)
-1	-5	(-1 ; -5)
0	-3	(0 ; -3)
1	-1	(1 ; -1)
1,5	0	(1,5 ; 0)
2	1	(2 ; 1)
3	3	(3 ; 3)
4	5	(4 ; 5)

Fonte: Elaboração própria



Fonte: Elaboração própria

De acordo com o gráfico podemos tirar algumas conclusões:

- O gráfico toca o eixo O_x no ponto $\frac{3}{2}$, ou seja, esta é a raiz da equação $y = 2x - 3$ quando $y = 0$.
- A inclinação do gráfico nos diz que esta função é crescente, onde a medida que se aumenta o valor de x maior será o de y . Isso ocorrerá sempre que na função $y = ax + b$, o coeficiente de x é positivo ($a > 0$).

14 - EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Equação do 2º grau com incógnita x é uma expressão que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

Podemos classificar as equações do 2º grau em completas e incompletas. Vejamos cada caso e sua forma de resolução.

14.1 Equações do 2º grau incompletas

Acontece quando na expressão $ax^2 + bx + c = 0$ temos uma das variáveis b ou c , ou as duas, iguais a zero.

Exemplo com $b = 0$ e $c = 0$ ($ax^2 = 0$)

$$2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ logo, } S = \{0\}$$

Exemplo com $c = 0$ ($ax^2 + bx = 0 \Rightarrow$)

$$3x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(3x - 9) = 0, \quad \text{aqui vamos separar em dois casos, já que temos uma multiplicação de dois fatores que é igual a zero.}$$

$$x(3x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 3x - 9 = 0 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \end{cases}, \text{ logo, } S = \{0, 3\}$$

Exemplo com $c = 0$ ($ax^2 + c = 0$)

$$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ e \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{logo, } S = \{-4; 4\}$$

14.2 Equação do 2º grau completa

A forma mais tradicional de se resolver uma equação do 2º grau completa é através do uso da fórmula resolutive.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação.

Analisando o discriminante Δ na fórmula, podemos concluir que:

- Se $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes reais e diferentes.
- Se $\Delta = 0$ a equação tem duas raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$ a equação não possui raízes reais.

Exemplo: Vamos achar as raízes da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Solução: Inicialmente devemos encontrar as variáveis a, b e c da equação dada. Podemos fazer isso comparando a forma geral da equação com a equação que queremos solucionar. E em seguida basta substituir os valores na fórmula e resolvê-la.

Comparando $x^2 - 6x + 8 = 0$ com $ax^2 + bx + c = 0$, temos

$$\begin{array}{ll} a = 1 & \Delta = b^2 - 4ac \\ b = -6 & \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 \\ c = 8 & \Delta = 36 - 32 \\ & \Delta = 4 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}, \text{ logo, } S = \{2; 4\}$$

14.3 Completando quadrados.

Uma outra forma de se resolver uma equação do 2º grau completa é conhecida como método de completar quadrados. Para realizar este método é preciso usar as técnicas de fatoração dos produtos notáveis. Vamos relembrar:

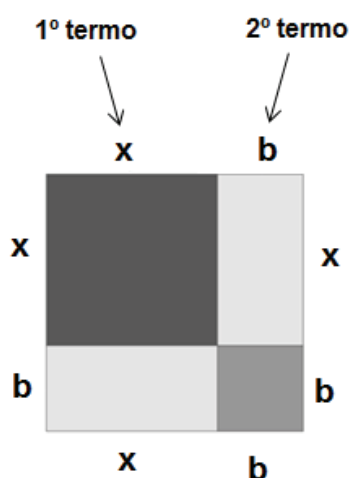
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Para facilitar o entendimento deste método, vamos resolver um exemplo observando seu desenvolvimento de forma geométrica.

Exemplo: Vamos achar as raízes da equação $x^2 + 10x + 9 = 0$ pelo método de completar quadrados.

Solução: Inicialmente vamos representar o trinômio $x^2 + 10x + c$ na forma geométrica, onde devemos encontrar o valor de c que faça com que ele se torne um trinômio quadrado perfeito. Vejamos na figura.

Figura 20 – Representação geométrica de $x^2 + 10x + c$



Sabemos que o termo central do trinômio quadrado perfeito é duas vezes o primeiro termo multiplicado pelo segundo, assim

$$10x = 2ab \Rightarrow 2.5.x = 2ab$$

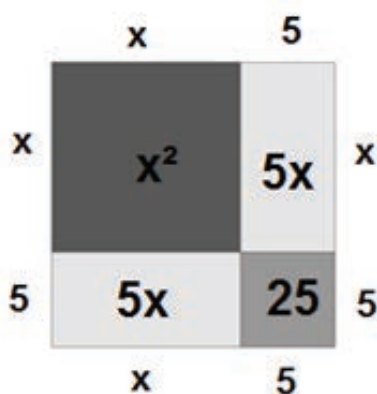
como x é o 1º termo, o segundo é 5,

$$\text{logo } b = 5.$$

Fonte: Elaboração própria

Vamos substituir b por 5 na figura e calcular a área de cada figura.

Figura 21 – Representação geométrica de $(x + 5)^2$



Fonte: Elaboração própria

A área total do quadrado de lado $(x + 5)$ é $x^2 + 10x + 25$.

Logo, para que o trinômio $x^2 + 10x + c$ seja um trinômio quadrado perfeito, é preciso ter $c = 25$. Assim,

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Então, para que o primeiro membro da equação $x^2 + 10x + 9 = 0$ se torne um trinômio quadrado perfeito, é preciso adicionar o número 16. Para equilibrar a equação vamos adicionar 16 nos dois membros.

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 9 &= 0 \\x^2 + 10x + 9 + 16 &= 0 + 16 \\x^2 + 10x + 25 &= 16 \\(x + 5)^2 &= 16\end{aligned}$$

Resolvendo a última equação temos:

$$x + 5 = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ x + 5 = -4 \Rightarrow x = -9 \end{cases}$$

CALCULANDO NO ENSINO SUPERIOR

Um dos conteúdos da disciplina Cálculo Diferencia e integral presente no ensino superior, é a integral de uma função, tal conteúdo foi criado originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano.

Dentro do estudo de Integral, existe um método chamado de decomposição de frações parciais, onde o método de completar quadrados se torna muito útil.

Exemplo: Vamos usar o método de completar quadrado para achar uma expressão equivalente a $x^2 + 4x + 2$.

Solução.

Repare que a expressão $x^2 + 4x + 2$ muito se assemelha ao quadrado da soma entre dois termos:

$$(x + 2)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Comparando os dois primeiros termos, temos

$$x^2 + 4x = 1x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x = a^2 + 2ab \rightarrow a = x \text{ e } b = 2,$$

logo o quadrado da soma seria

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Desta forma, podemos reescrever a expressão inicial como:

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 2 + 2 - 2 = x^2 + 4x + 4 - 2 = (x+2)^2 - 2$$

Repare que neste caso, não foi usado o método de completar quadrado a fim de se resolver uma equação, mas sim, como uma forma de achar uma outra expressão equivalente a dada.

14.4 Gráfico de uma equação do 2º grau

oque iremos ver de uma maneira discreta, é a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau ou função quadrática, que acontece quando igualamos uma equação do 2º grau a $f(x)$, então, $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que, a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

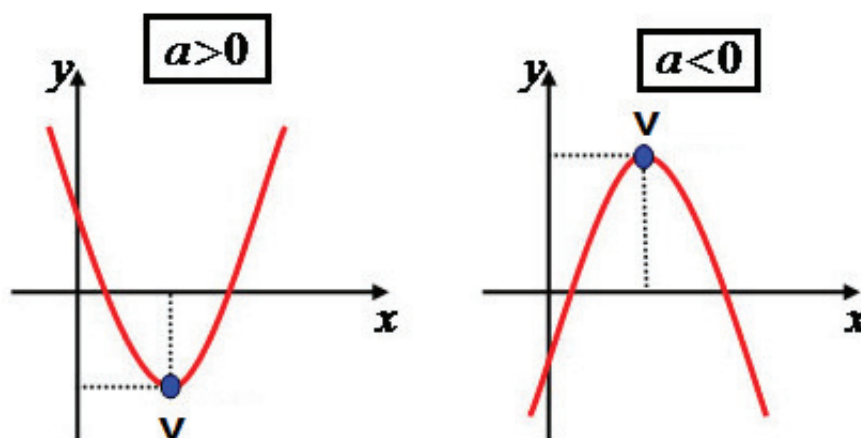
Para construir o gráfico de uma função quadrática, é preciso conhecer alguns elementos do gráfico que serão de grande ajuda. Vejamos:

1º) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Quando temos a variável $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo que chamaremos de V .

Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V .

Figura 22 – Concavidade da parábola



Fonte: <http://www.brasilecola.com/matematica/grafico-funcao.htm>

2º) As coordenadas do ponto de máximo e de mínimo da parábola, são $V = (X_v; Y_v)$ e são dadas pelas fórmulas:

$$X_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad Y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

3º) As raízes da equação indicam os pontos onde o gráfico toca o eixo O_x .

4º) Fazendo $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, então $(0; c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo O_y .

Com estas informações vamos construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Figura 23 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x - 5$

- Como $a > 0$, temos a concavidade voltada para cima.
- Resolvendo a equação achamos as raízes -1 e 5 .
- Como a concavidade está voltada para cima, temos um ponto de mínimo, onde

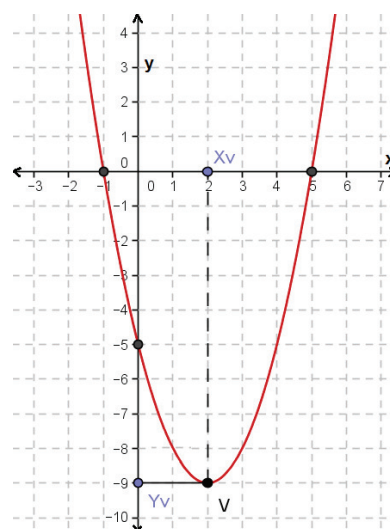
$$X_v = -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \quad \text{e}$$

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}{4 \cdot 1} = -9$$

ou seja, $V = (2; -9)$

- A interseção com o eixo y : $(0; c) = (0; -5)$.

Onde teremos o gráfico ao lado.



Fonte: Elaboração própria

Caso a equação tenha apenas uma raiz, $\Delta = 0$, a parábola tocará o eixo O_x apenas em um ponto que é ao mesmo tempo a raiz e o ponto de máximo ou mínimo.
 Caso a equação não possua raiz real, $\Delta < 0$, a parábola não tocará o eixo O_x .

O ponto de máximo de uma função quadrática é muito cobrado em provas de concursos e vestibulares, sendo necessário muitas das vezes calcular apenas o ponto Y_v que fornecerá o ponto máximo ou mínimo atingido pela parábola.

Exemplo: O lucro de uma fábrica na venda de determinado produto é dado pela função $L(x) = -3x^2 + 60x - 50$, onde x representa o número de produtos vendidos e $L(x)$ é o lucro em reais. Determine o lucro máximo obtido pela fábrica na venda desses produtos.

Figura 24 – Gráfico de $L(x) = -3x^2 + 60x - 50$ **Solução**

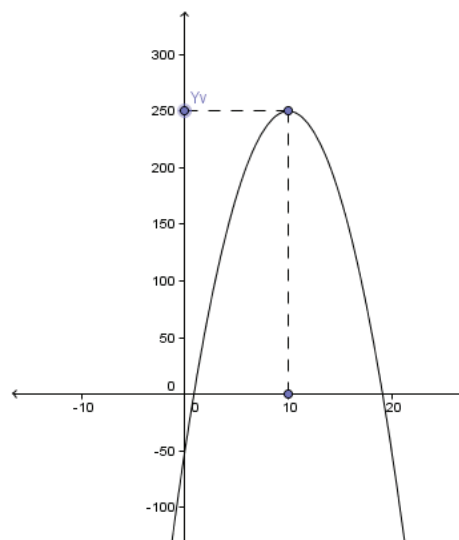
Temos que a função que determina o lucro $L(x) = -3x^2 + 60x - 50$, possui $a < 0$, logo, seu gráfico terá um ponto de máximo, pois, a parábola terá a concavidade voltada para baixo.

Portanto o lucro máximo será dado pelo ponto de máximo Y_v .

Assim, teremos:

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{60^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-50)}{4 \cdot (-3)} = 250$$

A figura ao lado ilustra o problema.



Fonte: Elaboração própria

CALCULANDO NO ENSINO SUPERIOR

Como vimos, achar o ponto de máximo de uma função quadrática, requer conhecer a fórmula do Y_v . No estudo de cálculo, pode-se achar tal ponto através de outro procedimento que envolve o cálculo da função derivada.

Vejamos o conceito da derivada de uma função polinomial que também é conhecida como regra do tobo.

Seja $f(x) = x^n$, então, sua função derivada denotada por $f'(x)$ será dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemplo: Vamos encontrar a função derivada de $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$.

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x^1 + 2x^0$$

Assim, a função derivada será:

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} - 1 \cdot 4x^{1-1} + 0 \cdot 2x^{0-1}$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 5x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 \cdot 2x^{-1}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 4$$

Lembre-se que todo número elevado a zero é igual a 1. Logo,

$$x^0 = 1$$

Ao derivar uma função quadrática e achar as raízes da função derivada, encontramos o ponto sobre o eixo O_x onde o gráfico da função atinge seu ponto de máximo ou mínimo, ou seja, achamos o X_v . Desta forma, para achar o Y_v , basta substituir o valor encontrado na equação original.

Exemplo: Vamos encontrar o ponto de máximo da função $f(x) = 10x - 5x^2$.

Solução

Sabemos que a função terá um ponto de máximo, pois, $a < 0$ (concavidade voltada para baixo)

Vamos encontrar a derivada de $f(x)$

$$f'(x) = 1 \cdot 10x^{1-1} - 2 \cdot 5x^{2-1}$$

$$f'(x) = 10x^0 - 10x^1$$

$$f'(x) = 10 - 10x$$

Achando a raiz de $f'(x)$, temos:

$$10 - 10x = 0 \Rightarrow -10x = -10 \Rightarrow x = 1, \text{ ou seja, } X_v = 1$$

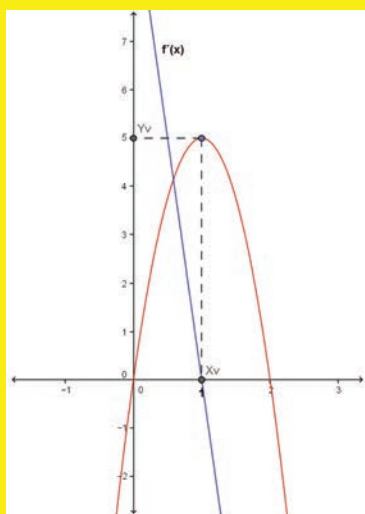
Para achar o Y_v , basta encontrar $f(1)$, assim:

$$f(1) = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 5$$

Logo, a função $f(x) = 10x - 5x^2$ possui como ponto de máximo $Y_v = 5$.

Vamos analisar esta função graficamente.

Figura 25 – Gráfico de $f(x) = 10x - 5x^2$



Fonte: Elaboração própria

APÊNDICE B

LISTA DE EXERCÍCIOS (VERSÃO DO ALUNO)

1) (PUC – RS – 2010) Pitágoras estabeleceu a seguinte relação entre as sete notas musicais e números racionais:

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Para encontrarmos o número $\frac{16}{27}$ relativo à nota LÁ, multiplicamos $\frac{2}{3}$ (o correspondente da nota SOL) por $\frac{8}{9}$. Assim, para obtermos $\frac{3}{4}$ (relativo à nota FÁ), devemos multiplicar $\frac{64}{81}$ (da nota MI) por:

- A) $\frac{8}{9}$
- B) $\frac{192}{324}$
- C) $\frac{9}{8}$
- D) $\frac{243}{256}$
- E) $\frac{256}{243}$

2) Sendo a e b números reais positivos, analise os cálculos abaixo, quanto a sua correção e indique quais das igualdades estão incorretas.

- A) 1,2,3,4,e 5

$$1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab} - 2ab}{a+b} = \frac{a+b-2ab}{a+b} = \frac{2(a+b)}{a+b} = 2$$

①
②
③
④
⑤

B) 1 e 3 apenas

C) 4 e 5 apenas

D) 1, 2 e 4 apenas

E) 2 e 4 apenas

3) Uma sequência numérica obedece a seguinte lei de formação $x_n = \frac{n^2 + n - 2}{n - 1}$, onde $n \in \mathbb{N}_+^*$. Desta forma a única afirmação falsa é:

A) O primeiro termo vale 0.

B) O décimo termo vale 12.

C) Todo termo de posição par é um número par.

D) O primeiro termo maior que 100 é o 99º termo.

E) Esta sequência é crescente.

4) (IFRJ – CEFET Química 2011/2012) Numa sociedade de informações, o computador trabalha agilizando os processos que muitas vezes podem ser modelados matematicamente. Para otimizar o tempo gasto em um processo, algumas vezes, o computador simplifica uma expressão matemática. Dessa maneira, é possível obter o resultado desejado, realizando menos operações. Simplificando a expressão $\frac{(x^4 - 6x^3 + 9x^2)(x + 3)}{x^4 - 9x^2}$, o valor numérico para $x=2011$ é igual a:

A) 2008

B) 2009

C) 2010

D) 2011

E) 2012

5) Um retângulo de lados x e y possui área igual a 24m^2 e perímetro igual a 16m . O valor numérico da expressão $4x^2y+4xy^2$ é:

A) 192

B) 384

C) 768

D) 960

E) 1536

6) Dados os polinômios: $p(x) = 5 - 2x + 3x^2$, $q(x) = 7 + x + x^2 - x^3$ e $r(x) = 1 - 3x + x^4$. O valor de $p(x) + r(x) - q(x)$ para $x = 2$ é:

a) 5

b) 19

c) 11

d) 24

e) 14

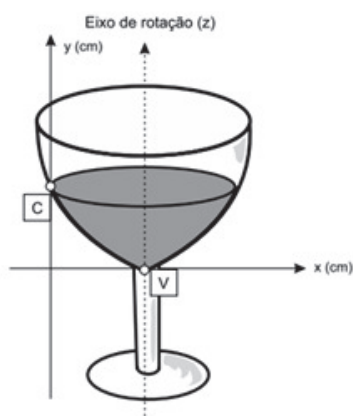
7) (ENEM - 2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t , em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$. Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a:

- A) 1,3 h
- B) 1,69 h
- C) 10,0 h
- D) 13,0 h
- E) 16,9 h

8) Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $C(x) = x^2 - 80x + 3000$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, então, a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e os valores desse custo mínimo são respectivamente:

- A) 20 e R\$2800,00
- B) 40 e R\$1400,00
- C) 50 e R\$5000,00
- D) 80 e R\$5600,00
- E) 140 e R\$4000,00

9) (ENEM – 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- A) 1
- B) 2
- C) 4
- D) 5
- E) 6

10) Um professor pediu a seus alunos para que construíssem uma figura plana cuja a área pudesse ser expressa pela função $A(x) = x^2 + 8x + 20$. Desta forma, podemos concluir que:

- A) não é possível construir um retângulo, onde cada lado possua medidas inteiras.
- B) pode-se construir um quadrado, onde cada lado possua medidas inteiras.
- C) podem-se construir dois quadrados lado a lado, onde cada lado dos dois quadrados possuam medidas inteiras.
- D) Para qualquer valor de x , sempre será possível construir retângulos onde cada lado possua medidas inteiras.
- E) Para qualquer valor de x , sempre será possível construir quadrados onde cada lado possua medidas inteiras.