TUANE GOMES DE OLIVEIRA FULY DE MATTOS

O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

06 de novembro de 2017

TUANE GOMES DE OLIVEIRA FULY DE MATTOS

O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Profª. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
06 de novembro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **04/2018**

Mattos, Tuane Gomes de Oliveira Fuly de
O estudo das funções polinomiais no ensino médio / Tuane Gomes de Oliveira Fuly de Mattos. – Campos dos Goytacazes, 2017.
112 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2017.
Orientador: Liliana Angelina León Mescua.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 93-95.
1. FUNÇÕES POLINOMIAIS 2. GeoGebra 3. INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticacas II. Título

CDD 515.55

TUANE GOMES DE OLIVEIRA FULY DE MATTOS

O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 06 de novembro de 2017.

Prof$^{\underline{a}}$. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFFluminense

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof$^{\underline{a}}$. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF

Prof$^{\underline{a}}$. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A Deus, a minha família e ao meu esposo Wallacy que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis da minha vida.

Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido força, coragem e sabedoria nos momentos mais difíceis do mestrado.

Ao meu esposo, Wallacy, por todo apoio e compreensão, principalmente compreendendo a minha ausência para os estudos.

À minha família, pelo apoio e compreensão durante todo o percurso desta caminhada.

Ao meu filho, Gabriel, que foi o meu incentivo e inspiração nos momentos conclusivos do mestrado.

Aos meus colegas do mestrado, pelos momentos agradáveis que passamos juntos, pela força e incentivo nos momentos mais difíceis.

Aos meus colegas Alice, Flávia, Liliane, Aline e Rogério pela amizade e pela constante ajuda durante o mestrado.

Aos professores do PROFMAT-UENF, por compartilharem seus conhecimentos e por nos auxiliarem nessa caminhada.

Ao Oscar Alfredo Paz La Torre, que coordena com excelência o curso de mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT-UENF, pela atenção, dedicação, profissionalismo, paciência e por sempre estar disposto a ajudar os seus discentes.

À Doutora Liliana Angelina León Mescua, pela grande orientação prestada, por confiar no meu trabalho, pela atenção, dedicação e apoio em todos os momentos dessa caminhada.

À sociedade Brasileira de Matemática-SBM, pelo oferecimento deste curso.

À UENF, pelo oferecimento deste curso.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e de Nível Superior-Capes, pela concessão da bolsa de estudos.

"A teoria sem a prática vira "verbalismo", assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade."

Paulo Freire

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo principal propor uma sequência de atividades que contribuam para a construção e o entendimento dos conceitos, propriedades e características das funções polinomiais, por meio da visualização e aplicação destas. Na elaboração das atividades, foi utilizada a metodologia de resolução de problemas aliada ao uso do GeoGebra, seja este em sua versão *software* ou aplicativo, de modo a facilitar a compreensão, a análise e a interpretação dos conceitos, visando, portanto, ao intuito de tornar a aula mais dinâmica. Uma dessas atividades está relacionada à Fórmula de Interpolação de Lagrange, para a construção de uma função polinomial que se encaixe em dados conhecidos a priori, visto que, na maioria dos problemas de engenharia e ciência, os dados obtidos a partir de uma amostragem ou experimento são pontuais. O público alvo deste estudo são os alunos da 3^a série do ensino médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro.

Palavras-chaves: Funções Polinomiais, GeoGebra, Interpolação de Lagrange.

Abstract

The work main goal proposes a sequence of activities that contribute to the construction and understanding of the concepts, polynomial functions' properties and characteristics, through the visualization and application of them. During the activities drafting, the problem solving methodology was used with the GeoGebra, being this last through the software or Mobile App, in order to make the understanding easier, the concepts analysis and interpretation aims to contribute to make a dynamics class. One of these activities is associated with the Lagrange's Interpolation Formula, making possible the construction of a polynomial function that suits to the known data, since the most engineering and science problems, the obtained data from a sampling or an experiment are exact. This work target audience are senior high school students from a public school in Rio de Janeiro.

Key-words: Polynomial Function, GeoGebra, Lagrange's Interpolation.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

EM	Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
RJ	Rio de Janeiro

Lista de símbolos

$-$	Subtração
$+$	Adição
$\div$	Divisão
$\times$	Multiplicação
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\rightarrow$	Implicação
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou Igual
$\geq$	Maior ou igual
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\sum$	Somatória
$\prod$	Produtório
$\nexists$	Não existe
$/$	Tal que

Sumário

Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 2002), o estudo das funções polinomiais é muito importante na formação do discente, visto que esse conteúdo está presente em diversas áreas do conhecimento, como em computação, engenharia, física e diversas outras áreas afins.

Durante cerca de quatro anos, ao atuar como professora de turmas do ensino médio, foi possível observar as dificuldades dos discentes em aulas tradicionais envolvendo os principais conceitos e aplicabilidade das funções polinomiais. O artigo 22 da LDB (BRASIL, 2011, p.17) diz: "a educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores".

Entre os principais problemas detectados, ao trabalhar com o ensino das funções polinomiais, está a dificuldade que os discentes possuem em assimilar os principais conceitos, definições, teoremas, representações gráficas e, consequentemente, a elaboração de estratégias para as resoluções de problemas. Outro fator que dificulta o processo de ensino é a maneira como esse conteúdo é abordado nos livros didáticos, como bem explica Nascimento (2015, p.11),

> Nos livros didáticos atuais, merecem uma atenção especial no sentido de que muitas vezes são inseridos nos mesmos uma série de definições, conceitos e exercícios os quais não estão bem concatenados, por vezes, fora de uma sequência lógica e de um contexto histórico, nos remetendo a um material didático meramente enciclopédico, o que vem dificultando o aprendizado do educando.

Ademais, segundo a pesquisa feita por Chaves e Carvalho (2004), o conteúdo funções, por inúmeras vezes, não é trabalhado de forma adequada por muitos docentes. Na maioria dos casos, esse conteúdo é aplicado de forma mecânica, fazendo com que os alunos não associem o assunto funções com à prática do seu cotidiano, assim como acontece no processo de ensino das funções polinomiais. No livro as Ideias da Álgebra, Coxford e Shulte (1995) ressaltam a falta de motivação dos alunos no processo de ensino aprendizagem das funções polinomiais, conforme evidencia o excerto:

> O que ocorre no ensino de álgebra em nível médio talvez seja uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, e isso, se de um lado pode produzir uma falsa sensação de facilidades, de outro pode produzir uma impressão muito forte de inutilidade, além de dar apenas uma ideia

> muito pálida e parcial da natureza e do alcance dessa matéria. (COXFORD; SHULTE, 1995, p.05)

O intuito de minimizar os problemas relatados assim como reduzir a dificuldade dos educandos em associar o tema aos problemas contextualizados serviram como motivação para o desenvolvimento desta pesquisa.

Assim, o objetivo principal deste estudo é propor uma sequência de atividades que contribuam para a construção e o entendimento dos conceitos, propriedades e características das funções polinomiais, por meio da visualização e de suas aplicações, tornando, dessa forma, as aulas mais atrativas e motivadoras para os alunos do ensino médio. Na elaboração das atividades, foi utilizada a metodologia de resolução de problemas, que pode ser encontrada nos trabalhos de Soares e Pinto (2001) e Zuffi e Onuchic (2007), privilegiando a contextualização do tema.

Com o intuito de tornar a aula mais dinâmica, assim como facilitar a compreensão, a análise e a interpretação dos conceitos, propriedades e aplicações das funções polinomiais, é sugerido o uso do GeoGebra, seja este em sua versão *software* ou aplicativo. Para mostrar a aplicabilidade, é introduzida a Fórmula de Interpolação de Lagrange, visto que a maioria dos problemas vinculados à engenharia e à ciência contêm, como ponto de partida, dados pontuais obtidos a partir de uma amostragem ou experimento, o que nos leva à construção de uma função polinomial que se encaixe nesses dados.

Os autores Silva (2016), Dierings (2014) e Becker (2014) propõem objetivos similares aos apresentados neste trabalho. Becker (2014) aborda, em seu estudo, os métodos de resolução das equações cúbicas e quárticas e a não solubilidade por radicais das equações de graus maiores ou iguais a cinco. Já na perspectiva de Dierings (2014), o ensino das funções polinomiais no ensino médio está voltada para o Ensino Superior. E na concepção de Silva (2016), a fórmula de Interpolação de Lagrange através da modelagem matemática deve estar em evidência. A principal diferença deste trabalho em relação aos citados é a construção do conceito de função polinomial a partir de problemas contextualizados, assim como a necessidade e a importância de seu estudo na solução de problemas.

Esta dissertação está dividida em capítulos, a saber:

O primeiro capítulo aborda o surgimento da álgebra e das funções. Relata um breve histórico da origem da matemática, do surgimento da álgebra e das funções e das evoluções destas ao longo do tempo.

O segundo capítulo descreve como o ensino das funções polinomiais no ensino médio é abordado do ponto de vista curricular pelos docentes das escolas públicas do estado do Rio de Janeiro. Expõe também os conteúdos que são tratados nos livros didáticos relativos ao tema. O capítulo contém também o referencial teórico das funções polinomiais, tais como definições, propriedades, teoremas e a construção de gráficos que estão presentes neste trabalho.

O terceiro capítulo justifica a metodologia de resolução de problemas aliada ao recurso tecnológico GeoGebra, adotado neste trabalho para o ensino das funções polinomiais. Aborda também as ferramentas e comandos do GeoGebra utilizados.

O quarto capítulo apresenta quatro atividades envolvendo funções polinomiais. As atividades têm como objetivo contextualizar e melhorar o entendimento dos conceitos e propriedades da função polinomial a partir de seus gráficos construídos no GeoGebra. Para salientar a importância dessas funções em problemas da vida real, é abordada a fórmula de Interpolação de Lagrange.

Finalmente, expõem-se as considerações finais, estabelecendo uma análise do que foi desenvolvido neste trabalho. Em seguida, encontram-se as referências bibliográficas e o apêndice, contendo nestes as fichas das atividades propostas.

Capítulo 1

O Surgimento da Álgebra e das Funções

1.1 A Origem da Matemática

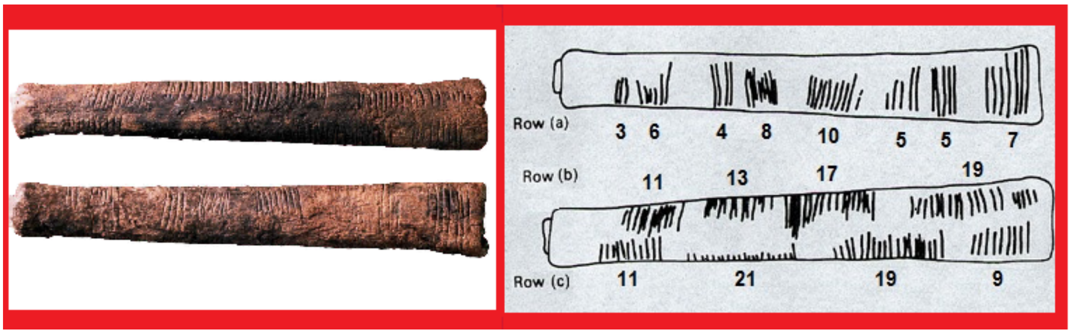
A matemática originou-se não só a partir das observações da natureza como também a contar das necessidades de que o homem tinha de distinguir as semelhanças entre os objetos. Segundo Boyer e Merzbach (1996, p. 01),"a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da sobrevivência dos mais aptos à persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos".

Por conseguinte, a necessidade de contar os objetos impulsionou o surgimento das primeiras bases numéricas nas antigas civilizações que, a princípio, para contar os objetos ou animais, utilizavam os dedos das mãos. E quando estes não eram suficientes para associar os elementos aos mesmos, valiam-se também dos dedos dos pés. Todavia, se houvesse uma quantidade muito grande de elementos que não fossem compatíveis com a quantidade de dedos das mãos e dos pés, recorriam a montes de pedras ou até mesmo a grãos para representar os elementos de um determinado conjunto (BOYER; MERZBACH, 1996).

Contudo, a utilização de pedras na representação de elementos de determinados conjuntos não configurava uma maneira prática de conservar as informações. Foi a partir dessa dificuldade que os homens pré-históricos registravam a quantidade dos elementos, fazendo marcas em pedaços de ossos ou em bastões. Não se têm muitos registros, mas foi encontrado, na região de Ishango, um osso da fíbula de um babuíno com essas marcas (Figura 1) (MOL, 2013). Esses registros nos mostram que a ideia de números é muito mais antiga que muitas outras descobertas das civilizações primitivas.

Para Boyer e Merzbach (1996, p. 03), "o homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato".

Figura 1 – Osso de Ishango



Fonte: Site Matemática Fácil - (SANTOS, 2016)

Disponível em:
<http://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html>

A origem dos números foi, portanto, um processo muito lento na história da matemática, até porque usar sinais como, por exemplo, gravuras em ossos e bastões, é uma maneira muito mais fácil para representar os elementos de um determinado conjunto do que fazer uma frase para identificar os números, (BOYER; MERZBACH, 1996).

Segundo Mol (2013, p. 16), “todos esses primeiros ensaios no universo numérico, que resultaram em métodos de contagem, prepararam terreno para que a matemática surgisse como campo de conhecimento. Isso aconteceria somente com as primeiras civilizações, na Mesopotâmia e no Egito”.

1.2 Surgimento da Álgebra

Precipuamente, a álgebra teve seu início a partir da descoberta da escrita. Ademais, seus primeiros registros foram resoluções de equações. Os problemas, entretanto, até então, eram apenas com a utilização de objetos concretos, específicos como, por exemplo, grãos e animais, que exigiam operações com números conhecidos. Já com o surgimento da álgebra, os problemas eram com números desconhecidos (BOYER; MERZBACH, 1996).

Os primeiros registros encontrados foram problemas matemáticos com resoluções de equações nas tabuletas de argila da suméria e nos papiros egípcios. Esses registros foram datados por volta do ano de 1650 a.C. O papiro Rhind, por exemplo, no qual se encontram soluções de equações de problemas do cotidiano do comércio e problemas sobre a distribuição de mercadorias, constitui excelente documento de comprovação de tais registros (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

Os problemas egípcios foram muito mais além do que apenas aritméticos, em virtude de terem representado a descoberta de números desconhecidos. Assim, soluções de equações lineares foram surgindo, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$ onde a, b e c

são conhecidos e x é desconhecido. Os egípcios chamavam essa incógnita de “aha”.

Enfim, problemas dessa forma foram surgindo e os métodos de resolução eram os mais variados, como o método da falsa posição, em que se assumia um valor falso para “aha”, efetuavam-se as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade sobre esse suposto número e comparava-se esse resultado com o resultado que se pretendia. Usando proporção, chegava-se à resposta correta. Outros métodos também eram usados pelos antigos egípcios como, por exemplo, a fatoração dos membros da equação (BOYER; MERZBACH, 1996).

Vários problemas envolvendo o cálculo de “aha” eram atividades para os estudantes egípcios exercitarem a matemática, mas segundo Boyer e Merzbach (1996, p. 11), “embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas.”

Na Mesopotâmia, registros de problemas algébricos também foram encontrados, até mais complexos do que os egípcios. Além das resoluções de equações lineares, os babilônios já sabiam resolver equações quadráticas com três termos. Segundo Boyer e Merzbach (1996, p. 21), “a solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Neugebauer, em 1930, revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios.”

O grau de flexibilidade da álgebra mesopotâmia era inacreditável. A superioridade dos babilônios em matemática pode ser explicada através dos métodos adotados na resolução de problemas matemáticos de uma equação de grau 2. Segundo Boyer e Merzbach (1996, p. 23), “a solução de equações quadráticas e cúbicas na Mesopotâmia é um fato notável, admirável não tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos.”

Embora muitas descobertas tenham sido feitas na matemática pré-helênica, os papiros e tabletas encontrados continham apenas problemas e casos específicos, sem formulações gerais para tais conceitos. Em estudos posteriores, foi possível comprovar, através de achados, a existência de centenas de problemas semelhantes, que eram resolvidos de acordo com regras ou métodos aceitos. Esses achados seriam as primeiras descobertas de generalização de regras e métodos para a resolução de problemas (MOL, 2013).

A álgebra, até o momento, ainda não era tão abstrata, pois a maioria das soluções de problemas encontrados eram referentes a casos concretos ou a problemas que retratavam o dia a dia. A matemática pré-helênica era naturalmente prática, mas não toda ela. Para Boyer e Merzbach (1996, p. 29), “na prática de cálculos, que se estendeu por um par de milênios, as escolas de escribas usaram muito material de exercícios, frequentemente, talvez, como puro divertimento.”

Para Mol (2013, p. 29),

> A matemática, tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, tinha caráter concreto e prático. Na Grécia, ela passou a ser essencialmente abstrata, com certa independência em relação às aplicações práticas. As demonstrações, instrumentos para garantir a validade dos resultados por argumentação puramente racional, foram introduzidas como parte fundamental de sua estrutura. Os gregos remodelaram a matemática e introduziram elementos que viriam a orientar a evolução dessa ciência pelos séculos seguintes da história humana.

Alguns métodos de resolução de equações do 2^o grau já eram conhecidos. O matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarismi introduziu novos símbolos algébricos, melhorando o que foi desenvolvido pelos árabes. Ele e Bháskara utilizavam praticamente o mesmo método para resolver equações. Logo, o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, foi alvo de estudo de muitos matemáticos ao longo do tempo (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções de equações Algébricas de terceiro e quarto grau. Gerolamo Cardano foi o mais importante Algebrista da época. Ele e Nicollo Fontana, conhecidos, envolveram-se em uma das mais interessantes histórias da rivalidade da matemática, como Tartaglia envolvendo a solução de equações cúbicas (MOL, 2013).

Foi somente a partir do século XIX que os conceitos foram formalizados de modo mais preciso. Os autores passaram a não se restringirem somente às operações numéricas, mas se preocuparam mais com as propriedades que essas operações verificavam. Silva (2016, p. 05) ratifica essa mudança no seguimento:

> A passagem da Álgebra clássica para a assim chamada Álgebra abstrata foi um processo sumamente interessante. Representa não somente um progresso quanto aos conteúdos técnico-científicos da disciplina, como amplia consideravelmente o seu campo de aplicação e, o que é mais importante, implica, num certo sentido, numa mudança na própria concepção do que a matemática é, da compreensão de sua condição de ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho.

1.3 Um Breve Histórico do Surgimento das Funções

Os conceitos de função e função polinomial especificamente foram-se construindo no decorrer do tempo por vários matemáticos, desde as antigas civilizações, como a dos sumérios, babilônios e egípcios, por exemplo. Não se tem ideia exatamente de quando surgiu de fato a definição de função polinomial, todavia se sabe, portanto, que este conceito foi se desenvolvendo ao longo dos séculos, a partir dos estudos de outros grandes matemáticos, além dos já citados até aqui, através das resoluções de equações algébricas, em que havia uma dependência entre duas grandezas. (ZUFFI, 2001).

Um dos primeiros registros encontrados que nos propiciaram a ideia de função foram as tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, entre outros, construídas pelos Babilônios. Além dos babilônios, os egípcios também representaram, em tabelas de argila, generalizações que resolviam alguns problemas dos mais simples até os mais complexos (SA; SOUZA; SILVA, 2003).

Já na Idade Moderna, o primeiro conceito de função partiu de Oresme (1323 - 1382). Ele representou graficamente uma relação entre velocidade e tempo, utilizando linhas longitudinais para representar a velocidade e latitudinais a fim de simbolizar o tempo. Ao ligar essas perpendiculares, obteve pontos que, ligados, formavam uma reta que descreve o movimento de um corpo com aceleração constante que parte do repouso. Para Boyer e Merzbach (1996, p. 181), "os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa".

Ainda segundo Boyer e Merzbach (1996, p. 181), sobre a representação gráfica de funções:

> A representação gráfica de funções, conhecida então como latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu. [...] Oresme chegou a sugerir uma extensão a três dimensões de sua "latitude de formas" em que uma função de duas variáveis independentes era representada como um volume formado de todas as ordenadas segundo uma regra dada, em pontos no plano de referência.

Outrossim, Galileu Galilei (1564-1642), tentando explicar os fenômenos da natureza através da matemática, também modelava as funções a partir de grandezas físicas que uma variável dependia da outra. René Descartes (1596-1650) notabilizou-se também ao estabelecer uma relação de dependência entre duas variáveis, x e y, resultando, por meio de cálculos, uma variável a partir da outra (CHAVES; CARVALHO, 2004).

Contudo, as as primeiras definições para a construção do conceito de funções, que são utilizadas até hoje, surgiram através dos trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gott Fried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Algum tempo depois, Jean Bernoulli (1667-1748) adota a nomenclatura de Leibniz para a função de x. Mais tarde, ele fez a distinção entre a função e o valor desta e a considerou como uma expressão formada de uma variável e algumas constantes. Essa foi, portanto, a primeira definição de função (BOYER; MERZBACH, 1996).

Leonard Euler (1707-1783), aluno de Bernoulli, expandiu muito o desenvolvimento do conceito de função. Os seus estudos trouxeram muitas contribuições para a linguagem simbólica e notações das funções, que são utilizadas até hoje, e criou a notação $f(x)$, que atualmente é de utilização universal para expressar a lei de uma função. Além disso, ele também definiu as funções no sentido analítico (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

igualmente, outros matemáticos como, por exemplo, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), também contribuíram muito para o aperfeiçoamento da definição da função. Inclusive, em um de seus trabalhos, Dirichlet deu origem ao conceito de função, que é conhecido hoje (CHAVES; CARVALHO, 2004) e (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente de x, (BOYER, 1989, p. 405).

Desse modo, o conceito de função evoluiu muito no processo histórico da construção do conhecimento matemático. Essa evolução propiciou suporte para o aprimoramento da matemática e de outras áreas afins, ao longo do tempo. Logo, compreender o conceito de função é muito importante, visto que existem vários tipos de funções como afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas e polinomiais. Neste trabalho, vamos apresentar de forma mais detalhada as funções polinomiais.

Capítulo 2

O Ensino das Funções Polinomiais no Ensino Médio

No decorrer dos anos, como docente em turmas de Ensino Médio e Superior, tenho observado a dificuldade e, às vezes, o desconhecimento por parte dos discentes no momento de relacionar as funções polinomiais e seus conceitos a problemas contextualizados. Nesse ínterim, pude constatar que, na maioria das vezes, os discentes têm a impressão de que o assunto trabalhado é um apanhado de fórmulas que não têm relação com o que os rodeia. Surge, assim, a necessidade da intervenção do professor a fim de auxiliar o aluno não só a relembrar os conceitos e propriedades como também os relacionar a curvas que descrevem problemas da física, engenharia, economia, entre outros.

Com o propósito de encontrar as possíveis causas desse problema, deparamo-nos com os trabalhos de Gil e Portanova (2007) e Chaves e Carvalho (2004), os quais apontam que o alto índice de dificuldade dos educandos em temas relacionados à álgebra no Ensino Médio está relacionado, muitas vezes, à falta de alguns conhecimentos prévios. Neste caso, esta tese não deveria ser considerada, visto que todos os temas prévios ao estudo de funções polinomiais são especificados na grade curricular dos alunos das escolas estaduais do RJ, como veremos na seção seguinte.

2.1 Visão Curricular

Nas escolas estaduais do Estado do Rio de Janeiro, o tema funções polinomiais é tratado especificamente no quarto bimestre da 3^a série do ensino médio (EM), embora casos especiais de tais funções, como a função afim e a função quadrática, sejam abordados na 1^a série do EM e revisados na disciplina Resolução de Problemas Matemáticos, oferecida na 2^a série do EM, na qual os alunos deverão resolver problemas significativos envolvendo a interpretação gráfica da função polinomial do 1^o e 2^o grau.

Segundo o Currículo Mínimo do Ensino Fundamental e Médio do Estado do Rio de

Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2011), os alunos, ao chegarem a 3^a série do EM, deveriam apresentar a capacidade de compreender os conceitos de funções e funções polinomiais, assim como associar tais estudos ao que estão apreendendo, visto que os conteúdos essenciais para a aprendizagem de funções polinomiais são aplicados aos estudantes em anos de escolaridade anteriores. Veja-se Quadro 1.

Quadro 1 – Currículo Mínimo para o Ensino Fundamental e Médio

Ano Escolar	Conteúdo
7^o ano do Ensino Fundamental	Equação do 1^o grau
8^o ano do Ensino Fundamental	Polinômios e Fatoração
9^o ano do Ensino Fundamental	Equação do 2^o grau e Funções
1^a série do Ensino Médio	Funções, Função do 1^o grau e Função do 2^o grau
2^a série do Ensino Médio	Revisão de Função do 1^o grau e Função do 2^o grau
3^a série do Ensino Médio	Funções Polinomiais e Equações Algébricas

Fonte:Autoria Própria

Lamentavelmente, muitas vezes, esses conteúdos são trabalhados de modo superficial, de forma que os alunos apenas memorizem técnicas de resolução sem entender, em sua totalidade, os principais conceitos e a aplicabilidade de tal assunto. Carvalho (2015), em seu trabalho, ressalta a relevância do estudo das funções polinomiais nos primeiros anos da faculdade nas áreas exatas dos discentes. O autor reitera a importância desse conteúdo fundamental para o sucesso em disciplinas como cálculo, geometria analítica e álgebra linear em faculdades da área de ciência e tecnologia.

> A relação da Matemática escolar com a Matemática da vida cotidiana do aluno tem um papel importante no processo de ensino-aprendizagem. Assuntos abordados em sala de aula, na maioria das vezes, são distantes da realidade dos alunos, deixando de lado o que na verdade poderia motivá-los (SILVA, 2016, p.03).

De acordo com o que explicita o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro sobre o conteúdo a ser trabalhado na 3^a série durante o 4^o bimestre do ano letivo, as habilidades e competências a serem aplicadas acerca de Polinômios e Equações Algébricas são elencadas da seguinte forma: identificar e determinar o grau de um polinômio; calcular o valor numérico de um polinômio; efetuar operações com polinômios; utilizar o teorema do resto para resolver problemas; utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios; resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da Decomposição; representar graficamente uma função polinomial e utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais (RIO DE JANEIRO, 2011).

Esses tópicos são fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Ao trabalhar com esses conceitos, diversos professores os abordam de maneira pouco significativa e superficial, fazendo com que, muitas vezes, os alunos se desinteressem por tais conteúdos e não os associem à prática. Assim, o processo de ensino é tão mecânico que os alunos simplesmente memorizam métodos de resolução sem ao menos entender sua importância, assim como também não se tornam capazes de relacionar os conceitos matemáticos à sua aplicabilidade.

> Situações contextualizadas que despertem o interesse do aluno, ou de um grupo de alunos, carecem de um estudo mais aprofundado, com algumas variáveis a considerar. Em geral, não é algo global nem atemporal. Talvez, por esse motivo, os livros didáticos não estão sendo eficientes. Evidentemente, nem sempre é possível e/ou conveniente, no ensino da matemática, trabalhar de forma contextualizada, explorando o cotidiano do aluno (SILVA, 2016, p. 03).

Outro aspecto importante a considerar diz respeito à abordagem desses conteúdos nos livros didáticos. Para essa análise, foram consultados alguns dos livros disponibilizados para uso no Ensino Médio, nas escolas públicas do estado do RJ, sugeridos no PNLD (2015), entre eles: Matemática Ciência e Aplicação (IEZZI et al., 2013)(Livro 1), Novo Olhar Matemática (SOUZA, 2013)(Livro 2) e Matemática Contexto e Aplicações (DANTE, 2014)(Livro 3). No quadro 2, mencionamos o conteúdo sugerido sobre funções polinomiais pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002).

Quadro 2 – Análise dos Livros Didáticos

Conteúdos	livro 1	livro 2	livro 3
Definição	X	X	X
Polinômio Nulo	X	X	X
Valor Numérico	X	X	X
Raiz	X	X	X
Polinômios iguais	X	X	X
Operações com os Polinômios	X	X	X
Teorema do Resto	X	X	X
Briot-Ruffini	X	X	X
Gráficos			X

Fonte:Autoria Própria

Com base no quadro 2, pode-se perceber que o único livro que aborda a análise gráfica das funções polinomiais é o livro 3, no entanto, expondo de forma superficial a construção e análise dos gráficos. Vale salientar que o autor desse livro aborda tão somente a construção e análise dos gráficos através do recurso computacional GeoGebra.

Ao Analisar esses livros, pode-se perceber que seus autores dão muita ênfase às operações com as funções polinomiais, ressaltando principalmente a divisão das funções polinomiais pelo método da chave, Briot-Ruffini, um dos métodos mais comuns com divisão por $(x-a)$ e o teorema do resto. Esses livros abordam, em demasia, técnicas e manipulações algébricas sem ao menos contextualizar os conteúdos a serem abordados. Interessante também que em um capítulo separado, denominado Equações Algébricas, são abordados o Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema da Decomposição, Relações de Girard, Raízes Complexas e Teorema das Raízes Racionais. Geralmente, a determinação de raízes das funções polinomiais é feita pela relação de Girard e pela pesquisa das raízes racionais.

Um conteúdo que praticamente nenhum livro didático adotado pela rede pública estadual contém é a construção, análise e pesquisa de raízes através dos gráficos. Sabe-se, entretanto, que o estudo dos gráficos das funções polinomiais é de grande relevância para o processo de ensino aprendizagem dos alunos, até porque, no Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2011), esse é um dos tópicos sugeridos a serem ensinados.

Destarte, o que poderia ser utilizado por muitos professores no processo de ensino dos gráficos são os recursos computacionais. Através desse auxílio, os alunos alcançarão uma melhor interpretação dos resultados das funções, assim como descobrirão mais facilmente a localização das raízes racionais. A esse respeito, Brandt e Montorfano (2008, p. 18) destacam que:

> O uso das novas tecnologias poderá trazer significativas contribuições para se repensar o processo de ensino, à medida que auxiliam na construção do conhecimento. Nesse sentido, os programas computacionais (*softwares*) educativos apresentam inúmeras capacidades funcionais que poderão ser reconhecidas e aproveitadas por professores e alunos para obter resultados eficientes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Paralelamente a essa consideração, Medina e Leineker (2014, p. 02), corroboram a concepção de que o uso do *software* GeoGebra no ensino das funções "possibilita ao aluno construir, manipular, avaliar e, com isso, fazer conjecturas, compreendendo melhor os conceitos que envolvem o estudo de funções e sua aplicação nas diferentes situações postas no dia a dia".

2.2 Referencial Teórico

Definição 2.1. *De acordo com Lima et al. (2001, p. 161): $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números $a_0, a_1, ..., a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0. \tag{2.1}$$

Se $a_n \neq 0$, diremos que a função polinomial é de grau n.

Onde,

a) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *são números reais, chamados coeficientes do polinômio;*

b) $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ *são os termos;*

c) a_0 *é o termo independente de* x*;*

d) x *é um símbolo (chamado indeterminada), sendo* $x^i = x.x.....x$ *(i fatores).*

e) *O polinômio* $f(x)$ *é o mesmo que a lista ordenada de seus coeficientes:*

$f(x) = (a_0, a_1, ..., a_n)$

Quando os coeficientes $(a_0, a_1, ..., a_n)$ são números reais, cada polinômio determina uma função polinomial. Assim, nesse caso, não há necessidade de fazer distinção entre polinômios e funções polinomiais (BORTOLOSSI, 2011).

Exemplo 2.1. *Exemplos de funções polinomiais:*

- $f(x) = -2x + 2$, *função polinomial de grau* 1*;*
- $f(x) = x^2 - 3x - 4$, *função polinomial de grau* 2*;*
- $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 1$, *função polinomial de grau* 3*;*
- $f(x) = -8$, *função polinomial de grau* 0, *pois* $f(x) = -8 = -8x^0$.

2.2.1 Função Polinomial Nula

Definição 2.2. *Uma função polinomial é identicamente nula quando todos os seus coeficientes são iguais a zero, ou seja,* $a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0$*. Denotamos* $f(x) = 0$.

Como todos os seus coeficientes são nulos, a função polinomial não possui grau. Assim, a função polinomial identicamente nula é do tipo:

$$f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0. \tag{2.2}$$

2.2.2 Valor Numérico de uma Função polinomial

Definição 2.3. *O valor numérico de um polinômio* $f(x)$ *em* $x = a$ *é encontrado substituindo o valor de* x *por* a *e efetuando todas as operações indicadas na expressão.*

Exemplo 2.2. *Se* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$*, o valor numérico de* $f(x)$*, para* $x = 2$ *é:*

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 4 \\ &= 8 + 8 - 10 + 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Logo, 10 é o valor numérico de $f(x)$ para $x = 2$. O valor numérico de $f(x)$, para $x = 2$, é a imagem do 2 pela função $f(x)$.

2.2.3 Raiz de uma Função Polinomial

Definição 2.4. *Se $f(a) = 0$, então a é chamado raiz ou zero da função $f(x)$, então*

$$f(x) = (x - a)q(x) \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, a é raiz de f se, e somente se, $f(x)$ é divisível por $(x - a)$. Uma função polinomial de grau n possui no máximo n raízes. Se $\alpha_1, ..., \alpha_k$ são raízes de f se, e somente se, $\forall x \in \mathbb{R}$ vale:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_k)q(x), \tag{2.4}$$

onde q é uma função polinomial de grau $n - k$, se f tem grau n.

Exemplo 2.3. *A função polinomial $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$ pode ser escrita da forma $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 5)$, de onde segue que $f(-1) = f(1) = f(2) = f(5) = 0$. Consequentemente, os zeros de f são $-1,\ 1,\ 2,\ 5$.*

2.2.4 Funções Polinomiais Iguais

Definição 2.5. *Duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ definidas respectivamente por:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \qquad g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

São chamadas funções polinomiais iguais, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, os coeficientes dos termos de mesmo grau forem iguais, isto é:

$$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ a_{n-2} = b_{n-2}, \ldots,\ a_2 = b_2,\ a_1 = b_1 \text{ e } a_0 = b_0.$$

Observação 2.1. *Se $f(x) = g(x)$, os seus valores numéricos são iguais para qualquer valor de x e, reciprocamente, se $f(x)$ e $g(x)$ possuem valores numéricos iguais para qualquer valor de x, então $f(x) = g(x)$.*

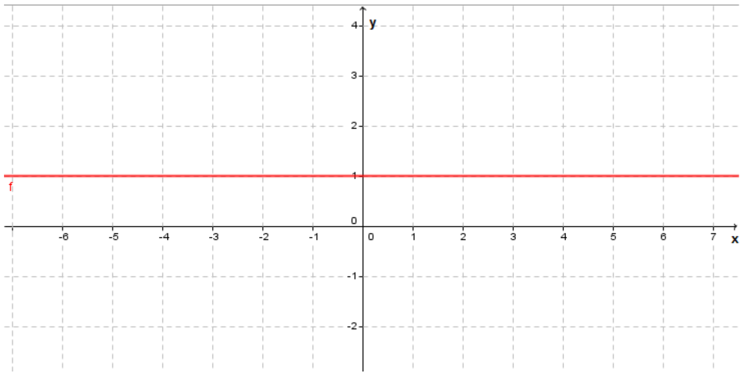
2.2.5 Gráficos de Polinômios

Definição 2.6. *De acordo com Munem e Foulies (1982, p. 21), "o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no plano xy tal que x pertence ao domínio de f e y a imagem de f, e $y = f(x)$".*

As funções polinomiais não nulas de grau zero, da forma $f(x) = a_0$, são chamadas de função constante, pois seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abcissas (eixo x) que corta o eixo y no ponto de coordenada $(0, a_0)$.

Exemplo 2.4. *Função polinomial de grau 0,* $f(x) = 1$*:*

Figura 2 – Função:$f(x) = 1$



Fonte: Autoria Própria

As funções polinomiais da forma $f(x) = a_1x + a_0$, onde $a_1 \neq 0$, são chamadas de função afim, pois são funções polinomiais de grau 1. O seu gráfico é uma reta com coeficiente angular igual a a_1 e corta o eixo y em a_0.

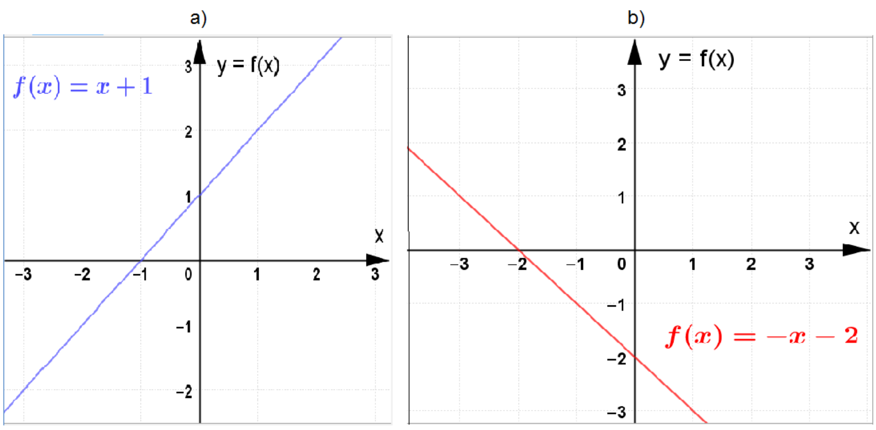
Os gráficos das funções de grau 1 são retas. No caso de $a_1 > 0$, a reta é crescente; e se $a_1 < 0$, a reta será decrescente.

Exemplo 2.5. *Os coeficientes angulares das funções polinomiais de grau* 1*:*

a) $f(x) = x + 1$ *é* $a_1 = 1 > 0$

b) $f(x) = -x - 2$ *é* $a_1 = -1 < 0$

Figura 3 – Exemplo 2.5



Fonte: Autoria Própria

Na figura 3, verificamos que o gráfico do item a) é uma reta crescente e o gráfico do item b), uma reta decrescente.

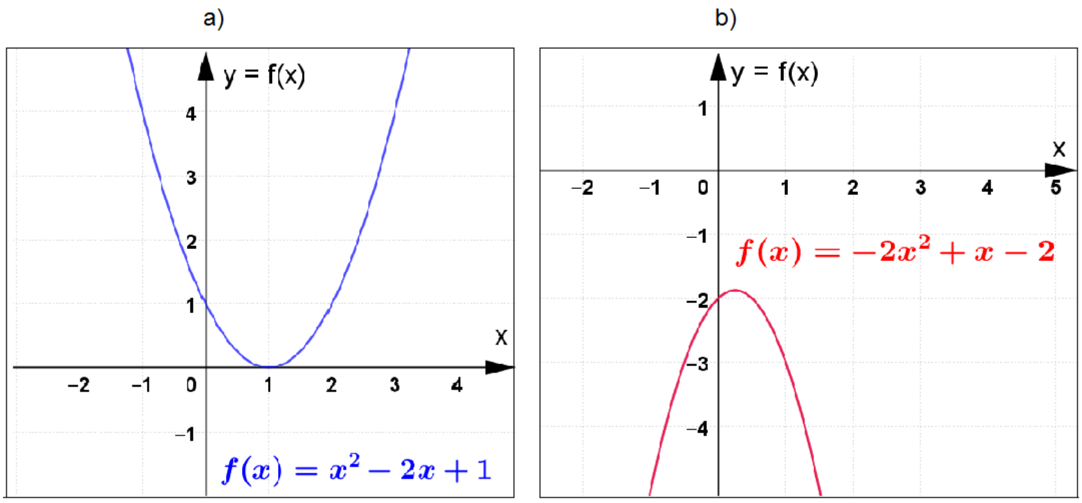
As funções polinomiais de grau 2 são da forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde $a_2 \neq 0$. O seu gráfico é uma parábola, que corta o eixo y em a_0 e tem concavidade voltada para cima se $a_2 > 0$, conforme mostra o gráfico da figura 4-a), e concavidade voltada para baixo se $a_2 < 0$, conforme mostra o gráfico da figura 4-b.

Exemplo 2.6. *Função polinomial de grau 2:*

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + x - 2$

Figura 4 – Exemplo 2.6



Fonte: Autoria Própria

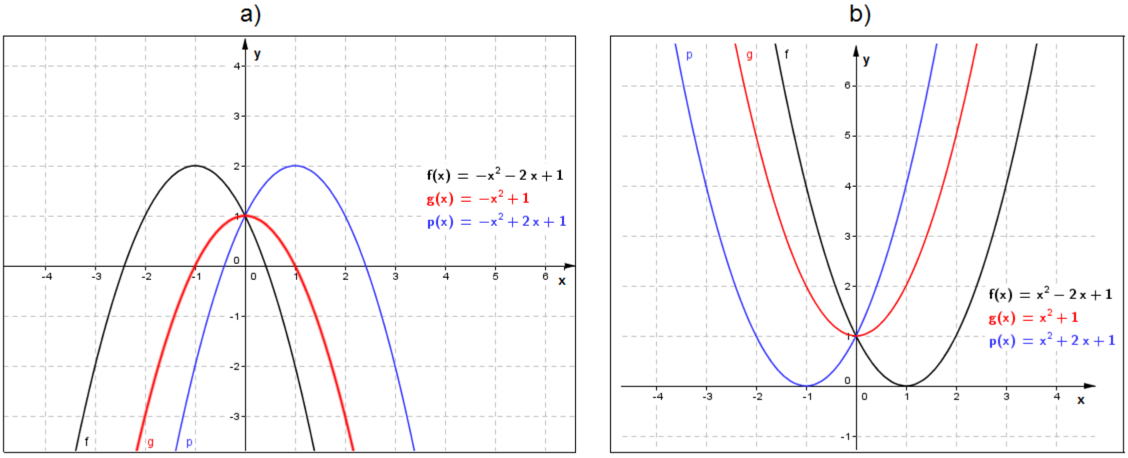
Outro fator importante em relação ao gráfico de uma função polinomial de grau 2 está relacionada ao coeficiente a_1. Se $a_1 < 0$, o gráfico vai cortar o eixo y no ramo decrescente da parábola, se $a_1 > 0$, o gráfico vai cortar o eixo y no ramo crescente da parábola e se $a_1 = 0$, o gráfico vai cortar o eixo y no vértice da parábola. Referente a isso, podemos verificar os gráficos da Figura 5 do exemplo 2.7:

Exemplo 2.7. *Gráficos de Funções polinomiais de grau 2:*

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -x^2 + 1$ *e* $p(x) = -x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ *e* $p(x) = x^2 + 2x + 1$

Figura 5 – Exemplo 2.7

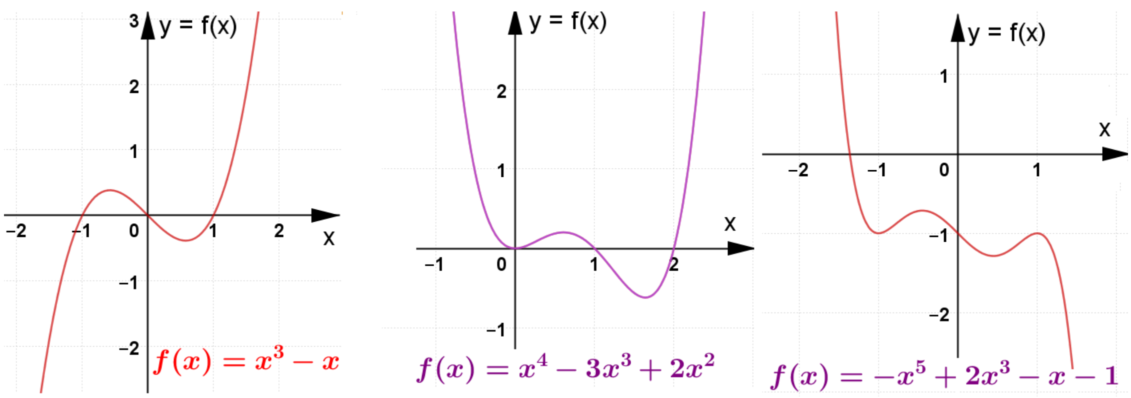


Fonte: Autoria Própria

Quanto maior for o grau da função polinomial, mais complexo torna-se o gráfico. Traçar gráficos com graus mais elevados localizando apenas alguns pontos escolhidos e ligando os mesmos por uma curva contínua, nem sempre traz resultado, visto que é necessário o conhecimento da forma de tais gráficos entre os pontos escolhidos. Assim sendo, o *software* GeoGegra é um recurso muito importante para auxiliar na construção desses gráficos de funções de grau mais elevados.

A seguir, na figura 6, vemos os gráficos de funções polinomiais de grau 3, grau 4 e grau 5, respectivamente.

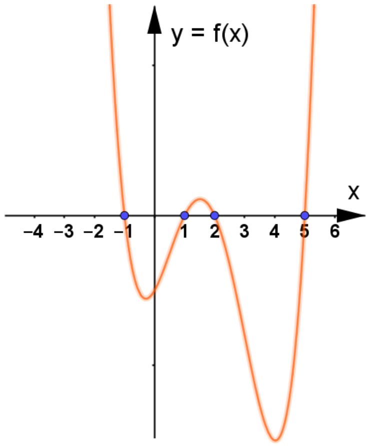
Figura 6 – Exemplos de Gráficos de Funções Polinomiais



Fonte: Autoria Própria

Note que encontrar os zeros da função dada no Exemplo 2.3 equivale a encontrar os pontos onde o gráfico intersecta o eixo x.

Figura 7 – Zeros da função f: $-1,\ 1,\ 2,\ 5$



$f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$

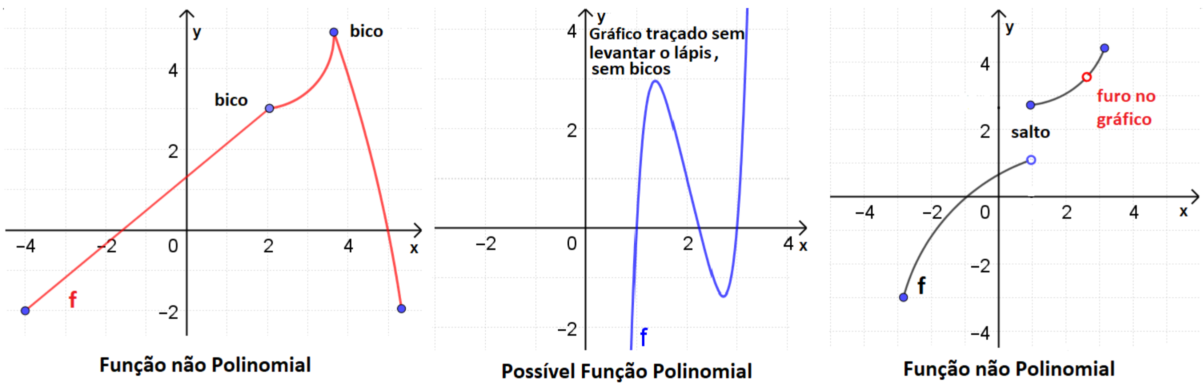
Fonte: Autoria Própria

Observação 2.2. *Duas características ao traçar o gráfico de uma função polinomial são:*

- *O seu traço deve ser obtido sem levantar o lápis, ou seja, não pode ter saltos ou furos.*
- *O seu traço deve ser uma curva suave, sem bicos (ou esquinas).*

Tendo em mente essas características, é simples determinar quando o gráfico de uma função não representa uma função polinomial, como mostra a figura 8.

Figura 8 – Exemplos de Gráficos



Fonte: Autoria Própria

2.2.6 Operações com as Funções Polinomiais

Quando ensinamos as operações de adição, subtração e multiplicação de duas funções polinomiais, devemos mostrar aos discentes que esses resultados ainda são funções polinomiais. À vista disso, uma forma atrativa de ensinar essas operações polinomiais é através da demonstração do resultado da sua operação por meio dos seus respectivos gráficos das funções resultantes dessas operações, como se pode observar nos gráficos construídos no GeoGebra nas figuras 9, 10 e 11. Já a divisão de duas funções polinomiais nem sempre é uma função polinomial como, por exemplo, a divisão de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ por $g(x) = x^6 + x^2 + 1$. O resultado dessa divisão não é uma função polinomial, mas, sim, uma função racional; como podemos encontrar no trabalho de Jacomino (2013) sobre as funções racionais no ensino médio.

Observação 2.3. *Dadas as funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las da seguinte forma:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

sem que isto signifique que ambas as funções $f(x)$ e $g(x)$ tenham mesmo grau n, pois não estamos dizendo que $a_n \neq 0$ nem que $b_n \neq 0$ (LIMA et al., 2001).

2.2.6.1 Adição de Polinômios

Definição 2.7. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções polinomiais definidas por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$, de acordo com a Observação 2.3. Então a adição de $f(x)$ e $g(x)$ é dada por:*

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

Em outras palavras, a soma de duas funções polinomiais f e g é uma função polinomial obtida quando somamos os coeficientes dos termos semelhantes de f e g. Quando os valores do grau das funções polinomiais forem diferentes, a função polinomial resultante da adição terá o mesmo grau que da função polinomial de maior grau.

Exemplo 2.8. *Dado os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ abaixo, determine $f(x) + g(x)$.*

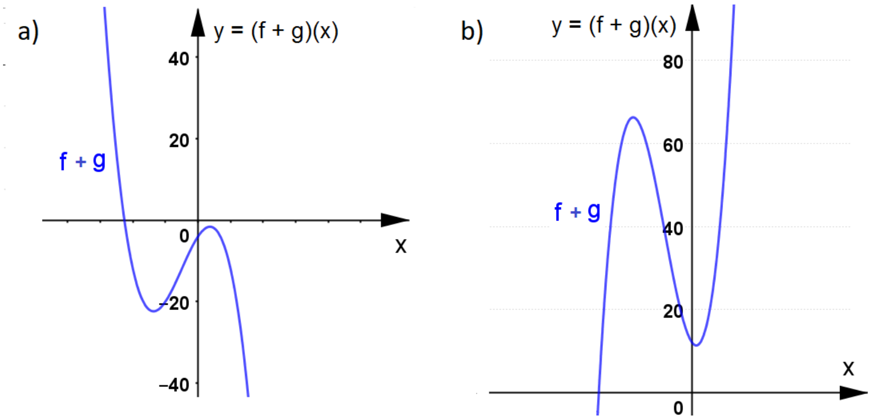
a) *De fato, se $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ e $g(x) = -2x^3 - x^2 + x$ então*

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 4 + (-2x^3 - x^2 + x) \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x - 4 - 2x^3 - x^2 + x \\ &= (1-2)x^3 + (-2-1)x^2 + (5+1)x - 4 \\ &= -1x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

b) *Se* $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ *e* $g(x) = 4x^2 - 2x + 10$*; então:*

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 2x^3 + 6x^2 - 3x + 2 + (4x^2 - 2x + 10 \\ &= 2x^3 + (6+4)x^2 + (-3-2)x + (2+10) \\ &= 2x^3 + 10x^2 - 5x + 12. \end{aligned}$$

Figura 9 – Gráficos da soma $f + g$ do Exemplo 2.8



Fonte: Autoria Própria

2.2.6.2 Subtração de Polinômios

Definição 2.8. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções polinomiais definidas por* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ *e* $g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0$*, de acordo com a Observação 2.3. Então a subtração* $f(x) - g(x)$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) - (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

Em outras palavras, a subtração das funções polinomiais f e g é uma função polinomial obtida pela soma de f com o oposto de g. Nesse caso, o oposto de uma função polinomial g é quando somamos g com um polinômio e obtém-se uma função polinomial nula. Logo, o oposto de uma função polinomial é obtida pela multiplicação da constante (-1) pela função. Se $g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0$, então o oposto de $g(x)$ é obtido pela multiplicação:

$$(-1) \cdot g(x) = -b_nx^n - b_{n-1}x^{n-1} - ... - b_1x - b_0.$$

Exemplo 2.9. *Dados os polinômios* $f(x)$ *e* $g(x)$ *abaixo, determine* $f(x) - g(x)$*:*

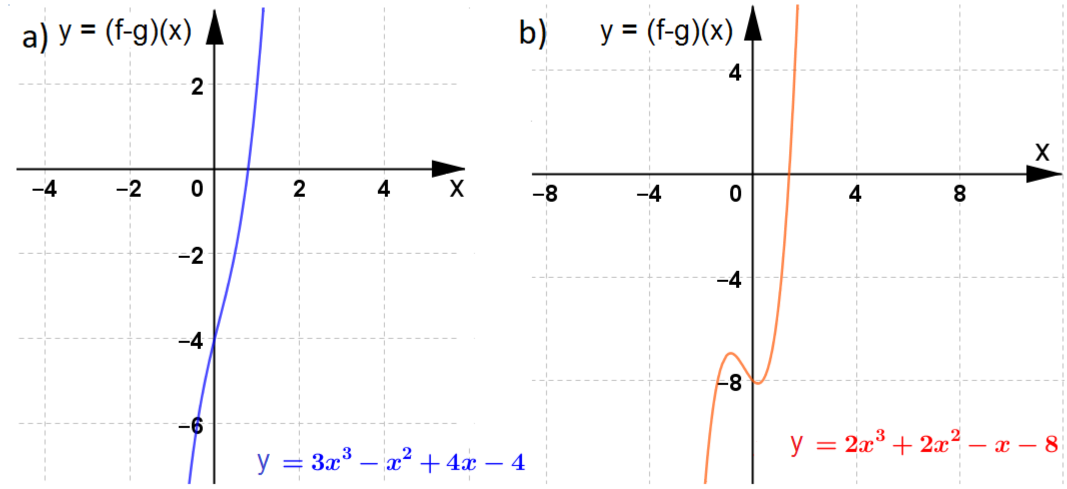
a) *Se* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ **e** $g(x) = -2x^3 - x^2 + x$*; então:*

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 4 - (-2x^3 - x^2 + x) \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x - 4 + 2x^3 + x^2 - x \\ &= (1+2)x^3 + (-2+1)x^2 + (5-1)x - 4 \\ &= 3x^3 - x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

b) *Se* $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 2$ **e** $g(x) = 4x^2 - 2x + 10$*; então*

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2x^3 + 6x^2 - 3x + 2 - (4x^2 - 2x + 10) \\ &= 2x^3 + (6-4)x^2 + (-3+2)x + (2-10) \\ &= 2x^3 + 2x^2 - x - 8 \end{aligned}$$

Figura 10 – Gráficos das Funções $f - g$ do Exemplo 2.9



Fonte: Autoria Própria

2.2.6.3 Multiplicação de Polinômios

Definição 2.9. *Seja* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, temos que se* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *e* $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$*, então a multiplicação de* $f(x)$ *por* $g(x)$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n x^n (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0) + a_{n-1}x^{n-1}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_0(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0) \\ &= a_n b_m x^{n+m} + a_n b_{m-1} x^{n+m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_0 b_1 x + a_0 b_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

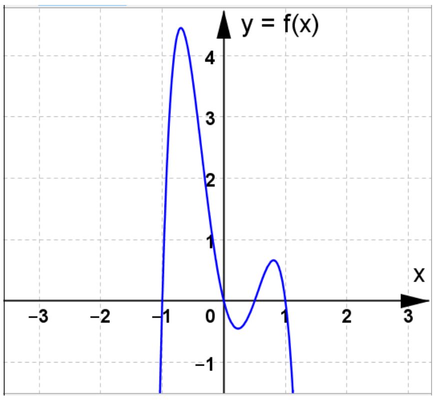
Por conseguinte, o produto de duas funções polinomiais $f(x) \cdot g(x)$ é uma função polinomial que se obtém quando multiplicamos cada um dos termos de $f(x)$ por todos os termos de $g(x)$ e, em seguida, somamos os coeficientes dos termos semelhantes obtidos nessa multiplicação.

O grau da função polinomial $f(x) \cdot g(x)$ é a soma do grau das funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, se $f(x)$ tem grau n e $g(x)$ com grau m, então o grau do produto de $f(x)$ por $g(x)$ é $m+n$.

Exemplo 2.10. *Dadas as funções polinomiais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ e $g(x) = -2x^3 - x^2 + x$, determine $f(x) \cdot g(x)$.*

$$
\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= (x^3 - 2x^2 + 5x - 4)(-2x^3 - x^2 + x) \\
&= x^3(-2x^3 - x^2 + x) - 2x^2(-2x^3 - x^2 + x) + 5x(-2x^3 - x^2 + x) + \\
&\quad - 4(-2x^3 - x^2 + x) \\
&= -2x^6 - x^5 + x^4 + 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 10x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x^3 + 4x^2 - 4x \\
&= -2x^6 + (-1+4)x^5 + (1+2-10)x^4 + (-2-5+8)x^3 + (5+4)x^2 + (-4)x \\
&= -2x^6 + 3x^5 - 7x^4 + x^3 + 9x^2 - 4x
\end{aligned}
$$

Figura 11 – Gráfico da Função $f(x) \cdot g(x)$ do Exemplo 2.10



Fonte: Autoria Própria

2.2.6.4 Divisão de Polinômios

Definição 2.10. *Sejam as funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ com $g(x) \neq 0$. A divisão de $f(x)$ por $g(x)$ determina duas funções polinomiais $q(x)$ e $r(x)$, nas quais $q(x)$ é o quociente da divisão e $r(x)$ é o resto da divisão, sendo que para satisfazer a divisão devemos ter:*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

onde o grau de $r(x)$ tem que ser menor que o grau de $g(x)$ ou $r(x) = 0$ (ou seja, polinômio nulo), onde $q(x)$ e $r(x)$ são únicos.

Quando a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, com $g(x) \neq 0$ é exata, ou seja, $r(x) = 0$, dizemos que $f(x)$ é divisível por $g(x)$. Além disso, se $f(x)$ for de grau n e $g(x)$ grau m com $n \geq m$, então na divisão de $f(x)$ por $g(x)$, o quociente $q(x)$ dessa divisão vai ter grau $n - m$.

O método mais utilizado para a divisão de duas funções polinomiais é o método da chave, o mesmo utilizado para a divisão de dois polinômios.

Exemplo 2.11. *Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ abaixo, determine o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.*

De fato, se $f(x) = 4x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $g(x) = x^2 + x - 2$, então:

$$
\begin{array}{rrrrr|c}
4x^4 & -x^3 & +2x^2 & -x & +1 & \underline{x^2+x-2} \\
-4x^4 & -4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2 \\
\hline
 & -5x^3 & +10x^2 & -x & +1 & -5x \\
 & 5x^3 & +5x^2 & -10x & & \\
\hline
 & & 15x^2 & -11x & +1 & 15 \\
 & & -15x^2 & -15x & +30 & \\
\hline
 & & & -26x & +31 &
\end{array}
$$

Observe que

$$f(x) = (x^2 + x - 2) \cdot (4x^2 - 5x + 15) + (-26x + 31)$$

Onde:

- $q(x) = 4x^2 - 5x + 15$ é o quociente;
- $r(x) = -26x + 31$ é o resto.
- O grau do resto $r(x)$ é menor que o grau do divisor $g(x)$.

Outro método para efetuar a divisão de uma função polinomial $p(x)$, por outro do tipo $f(x) = x - a$, é o método de Briot-Ruffini.

Definição 2.11. *Quando dividimos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n por $g(x) = x - a$, obtemos o quociente $q(x)$. Onde q é um polinômio de grau $n - 1$, dado por $q(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + ... + q_{n-2}x + q_{n-1}$.*

Para obter os coeficientes $q_0, q_1, ..., q_{n-2}, q_{n-1}$ do quociente $q(x)$, assim como o resto $r(x)$ dessa divisão, devemos dispor os dados da seguinte forma:

raiz de $g(x)$	coeficientes ordenados de $p(x)$

Exemplo 2.12. *Efetuar a divisão de* $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ *por* $g(x) = x - 1$.

1^o*- Passo: Calcular a raiz de* $g(x)$ *e ao seu lado colocar os coeficientes de* $p(x)$ *ordenados. Raiz de* $g(x)$, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2^o*- Passo: devemos abaixar o primeiro coeficiente (3) do dividendo e depois multiplicamos pela raiz de* $g(x)$*, ou seja,* 1×3.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

3^o*- Passo: devemos somar o produto obtido com o coeficiente seguinte* $(3 + (-5) = -2)$*. O resultado deve ser colocado abaixo desse coeficiente (-5).*

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & -2 & & \end{array}$$

4^o*- Passo: com resultado anterior (-2), repetimos as operações (multiplicamos pela raiz e depois somamos com o coeficiente seguinte), e assim por diante.*

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & -2 & -1 & -3 \end{array}$$

O último número obtido (-3) *é o resto da divisão e os demais números correspondem aos coeficientes ordenados (segundo potências decrescentes de* x*) do quociente da divisão de* $p(x)$ *por* $g(x)$.

Logo, temos:

- $q(x) = 3 \times x^2 - 2 \times x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$
- $r(x) = -3$

2.2.7 Teorema do Resto e Teorema de D'Alembert

Teorema 2.1. *O resto da divisão de um polinômio* $p(x)$ *por* $x - a$ *é igual a* $p(a)$.

Demonstração: Da divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$, logo, temos que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$$

Substituindo x por a, teremos:

$$\begin{aligned} p(a) &= q(a) \cdot (a - a) + r(a) \\ &= q(a) \cdot 0 + r(a) \\ &= r(a) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Uma consequência do teorema do resto é o teorema de D'Alembert.

Teorema 2.2. *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a for uma raiz de $p(x)$.*

Demonstração: Essa consequência se dá, pois, se a é uma raiz de $p(x)$, então, pela definição de raiz de um polinômio, teremos que $p(a) = 0$. Assim, a partir do teorema do resto, teremos:

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \cdot (x - a) + r(x) \\ p(a) &= q(a) \cdot (a - a) + r(a) \\ p(a) &= q(a) \cdot 0 + r(a) \\ p(a) &= r(a) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Logo, temos o resto da divisão igual a zero. Pode-se concluir que o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$. A demonstração detalhada desse teorema pode ser encontrada em Iezzi et al. (2013, p. 214).

2.2.8 Função Crescente e Decrescente

Definição 2.12. *Um função f é decrescente no intervalo I, se f é definida em I e $f(x_1) > f(x_2)$, quando x_1 e x_2 são dois pontos de I, com $x_1 < x_2$, isto é,*

se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$

Um função f é crescente no intervalo I se f é definida em I e $f(x_1) < f(x_2)$, quando x_1 e x_2 são dois pontos de I, com $x_1 < x_2$, isto é,

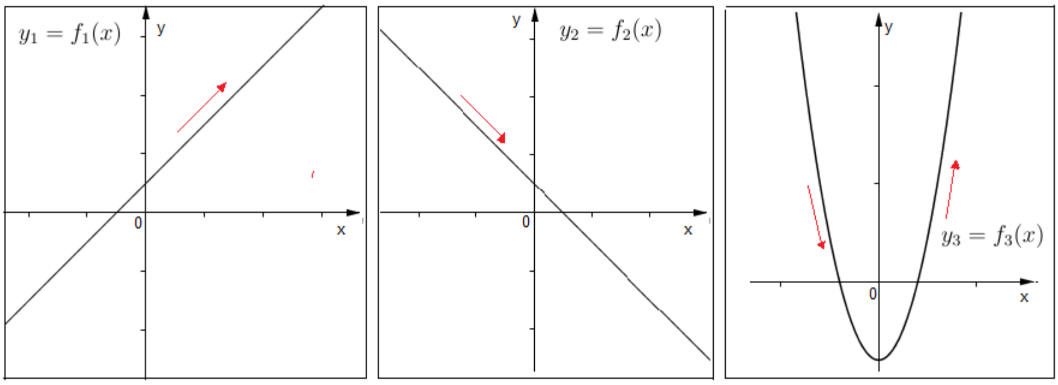
se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$

Exemplo 2.13. *Nos gráficos de funções crescentes e decrescentes na Figura 12, podemos notar que:*

- *A função f_1 está definida $\forall x \in \mathbb{R}$, e que, aumentando o valor de x do domínio, o valor da imagem $y = f_1(x)$ também aumenta; logo, a função é crescente.*
- *A função f_2 também está definida $\forall x \in \mathbb{R}$, e que, aumentando o valor de x do domínio, o valor da imagem $y = f_2(x)$ diminui, isto é, a função é decrescente.*

- *A função f_3 também está definida, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mas para $x \leq 0$, à medida que nos aproximamos de zero, o valor da imagem diminui; enquanto para $x \geq 0$, aumentando o valor de x, o valor de y aumenta. Logo, a função é decrescente para $x \leq 0$ e crescente para $x \geq 0$.*

Figura 12 – Crescimento e Decrescimento de uma Função



Fonte: Autoria Própria

2.2.9 Valor Máximo e Mínimo de uma Função

Os extremos de uma função, que são conhecidos como pontos de máximo e mínimo de uma função, são pontos do domínio onde a imagem pode ser maior ou menor em relação a outros pontos da função.

Muitos livros adotados no ensino médio têm seu foco de estudo apenas em funções polinomiais de primeiro e segundo grau, cujos domínios são, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) ou intervalos limitados fechados ($[a, b]$), o que traz como consequência a necessidade de definir apenas os pontos de máximo ou mínimo absoluto nesta etapa educativa. Para Bianchini e Paccola (2003, p.64):

- O valor máximo de uma função é o maior valor que uma função assume em todo seu domínio. O ponto do gráfico em que ocorre o valor máximo é chamado de ponto de máximo da função.

- O valor mínimo de uma função é o menor valor que a função assume em seu domínio. O ponto do gráfico em que ocorre o valor mínimo é chamado de ponto mínimo da função.

Observação 2.4. *Quando o domínio de funções polinomiais é restringido a um intervalo fechado $[a, b]$, sempre será possível encontrar um valor máximo e mínimo. No caso em que seu domínio seja todo $\mathbb{R}$, as funções polinomiais podem apresentar valor máximo ou valor mínimo, ou nenhum deles.*

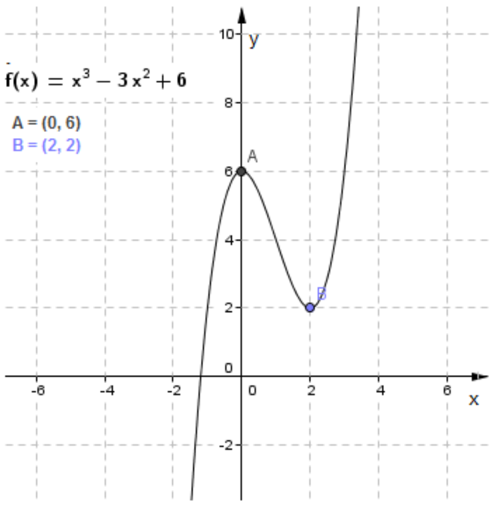
No nível superior, essas definições são ampliadas, visto que, ao estudar funções polinomiais de grau maior que 2, surge a necessidade de estudar máximos e mínimos relativos (ou locais), que são pontos de máximo (ou de mínimo) de uma função em alguma vizinhança do ponto contida no seu domínio. Munem e Foulies (1982) assim define os valores de máximos e mínimos relativos e absolutos:

Definição 2.13. *Uma função f possui um máximo relativo (máximo local) em um ponto a, se existe um intervalo aberto I contendo a, tal que f seja definida em I e $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in I$. E uma função f possui um mínimo relativo (mínimo local) em um ponto a, se existe um intervalo aberto I contendo a, tal que f seja definida em I e $f(a) \leq f(x), \forall x \in I$. Se uma função f possui um máximo ou um mínimo em um ponto a, então f possui extremo relativo em a .*

Definição 2.14. *Se uma função f é definida no intervalo I e seja a um ponto do intervalo I. Se $f(a) \geq f(x)$ vale para todos os valores de $x \in I$, então, no intervalo I, a função f atinge o seu valor máximo absoluto $f(a)$ no ponto a. E se uma função f é definida no intervalo I, e seja b um ponto do intervalo I. Se $f(b) \leqslant f(x)$ vale para todos os valores de $x \in I$, então, no intervalo I, a função f atinge o seu valor mínimo absoluto $f(b)$ no ponto b.*

Exemplo 2.14. *Considerando o Gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$, na figura 13, podemos perceber que o ponto $(0, 6)$, nesse gráfico, está mais alto que todos os seus pontos imediatamente vizinhos, assim, o ponto $A = (0, 6)$ é denominado de máximo relativo do gráfico. Já o ponto $(2, 2)$, nesse gráfico, está mais baixo que todos os seus pontos imediatamente vizinhos, assim, o ponto $B = (2, 2)$ é denominado de mínimo relativo do gráfico.*

Figura 13 – Exemplo 2.14



Fonte: Autoria Própria

Observação 2.5. *Na Figura 13, a função polinomial cujo domínio é $\mathbb{R}$ não possui máximo nem mínimo absoluto.*

2.2.10 Determinar um polinômio a partir de seus valores

Um polinômio de grau n pode ser determinado se forem conhecidos seus $n+1$ coeficientes. Para os determinar, precisamos de $n+1$ pontos distintos pertencentes à função polinomial de grau n.

Definição 2.15. *Segundo Lima et al. (2001, p.163), dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, ..., y_n$, existe um, e somente um, polinômio p de grau $\leq n$, tal que*

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, ..., p(x_n) = y_n.$$

A existência de um único polinômio deve-se ao fato de que se dois polinômios p e q assumem os mesmos valores dos $n+1$ pontos distintos, então a diferença de $p-q$, com $n+1$ raízes é $p-q=0$, logo, $p=q$. Sendo p e q polinômios com grau $\leq n$, então $p-q$ também é um polinômio de grau $\leq n$.

Para obter o polinômio de grau $\leq n$ correspondente, a partir de $n+1$ pontos distintos pertencentes à função, pode-se determiná-lo de duas formas, resolvendo um sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, ..., a_n$, ou utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange.

Para determinar uma função polinomial através de $n+1$ pontos distintos dados, através de um sistema com $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas $a_0, ..., a_n$, consiste em resolver o sistema da forma abaixo:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_n x_n^n + \ldots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

Esse sistema, no qual as potências sucessivas de $x_0, x_1, ..., x_n$ são quantidades conhecidas, possui sempre solução única quando estes $n+1$ números são dois a dois diferentes.

Para $n=1$, temos:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$$

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{cases} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Para $n = 3$, temos:

$$\begin{cases} a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \\ a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = y_3 \end{cases}$$

Resolver sistemas lineares para $n \geq 3$ não é uma tarefa fácil para os alunos do ensino médio. Pensando nessa dificuldade em determinar a solução de sistemas lineares para $n \geq 3$, que a fórmula de Interpolação de Lagrange seria um método mais fácil e interessante de determinar o polinômio de grau máximo igual a n, dados os $n+1$ pontos distintos.

A seguir, apresentamos os polinômios que resolvem o problema, para caso mais simples, $n = 1$ e $n = 2$:

$n = 1$

$$f(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

$n = 2$

$$f(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Caso geral:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{k \neq i}(\frac{x - x_k}{x_i - x_k})$$

A demonstração da fórmula de interpolação de Lagrange foi omitida, mas pode ser encontrada em Silva (2016).

Exemplo 2.15. *Dado os pontos* $A = (-1, -7), B = (1, 1), C = (2, 5)$*, determine o polinômio que assume esses pontos, utilizando a fórmula de Interpolação de Lagrange :*

$$\begin{aligned} p(x) &= -7 \times \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 1 \times \frac{(x-(-1))(x-2)}{(1-(-1))(1-2)} + 5 \times \frac{(x-(-1))(x-1)}{(2-(-1))(2-1)} \\ &= -7 \times \frac{x^2 - 3x + 2}{(-2)(-3)} + 1 \times \frac{x^2 - x - 2}{2 \times (-1)} + 5 \times \frac{x^2 - 1}{3 \times 1} \\ &= \frac{-7x^2 + 21x - 14}{6} - \frac{x^2 - x - 2}{2} + \frac{5x^2 - 5}{3} \\ &= \frac{-7x^2 + 21x - 14 - 3x^2 + 3x + 6 + 10x^2 - 10}{6} = \frac{24x - 18}{6} \\ &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Portanto, nesse exemplo, obtivemos um polinômio de grau 1.

Exemplo 2.16. *Lima et al. (2001, p.165), se pusermos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ e procurarmos o polinômio de grau ≤ 4 que assume nesses pontos os valores $-7, 1, 5, 6, 25$, respectivamente, obteremos*

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1,$$

que tem grau igual 3.

O Exemplo 2.16 foi resolvido da mesma forma que o Exemplo 2.15, substituindo os pontos na fórmula de interpolação de Lagrange.

Capítulo 3

O Ensino das Funções Polinomiais no Ensino Médio

> Novas estratégias de ensino podem e devem ser investigadas, desenvolvidas e adotadas, com o objetivo de transformar a ação pedagógica do docente, de modo a ministrar uma aula muito mais atrativa ao aluno, despertando seu interesse, o gosto pela matemática e, por consequência, a melhora do rendimento acadêmico dos mesmos, (JACOMINO, 2013, p.30).

À vista disso, este capítulo apresenta aspectos da metodologia de resolução de problemas aliados ao recurso GeoGebra para a construção do conhecimento das funções polinomiais por meio da visualização, de modo a contribuir para o entendimento de suas propriedades e aplicabilidades.

3.1 Metodologia da Resolução de Problemas

Para Toledo (2006), o ensino da matemática, através da resolução de problemas, é um treinamento de estratégias de raciocínio e de pensamento, no qual o discente deve colocar em prática todo seu conhecimento e capacidade intelectual para chegar aos objetivos.

Segundo Soares e Pinto (2001), ensinar através de resolução de problemas ajuda os discentes a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, estimulando uma aprendizagem mais motivadora, desenvolvendo a capacidade de determinar por si próprios esclarecimento para as indagações que os inquietam, ao invés de esperar por uma resposta já pronta fornecida pelo professor ou pelo livro-texto. Isso requer, portanto, prestigiar no ensino aspectos metodológicos de desenvolvimento do raciocínio matemático, como bem atestam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões,

> apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva, (BRASIL, 2002, p.70).

Nesse sentido, inserir questões contextualizadas no processo de ensino faz com que os alunos se tornem capazes de relacionar os conteúdos estudados à sua aplicabilidade. Assim, estimulá-los a interpretar problemas que retratam situações do seu dia a dia ou não, faz com que busquem aprender novos conhecimentos, além de representar um grande aspecto motivador para esses discentes, pois as questões contextualizadas possibilitam situações novas e desafiadoras.

Constitui labor do professor estimular questionamentos a fim de que os discentes construam seu conhecimento, motivando-os a enfrentar suas dificuldades e questionamentos; promovendo, assim, a aprendizagem, compreensão e reflexão sobre os conteúdos estudados. Por conseguinte, vale ressaltar que o docente deve levar esse aspecto em consideração ao ensinar problemas uma vez que, de acordo com os PCNs (BRASIL, 2002), ao trabalhar com a resolução de problemas, os professores contribuem também para o estímulo do pensamento lógico e criativo, a análise crítica e a formulação de procedimentos para a resolução desses problemas.

Para que o docente consiga atingir os seus objetivos durante uma aula com resolução de problemas, Silva (2014) diz que esse professor necessita de um bom planejamento, domínio do conteúdo a ser trabalhado e habilidade para o direcionamento da aula, preocupando-se sempre em incentivar questionamentos e promover intervenções, se necessário; tendo também o cuidado de não fornecer todo o encaminhamento do raciocínio para os discentes.

Desse modo, com base na metodologia de Resolução de Problemas aliada ao recurso GeoGebra, foram propostas 4 atividades cujos objetivos têm como finalidade levar o aluno a perceber a importância do uso das tecnologias como ferramentas facilitadoras no processo de ensino-aprendizagem das funções polinomiais e de suas propriedades, proporcionando, desse modo, um significado visual aos conceitos, gerando, desta forma, um maior envolvimento e interesse dos discentes em sala de aula.

As atividades foram elaboradas respeitando-se as quatro fases importantes na resolução de um problema:

- Compreender o problema. A modelagem matemática das questões é proposta na Atividade 1 e 4.

- Estabelecer um plano de resolução. Na Atividade 2, solicita-se o cálculo de alguns pontos específicos da função polinomial, em que são relembradas algumas propriedades da função. Na Atividade 4, é mostrada a fórmula de Interpolação de Lagrange.

- Executar o plano. Na Atividade 2, solicita-se traçar uma curva contínua que una os pontos do gráfico calculados, primeiro, manualmente, e, logo após, com ajuda do GeoGebra. Na Atividade 4, é encontrado um polinômio que contém pontos específicos.
- Refletir sobre a solução encontrada. Na Atividade 2, é solicitada a comparação dos resultados, e na Atividade 3 e 4 é mostrado o significado visual de vários conceitos.

3.2 O GeoGebra como Auxílio nos Estudos das Funções Polinomiais

O impacto provocado pelas tecnologias digitais de informação e comunicação na sociedade atual não pode ser desconsiderado, tendo em vista que os estudantes as utilizam constantemente e que a tecnologia já se tornou um processo intrínseco do cotidiano das pessoas. Logo, o seu uso deve ser bem aproveitado no ensino-aprendizagem da matemática. Para Silva (2014), a utilização das novas tecnologias constitui um grande desafio para os docentes, visto que muitos discentes passam grande parte do seu tempo conectados com a internet em redes sociais e jogos. À vista disso, os docentes podem utilizar dessas tecnologias como aliadas no processo de ensino, despertando, assim, o interesse e a motivação dos discentes.

Todavia, devido à variedade de soluções que podem ser encontradas para determinado problema, ao escolher o tipo de tecnologia a ser utilizado no processo de ensino-aprendizagem, o professor deve estar atento não só a todas as vantagens oferecidas pelo uso de tal recurso tecnológico como também aos desafios que surgirão. Ou seja, diante da profunda atividade intelectual que seus alunos experimentarão, o professor deve estar preparado para responder aos inúmeros questionamentos que virão à tona a partir do uso de tais tecnologias. A esse respeito, o seguimento dos PCNs assim explicita:

> A utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Nessa situação, o professor deve estar preparado para interessantes surpresas: é a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema, indicando que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas; a detecção da capacidade criativa de seus alunos, ao ser o professor surpreendido com soluções que nem imaginava, quando pensou no problema proposto; o entusiástico engajamento dos alunos nos trabalhos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual, (BRASIL, 2002, p.90).

À vista disso, o uso de tecnologias digitais como recurso didático é de grande importância no processo de ensino-aprendizagem, visto que elas podem melhorar a prática em sala de aula, fazendo com que as aulas se tornem mais atrativas e dinâmicas para os discentes. Logo, a informática é um recurso que aproxima a matemática de situações reais, tornando-a concreta, motivadora e mais acessível aos alunos (JACOMINO, 2013).

Assim sendo, o *software* GeoGebra é um recurso tecnológico que possibilita a construção de gráficos de funções. Esse *software* é de fácil manuseio e pode ser baixado pela internet com download gratuito. O uso desse *software* possibilita uma nova forma de apreender as funções polinomiais, através da visualização de seus gráficos de forma mais detalhada, enriquecendo, assim, o conhecimento dos alunos quanto à análise e à interpretação de tais gráficos.

Nesse sentido, as atividades propostas no capítulo 4 exploram a construção, análise e interpretação de gráficos das funções polinomiais com o *software* GeoGebra. Um fator importante para a escolha do *software* é que, se a escola não disponibilizar computadores em quantidade suficiente para o número de alunos, o GeoGebra também pode ser usado no celular, pois existe o aplicativo GeoGebra que também permite o *download* gratuito.

Destarte, a facilidade do acesso através do celular ao aplicativo GeoGebra, com certeza, representa um enorme atrativo para os alunos e os aproxima significativamente do conteúdo a ser ensinado, auxiliando-os na construção, interpretação e análise de gráficos.

O *software* GeoGebra permite tanto a análise do aspecto geométrico como algébrico. Em relação ao aspecto algébrico, o programa permite o estudo das funções de forma mais acessível, possibilitando a visualização dos gráficos construídos e das alterações realizadas nas funções na tela. Assim, o aluno percebe o resultado das ações que se converteram em um determinado gráfico, permitindo que o estudante reflita sobre cada situação apresentada (REBELLO; RODRIGUES, 2011).

Através da experiência como regente, ao introduzir o conceito de funções polinomiais, posso observar que os alunos se deparam com uma dificuldade muito grande em assimilar as definições de função, pois não associam esse conteúdo a alguns conceitos já estudados em anos anteriores. Também não percebem que já estudaram alguns casos particulares das funções polinomiais como, por exemplo, as funções polinomiais de grau 1 e 2 que foram ensinadas anteriormente em outros anos de escolaridade.

Com o intuito de sanar essas dificuldades referentes ao processo de ensino-aprendizagem das funções polinomiais, no próximo capítulo é apresentada uma sequência didática de atividades baseada na Resolução de Problemas envolvendo funções polinomiais. Igualmente, são expostas questões contextualizadas que são solucionadas através da fórmula de Interpolação de Lagrange e atividades que exploram a análise de gráficos construídos com o *software* GeoGebra.

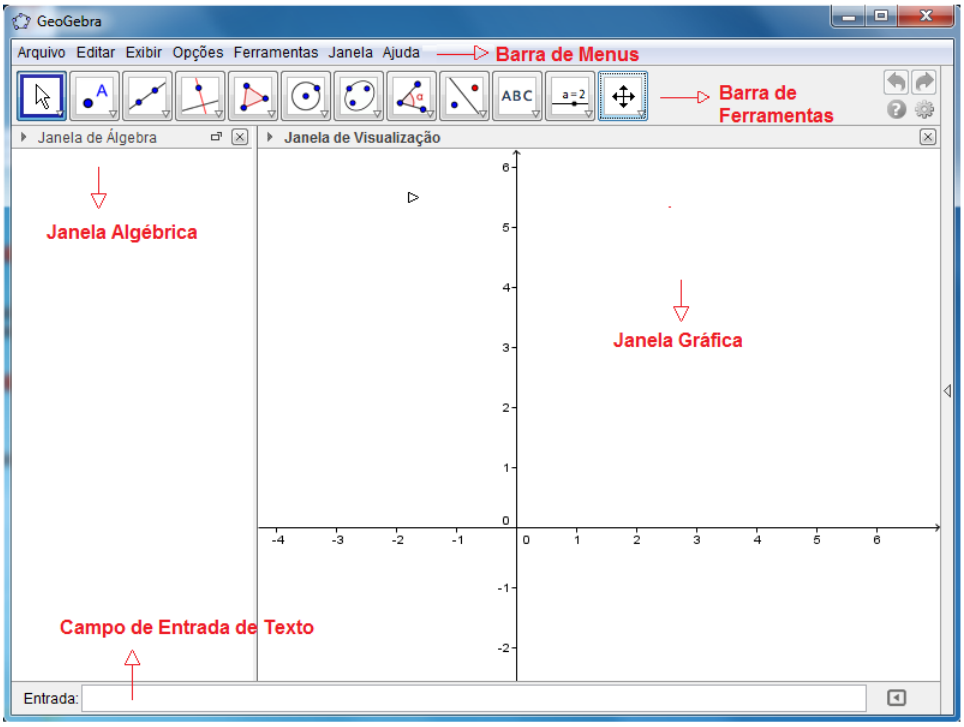
3.2.1 Ferramentas e Comandos do GeoGebra

A seguir, incluímos os comandos e as ferramentas do recurso de álgebra e gráficos do GeoGebra que foram utilizados neste trabalho, embora o GeoGebra tenha também outros mecanismos que possibilitam a realização da construção geométrica de pontos, retas, segmentos, vetores, polígonos e outras formas geométricas, assim como recursos de estatística, tabelas e outros importantes para o ensino da matemática.

Ao abrir o programa na sua versão *software* (versão 5.0), a Figura 14 será visualizada. Na tela é possível observar:

- Barra de Menus.
- Campo de Ferramentas.
- Campo de Entrada de Texto.
- Uma Janela Algébrica.
- Uma Janela Gráfica.

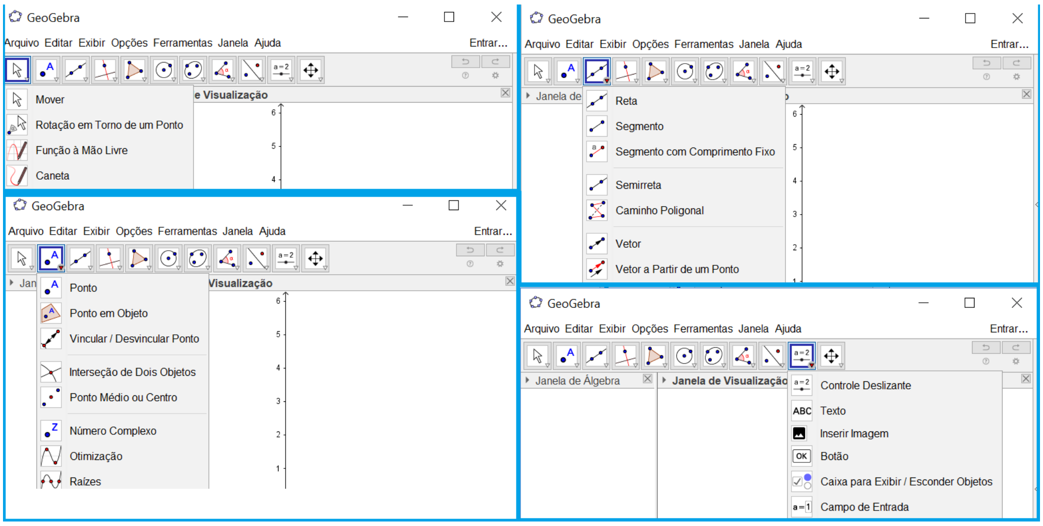
Figura 14 – Janela do *Software* GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

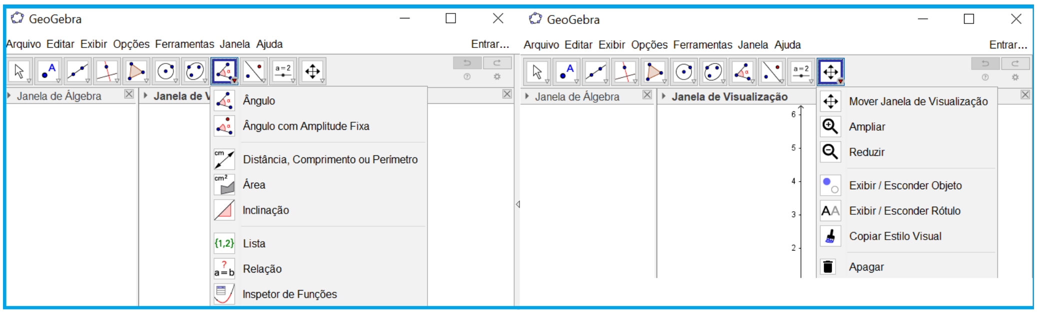
a) Campo de Ferramentas: São opções que aparecem no alto da tela e cujo objetivo é ajudar na construção do objeto matemático. Em nosso estudo de funções polinomiais, o usaremos com algumas das opções dos ícones mostrados nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Barra de Ferramentas I



Fonte: Autoria Própria

Figura 16 – Barra de Ferramentas II



Fonte: Autoria Própria

b) Campo de Entrada: Aqui deverá ser digitada a expressão matemática a ser esboçada, como mostra a figura a seguir.

Figura 17 – Campo de Entrada

Fonte: Autoria Própria

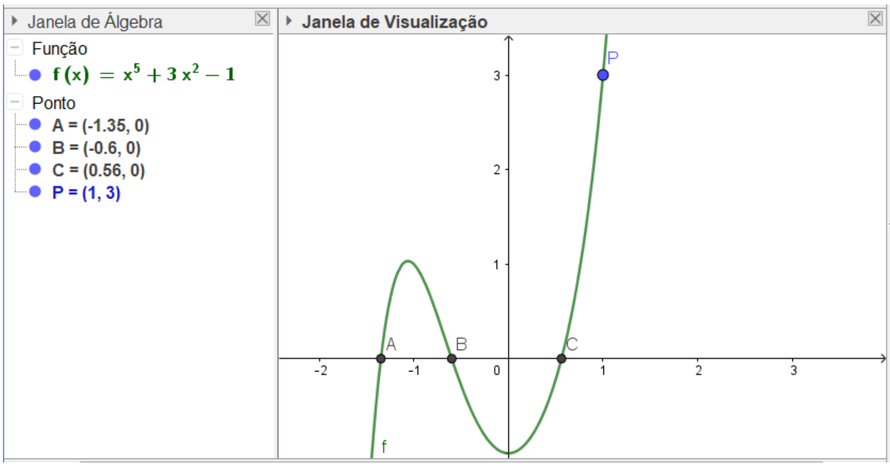
Note que:

- Para inserir um expoente, devemos digitar o símbolo $(\hat{\ })$ antes deste.
- Para indicar uma multiplicação, devemos digitar o símbolo $(*)$. Entretanto, se um coeficiente vier seguido de uma variável x, não é necessário incluir este símbolo, pois o aplicativo reconhece que há uma multiplicação entre o coeficiente e x.

- Para inserir a divisão, devemos inserir o símbolo $(/)$ entre os termos. Por exemplo, para obtermos $\frac{2}{3}$, devemos digitar no campo de entrada $2/3$.
- Para inserir as coordenadas de um ponto, basta apenas digitar "(x, y)" na caixa de entrada e teclar "Enter". A seguir, será possível visualizar o ponto no plano cartesiano da janela gráfica.

c) Janela Algébrica: Mostra todas as expressões matemáticas que foram inseridas no "campo de entrada", assim como outros objetos que possam ser obtidos via ícones das ferramentas, Figura 18.

Figura 18 – Janela Algébrica e de Visualização

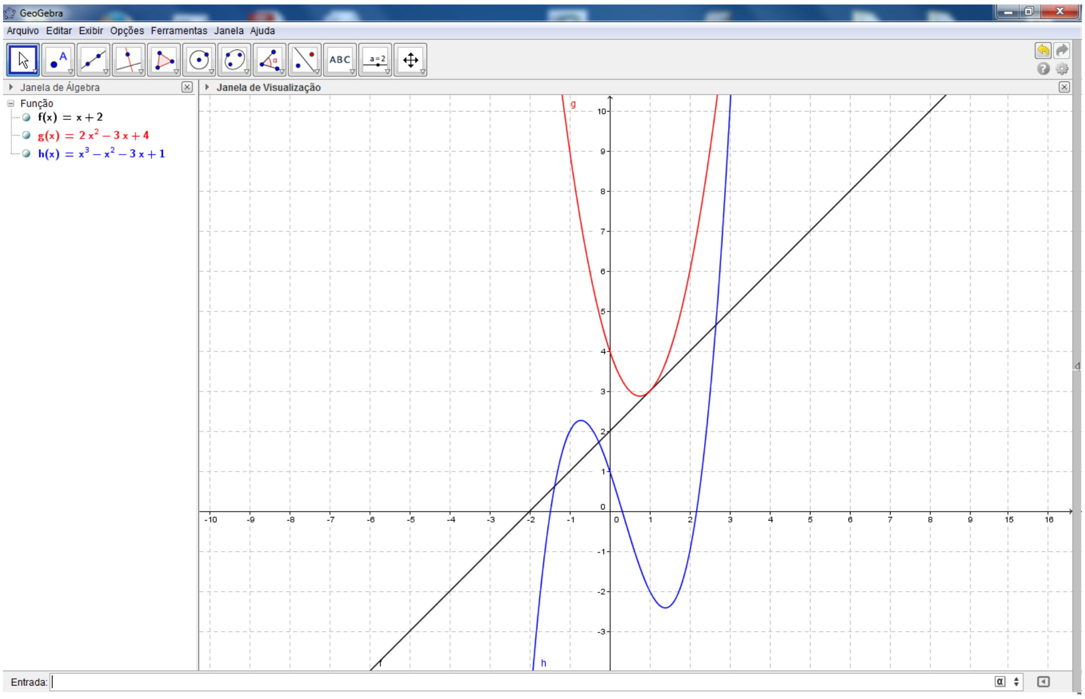


Fonte: Autoria Própria

d) Janela de Visualização ou Janela Gráfica: Possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário visualizará os objetos matemáticos e os gráficos das funções polinomiais inseridas no campo de entrada, Figura 18. Para observar mais detalhes do gráfico, pode-se inserir uma malha no plano cartesiano clicando o botão direito do mouse sobre o plano cartesiano e selecionando o item "Malha".

Um recurso interessante que o *software* GeoGebra permite é a visualização de gráficos de duas ou mais funções na mesma janela gráfica, Figura 19. Para tal, basta digitar "no campo de entrada" uma a uma as funções $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e $h(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$, seguidas da tecla ENTER.

Figura 19 – Exemplos de Construções de Funções Polinomiais no GeoGebra



Fonte: Autoria Própria

Para determinar as raízes de uma função através do GeoGebra, basta escolher na Figura 15 a opção "Raízes" ou digitar "no campo de entrada" a função ($f(x) = \ldots\ldots$) e teclar ENTER. Em seguida, deve digitar o comando

$$\text{Interseção}[f, y = 0]$$

e teclar ENTER. Dessa forma, as coordenadas dos pontos $(x, f(0))$, que são as raízes da função, serão obtidas.

Para determinar onde o gráfico da função corta o eixo das ordenadas, devemos digitar "no campo de entrada" a função (f) e, em seguida, digitar o comando

$$\text{Interseção}[f, x = 0]$$

seguido da tecla ENTER.

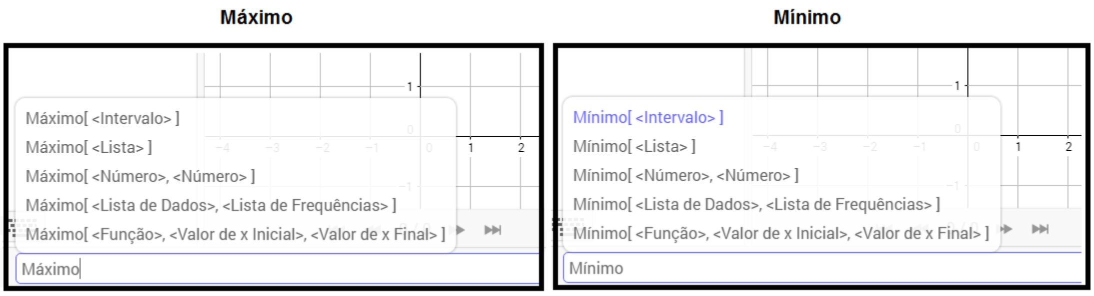
Outro recurso interessante que o GeoGebra nos possibilita é determinar as coordenadas dos extremos de uma função. Para isso, devemos primeiramente inserir uma função f "no campo de entrada" e, em seguida, digitar o comando

$$\text{Extremo}(f)$$

seguidas da tecla ENTER. As coordenadas dos pontos extremos (máximo ou mínimo) de f podem ser visualizadas na janela algébrica. Se digitar no "campo de entrada" o comando

Máximo, uma janela com várias formas de comando será aberta para determiná-lo. Da mesma forma, pode-se obter a coordenada do ponto Mínimo, como podemos ver na Figura 20.

Figura 20 – Comandos para Determinar as coordenadas de Máximo e Mínimo de uma Função



Fonte: Autoria Própria

O GeoGebra possui várias outras ferramentas, operadores e comandos que nos permitem a construção e análise de funções a partir de seus gráficos, assim como recursos para o ensino da geometria e estatística. O manual com esses comandos e ferramentas pode ser encontrado no trabalho “Minicurso de GeoGebra” de Friske et al. (2016).

Capítulo 4

Atividades Propostas

Neste capítulo apresentamos quatro atividades cujo público alvo são os alunos da 3^a série do ensino médio das escolas públicas estaduais do Rio de Janeiro, visto que o conteúdo funções polinomiais, de acordo com o Currículo Mínimo (RIO DE JANEIRO, 2011), deve ser trabalhado nesse segmento de ensino. Cada atividade é composta de problemas que exploram a construção e o entendimento dos conceitos, assim como a contextualização das funções polinomiais por meio da visualização das propriedades e características, tendo como suporte o auxílio tecnológico do GeoGebra (versão *software* ou aplicativo).

Sugere-se aplicar esta sequência de atividades no final do estudo teórico das funções polinomiais, contribuindo, assim, para uma melhor compreensão dos conceitos estudados sobre o tema.

4.1 Atividade 1: Problemas Envolvendo as Funções Polinomiais

Objetivos:

- Interpretar problemas envolvendo equações algébricas de $1^o, 2^o$, 3^o e 4^o grau;
- Identificar a lei de formação de uma função polinomial que descreve o problema;
- Trabalhar com soma e multiplicação de funções polinomiais;
- Calcular o valor numérico de uma função polinomial;
- Mostrar a aplicabilidade das funções polinomiais.

Público Alvo

Alunos da 3^a série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

É necessário o conhecimento prévio nos seguintes conteúdos: perímetro e área de figuras geométricas, volume de poliedros, equações e inequações, operações algébricas de polinômios e cálculo do valor numérico de uma função.

Materiais e tecnologias

Lista de atividades, lápis, régua, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro e apagador.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que os alunos se sentem em duplas, pois a divisão da turma facilita a compreensão do conteúdo pelos alunos, fazendo com que estes discutam entre si as possíveis resoluções e dúvidas a respeito das questões propostas.
- O professor deve, a todo momento, supervisionar os alunos durante a aplicação da atividade, procurando sanar todas as dúvidas, principalmente aquelas decorrentes de assuntos estudados em anos anteriores.

Dificuldades Previstas:

As possíveis dificuldades que podem surgir durante a resolução dos problemas são relacionadas à interpretação dos problemas matemáticos e à falta de conhecimento de alguns conceitos citados no pré-requisito.

Tempo Estimado:

O tempo previsto para a execução dessa atividade é de 2 aulas de 50min cada.

Descrição Geral:

A atividade 1 (Apêndice A) é composta por cinco questões, cada uma delas envolvendo problemas contextualizados, modelados por funções polinomiais.

1. Rogério é pedreiro, o dia de trabalho dele é R$$120,00$. Sabendo dessa informação, sobre o valor do dia de trabalho de Rogério, responda:

   a) Quanto Rogério vai receber se trabalhar 2 dias, 3 dias e 4 dias?

   b) Qual é a função que relaciona os dias trabalhados de Rogério com o seu salário?

   Resolução:

   No item (a), espera-se que os alunos sejam capazes de identificar que cada dia trabalhado tem um valor de R$$120,00$. Assim, se ele trabalhar 2 dias, receberá R$$240,00$, 3 dias R$$360,00$, 4 dias R$$480,00$, e assim por diante.

No item (b), os discentes deverão perceber que, se Rogério trabalhar x dias, receberá o valor de R\$ $120\,x$. A partir dessa descoberta, o aluno será capaz de identificar a lei de formação que expressa o valor y que Rogério irá receber em função dos x dias trabalhados, obtendo assim uma função polinomial de grau 1, $y = 120x$.

2. Uma loja cobra R\$$30,00$ por cada blusa vendida, sendo que o custo de produção de cada uma delas é de R\$$10,00$. Se o custo mensal pela manutenção da loja é de R\$$160,00$, responda às seguintes perguntas:

   a) Quanto a loja vai receber se ela vender só 5 blusas por mês? Ela vai ter lucro ou prejuízo?

   b) Qual o lucro para a venda de 20 peças por mês?

   c) Quantas blusas a loja deverá vender por mês para não ter lucro e nem prejuízo?

   d) Quantas blusas no mínimo a loja deverá vender por mês para não ter prejuízo?

   e) Qual é a função que representa o lucro mensal dessa loja pela venda das blusas?

   Resolução:

   A questão 2 possibilita trabalhar com a interpretação e modelagem do problema. Espera-se que o aluno seja capaz de identificar que o lucro pelas vendas não se dá apenas pelo número de blusas que a loja irá vender, mas depende também do custo de fabricação das blusas e do custo de manutenção da loja.

   - No item (a), dever-se-à calcular que o ganho pela venda de 5 blusas é de $5 \times 30,00 = 150,00$ reais. Para identificar se a loja obteve lucro ou prejuízo, é necessário descontar do ganho da venda o custo de manutenção mensal da loja, que é de R\$$160,00$ e o custo de produção das 5 blusas, que é de $5 \times 10,00 = 50,00$ reais. Logo, o custo será de $160,00 + 5 \times 10,00 = 160,00 + 50,00 = 210,00$ reais. Consequentemente, já que o ganho mensal é menor que o custo, a loja vai ter um prejuízo. Neste caso o prejuízo será de R\$$60,00$.

   - No item (b), os discentes deverão seguir o mesmo raciocínio, ou seja, fazer o cálculo de quanto a loja vai ganhar com as vendas das 20 peças e descontar o custo destas. Assim, eles devem perceber que a loja receberá com as vendas $20 \times 30,00 = 600,00$ reais, mas terá um custo de $160,00 + 20 \times 10,00 = 160,00 + 200,00 = 360,00$ reais. Assim, ela obterá um lucro de $600,00 - 360,00 = 240,00$ reais.

   - No item (c), para não ter lucro nem prejuízo, o ganho pela venda mensal de x blusas deve ser igual ao custo mensal da loja, ou seja,

$$30x = 160 + 10x \quad \rightarrow \quad 20x = 160 \quad \rightarrow \quad x = 8.$$

Portanto, para que a loja não tenha lucro nem prejuízo, ela deverá vender 8 blusas por mês.

- No item (d), com base no resultado obtido no item (c), é possível concluir que, para não ter prejuízo, é necessário que o ganho pela venda de blusas seja maior que o custo da loja, ou seja

$$30x > 160 + 10x \quad \rightarrow \quad 20x > 160 \quad \rightarrow \quad x > 8.$$

Portanto, a loja não terá prejuízo se vender mais de 8 blusas por mês.

- No item (e), será preciso formular a lei da função que expressa o lucro com as vendas da loja. Se a loja vender x peças, receberá $30\,x$ reais, mas terá um custo de $160 + 10x$. Manipulando as expressões algébricas, os alunos perceberão que o lucro y pode ser expresso pela função polinomial:

$$y = 30x - (160 + 10x) = 30x - 160 - 10x = 20x - 160.$$

Assim, a função que representa o lucro mensal dessa loja pela venda das blusas será $y = f(x) = 20x - 160$.

3. Ana possui um quarto cujo comprimento é 4 metros maior que sua largura. Com essas informações determine:

   a) Qual é a função que representa o perímetro e a área do quarto de Ana;

   b) Se o quarto de Ana possui 3 m de largura, determine o perímetro e a área do quarto.

   Resolução:

   Denotando a largura do quarto pela variável x, temos que:

   - No item (a), identifica-se que o perímetro P e a área A do quarto de Ana dependem do valor da variável x. Assim, as funções polinomiais que as representam são:

   $$P(x) = x + (x + 4) + x + (x + 4) = 4x + 8$$
   $$A(x) = x(x + 4) = x^2 + 4x$$

   - No item (b), basta calcular $P(3)$ e $A(3)$, nas funções resultantes da letra (a):

   $$P(3) = 4(3) + 8 = 20 \text{ (m)}$$
   $$A(3) = 3^2 + 4(3) = 21 \text{ (m}^2\text{)}$$

4. Leandro deseja comprar uma caixa de madeira (com formato de paralelepípedo), para guardar suas ferramentas de trabalho. A caixa deve ter comprimento 5 cm maior que a largura, e altura 1 cm maior que a largura. Com essas informações, responda:

a) Se Leandro deseja forrar essa caixa com fórmica, quantos centímetros quadrados desse material serão necessários para que Leandro cubra toda a superfície da caixa?

b) Quantos centímetros quadrados de fórmica Leandro utilizará, se a caixa tiver 30 cm de largura?

c) Qual é a função que representa o volume da caixa de Leandro?

d) Determine o volume da caixa de Leandro, se a caixa possui 30 cm de largura;

Resolução:

Denotando a largura da caixa pela variável x, temos que:

- No item (a), para determinar quantos centímetros quadrados de fórmica é necessário para cobrir a caixa, os alunos deverão calcular a área da superfície do paralelepípedo, que é a soma das áreas de todas as faces do paralelepípedo. São duas faces retangulares de lados de medidas x e $x+1$, duas faces retangulares de medidas de lado igual a $x+1$ e $x+5$ e duas faces retangulares de medidas x e $x+5$.

  Área do retângulo de medidas x e $x+1$:

  $$A_1 = x(x+1) = x^2 + x$$

  Área do retângulo de medidas $x+1$ e $x+5$:

  $$A_2 = (x+1)(x+5) = x^2 + 5x + x + 5 = x^2 + 6x + 5$$

  Área do retângulo de medidas x e $x+5$:

  $$A_3 = (x)(x+5) = x^2 + 5x$$

  Logo, a área total da caixa (A_t) depende de x e pode ser expressa por:

  $$\begin{aligned} A_t(x) &= 2\,A_1 + 2\,A_2 + 2\,A_3 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(x^2 + 6x + 5) + 2(x^2 + 5x) \\ &= 2x^2 + 2x + 2x^2 + 12x + 10 + 2x^2 + 10x \\ &= 6x^2 + 24x + 10 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- No item (b), para determina a área da caixa, basta substituir o valor de $x = 30$ na função polinomial obtida no item (a).

  $$A_t(30) = 6(30)^2 + 24(30) + 10 = 5400 + 720 + 10 = 6.130$$

  Logo, Leandro vai utilizar 6130 cm^2 de fórmica.

- No item (c), para calcular o volume da caixa, os alunos devem lembrar que a fórmula que expressa o volume de um paralelepípedo é fornecida pelo produto da largura, comprimento e altura. Assim,

$$\begin{aligned} V(x) &= x(x+5)(x+1) \\ &= (x^2+5x)(x+1) \\ &= x^3+x^2+5x^2+5x \\ &= x^3+6x^2+5x \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- No item (d), para determinar o volume da caixa, basta substituir o valor de $x = 30$ na função polinomial encontrada no item (c),

$$V(30) = (30)^3 + 6(30)^2 + 5(30) = 27000 + 5400 + 150 = 32.550 \text{ cm}^3$$

5. João possui um terreno retangular cujo comprimento é 6 m maior que sua largura. O seu amigo José possui um terreno cuja área é o quadrado da área do terreno de João, mais 20 m^2 de área. Com essas informações, determine:

   a) A função que representa a área do terreno de João;
   b) A função que representa a área do terreno de José;
   c) Se o terreno de João possui 10 m de largura, determine a área do terreno de João e José.

   Resolução:

   Denotando a largura do terreno pela variável x, temos que:

   - No item (a), como o terreno de João é retangular, a área é calculada pelo produto da largura e comprimento. Assim,

   $$A_{\text{João}}(x) = x(x+6) = x^2 + 6x$$

   - No item (b), como a área do terreno de José é o quadrado da área do terreno de João, mais $20m^2$, teremos:

   $$\begin{aligned} A_{\text{José}}(x) &= A^2_{\text{João}}(x) + 20 \\ &= (x^2+6x)^2 + 20 \\ &= x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20 \end{aligned}$$

   - No item (c), supondo que o terreno de João tenha 10 metros de frente, então $x = 10$. Para descobrir a área dos terrenos de João e José, basta substituir os valores nas funções polinomiais obtidas nos itens (a) e (b).

   $$\begin{aligned} A_{\text{João}}(10) &= (10)^2 + 6(10) = 160\ m^2 \\ A_{\text{José}}(10) &= (10)^4 + 12(10)^3 + 36(10)^2 + 20 = 25.620\ m^2 \end{aligned}$$

Possíveis continuações e desdobramentos:

A Atividade 1 pode ser abordada pelo professor de forma mais aprofundada, explorando o comportamento das funções polinomiais obtidas quando o valor de x aumenta, assim como os conceitos de máximo e mínimo. Pode-se também aumentar o nível de dificuldade dos problemas envolvendo funções polinomiais de grau mais elevado.

4.2 Atividade 2: Construção de Gráficos

Objetivos:

- Explorar conceitos estudados em séries anteriores e relacioná-los aos gráficos obtidos;
- Construir manualmente os gráficos das funções polinomiais de 1^o e 2^o grau obtidas na atividade 1;
- Refletir e discutir acerca do gráfico de uma função polinomial de grau maior que 2, quando são conhecidos apenas alguns pontos do seu gráfico;
- Com auxílio do GeoGebra, construir os gráficos das funções polinomiais obtidas na atividade 1 e identificar seus respectivos domínios e imagem;
- Confrontar os gráficos obtidos manualmente com aqueles obtidos no GeoGebra;
- Debater sobre os benefícios e acerca da importância de usar recursos tecnológicos na procura de informações relacionadas ao gráfico de funções.

Público Alvo:

Alunos da 3^a série do Ensino Médio.

Pré-Requisitos:

Conhecimento prévio do conceito de função afim, propriedades das retas e parábolas, gráfico de funções.

Materiais e Tecnologias:

Lista de atividades, lápis, borracha, caneta, régua, caderno, quadro, pincel para quadro, apagador, calculadora, computador ou celular e datashow.

Recomendações Metodológicas

- Orienta-se que a atividade seja realizada de forma individual, registrando todas as etapas da resolução no caderno.

- Para o tracejado manual da curva que une os pontos de uma função polinomial é necessário relembrar a relação entre as funções polinomiais de 1^o e 2^o grau às funções afins e parábolas, assim como a relação entre o comportamento do gráfico de uma função polinomial e seus zeros.
- O professor deve orientar os alunos na construção dos gráficos no GeoGebra. Deve também, durante a execução da atividade, instigar os alunos a fazerem uma análise mais profunda acerca do que eles conseguem verificar nos gráficos construídos como, por exemplo, observar o comportamento gráfico de cada função polinomial, onde os gráficos cortam o eixo y e onde os gráficos cortam o eixo x (as raízes das funções).
- Como complemento pedagógico, o docente deve preparar slides com os gráficos das funções polinomiais obtidas, para serem mostrados no final da aula, de modo que o discente possa compararará-los aos seus resultados obtidos.

Dificuldades Previstas:

Uma dificuldade que pode ocorrer durante a resolução dessa atividade é a ubicação das coordenadas de um ponto (x, y) muito afastado da origem das coordenadas cartesianas. Cabe ao professor falar acerca do redimensionamento de escala dos eixos coordenados.

No caso das funções polinomiais de grau maior que 2, é importante promover a discussão e análise dos resultados obtidos pela turma e alertá-los sobre as dificuldades em tracejar seus gráficos.

Outra dificuldade que pode vir a ocorrer é não haver, na escola, computador suficiente para todos os alunos da classe. Se isso acontecer, o professor terá a necessidade de formar grupos a fim de que todos os alunos possam construir os gráficos no GeoGebra ou deverá orientar os alunos a fazerem o *download* do aplicativo GeoGebra em seus respectivos celulares, possibilitando, assim, a todos os discentes, o acesso ao recurso tecnológico.

Tempo Estimado:

O tempo previsto para a execução dessa atividade é de 3 aulas de 50 min cada.

Descrição geral:

A Atividade 2 (Apêndice B) é composta por quatro questões que possibilitam discussão sobre a construção dos gráficos das funções polinomiais obtidas na Atividade 1. Para tal, será solicitado um esboço manual destas, tendo como referência sete pontos previamente calculados em seu gráfico. Seguidamente, o aluno deverá comparar seus resultados ao gráfico obtido pelo GeoGebra.

Finalmente, com a ajuda do GeoGebra, o aluno será instigado a obter informações acerca do domínio e imagem das funções.

1. Complete as Tabelas abaixo, determinando o valor numérico das funções polinomiais $f(x)$ obtidas na atividade 1 para os valores de x indicados.

Figura 21 – Questão 1 da Atividade 2

Função: $f(x) = 120x$		
Valores de x	$f(x) = 120x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 20x - 160$		
Valores de x	$f(x) = 20x - 160$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 4x + 8$		
Valores de x	$f(x) = 4x + 8$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = x^2 + 4x$		
Valores de x	$f(x) = x^2 + 4x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$		
Valores de x	$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = x^2 + 6x$		
Valores de x	$f(x) = x^2 + 6x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$		
Valores de x	$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$		
Valores de x	$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Fonte: Autoria Própria

Resolução:

Para determinar o valor numérico das funções polinomiais $f(x)$, os alunos terão que substituir os valores indicados de x na função correspondente efetuando os cálculos necessários com o auxílio da calculadora. Assim, os alunos deverão substituir os respectivos valores de x em $f(x)$ completando as tabelas abaixo.

Funções Polinomiais de 1^o grau: Tabelas 1, 2, 3

Tabela 1 – Função: $f(x) = 120x$

Valores de x	$f(x) = 120x$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = 120(-2) = -240$	$(-2, -240)$
$x = -1$	$f(-1) = 120(-1) = -120$	$(-1, -120)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 120(-\frac{1}{2}) = -60$	$(-\frac{1}{2}, -60)$
$x = 0$	$f(0) = 120(0) = 0$	$(0, 0)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 120(\frac{1}{2}) = 60$	$(\frac{1}{2}, 60)$
$x = 1$	$f(1) = 120(1) = 120$	$(1, 120)$
$x = 2$	$f(2) = 120(2) = 240$	$(2, 240)$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 2 – Função: $f(x) = 20x - 160$

Valores de x	$f(x) = 20x - 160$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = 20(-2) - 160 = -260$	$(-2, -200)$
$x = -1$	$f(-1) = 20(-1) - 160 = -180$	$(-1, -180)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 20(-\frac{1}{2}) - 160 = -260$	$(-\frac{1}{2}, -170)$
$x = 0$	$f(0) = 20(0) - 160 = -160$	$(0, -160)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 20(\frac{1}{2}) - 160 = -150$	$(\frac{1}{2}, -150)$
$x = 1$	$f(1) = 20(1) - 160 = -140$	$(1, -140)$
$x = 2$	$f(2) = 20(2) - 160 = -120$	$(2, -120)$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 3 – Função: $f(x) = 4x + 8$

Valores de x	$f(x) = 4x + 8$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = 4(-2) + 8 = 0$	$(-2, 0)$
$x = -1$	$f(-1) = 4(-1) + 8 = 4$	$(-1, 4)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2}) + 8 = 6$	$(-\frac{1}{2}, 6)$
$x = 0$	$f(0) = 4(0) + 8 = 8$	$(0, 8)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2}) + 8 = 10$	$(\frac{1}{2}, 10)$
$x = 1$	$f(1) = 4(1) + 8 = 12$	$(1, 12)$
$x = 2$	$f(2) = 4(2) + 8 = 16$	$(2, 16)$

Fonte: Autoria Própria

Funções Polinomiais de 2^o grau: Tabelas 4, 5, 6.

Tabela 4 – Função: $f(x) = x^2 + 4x$

Valores de x	$f(x) = x^2 + 4x$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$	$(-2, -4)$
$x = -1$	$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = -3$	$(-1, -3)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + 4(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$
$x = 0$	$f(0) = (0)^2 + 4(0) = 0$	$(0, 0)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$
$x = 1$	$f(1) = (1)^2 + 4(1) = 5$	$(1, 5)$
$x = 2$	$f(2) = (2)^2 + 4(2) = 12$	$(2, 12)$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 5 – Função: $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$

Valores de x	$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = 6(-2)^2 + 24(-2) + 10 = -14$	$(-2, -14)$
$x = -1$	$f(-1) = 6(-1)^2 + 24(-1) + 10 = -8$	$(-1, -8)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 6(-\frac{1}{2})^2 + 24(-\frac{1}{2}) + 10 = -\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$x = 0$	$f(0) = 6(0)^2 + 24(0) + 10 = 10$	$(0, 10)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 6(\frac{1}{2})^2 + 24(\frac{1}{2}) + 10 = \frac{47}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{47}{2})$
$x = 1$	$f(1) = 6(1)^2 + 24(1) + 10 = 40$	$(1, 40)$
$x = 2$	$f(2) = 6(2)^2 + 24(2) + 10 = 82$	$(2, 82)$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 6 – Função: $f(x) = x^2 + 6x$

Valores de x	$f(x) = x^2 + 6x$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = (-2)^2 + 6(-2) = -8$	$(-2, -8)$
$x = -1$	$f(-1) = (-1)^2 + 6(-1) = -5$	$(-1, -5)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + 6(-\frac{1}{2}) = -\frac{11}{4}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$
$x = 0$	$f(0) = (0)^2 + 6(0) = 0$	$(0, 0)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 6(\frac{1}{2}) = \frac{13}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{13}{4})$
$x = 1$	$f(1) = (1)^2 + 6(1) = 7$	$(1, 7)$
$x = 2$	$f(2) = (2)^2 + 6(2) = 16$	$(2, 16)$

Fonte: Autoria Própria

Funções Polinomiais de 3^o e 4^o grau: Tabelas 7 e 8

Tabela 7 – Função: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$

Valores de x	$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 5(-2) = 6$	$(-2, 6)$
$x = -1$	$f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 5(-1) = 0$	$(-1, 0)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + 6(-\frac{1}{2})^2 + 5(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{8})$
$x = 0$	$f(0) = (0)^3 + 6(0)^2 + 5(0) = 6$	$(0, 0)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + 6(\frac{1}{2})^2 + 5(\frac{1}{2}) = \frac{33}{8}$	$(\frac{1}{2}, \frac{33}{8})$
$x = 1$	$f(1) = (1)^3 + 6(1)^2 + 5(1) = 12$	$(1, 12)$
$x = 2$	$f(2) = (2)^3 + 6(2)^2 + 5(2) = 42$	$(2, 42)$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 8 – Função: $f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$

Valores de x	$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	(x, y)
$x = -2$	$f(-2) = (-2)^4 + 12(-2)^3 + 36(-2)^2 + 20 = 84$	$(-2, 84)$
$x = -1$	$f(-1) = (-1)^4 + 12(-1)^3 + 36(-1)^2 + 20 = 45$	$(-1, 45)$
$x = -\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^4 + 12(-\frac{1}{2})^3 + 36(-\frac{1}{2})^2 + 20 = \frac{441}{16}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{441}{16})$
$x = 0$	$f(0) = (0)^4 + 12(0)^3 + 36(0)^2 + 20 = 20$	$(0, 20)$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 + 12(\frac{1}{2})^3 + 36(\frac{1}{2})^2 + 20 = \frac{489}{16}$	$(\frac{1}{2}, \frac{489}{16})$
$x = 1$	$f(1) = (1)^4 + 12(1)^3 + 36(1)^2 + 20 = 69$	$(1, 69)$
$x = 2$	$f(2) = (2)^4 + 12(2)^3 + 36(2)^2 + 20 = 276$	$(2, 276)$

Fonte: Autoria Própria

2. Para cada uma das funções polinomiais da Questão 1, marque os pontos (x, y) encontrados no sistema de coordenadas cartesianas. A seguir, esboce (se for possível) a curva que une os ditos pontos, lembrando que:

   a) Se $y = f(x)$ é uma função polinomial de 1^o grau, então o gráfico dela é uma reta.

   b) Se $y = f(x)$ é uma função polinomial de 2^o grau, então o gráfico dela é uma parábola.

   c) Se $y = f(x)$ é uma função polinomial de grau n ($n > 2$), então o gráfico dela é uma curva contínua que corta o eixo x no máximo n vezes.

Resolução:

- No **item (a)**, espera-se que os alunos identifiquem que as funções polinomiais de grau 1 encontradas na Questão 1 são:

$$f(x) = 120x$$
$$f(x) = 20x - 160$$
$$f(x) = 4x + 8$$

  e que estas estão relacionadas às funções lineares cujos gráficos são retas não verticais.

  A seguir, os discentes deverão marcar os pontos (x, y) encontrados em cada uma das Tabelas 1, 2 e 3 num sistema coordenado cartesiano e unir os pontos em questão por meio de uma reta.

  É importante, nessa etapa, verificar se todas as coordenadas estão sobre o gráfico construído. Se algum ponto estiver fora do gráfico, então, os alunos deverão perceber que o gráfico foi esboçado de forma incorreta ou que o próprio estudante tenha cometido erros durante as manipulações algébricas ao substituir os valores de x indicados na função f respectiva.

  Para finalizar, pode ser solicitado ao discente encontrar os pontos nos quais o gráfico corta o eixo das abcissas "x" e o eixo das ordenadas "y". Vale salientar que isso equivale a encontrar as coordenadas do ponto $(x, 0)$ e $(0, y)$. A primeira se obtém resolvendo a equação $f(x) = 0$ e a segunda, substituindo o valor de $x = 0$ na função f respectiva.

- No **item (b)**, espera-se que os alunos identifiquem que todas as funções polinomiais de grau 2 encontradas na Questão 1 são :

$$f(x) = x^2 + 4x$$
$$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$$
$$f(x) = x^2 + 6x$$

  e que estas estão relacionadas às funções quadráticas cujos gráficos são parábolas com eixos verticais.

  Para traçar o gráfico de uma função polinomial de grau 2, os alunos deverão iniciar marcando os pontos (x, y) calculados nas Tabelas 4, 5 e 6 num sistema coordenado cartesiano. A seguir, encontrar os pontos do gráfico que cortam os eixos x e y e o vértice da parábola. Lembrar que o vértice $V = (x_v, y_v)$ de $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser calculado determinando $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, sendo

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

  Finalmente, deve-se solicitar aos alunos verificar se todos os pontos estão sobre o gráfico construído. Se algum ponto estiver fora do gráfico, então os alunos perceberão que o gráfico foi esboçado de forma incorreta ou que o estudante errou durante as manipulações algébricas ao substituir os valores de x indicados na questão.

(*) $f(x) = x^2 + 4x$

Para determinar as raízes, deve-se resolver a equação

$$f(x) = x^2 + 4x = x(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = -4.$$

Logo, o gráfico de f corta o eixo x nos pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(-4,0)$.

Para descobrir o ponto do gráfico de f que corta o eixo y, basta calcular tal função em $x = 0$,

$$f(0) = 0^2 + 4 \times 0 = 0.$$

Logo, o gráfico de f corta o eixo y em $(0,0)$.

Sabendo que $a = 1,\ b = 4$ e $c = 0$, temos que as coordenadas do vértice são:

$$x_v = \frac{-4}{2} = -2 \qquad \text{e} \qquad y_v = \frac{-(4^2 - 4 \times 1 \times 0)}{4} = -4.$$

Finalmente, marcar todas as coordenadas dos pontos encontrados no plano cartesiano e, em seguida, uni-los por meio de uma parábola, notando que, como $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

(*) $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$

Para determinar as raízes de f, os alunos deverão resolver a equação:

$$f(x) = 6x^2 + 24x + 10 = 0.$$

Sabendo que $a = 1,\ b = 4$ e $c = 0$, temos pela fórmula de Bhaskara que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{sendo que} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

No nosso caso, teremos

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 6 \times 10 = 576 - 240 = 336$$

Logo,

$$x' = \frac{-24 + 4\sqrt{21}}{12} = -2 + \frac{\sqrt{21}}{3} \approx -0,47$$

$$x" = \frac{-24 - 4\sqrt{21}}{12} = -2 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx -3,53$$

Logo, o gráfico de f corta o eixo x nos pontos $(-2 + \frac{\sqrt{21}}{3}, 0)$ e $(-2 - \frac{\sqrt{21}}{3}, 0)$.

Para achar o ponto do gráfico de f, que corta o eixo y, basta calcular a referida função em $x = 0$,

$$f(0) = 6 \times 0^2 + 24 \times 0 + 10 = 10$$

. Assim, o f corta o eixo y no ponto $(0, 10)$.

Para determinar o vértice de uma função do segunda grau, os alunos terão que calcular através da fórmula:

$$x_v = \frac{-24}{2 \times 6} = -2 \qquad \text{e} \qquad y_v = \frac{-336}{4 \times 6} = -14.$$

Assim, as coordenadas do vértice da parábola é $V = (-2, -14)$.

Logo, com esses pontos, os alunos deverão marcar essas coordenadas no plano cartesiano e, em seguida, traçar uma parábola passando por eles. Lembrando que como $a > 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para cima.

(*) $f(x) = x^2 + 6x$

Para determinar as raízes, os alunos deverão resolver a equação:

$$f(x) = x^2 + 6x = x(x+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = -6.$$

Assim, o gráfico dessa função corta o eixo x nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(-6, 0)$.

O gráfico de f corta o eixo y no ponto $(0, 0)$, pois:

$$f(0) = 0^2 + 6 \times 0 = 0$$

.

O vértice de uma função do segundo grau é $x_v = \frac{-6}{2\times1} = \frac{-6}{2} = -3$ e $y_v = \frac{-36}{4\times1} = \frac{-36}{4} = -9$. Assim, as coordenadas do vértice da parábola é $V = (-3, -9)$.

Logo, com esses pontos, os alunos deverão marcar essas coordenadas no plano cartesiano e, em seguida, traçar uma parábola passando por eles. Lembrando que como o $a > 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para cima.

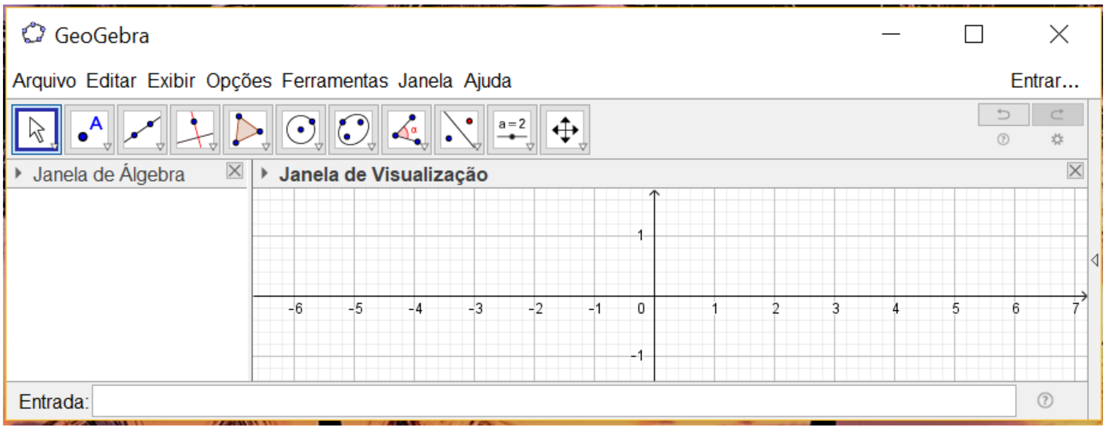
- No **item c)**, espera-se que os alunos, após marcarem os pontos (x, y) encontrados em cada uma das Tabelas 7 e 8, assim como coletar outras informações relevantes como os zeros da função polinomial e o ponto de corte do gráfico com o eixo y, percebam as dificuldades ao traçar a curva que os unem.

3. Construa os gráficos no GeoGebra das funções $y = f(x)$ obtidas na Atividade 1.

   Resolução:

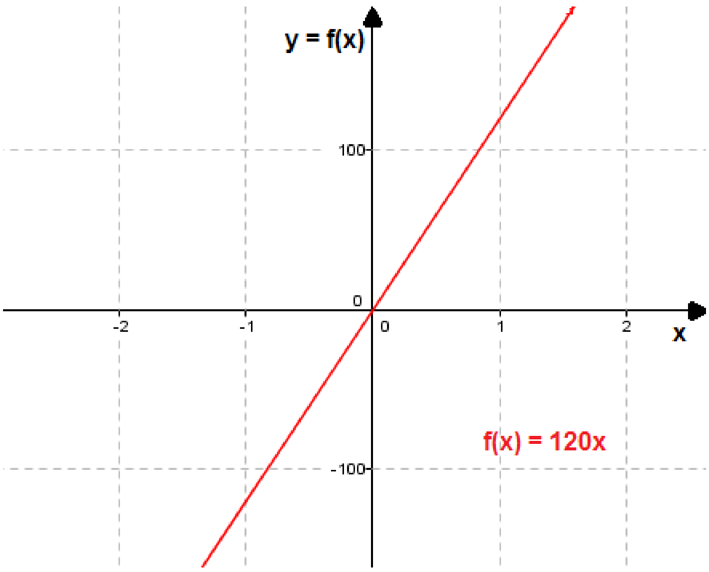
   Nesta questão, o professor deve, no primeiro momento, explicar aos discentes como utilizar o GeoGebra, as suas principais funções e manipulações para a construção dos gráficos. No caso, escrever a função no campo de entrada e teclar a tecla "Enter" que o gráfico já é construído. Os gráficos das funções encontradas na atividade 1, construídos no GeoGebra, estão representados nas figuras 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 e 30.

Figura 22 – Questão 3 da Atividade 2



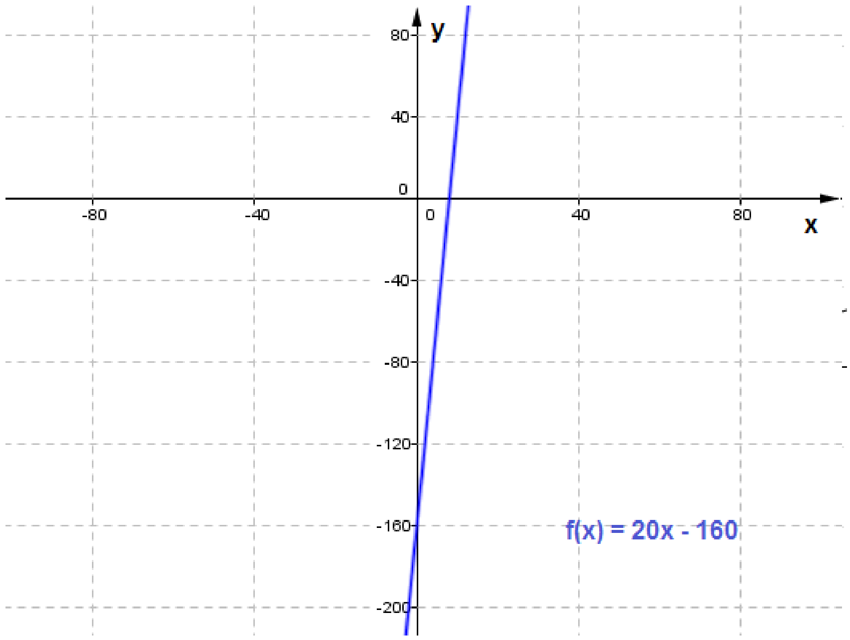
Fonte: Autoria Própria

Figura 23 – Função: $f(x) = 120x$



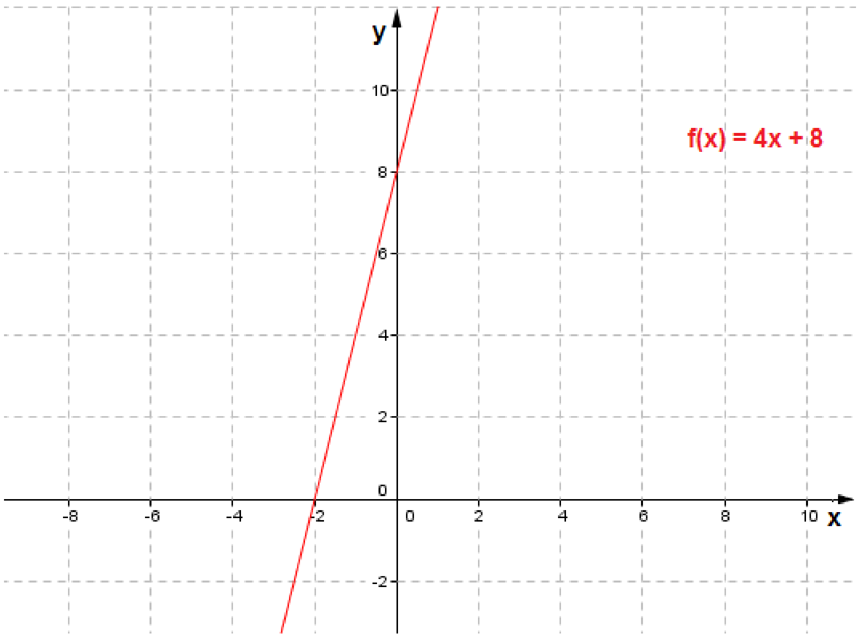
Fonte: Autoria Própria

Figura 24 – Função: $f(x) = 20x - 160$



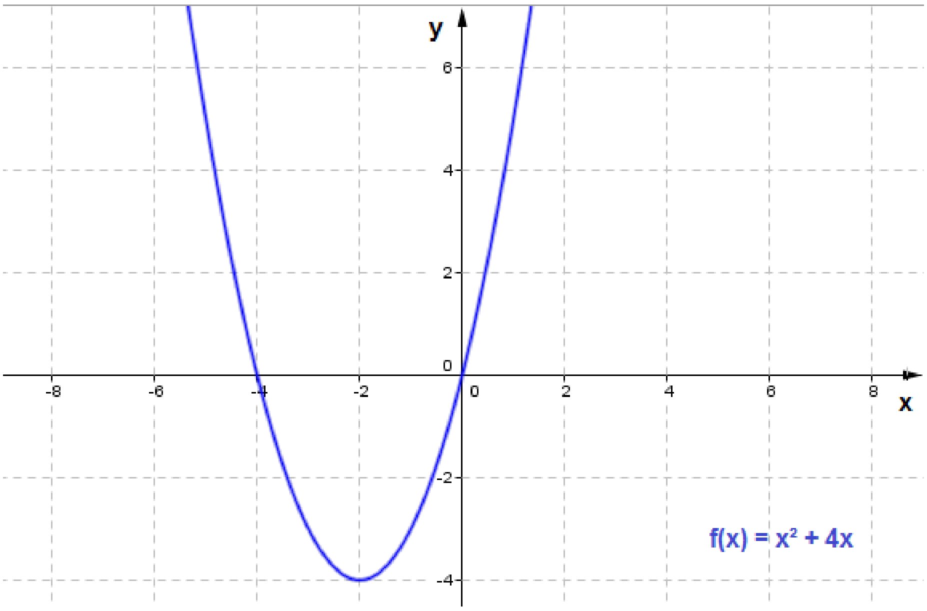
Fonte: Autoria Própria

Figura 25 – Função: $f(x) = 4x + 8$



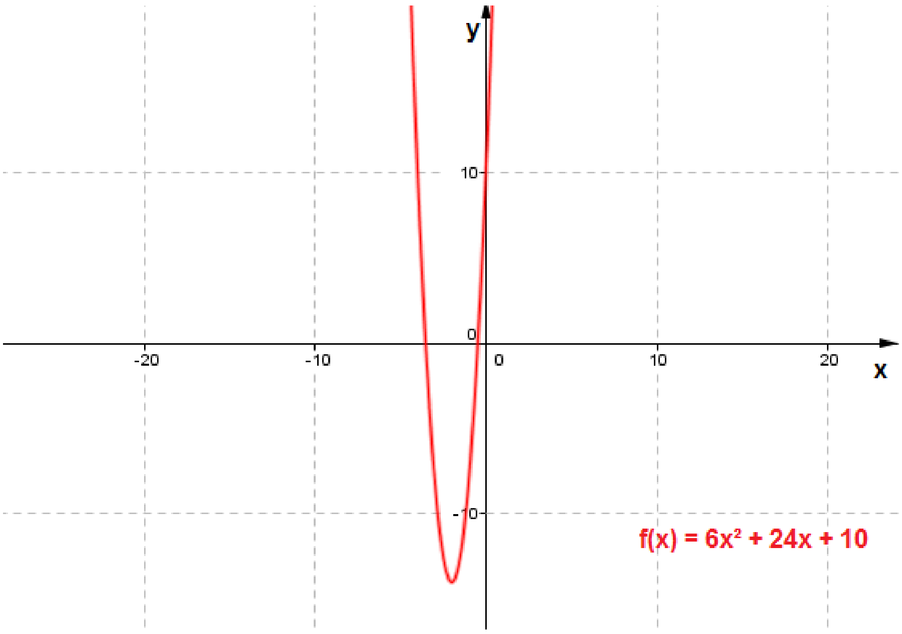
Fonte: Autoria Própria

Figura 26 – Função: $f(x) = x^2 + 4x$



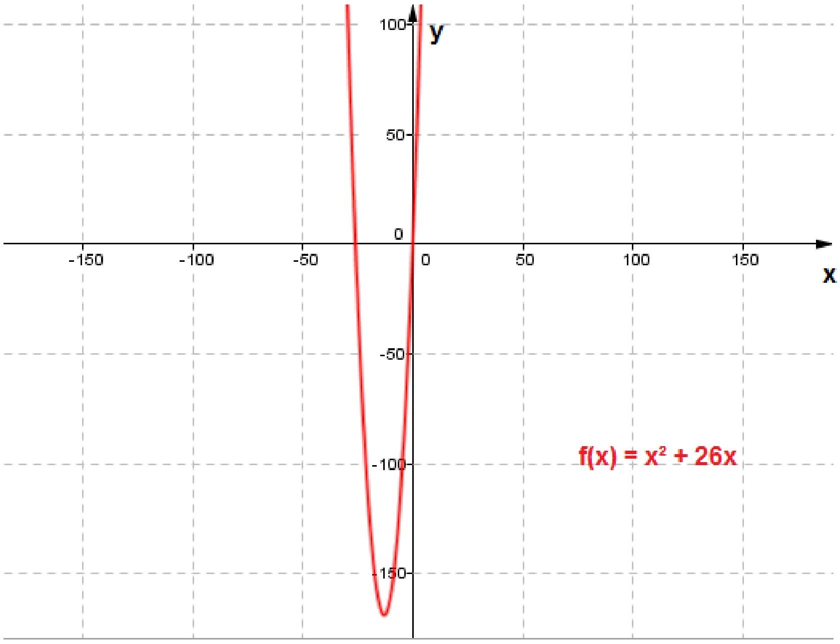
Fonte: Autoria Própria

Figura 27 – Função: $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$



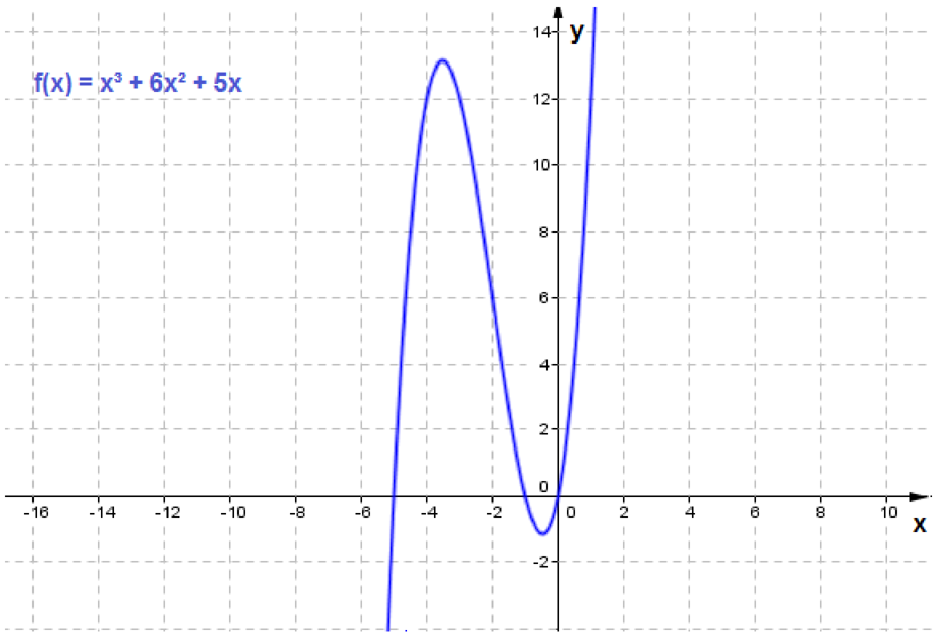
Fonte: Autoria Própria

Figura 28 – Função: $f(x) = x^2 + 26x$



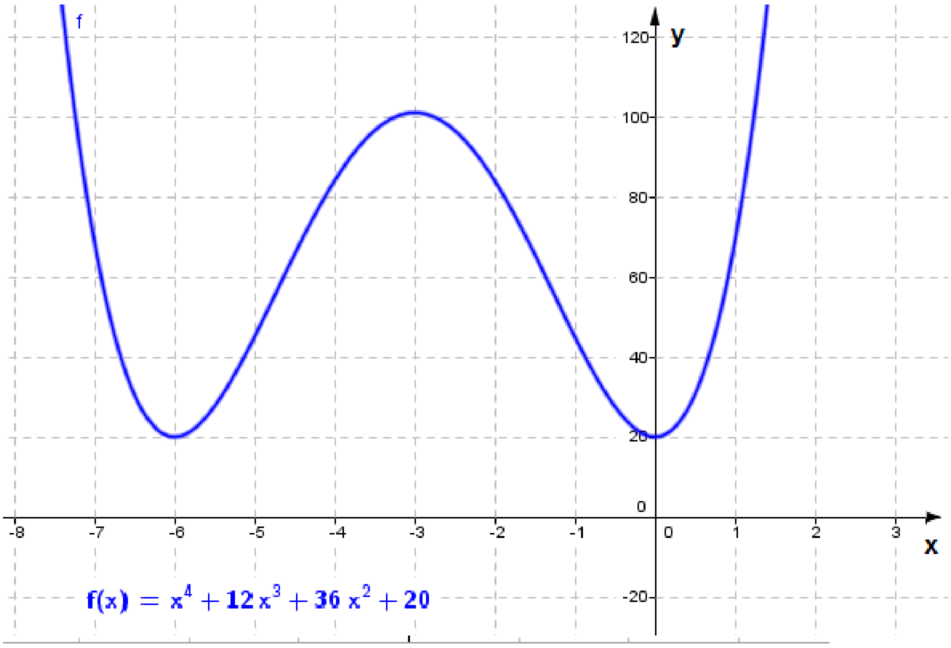
Fonte: Autoria Própria

Figura 29 – Função: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$



Fonte: Autoria Própria

Figura 30 – Função:$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$



Fonte: Autoria Própria

4. Observando os gráficos construídos no GeoGebra na Questão 3, responda:

    a) O domínio de alguma das funções tem restrição? Justifique.

    b) A imagem de alguma das funções tem restrição? Escreva cada $Im(f)$, completando a tabela abaixo:

Tabela 9 – Questão 4-b) da Atividade 2

Função $f(x)$	$Im(f) = \{y;\ y = f(x)$ para $x \in Dom(f)\}$
$f(x) = 120x$	
$f(x) = 20x - 160$	
$f(x) = 4x + 8$	
$f(x) = x^2 + 4x$	
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	
$f(x) = x^2 + 6x$	
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	

Fonte: Autoria Própria

- No item a), espera-se que os discentes percebam que não há nenhuma restrição para o domínio dessas funções, pois, para determinar o domínio de cada função, deve-se observar que o domínio é o conjunto formado por todos os possíveis valores que x pode assumir na função $f(x)$. Logo, o Domínio de todas as funções obtidas na atividade 1 é $Dom(f) = \mathbb{R}$, pois, para qualquer valor de x pertencente ao conjunto dos números reais, tem-se sempre $f(x) = y$, também pertencente ao conjunto dos números reais.

- No item b), espera-se que os alunos percebam que, em algumas dessas funções, há restrição na sua Imagem, pois a Imagem é o conjunto dos valores das ordenadas (y), resultado da aplicação da função $f(x)$. Portanto, observando os gráficos obtidos na questão 3, tem-se:

Tabela 10 – Resolução da Questão 4-b) da Atividade 2

Função $f(x)$	$Im(f) = \{y;\ y = f(x)$ para $x \in Dom(f)\}$
$f(x) = 120x$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = 20x - 160$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = 4x + 8$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 + 4x$	$Im(f) = [-4, \infty)$
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	$Im(f) = [-14, \infty)$
$f(x) = x^2 + 6x$	$Im(f) = [-9, \infty)$
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	$Im(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	$Im(f) = [20, \infty)$

Fonte: Autoria Própria

Possíveis Continuações de Desdobramentos:

Na Atividade 2, o professor pode explorar mais a análise dos gráficos das funções, assim como pode pedir aos alunos que construam gráficos de outras funções de grau mais elevado no GeoGebra.

4.3 Atividade 3: Interpretando Gráficos com GeoGebra

Objetivos:

- Reconhecer os intervalos de decrescimento e crescimento das funções;
- Explorar, por meio do GeoGebra, os pontos onde o gráfico das funções corta o eixo das ordenadas;
- Identificar as raízes das funções polinomiais;
- Reconhecer os pontos de máximo e mínimo absoluto das funções.

Público Alvo:

Os alunos da 3^a série do Ensino Médio .

Pré-requisitos:

O conceito de raízes de uma função polinomial, crescimento e decrescimento de uma função e o conceito de ponto de máximo e mínimo absoluto de uma função polinomial.

Materiais e tecnologias:

Ficha de atividades, lápis, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro, apagador, celular ou computador e Datashow. O Datashow é um recurso indispensável nessa atividade, pois, com ele, o professor manipulará o GeoGebra de forma que os alunos percebam como utilizá-lo.

Recomendações metodológicas:

- Recomenda-se que essa atividade seja realizada individualmente.
- O professor deve orientar os discentes durante o processo de análise dos gráficos. Os discentes devem contar com o auxílio constante do docente devido ao surgimento de possíveis dúvidas durante a execução da atividade.

Dificuldades previstas:

Uma dificuldade que pode vir a ocorrer é não haver computador suficiente para todos os alunos da classe. Se isso ocorrer, o professor deve formar grupos ou orientar os alunos a realizarem o *download* do aplicativo GeoGebra em seus respectivos celulares, possibilitando, assim, a todos os discentes, o acesso ao recurso tecnológico.

Tempo Estimado:

O tempo previsto para a execução dessa atividade é de 2 aulas de 50min cada.

Descrição geral:

A atividade 3 (Apêndice C) é composta por quatro questões que exploram a interpretação dos gráficos das funções polinomiais obtidas na Atividade 2.

1. A partir dos gráficos das funções polinomiais obtidos na questão 3 da atividade 2, com o auxílio do GeoGebra, identifique o intervalo em que as funções são decrescentes e crescentes.

   Resolução:

   - Função: $f(x) = 120x$

     Como se trata de uma função de grau 1, espera-se que os alunos reconheçam que a função é crescente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Além de observar essa informação no gráfico, o professor deve ressaltar que toda função do 1^o grau da forma$f(x) = ax + b$, se $a > 0$ a função é crescente e se $a < 0$ a função é decrescente, como $a = 120$, ou seja, $a > 0$, então a função é crescente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

- Função: $f(x) = 20x - 160$

  De forma análoga à função anterior, a função é crescente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Então a função é crescente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

- Função: $f(x) = 4x + 8$

  Da mesma forma que as funções anteriores, a função é crescente para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. E então, a função é crescente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

- Função:$f(x) = x^2 + 4x$

  Manipulando o GeoGebra, pode-se perceber que a função é decrescente até o vértice da parábola e crescente a partir do vértice da parábola. Logo, a função é decrescente no intervalo $(-\infty, -2)$ e crescente no intervalo $(-2, \infty)$.

- Função:$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$

  Da mesma forma que a função quadrática anterior, manipulando o GeoGebra, pode-se perceber que a função é decrescente no intervalo $(-\infty, -2)$ e crescente no intervalo $(-2, \infty)$.

- Função:$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$

  Observando o gráfico, pode-se perceber que a função é crescente nos intervalos $(-\infty, -\frac{7}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$.

- Função:$f(x) = x^2 + 6x$

  Da mesma forma que as funções quadráticas anteriores, manipulando o GeoGebra, pode-se perceber que a função é decrescente no intervalo $(-\infty, -3)$ e crescente no intervalo $(-3, \infty)$.

- Função:$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$

  Observando o gráfico, pode-se perceber que a função é crescente nos intervalos $(-6, -3)$ e $(0, \infty)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, -6)$ e $(-3, 0)$.

2. A partir dos gráficos das funções polinomiais obtidos na questão 3 da atividade 2, com o auxílio do GeoGebra, determine:

   a) Todos os gráficos das funções apresentam pontos máximos **(M)** e/ou mínimos **(m)** absolutos em seus respectivos domínios?

   b) Complete a tabela abaixo, de acordo com os dados obtidos na letra (a):

Tabela 11 – Questão 2-b) da Atividade 3

Função $f(x)$	Tem Máximo Absoluto (M)?	Tem Mínimo Absoluto (m)?	$M = (\_,\_)$	$m = (\_,\_)$
$f(x) = 120x$				
$f(x) = 20x - 160$				
$f(x) = 4x + 8$				
$f(x) = x^2 + 4x$				
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$				
$f(x) = x^2 + 6x$				
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$				
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$				

Fonte: Autoria Própria

Resolução:

- No item (a), espera-se que os alunos percebam que nem todas as funções possuem pontos de mínimo e/ou de máximo absolutos. Assim, para identificar os pontos de mínimo e/ou máximo absolutos das funções, os alunos devem perceber algumas características das funções, assim como observar os gráficos construídos no GeoGebra da atividade anterior.
- As funções $f(x) = 120x; f(x) = 20x - 160; f(x) = 4x + 8$ são funções de grau 1, logo não existe ponto de máximo e nem de mínimo absoluto, ou seja, somente teria ponto de máximo e mínimo absoluto se o domínio da função fosse um intervalo limitado.
- As funções $f(x) = x^2 + 4x; f(x) = 6x^2 + 24x + 10; f(x) = x^2 + 6x$ são funções de grau 2. Toda função polinomial de grau 2 é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Quando $a < 0$, o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Dessa forma, a função terá um ponto máximo absoluto. Mas se $a > 0$, o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para cima. Dessa forma, a função terá um ponto mínimo absoluto. Esses pontos de máximo ou mínimo absoluto de uma função polinomial de grau 2 são os vértices da parábola, pois é no vértice que a função muda de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente. Assim, observando o gráfico da função $f(x) = x^2 + 4x$, a função possui ponto mínimo absoluto que é o vértice da parábola o qual é o ponto (-2,-4). Da mesma forma a função $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$ possui o ponto mínimo absoluto (-2,-14) e a função $f(x) = x^2 + 6x$ possui ponto mínimo absoluto (-3,-9).
- Observando o gráfico da função $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$ no GeoGebra, pode-se perceber que não existe ponto máximo nem de mínimo absoluto na função, pois

somente haveria ponto de máximo e/ou de mínimo absoluto se o domínio da função fosse um intervalo limitado.

- Na função $f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$, não existe ponto máximo absoluto, mas existe ponto mínimo absoluto, o menor valor para $f(x)$ é $f(x) = 20$. Existem dois valores para x que resultarão em $f(x) = 20$, $x = -6$ e $x = 0$. Assim, existem dois pontos mínimos absolutos nessa função (-6,20) e (0,20).
- No item (b), os alunos deverão completar a tabela de acordo com os dados obtidos na letra (a). Logo, o quadro 12 representa a resolução do item (b).

Tabela 12 – Resolução da Questão 2-b) da Atividade 3

Função $f(x)$	Tem Máximo Absoluto (M)?	Tem Mínimo Absoluto (m)?	$M = (\_, \_)$	$m = (\_, \_)$
$f(x) = 120x$	Não	Não	—	—
$f(x) = 20x - 160$	Não	Não	—	—
$f(x) = 4x + 8$	Não	Não	—	—
$f(x) = x^2 + 4x$	Não	Sim	—	$m = (-2, -4)$
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	Não	Sim	—	$m = (-2, -14)$
$f(x) = x^2 + 6x$	Não	Sim	—	$m = (-3, -9)$
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	Não	Não	—	—
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	Não	Sim	—	$m = (-6, 20)$ e $m = (0, 20)$

Fonte: Autoria Própria

3. A partir dos gráficos das funções polinomiais construídos na Questão 3 da atividade 2 no GeoGebra, identifique o ponto em que cada gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

   Resolução:

   Para determinar o ponto em que a função intersecta o eixo y, deve-se digitar no campo de entrada no GeoGebra, "Interseção $[f, x = 0]$‘" e teclar "Enter" para obter o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas (y). Além do recurso desse comando no GeoGebra, é possível determinar o ponto manualmente, substituindo o valor de x por 0 na função $f(x)$. Assim, o ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas das respectivas funções abaixo são:

   - Função: $f(x) = 120x$, intersecta o eixo y no ponto (0,0).
   - Função: $f(x) = 20x - 160$, intersecta o eixo y no ponto (0,-160).
   - Função: $f(x) = 4x + 8$, intersecta o eixo y no ponto (0,8).
   - Função:$f(x) = x^2 + 4x$, intersecta o eixo y no ponto (0,0).
   - Função:$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$, intersecta o eixo y no ponto (0,10).

- Função:$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$, intersecta o eixo y no ponto (0,0).
- Função:$f(x) = x^2 + 6x$, intersecta o eixo y no ponto (0,0).
- Função:$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$, intersecta o eixo y no ponto (0,20).

4. A partir dos gráficos das funções polinomiais da atividade 2 construídos no GeoGebra, determine as raízes das funções polinomiais.

   Resolução:

   Para determinar as raízes das funções polinomiais, deve-se reconhecer onde o gráfico da função intersecta o eixo x. Para localizar o valor da raiz no GeoGebra, caso não seja possível visualizar a grandeza exata no gráfico, deve-se digitar no campo de entrada "Interseção$[f, y = 0]$" e teclar "Enter" para obter o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das abcissas (x). Além do recurso desse comando no GeoGebra, é possível determinar o ponto manualmente, substituindo o valor de $f(x)$ por 0 na função. Assim, os valores de x encontrados são as raízes das funções polinomiais. Logo, as raízes das respectivas funções abaixo são:

   - Função: $f(x) = 120x$, raiz de $f(x)$ é $x = 0$.
   - Função: $f(x) = 20x - 160$, raiz de $f(x)$ é $x = 8$.
   - Função: $f(x) = 4x + 8$, raiz de $f(x)$ é $x = -2$.
   - Função: $f(x) = x^2 + 4x$, as raízes de $f(x)$ são $x = -4$ e $x = 0$.
   - Função: $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$, as raízes de $f(x)$, encontradas por meio do recurso GeoGebra, são valores aproximados $x = -3,53$ e $x = -0,47$. Resolvendo manualmente, substituindo $f(x) = 0$, obtém-se uma equação do segundo grau. Pela fórmula resolutiva da equação polinomial de grau 2, temos:

$$6x^2 + 24x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 6 \times 10 = 576 - 240 = 336$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{336}}{2 \times 6}$$

$$x = \frac{-24 \pm 4\sqrt{21}}{12}$$

$$x' = \frac{-24 + 4\sqrt{21}}{12} = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} \simeq -0,47$$

$$x" = \frac{-24 - 4\sqrt{21}}{12} = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3} \simeq -3,53$$

Assim as raízes encontradas são $x = \frac{-6+\sqrt{21}}{3} \simeq -0,47$ e $x = \frac{-6-\sqrt{21}}{3} \simeq -3,53$

- Função: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$, as raízes são $x = -5, x = -1$ e $x = 0$.
- Função: $f(x) = x^2 + 6x$, as raízes são $x = -6$ e $x = 0$.
- Função: $f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$, não possui raízes reais, logo $\nexists x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$.

Possíveis continuações de desdobramentos:

Na atividade 3, o docente pode solicitar outros gráficos com comportamentos diferentes, como funções polinomiais do 1^o grau decrescentes, funções polinomiais do 2^o grau com concavidades voltadas para baixo e, até mesmo, gráficos de funções polinomiais com graus mais elevados.

4.4 Atividade 4: Interpolação de Lagrange

Objetivos:

- Mostrar a aplicabilidade da fórmula de interpolação de Lagrange;
- Encontrar uma função polinomial a partir de pontos coordenados conhecidos de seu gráfico;
- Reforçar a construção e análise de gráficos das funções polinomiais no GeoGebra.

Público Alvo:

Alunos da 3^a série do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

O conhecimento das operações com polinômios e construção e análise dos gráficos no GeoGebra.

Materiais e tecnologias:

Ficha de atividades, lápis, borracha, caneta, quadro, pincel para quadro, apagador e computadores ou celulares.

Recomendações metodológicas:

- Orienta-se que os alunos se sentem em duplas a fim de conferir os resultados encontrados e debater as possíveis dúvidas surgidas.
- O professor deve supervisionar os alunos durante a atividade com o propósito de sanar todas as dúvidas que possam surgir durante a resolução das questões dessa atividade.

Dificuldades previstas:

As possíveis dúvidas que podem surgir durante a atividade são provenientes das dificuldades na substituição das coordenadas dos pontos na fórmula e na manipulação dos cálculos algébricos.

Tempo Estimado:

O tempo previsto para a execução dessa atividade é de 2 aulas de 50 min cada.

Descrição geral:

A atividade 4 (Apêndice D) é composta por quatro questões que abordam a fórmula de Interpolação de Lagrange.

1. Um taxista cobra por uma corrida levando em consideração o número de km percorrido. João fez uma corrida de 4 km e pagou a esse taxista R$5,50. Maria também fez uma corrida com esse mesmo taxista. Ela andou 10 km e pagou R$8,50. De acordo com essas informações, identifique a função polinomial que expressa o valor cobrado pelo taxista $(p(x))$ em função dos números de km (x) percorridos e represente a função encontrada graficamente pelo GeoGebra:

   Resolução:

   A tabela 13 representa o valor cobrado $(p(x))$ pelo taxista em função do número de km (x) percorrido:

Tabela 13 – Valor Cobrado pelo Taxista em Função do Número de km Percorridos

x	4	10
$p(x)$	5,50	8,50
$(x, p(x))$	(4;5,50)	(10;8,50)

Fonte:Autoria Própria

Para encontrar o polinômio que representa a função, os alunos substituirão as coordenadas dos pontos na fórmula de Interpolação de Lagrange.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) \prod_{k \neq i} (\frac{x - x_k}{x_i - x_k})$$

$$p(x) = 5,50 \times \frac{(x-10)}{(4-10)} + 8,50 \times \frac{(x-4)}{(10-4)}$$

$$p(x) = \frac{(5,50x - 55)}{(-6)} + \frac{(8,50x - 34)}{(6)}$$

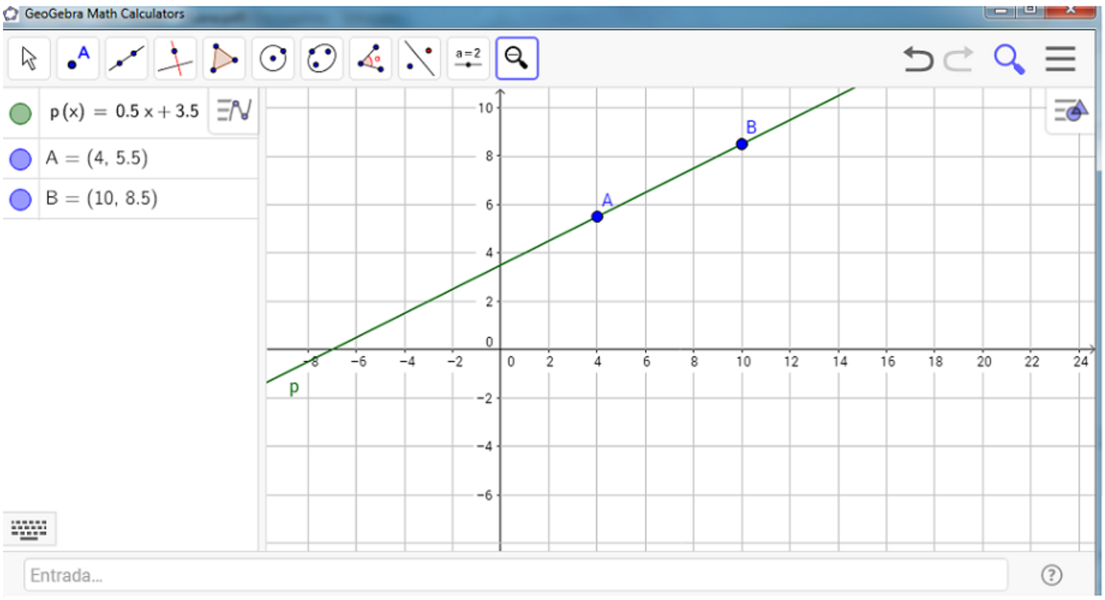
$$p(x) = 0,50x + 3,50$$

Logo, o polinômio obtido por meio da fórmula de interpolação de Lagrange sobre o valor cobrado pelo taxista em função do número de km percorridos por ele é dado por:

$$p(x) = 0,50x + 3,50$$

O gráfico da função polinomial encontrada está representado na figura 31. Primeiro, os alunos deverão representar as coordenadas dos pontos dados na questão e, depois, inserir a função que representa o valor cobrado pelo taxista. Espera-se que os alunos percebam que a função encontrada passa pelos pontos fornecidos na questão, confirmando que a função encontrada está correta.

Figura 31 – Gráfico da Questão 1 da Atividade 4



Fonte: Autoria Própria

2. Determine o polinômio que representa o lucro diário de uma indústria, sabendo que ela produz por dia x unidades de um produto, gerando um lucro $L(x)$ diário. Se ela vender 5 unidades em um dia, terá um lucro diário de 11 reais. Se vender 10 unidades, terá um lucro de 76 reais. E se vender 15 unidades, terá um lucro de 191 reais. Construa o gráfico da função polinomial encontrada no GeoGebra.

Resolução:

A tabela 14 representa o lucro diário da indústria $(L(x))$ em função do número de unidades produzidas diariamente (x):

Tabela 14 – Lucro Diário da Indústria em Função do Número de Unidades Produzidas

x	5	10	15
$L(x)$	11	76	191
$(x, L(x))$	(5;11)	(10;76)	(15,191)

Fonte:Autoria Própria

Para encontrar o polinômio que representa a função, os alunos substituirão as coordenadas dos pontos na fórmula de Interpolação de Lagrange.

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} L(x_i) \prod_{k \neq i} (\frac{x - x_k}{x_i - x_k})$$

$$L(x) = 11 \times \frac{(x-10)(x-15)}{(5-10)(5-15)} + 76 \times \frac{(x-5)(x-15)}{(10-5)(10-15)} + 191 \times \frac{(x-5)(x-10)}{(15-5)(15-10)}$$

$$L(x) = 11 \times \frac{(x^2 - 25x + 150)}{(-5)(-10)} + 76 \times \frac{(x^2 - 20x + 75)}{(5)(-5)} + 191 \times \frac{(x^2 - 15x + 50)}{(10)(5)}$$

$$L(x) = \frac{(11x^2 - 275x + 1650)}{(50)} + \frac{(76x^2 - 1520x + 5700)}{(-25)} + \frac{(191x^2 - 2865x + 9550)}{(50)}$$

$$L(x) = \frac{(11x^2 - 275x + 1650 - 152x^2 + 3040x - 11400 + 191x^2 - 2865x + 9550)}{(50)}$$

$$L(x) = \frac{(50x^2 - 100x - 200)}{(50)}$$

$$L(x) = x^2 - 2x - 4$$

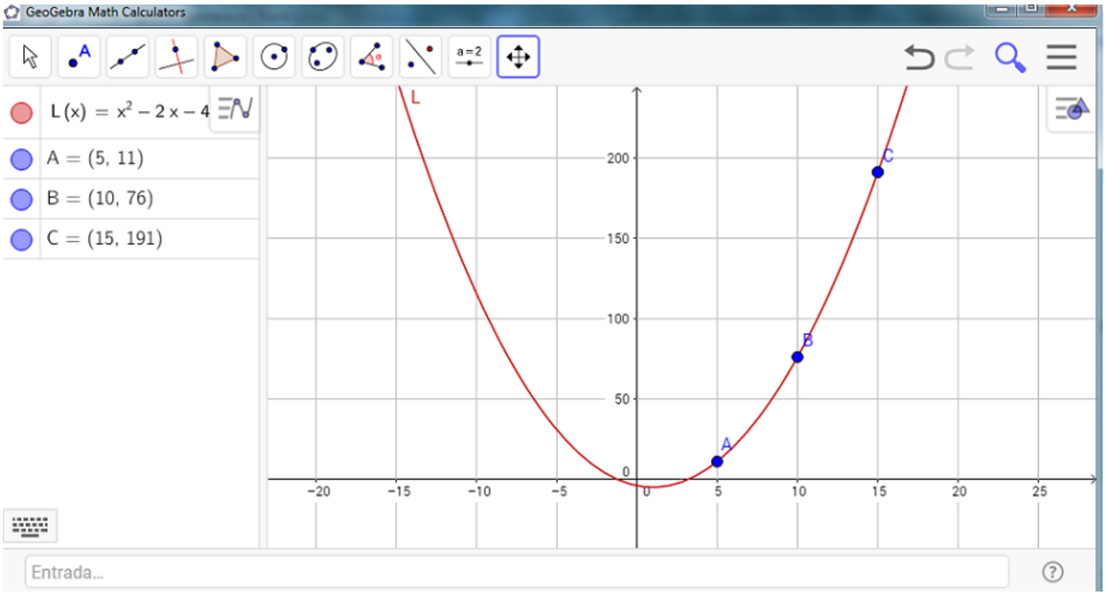
Portanto, o polinômio obtido por meio da fórmula de interpolação de Lagrange do lucro diário da indústria em função do número de unidades vendidas é dado por:

$$L(x) = x^2 - 2x - 4$$

.

O gráfico da função polinomial encontrada está representado na figura 32. Primeiramente, os alunos deverão representar as coordenadas dos pontos dados na questão e depois inserir a função. Espera-se que os alunos percebam que a função encontrada passa pelos pontos fornecidos na questão, confirmando que a função encontrada está correta.

Figura 32 – Gráfico da Questão 2 da Atividade 4



Fonte: Autoria Própria

3. Um artesão produz uma quantidade $Q(x)$ de colares em função do tempo x em horas gasto para a confecção destes, como mostra a tabela de produção abaixo. Determine o polinômio que representa a quantidade $Q(x)$ de colares em função do tempo x gasto na produção. Depois de encontrada a função, verifique, através do aplicativo GeoGebra, se as coordenadas dos pontos fornecidos na questão pertencem ao gráfico da função.

Tabela 15 – Quantidade de Colares Produzidas em Função do Tempo Gasto na Confecção dos Mesmos

x	1	2	3
$Q(x)$	3	8	16
$(x, Q(x))$	(1,3)	(2,8)	(3,16)

Fonte:Autoria Própria

Resolução:

Substituindo as coordenas dos pontos fornecidos na fórmula de interpolação de Lagrange:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i) \prod_{k \neq i} (\frac{x - x_k}{x_i - x_k})$$

$$Q(x) = 3 \times \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 8 \times \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 16 \times \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$Q(x) = 3 \times \frac{(x^2 - 5x + 6)}{(-1)(-2)} + 8 \times \frac{(x^2 - 4x + 3)}{(1)(-1)} + 16 \times \frac{(x^2 - 3x + 2)}{(2)(1)}$$

$$Q(x) = \frac{(3x^2 - 15x + 18)}{(2)} + \frac{(8x^2 - 32x + 24)}{(-1)} + \frac{(16x^2 - 48x + 32)}{(2)}$$

$$Q(x) = \frac{(3x^2 - 15x + 18 - 16x^2 + 64x - 48 + 16x^2 - 48x + 32)}{(2)}$$

$$Q(x) = \frac{(3x^2 + x + 2)}{(2)}$$

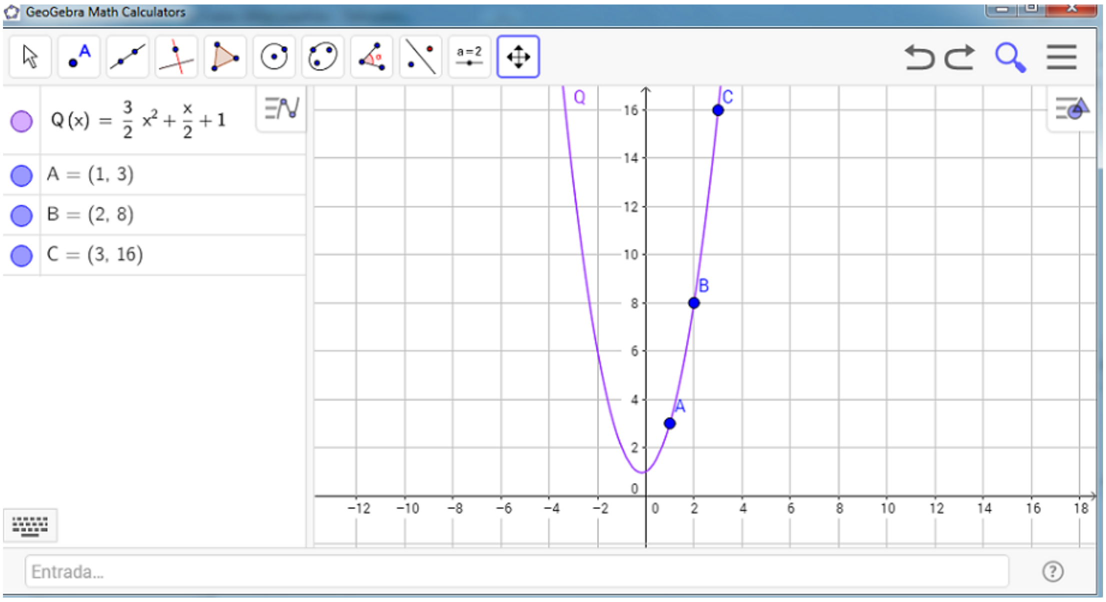
$$Q(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{1x}{2} + 1$$

A função polinomial que representa o número de colares produzidos em função do tempo em horas é dada por:

$$Q(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$

O gráfico da função polinomial encontrada está representado na figura 33. Inicialmente, os alunos deverão representar as coordenadas dos pontos dados na questão e, em seguida, inserir a função. Espera-se que os alunos percebam que a função encontrada passa pelos pontos fornecidos na questão, confirmando que a função encontrada está correta.

Figura 33 – Gráfico da Questão 3 da Atividade 4



Fonte: Autoria Própria

4. Um corpo se desloca em função do seu deslocamento de acordo com a tabela 16. Determine a função polinomial que representa o deslocamento desse corpo e represente graficamente essa função no GeoGebra. Em seguida, verifique se o gráfico passa pelos pontos fornecidos.

Tabela 16 – Deslocamento de um Corpo

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	8
$(x, f(x))$	(0,1)	(1,3)	(2,5)	(3,8)

Fonte:Autoria Própria

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos pontos na fórmula temos:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right)$$

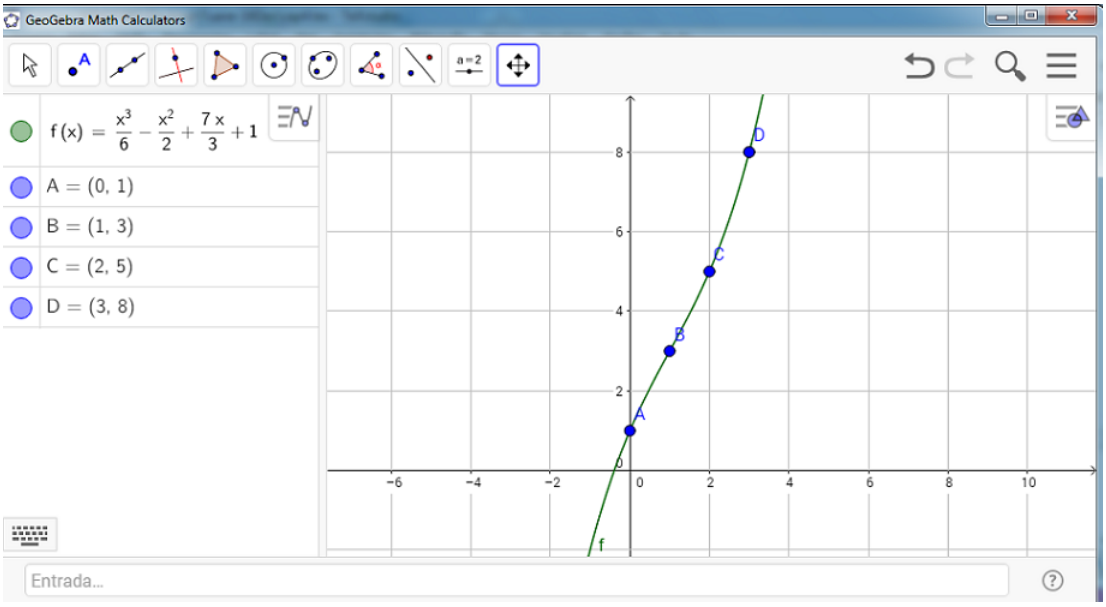
$$
\begin{aligned}
f(x) =& 1 \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3 \times \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 5 \times \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\
& + 8 \times \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
=& \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{-6} + 3 \times \frac{x(x^2-5x+6)}{2} + 5 \times \frac{x(x^2-4x+3)}{-2} + 8 \times \frac{x(x^2-3x+2)}{6} \\
=& \frac{-x^3+6x^2-11x+6+9x^3-45x^2+54x-15x^3+60x^2-45x+8x^3-24x^2+16x}{6} \\
=& \frac{x^3-3x^2+14x+6}{6} \\
=& \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{3} + 1
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+14x+6}{(6)}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{3} + 1$$

Logo, o gráfico da função polinomial encontrada está representado na figura 34. A princípio, os alunos deverão representar as coordenadas dos pontos fornecidos na questão e depois inserir a função. Espera-se que os alunos percebam que a função encontrada passa pelos pontos fornecidos na questão, confirmando que a função encontrada está correta.

Figura 34 – Gráfico da Questão 4 da Atividade 4



Fonte: Autoria Própria

Possíveis Continuações e Desdobramentos:

O professor pode acrescentar outros problemas para que os discentes possam resolver utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange. Esses problemas também podem ser explorados de outras formas, como, por exemplo, nos assuntos raízes, intervalos de crescimento e decrescimento, domínio e imagem das funções encontradas.

Considerações Finais

Conclui-se que o aprendizado das funções polinomiais é indispensável para os discentes da educação básica. Por meio da prática docente e pesquisa deste trabalho percebeu-se que o processo de ensino e aprendizagem das funções polinomiais não é fácil, visto que conteúdo algébrico sem visualização não é fácil de ser ensinado nem aprendido.

Para contornar os erros que cercam o processo de ensino-aprendizagem desse tema, procurou-se tornar esse assunto mais contextualizado, mostrando aos educandos a aplicabilidade das funções polinomiais através da metodologia de resolução de problemas e do recurso tecnológico GeoGebra.

Objetivando propiciar aos discentes aulas mais motivadoras e atrativas, foi dado ênfase à construção e análise de gráficos por meio de uma sequência de atividades que acreditamos que seja fundamental na busca de métodos diferenciados de ensino.

Ao sugerir atividades que exploram a construção manual das funções polinomiais, espera-se despertar a reflexão dos discentes em relação ao tracejado manual dessas funções, demostrando, assim, que não é suficiente apenas ter as coordenadas de pontos para esboçar um gráfico, uma vez que sempre haverá a incerteza e a dificuldade de conhecer o comportamento deste, caso não sejam conhecidas as características das funções polinomiais, sobretudo naquelas de graus maiores que 2.

Com o intuito de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da construção de gráficos de uma função polinomial, sugeriu-se uma sequência de atividades que exploram a construção e a análise de gráficos das funções polinomiais, através do recurso tecnológico GeoGebra, levando os discentes a compararem gráficos construídos no GeoGebra aos seus, construídos manualmente. O intuito dessa sequência é, por meio da exploração dessas construções, que os discentes possam, então, reconhecer através dos seus próprios erros, na construção manual dos gráficos, a necessidade do conhecimento prévio do comportamento de cada função polinomial. Ademais, o recurso tecnológico GeoGebra possibilita aos discentes uma melhor compreensão e análise das funções.

Acrescenta-se também a Interpolação de Lagrange, cujo conteúdo não está previsto na grade curricular do ensino médio, todavia constitui um tema muito interessante de ser observado, visto que a fórmula traz um novo método para determinar os polinômios, a partir das coordenadas de seus pontos.

À vista disso, acredita-se que, ao inserir esse último conteúdo na grade curricular do ensino médio, a mesma se tornará mais completa, enriquecendo, assim, o conhecimento dos educandos. Vale frisar ainda que introduzir esse conteúdo não prejudica o percurso do desenvolvimento da grade curricular, visto que esse assunto está diretamente relacionado às funções polinomiais. Assim, além de os discentes aprenderem a utilizar e aplicar a fórmula de Interpolação de Lagrange, serão capazes de verificar o comportamento gráfico através do *software* GeoGebra.

Logo, espera-se, com esta proposta de atividades, ressaltar a importância da contextualização do conhecimento e da utilização de recursos tecnológicos no ensino das funções polinomiais, assim como motivar os docentes a utilizarem novos métodos para o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. Destarte, é importante também destacar que, após os discentes resolverem essa sequência de atividades, espera-se que aprendam não somente técnicas de memorização de fórmulas e resoluções de problemas, mas que sejam capazes de analisar as funções polinomiais de forma mais profunda e prazerosa.

Através dessa proposta de ensino, pode-se perceber que é possível ministrar aulas diferenciadas utilizando recursos metodológicos simples, tornando, assim, as aulas mais dinâmicas, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos. Vale ressaltar que o planejamento das aulas deve ser bem elaborado para que o seu sucesso ocorra, reduzindo, dessa forma, as possíveis dificuldades previstas.

O esperado neste trabalho não era apenas propor uma nova forma de ensinar as funções polinomiais, mas também expor o quanto essa sequência didática poderá estimular o desenvolvimento conceitual dos alunos. Dessa forma, espera-se que essa proposta possa contribuir para o processo do ensino-aprendizagem dos alunos e que eles possam responder de forma positiva aos conteúdos estudados.

Portanto, procuramos estimular nos docentes e nos leitores um maior interesse na busca por novos conhecimentos, a fim de que possam desfrutar dos recursos tecnológicos e de outros conceitos a serem explorados com os educandos. O presente estudo estimula a abertura para outras questões a serem abordadas sobre o ensino das funções polinomiais, assim como a aplicação e a análise dos resultados dessa proposta de atividades em trabalhos futuros.

Referências

BECKER, J. M. *Polinômios, Equações Algébricas e suas Resoluções*. Dissertação (Mestrado) — Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas - MS, 2014. Citado na página 17.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Curso de Matemática*. São Paulo: Moderna, 2003. Volume Único. Citado na página 42.

BORTOLOSSI, H. J. *Função Polinomial*. 2011. Acessado em 26/09/2017 às 20h. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2011.1/gma00116/aulas/gma00116-aula-16.pdf>. Citado na página 29.

BOYER, C. B. *História Da Matemática*. São Paulo: Edgard BlüCher, 1989. Citado na página 24.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História Da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 23.

BRANDT, S. T. J.; MONTORFANO, C. O software geogebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores. 2008. Acessado em 08/10/2017 às 15h. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf>. Citado na página 28.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, DF, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 16, 27, 48 e 49.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Ministério da Educação e Cultura*. 6. ed. Brasília, DF, 2011. Citado na página 16.

CARVALHO, K. M. de. *A Álgebra das equações Polinomiais e sua solubilidade*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Campinas,SP, 2015. Citado na página 26.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. de. Formalização do conceito de função no ensino médio: Uma sequência de ensino-aprendizagem. Recife, BA, 2004. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/114/conceito_de_fun%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 24 e 25.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As Ideias da Álgebra*. São Paulo,SP: Atual, 1995. 5 p. Tradução de Hygino H. Domingues. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

DANTE, L. R. *Contexto e Aplicações*. São Paulo: Atica, 2014. Citado na página 27.

DIERINGS, A. R. *Ensino de Polinômios no Ensino Médio - Uma Nova Abordagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2014. Citado na página 17.

FRISKE, A. luisa et al. Minicurso de geogebra. In: GRUPO PET MATEMATICA DA UFSM. Santa Maria, RS, 2016. UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Citado na página 55.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendiagem de Àlgebra. In: . Belo Horizonte: Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM. Belo Horizonte, 2007. Acessado em 08/10/2017 às 14h. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/posteres.html>. Citado na página 25.

IEZZI, G. et al. *Matemática Ciência e Aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 41.

JACOMINO, T. M. Z. *As Funções Racionais no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2013. PROFMAT. Citado 3 vezes nas páginas 35, 47 e 50.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 2001. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 28, 35, 44 e 46.

MEDINA, C. P.; LEINEKER, L. R. *O Ensino de Funções com o Auxílio do Geogebra*. 2014. Acessado no dia 26/09/2017 às 15h. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_celso_portes_medina.pdf>. Citado na página 28.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 22.

MUNEM, M. A.; FOULIES, D. J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos S.A, 1982. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 43.

NASCIMENTO, C. K. A. do. *Polinômios, Equações Algébricas E O Estudo De Suas Raízes Reais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Citado na página 16.

PNLD. *Programa Nacional do Livro Didático*. Brasília, DF, 2015. Programa Nacional do Livro Didático. Citado na página 27.

REBELLO, A. P. S.; RODRIGUES, M. A. R. de. Geogebra: Alternativa para o estudo dos parâmetros de funções na educação básica. Recife 2011. Acessado em 02/10/2017 às 08h. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1267/739>. Citado na página 50.

RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro, 2011. SEEDUC. Disponível em: <http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 28 e 56.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. ao B. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Material da Disciplina de História da Matemática do Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT. Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 23 e 24.

SA, P. F. de; SOUZA, G. da S.; SILVA, I. D. B. da. A construção do conceito de função: Alguns dados históricos. *Traços (UNAMA)*, v. 6, n. 11, p. 123–140, 2003. Citado na página 23.

SANTOS, J. *A Matemática no Continente Africano - O Osso de Ishango*. 2016. Acesso 22/05/2017 às 11:05 a.m. Disponível em: <http://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html>. Citado na página 20.

SILVA, C. F. da. *A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para a Modelagem Matemática de Polinômios*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS, MANAUS, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 26, 27 e 45.

SILVA, F. T. M. *A Função Polinomial do 2º Grau por meio da Resolução de Problemas dinamizadas pelo software Geogebra.* Paraná, 2014. Acesso em: 02/10/2017. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uel_mat_artigo_fabiane_tsutiya_moreli.pdf.> Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. *Métodologia da Resolução de Problemas*. 2001. Acessado em 02/10/2017. Disponível em: <http://ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 47.

SOUZA, J. *Novo Olhar Matemática*. São Paulo: FTD, 2013. v. 3. Citado na página 27.

TOLEDO, M. A. Solução de problemas na matemática: Um estudo de um modelo para solução de problemas matemáticos. UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo 2006. Acesso em: 02/10/2017 às 10h. Disponível em: <http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com.br/2010/08/um-estudo-de-um-modelo-para-solucao-de.html.> Citado na página 47.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista, 8*, n. 9-10, 2001. Citado na página 22.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. de I. R. O ensino - aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. *Unión -Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 11, p. 79–97, 2007. Citado na página 17.

Apêndices

APÊNDICE A

Atividade 1: Problemas Envolvendo as Funções Polinomiais

A.1 Ficha de Atividades 1

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Tuane Gomes de O. F. de Mattos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:___________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES POLINOMIAIS

1. Rogério é pedreiro, o dia de trabalho dele é R$120,00. Sabendo dessa informação, sobre o valor do dia de trabalho de Rogério, responda:

a) Quanto Rogério vai receber se trabalhar 2 dias, 3 dias e 4 dias?

b) Qual é a função que relaciona os dias trabalhados de Rogério com seu salário?

2. Uma loja cobra R$30,00 reais por cada blusa vendida, sendo que o custo de produção de cada uma delas é de R$10,00. Se o custo mensal pela manutenção da loja é de R$160,00, responda às seguintes perguntas:

a) Quanto a loja vai receber se ela vender só 5 blusas por mês? Ela vai ter lucro ou prejuízo?

b) Qual o lucro para a venda de 20 peças por mês?

c) Quantas blusas a loja deverá vender por mês para não ter lucro e nem prejuízo?

d) Quantas blusas no mínimo a loja deverá vender por mês para não ter prejuízo?

e) Qual é a função que representa o lucro mensal dessa loja pela venda das blusas?

3. Ana possui um quarto cujo comprimento é 4 metros maior que sua largura. Com essas informações determine:

a) Qual é a função que representa o perímetro e a área do quarto de Ana;

b) Se o quarto de Ana possui 3 m de largura, determine o perímetro e a área do quarto.

4. Leandro deseja comprar uma caixa de madeira (com formato de paralelepípedo), para guardar suas ferramentas de trabalho. A caixa deve ter comprimento 5 cm maior que a largura, e altura 1 cm maior que a largura. Com essas informações, responda:

a) Se Leandro deseja forrar esta caixa com fórmica, quantos centímetros quadrados desse material serão necessários para que Leandro cubra toda a superfície da caixa?

b) Quantos centímetros quadrados de fórmica Leandro utilizará, se a caixa tiver 30 cm de largura?

c) Qual é a função que representa o volume da caixa de Leandro?

d) Determine o volume da caixa de Leandro, se a caixa possui 30 cm de largura;

5. João possui um terreno retangular cujo comprimento é 6 m maior que sua largura. O seu amigo José possui um terreno cuja área é o quadrado da área do terreno de João, mais 20 m² de área. Com essas informações, determine:

a) A função que representa a área do terreno de João;

b) A função que representa a área do terreno de José

c) Se o terreno de João possui 10 m de largura, determine a área do terreno de João e José.

APÊNDICE B

Atividade 2: Construção de Gráficos

B.1 Ficha de Atividades 2

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Tuane Gomes de O. F. de Mattos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:______________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

1. Complete as tabelas abaixo, determinando o valor numérico das funções polinomiais $f(x)$ obtidas na atividade 1 para os valores de x indicados.

Função: $f(x) = 120x$		
Valores de x	$f(x) = 120x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 20x - 160$		
Valores de x	$f(x) = 20x - 160$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 4x + 8$		
Valores de x	$f(x) = 4x + 8$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = x^2 + 4x$		
Valores de x	$f(x) = x^2 + 4x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x) = 6x^2 + 24x + 10$		
Valores de x	$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

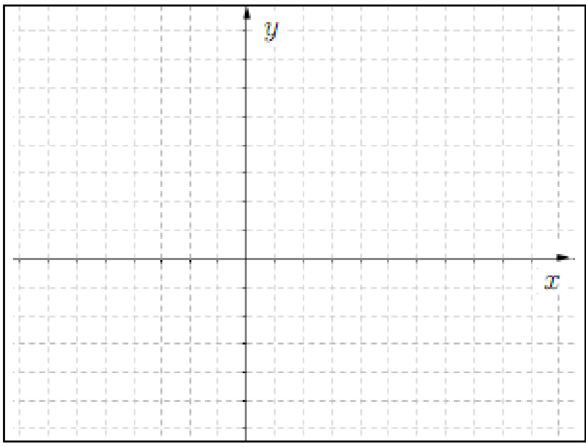
Função: $f(x) = x^2 + 6x$		
Valores de x	$f(x) = x^2 + 6x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

Função: $f(x)= x^3 + 6x^2 + 5x$		
Valores de x	$f(x)= x^3 + 6x^2 + 5x$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

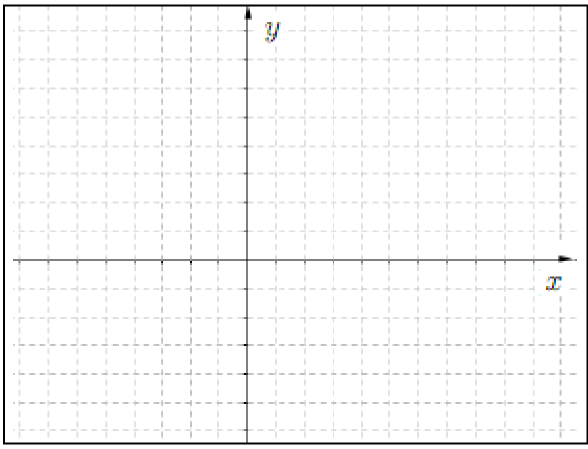
Função: $f(x)= x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$		
Valores de x	$f(x)= x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	(x, y)
$x = -2$		
$x = -1$		
$x = -\frac{1}{2}$		
$x = 0$		
$x = \frac{1}{2}$		
$x = 1$		
$x = 2$		

2. Para cada uma das funções polinomiais da Questão 1, marque os pontos (x, y)encontrados no sistema de cartesianas. A seguir, esboce (se for possível) a curva que une os ditos pontos, lembrando que:

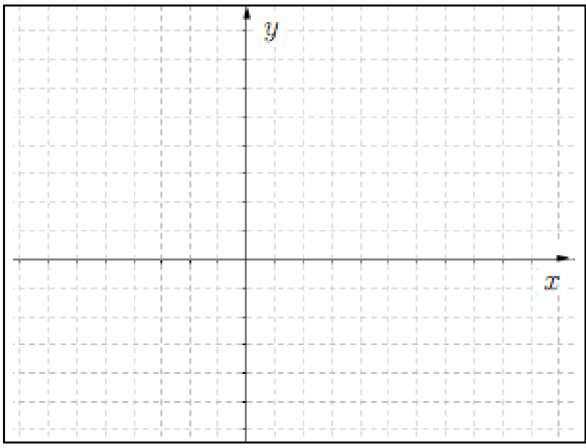
a) Se $y = f(x)$é uma função polinomial de 1° grau, então o gráfico dela é uma reta.



Função:

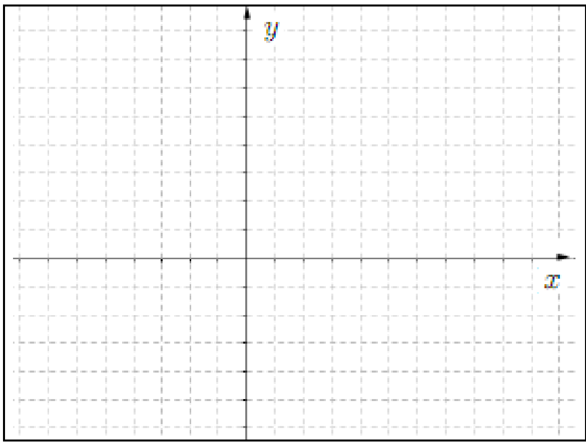


Função:

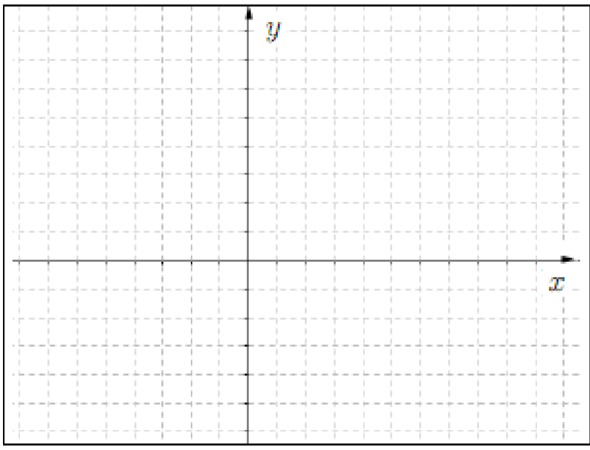


Função:

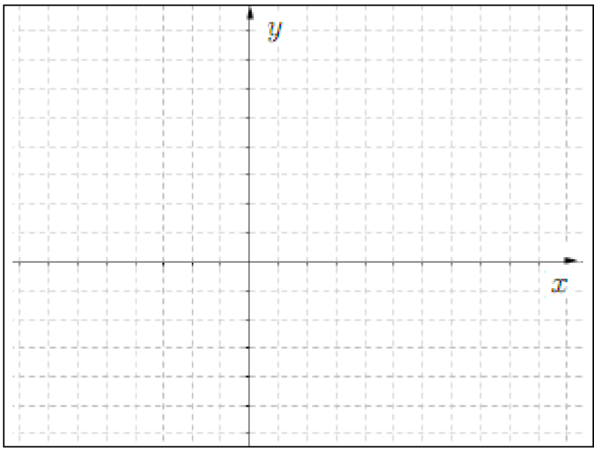
b) Se $y = f(x)$ é uma função polinomial de 2° grau, então o gráfico dela é uma parábola.



Função:

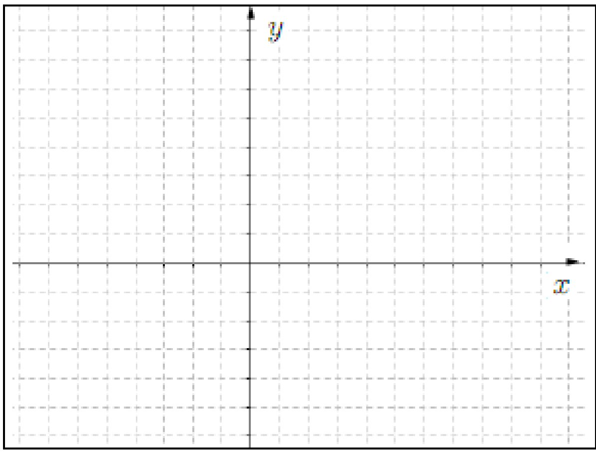


Função:

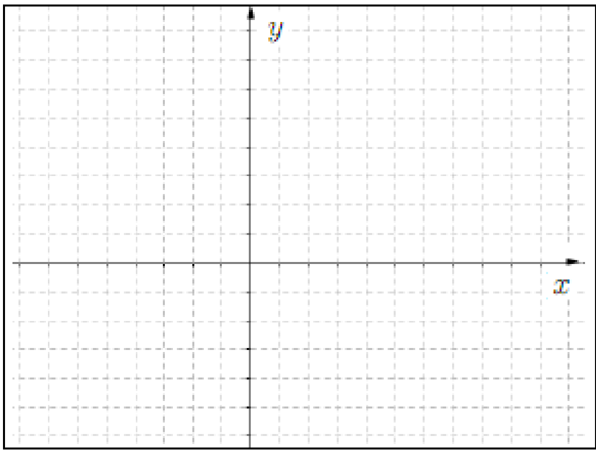


Função:

c) Se $y = f(x)$ é uma função polinomial de grau n $(n > 2)$, então o gráfico dela é uma curva contínua que corta o eixo x no máximo n vezes.

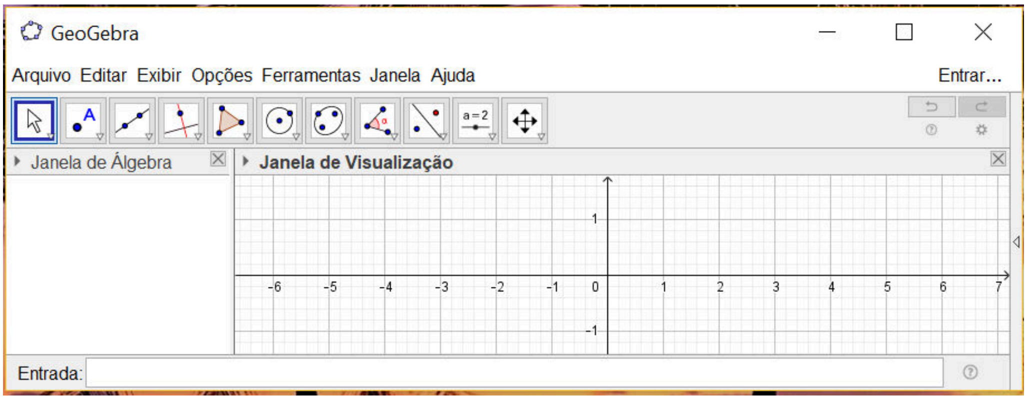


Função:



Função:

3. Construa os gráficos no GeoGebra das funções $y = f(x)$ obtidas na Atividade 1.



4. Observando os gráficos construídos no GeoGebra na Questão 3, responda:

a) O domínio de alguma das funções tem restrição? Justifique.

b) A imagem de alguma das funções tem restrição? Escreva cada $Im(f)$ completando a tabela abaixo:

Função $f(x)$	$Im(f) = \{y;\ y = f(x)$ para $x \in Dom(f)\}$
$f(x) = 120x$	
$f(x) = 20x - 160$	
$f(x) = 4x + 8$	
$f(x) = x^2 + 4x$	
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$	
$f(x) = x^2 + 6x$	
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$	
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$	

APÊNDICE C

Atividade 3: Interpretando Gráficos com o GeoGebra

C.1 Ficha de Atividades 3

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Tuane Gomes de O. F. de Mattos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:____________________________________
Grupo:_____ Turma:_______ Data:____/____/___

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

INTERPRETANDO GRÁFICOS COM O GEOGEBRA

1. A partir dos gráficos das funções polinomiais obtidos na questão 3 da atividade 2, com o auxílio do GeoGebra, identifique o intervalo em que as funções são decrescentes e crescentes.

2. A partir dos gráficos das funções polinomiais obtidos na questão 3 da atividade 2, com o auxílio do GeoGebra, determine:

a) Todos os gráficos das funções apresentam pontos máximos (M) e/ou mínimos (m) absolutos em seus respectivos domínios?

b) Complete a tabela abaixo, de acordo com os dados obtidos na letra (a):

Função $f(x)$	Tem Máximo Absoluto (M)?	Tem Mínimo Absoluto (m)?	$M = (\_, \_)$	$m = (\_, \_)$
$f(x) = 120x$				
$f(x) = 20x - 160$				
$f(x) = 4x + 8$				
$f(x) = x^2 + 4x$				
$f(x) = 6x^2 + 24x + 10$				
$f(x) = x^2 + 6x$				
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$				
$f(x) = x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 20$				

3. A partir dos gráficos das funções polinomiais construídos na Questão 3 da atividade 2 no GeoGebra, identifique o ponto em que cada gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

4. A partir dos gráficos das funções polinomiais da atividade 2 construídos no GeoGebra, determine as raízes das funções polinomiais.

APÊNDICE D

Atividade 4:Interpolação de Lagrange

D.1 Ficha de Atividades 4

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Tuane Gomes de O. F. de Mattos
Orientadora: Liliana Angelina Leon Mescua
Aluno:____
Grupo:_____ Turma:________ Data:____/____/___

PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES POLINOMIAIS

1. Um taxista cobra por uma corrida levando em consideração o número de km percorrido. João fez uma corrida de 4 km e pagou a esse taxista R$ 5,50. Maria também fez uma corrida com esse mesmo taxista. Ela andou 10 km e pagou R$ 8,50. De acordo com essas informações, identifique a função polinomial que expressa o valor cobrado pelo taxista ($p(x)$) em função dos números de km (x) percorridos e represente a função encontrada graficamente pelo GeoGebra:

2. Determine o polinômio que representa o lucro diário de uma indústria, sabendo que ela produz por dia x unidades de um produto, gerando um lucro $L(x)$ diário. Se ela vender 5 unidades em uma dia, terá um lucro diário de 11 reais. Se vender 10 unidades, terá um lucro de 76 reais. E se vender 15 unidades, terá um lucro de 191 reais. Construa o gráfico da função polinomial encontrada no GeoGebra.

3. Um artesão produz uma quantidade $Q(x)$ de colares em função do tempo x em horas gasto para a confecção destes, como mostra a tabela de produção abaixo. Determine o polinômio que representa a quantidade $Q(x)$ de colares em função do tempo x gasto na produção. Depois de encontrada a função, verifique, através do aplicativo GeoGebra, se as coordenadas dos pontos fornecidos na questão pertencem ao gráfico da função.

x	1	2	3
$Q(x)$	3	8	16
$(x, Q(x))$	(1,3)	(2,8)	(3,16)

4. Um corpo se desloca em função do seu deslocamento de acordo com a tabela abaixo. Determine a função polinomial que representa o deslocamento desse corpo e represente graficamente essa função no GeoGebra. Em seguida, verifique se o gráfico passa pelos pontos fornecidos.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	8
$(x, f(x))$	(0,1)	(1,3)	(2,5)	(3,8)