TALMO MORAES LUCAS

GRAFOS NO ENSINO MEDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

NOVEMBRO 2017

TALMO MORAES LUCAS

GRAFOS NO ENSINO MEDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES.

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **10/2018**

Lucas, Talmo Moaraes
Grafos no ensino médio : uma proposta de atividade / Talmo Moraes Lucas. – Campos dos Goytacazes, 2017.
65 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2018.
Orientador: Rigoberto Gregorio Sanabria Castro.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 60-61.
1. GRAFOS (MATEMÁTICA) 2. MATEMÁTICA (ENSINO MÉDIO) 3. REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 511.5

TALMO MORAES LUCAS

GRAFOS NO ENSINO MEDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES.

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Trabalho aprovado em 24 de novembro de 2017:

Profª. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF

Mônica Souto da Silva Dias

Profª. Mônica Souto da Silva Dias
D.Sc. - UFF

Profº. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Este trabalho é dedicado a todos que acreditam na educação como peça fundamental para mudança da nação.

Agradecimentos

Como não é possível agradecer a todos que realmente merecem agradecimentos por esse trabalho, agradeço a Deus por colocar cada pessoa em minha vida no momento correto, me dando apoio, me ensinando, me ajudando nos momentos difíceis e proporcionando momentos agradáveis, pois sem o cuidado de Deus eu não teria conseguido alcançar o que alcanço, se Deus não tivesse colocado gigantes ao meu lado eu não poderia apoiar em seus ombros para ver mais longe.

Fora do Sistema
Resgate

Preciso ser mais louco pra entender
Eu quero perder pra encontrar
Quero ser mais forte ao enfraquecer
Quero deixar de ter pra ganhar

Eu quero ser mais menos
Eu quero ter paz

Eu quero estar louco
Eu quero estar certo
Fora do sistema
Longe eu caminho mais perto

Preciso diminuir pra Ele crescer
Preciso fugir pra me encontrar
Diferente do que todo mundo quer ser
Guardar a Fé até quando Ele voltar

Resumo

O objetivo desse trabalho é inserir a teoria dos grafos no Ensino Médio junto com outros temas que já são ensinados, como conjuntos e matrizes. Apresentamos algumas representações sobre o tema grafos, bem como suas aplicabilidades, como problemas de otimização, problemas de caminhos e circuitos, representações de situações reais, entre outros. Para isso preparamos três atividades, uma para cada série do Ensino Médio, introduzindo os conceitos básicos a cerca do assunto e resolvendo alguns problemas. Buscando tornar as atividades mais atrativas ao estudante, jogos como o xadrez e dominó, além de outros assuntos mais rotineiros foram utilizados durante os problemas de cada atividade. O trabalho também possui um material de apoio ao educador que apresenta dificuldade com o conteúdo de grafos e suas definições, servindo como suporte teórico a quem tenha interesse em trabalhar com o tema na Educação Básica, mostrando ocasiões que temos contato com grafos durante o Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Grafo, Ensino Médio, Representação Semiótica.

Abstract

The purpose of this paper is to insert the theory of graphs in High School, along with other subjects that are already taught, such as sets and matrices. We present some representations on the graphs subject, as well as their applicabilities, such as optimization problems, path and circuit problems, representations of real situations, among others. In order to achieve our goals, we prepared three activities, one for each grade of the High School, introducing the basic concepts of the subject and solving some problems. In order to make the activities more appealing to the student, games like chess and domino, besides other more routine subjects, were used during the problems of each activity. The paper also has a material to support the educator who presents difficulties with the content of graphs and their definitions, serving as a theoretical support to those interested in working with the theme in basic education, showing occasions in which we have contact with graphs during Elementary and High School.

Keywords: graphs, high school, semiotic representation.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O interesse em trabalhar com grafos surgiu depois que alguns alunos apresentaram problemas de passeios, similar ao Problema das Sete Pontes de Konigsberg (1736), em que é necessário passar por vários lugares sem percorrer um mesmo caminho duas vezes. Tentando explicar rapidamente como resolver tais situações e demonstrando quando não seria possível, foi apresentada, uma argumentação muito superficial, levando a uma busca pela melhor forma de expor tal conteúdo aos alunos, ligando-o a outros conteúdos presentes dentro da sala de aula.

Um tema, como a teoria dos grafos, de tão sofisticada estrutura matemática, mas que pode ser aplicado a problemas com simples enunciados e de fácil entendimento, vem sendo cada dia mais cotado a entrar nos currículos de Ensino Médio. O estado do Espirito Santo já aponta em seu currículo básico (SEDU, 2009, p.120), dentro do conteúdo de números e operações, a introdução à teoria dos grafos para a segunda série do Ensino Médio e, para a terceira série, resolução de problemas utilizando grafos.

Porém, para a implementação de tais ideias na educação, não basta que o assunto seja inserido no currículo básico, é necessário que os professores saibam lidar com tal conteúdo, fato que nem sempre ocorre, pois grande parte não domina a teoria de grafos. Procurando saber um pouco mais sobre trabalhos que já aplicavam a teoria dos grafos no Ensino Médio, percebe-se, na pesquisa de Chagas, Silva et al. (2013, p.2) que "aproximadamente 77% dos professores pesquisados não estudaram grafos durante sua formação inicial e 87% nunca abordaram esse conteúdo durante suas aulas de matemática".

Diante desse fato, é possível concluir que boa parte desses professores não conseguem relacionar um grafo a uma tabela, uma matriz, um problema de passeio, uma questão de lógica, ou até mesmo a polígonos e poliedros, temas que estão presentes a todo momento durante as aulas de matemática.

A aplicação de recursos didáticos e relações com outras disciplinas é fundamental para a aprendizagem do educando, de forma que ele realmente entenda o conteúdo trabalhado. Segundo Duval (2009), a compreensão em Matemática está na capacidade do indivíduo de mudar de representação o mais naturalmente possível, sem perder a referência do objeto matemático. Logo, é necessário que os alunos saibam identificar que grafos podem ser apresentados em forma de diagramas, tabelas, matrizes, entre outras representações e, além disso, que eles sejam capazes de transitar entre as mesmas, procurando resolver o problema proposto.

É possível encontrar alguns trabalhos que buscam aplicar grafos no Ensino Médio. Entre eles, o trabalho de Malta (2008) se destaca, pois ela defende a aplicação da teoria segundo a resolução de problemas, sendo um pouco mais profunda que outros trabalhos por desenvolver melhor suas representações. Outros autores, como Nogueira (2015) e Mauri (2013) também focam na inserção voltada à resolução de problemas, mas se preocupam menos com as formas com as quais um grafo pode ser representado. Já Assis (2016) e Guedes (2014), apesar de trabalharem com resolução de problemas, focam suas pesquisas em grafos eulerianos e semi-eulerianos.

Diante dessas observações, o objetivo desse trabalho é apresentar a teoria de grafos aos alunos do Ensino Médio, tendo como diferencial o ensino da teoria em paralelo aos conteúdos de conjuntos na primeira série do Ensino Médio e matrizes na segunda série, finalizando com resolução de problemas na terceira série. Com isso, o tema estaria bem inserido dentro do planejamento anual da disciplina de matemática. Além disso, esse trabalho também procura retratar algumas das possíveis representações dos grafos, focando na relação entre seu uso e adequação. Assim, o aluno pode ter uma compreensão melhor a respeito do tema e o professor é capaz de incrementar sua aula.

Para alcançar o objetivo, o trabalho foi dividido em 4 capítulos, de maneira que, no primeiro capítulo, apresentou-se de forma resumida e sem rigor matemático o que são grafos, sua história, onde podem ser utilizados e que relação eles podem ter com a matemática. No segundo capítulo, foi elaborado um material para abordar a teoria dos grafos e auxiliar os professores, mostrando algumas de suas representações e definições, as quais são possíveis de serem trabalhadas durante o Ensino Fundamental e Médio. Além disso, as noções básicas necessárias para o educador ensinar e aplicar as propostas de atividades do capítulo seguinte são salientadas. No terceiro capítulo, explica-se o conceito da teoria de Duval sobre os registros de representações semióticas, proposto para o ensino de matemática, que foi utilizado para elaborar as atividades do capítulo seguinte.

No quarto capítulo, foram apresentadas as 3 atividades, uma para cada série que o educando cursa durante o Ensino Médio, a fim de proporcionar uma aprendizagem gradativa e progressiva sobre grafos, relacionada aos conteúdos programados para cada série segundo SEDU (2009). A primeira proposta, voltada para a 1ª série do Ensino Médio, inicia-se com o ensino de grafos, associando sua definição à teoria de conjuntos, com o objetivo de apresentar os elementos que compõem um grafo, introduzir alguns conceitos simples a respeito de grafos e apresentar problemas de passeios. Já na segunda proposta, voltada para a 2ª série do Ensino Médio, procura-se representar e trabalhar os grafos através de matrizes, outros conceitos também são mostrados, como grafos isomorfos, grafos valorados e grafos orientados, dando exemplos de problemas que podem ser solucionados usando tais princípios. Na última proposta, criou-se uma atividade de resolução de problemas usando grafos para a 3ª série do Ensino Médio. Nessa etapa, buscou-se abordar problemas que utilizem apenas assuntos sobre grafos relacionados nas etapas anteriores.

Capítulo 1

O que são GRAFOS?

1.1 Breve história

Nesse início já é possível fazer relações entre grafos e disciplinas de história ou geografia, afinal, grafos são usados pela humanidade há muito tempo, como para rotas marítimas ou comerciais. Entretanto, a teoria por traz dos grafos é bem mais recente, ao ponto do primeiro teorema registrado a respeito ser datado de 1736, feito por Euler para resolver um problema de rota chamado de Sete Pontes de Konigsberg.

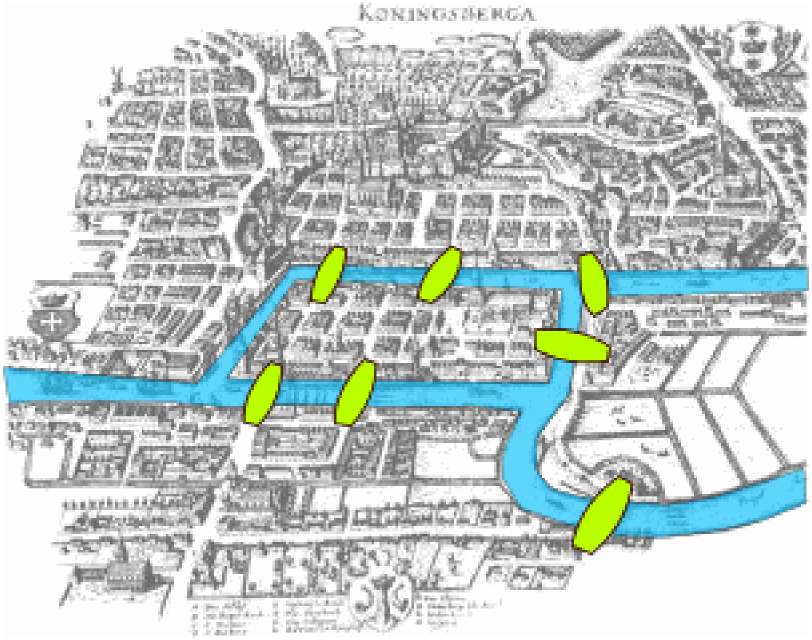
O problema em questão tratava da cidade de Konigsberg, que é cortada pelo rio Prególia, formando duas grandes ilhas. As duas margens do rio, junto com as ilhas, constituem uma região, que na época era ligada por 7 pontes, conforme a ilustração da Figura 1.

O desafio propunha se seria possível atravessar todas as pontes da cidade passando uma única vez em cada uma delas. Euler, para resolver tal problema, representou as faixas de terra como pontos e as pontes como arestas, ligando os pontos conforme ocorre na cidade de Konigsberg, gerando um esquema similar ao que se pode ver na Figura 2.

Na representação da Figura 2, feita com o GeoGebra, os pontos A e B são as ilhas e C e D são as partes de terra ás margens do rio. Já os segmentos c, d, f, g, h, i e j são as pontes, e, utilizando isso, Euler conseguiu solucionar o problema. Porém, isso foi apenas um detalhe comparado às suas contribuições para a matemática (a solução do problema das Sete Pontes de Konigsberg é mostrada em detalhes adiante). Tal solução não aparentava ter muita relevância para a ciência na época, por isso a teoria dos grafos ficou oculta por alguns anos.

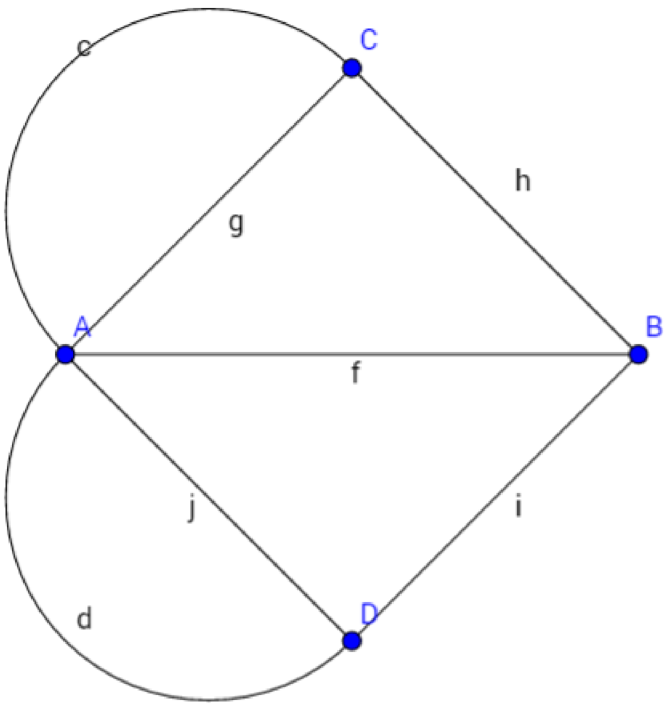
Segundo Boaventura e Jurkiewicz (2009, p.3), em 1847, Gustav Robert Kirchhoff - cientista nascido na cidade de Konigsberg (1824 a 1887) - utilizou grafos para estudar circuitos elétricos, criando então a teoria das árvores e fazendo com que outros cientistas começassem a notar a provável aplicabilidade dessa teoria.

Figura 1 – Representação da cidade de Konigsberg



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png>

Figura 2 – Modelo da cidade de Konigsberg



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A.

Dez anos depois, Arthur Cayley - matemático britânico nascido em Richmond (1821 a 1895) - utilizou a ideia das árvores em química orgânica para representar fórmulas químicas dos hidrocarbonetos, desenvolvendo uma técnica para determinar quantos isômeros diferentes possui cada hidrocarboneto.

Além desses, o irlandês William Rowan Hamilton - matemático irlandês nascido em Dublin (1805 a 1865) - em 1859, inventou um jogo que consistia na busca de uma trajetória fechada envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez, dando origem ao estudo dos grafos Hamiltonianos.

Souza (2013, p.4) aponta que,

> A partir de 1970, a teoria dos grafos teve um grande salto com o desenvolvimento acelerado dos computadores. Foi, então, que surgiram publicações referentes a algoritmos de grafos, abrindo, assim, possibilidades para utilização aplicada desta teoria.

Segundo Boaventura (2003, p.3), no Brasil, a teoria dos grafos chegou no ano de 1968 no I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, com a apresentação de alguns trabalhos. A partir daí, várias universidades começaram a realizar trabalhos de pesquisa sobre a teoria dos grafos, como UFRJ, UFF, USP, UNESP e UNICAMP. Atualmente, essas e outras universidades possuem pesquisadores voltados à teoria dos grafos.

1.2 Grafos e Modelos

Analisando melhor o que foi feito por Euler, é possível perceber que ele remodelou o problema, dando a ele uma aparência mais simples e que o auxiliou a chegar à resposta, ou seja, Euler fez um modelo do problema.

Para Boaventura e Jurkiewicz (2009, p.9),

> Um modelo é uma simplificação de uma realidade com a qual nos interessa trabalhar, construída de modo a conter aquilo que mais nos interessa e de forma que nos permita obter as respostas de que necessitamos.

Todavia, é necessário ter cuidado, pois nem todo modelo é um grafo, assim como nem todo grafo é um modelo. Grafos foram inicialmente usados como modelos que auxiliavam-na interpretação de um certo problema, dessa forma, facilitando a obtenção da resposta procurada.

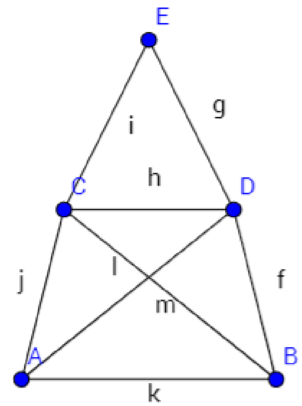
Além de Euler, Kirchhoff também utilizou modelos de grafos para representar seus circuitos elétricos, Cayley para representar seus hidrocarbonetos e, atualmente, os grafos ainda são utilizados para representar diversos problemas, como fluxogramas, sociogramas, entre outros.

Atualmente, a matemática vem sendo estudada com finalidade em si mesma, ou seja, pessoas estudam matemática e desenvolvem novos conceitos sem que isso necessariamente tenha uma aplicação na realidade. Quando alguns alunos trouxeram um problema de caminhos, por exemplo, ele não tinha nenhuma utilidade real, era apenas um desafio, uma curiosidade. O problema proposto pelos alunos é bem conhecido e similar ao problema de Euler.

Um desenho similar ao da Figura 3 foi apresentado pelos meus alunos, despertando o interesse nesse trabalho. No modelo apresentado por eles, o objetivo era reproduzi-lo sem passar mais de uma vez em cada um dos caminhos. Existem várias soluções para esse problema, e uma delas está representada na figura 4.

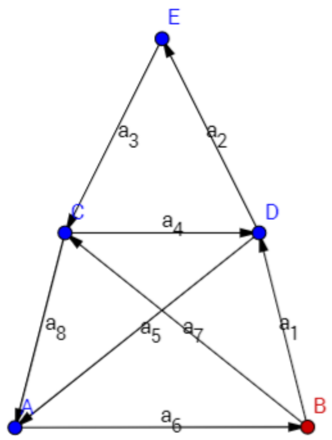
Iniciando no ponto B, conforme mostrado na Figura 4, fazendo o seguinte passeio a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 e a_8 terminando no ponto A. Uma curiosidade sobre as soluções desse problema é que todas elas começam no ponto A e terminam no B, ou começam no B e terminam no A.

Figura 3 – Problema proposto pelos alunos



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Figura 4 – Solução para o Problema proposto pelos alunos



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Como pode-se constatar, o problema proposto pelos alunos não é um modelo de nenhuma situação, mas, é possível que, com alguma busca, seja encontrada uma situação que seja representada por esse grafo.

1.3 Grafos e a Matemática

Já foi possível perceber e ter uma noção sobre o que são grafos, que eles apresentam relações com outras disciplinas, como Física e os circuitos elétricos, Química e seus modelos de representação de hidrocarbonetos, Historia com as rotas de comércio, entre outras. Mas qual é a relação entre os grafos e a Matemática?

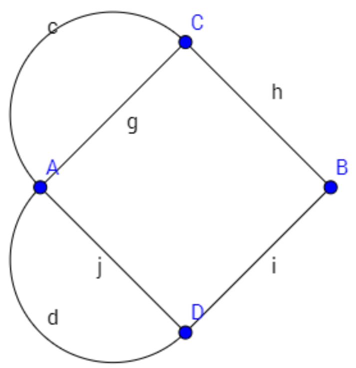
A Matemática trabalha com grafos a fim de procurar padrões entre eles, analisar situações em que os grafos possuam similaridades e formalizar, procurando teorizar tudo isso. Nesse momento, os estudantes costumam desagradar-se, mas cabe ao professor mostrar a importância disso, pois, como destacam Boaventura e Jurkiewicz (2009), a matemática permite a realização de simulações no papel, no computador ou até em laboratórios, gastando menos dinheiro, e às vezes até tempo, ao custo de um maior esforço mental.

Além disso, a Matemática,

> vai nos permitir abstrair. Ou seja, com ela poderemos estudar uma situação no mundo real, a partir de um modelo, sem que tenhamos que nos preocupar com a sua origem: de onde aquilo veio não interessa, enquanto a matemática estiver sendo usada. (BOAVENTURA; JURKIEWICZ, 2009, p.10)

Nesse ponto, deve-se ter cautela, pois, caso o modelo criado não esteja correto ou completo, as análises matemáticas não poderão ser aplicadas à situação. Pense, por exemplo, que se Euler, ao fazer seu modelo (Figura 2), não tivesse acrescentado a ponte que une as duas ilhas, as análises feitas por ele não seriam adequadas para a cidade de Konigsberg, pois o modelo criado seria conforme a Figura 5.

Figura 5 – Modelo errado de Konigsberg



Fonte: Imagem de autoria própria

As análises feitas segundo esse modelo (Figura 5) podem até ser corretas, mas não podem ser aplicadas a situação, já que o modelo não a representa corretamente. Em ambos os modelos, o correto (Figura 2) e o errado (Figura 5), não é possível passar por todas as “pontes” uma única vez e retornar à margem de partida, mas, nesse modelo errado é possível fazer um passeio que passe por todas as “pontes” uma única vez, terminando na margem oposta à de partida, situação impossível no modelo correto.

Capítulo 2

A Teoria dos Grafos

2.1 Representações de um Grafo

Segundo Duval (2011), se compreende matemática quando se consegue transitar entre representações mantendo o foco no objeto de estudo. Até agora, foram mostrados esquemas que representam grafos, mas grafos não se resumem apenas a esses esquemas, ou seja, grafo é um objeto que possui várias representações. Logo, é importante saber representá-los de diversas formas e, pra isso, é necessário compreender exatamente sua definição.

Cada representação se faz útil para uma determinada situação, como no caso de gráficos, em que existem gráficos de colunas, linhas, barras, entre outros, e cada um deles representa melhor um certo modelo, assim também são os grafos. Se há a necessidade de explicar para alguém, talvez a melhor alternativa seja um esquema, se é preciso informar um problema pode-se utilizar a escrita, se o caso requer a utilização de algoritmos computacionais, será necessário uma representação por conjuntos ou matrizes.

As representações de um grafo podem variar de acordo com o grafo que está sendo trabalhado, buscando tornar o modelo claro, objetivo e compatível com a realidade.

2.1.1 Definição de Grafo

Rosen (2009, p.589) define grafo da seguinte forma:

Definição 2.1. *Um grafo $G = (V, E)$ consiste de V, um conjunto não vazio de vértices (ou nós) e de E, um conjunto de arestas. Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela, chamados de suas extremidades. Dizemos que cada aresta liga ou conecta suas extremidades.*

A definição pura é algo muito abstrato para maioria dos alunos do Ensino Médio e, é necessário apresentar a teoria a eles de maneira um pouco mais palpável. Voltando ao problema das sete pontes de Konigsberg, em que na Figura 2 há como conjunto de vértices os pontos A, B, C e D, que representam as porções de terra da cidade de Konigsberg, já o conjunto de arestas do problema são d, c, f, g, h, i e j que representam as sete pontes.

As arestas podem ainda ser representadas de outras formas, como por exemplo a aresta c, que pode ser representada como $c = (A, C)$, já que tal aresta liga os pontos A e C, mas deve-se tomar cuidado, pois no mesmo exemplo a aresta g também liga os pontos A e C, por isso é importante diferenciá-las de alguma forma na hora de representá-las.

2.1.2 Representando grafos em forma de texto

Iniciando com um exemplo de problema:

Exemplo 2.1. *Em uma escritório, com sete funcionários, decidiu-se fazer uma pesquisa para avaliar quem deveria ser o coordenador de produção, como Gleice e Bruna eram as mais velhas na empresa, seu chefe pediu para que elas nomeassem dois possíveis candidatos ao cargo.*

Acreditando que as pessoas escolhidas por elas seriam amigos em comum das duas, seu chefe decidiu consultar um rede social, no qual todos seus funcionários fazem parte e constatou o seguinte:

- *Ana possui quatro amigos de seu trabalho nessa rede social, são eles, Bruna, Caio, Elen e Gleice;*
- *Bruna possui três amigos, Ana, Fábio e Gleice;*
- *Caio possui dois amigos, Ana e Daiana;*
- *Daiana possui dois amigos, Caio e Elen;*
- *Elen possui três amigos, Ana, Daian e Gleice;*
- *Fábio possui dois amigos, Bruna e Gleice;*
- *Gleice possui quatro amigos, Ana, Bruna, Elen e Fábio.*

Analisando essas relações de amizades, quais devem ser as duas prováveis indicações de Bruna e Gleice?

No Exemplo 2.1, a relação de amizade entre os funcionários desse escritório representa um grafo, em que os funcionários são os vértices e suas relações de amizade pela rede social são as arestas. Dessa forma o conjunto de vértices $V = \{\ Ana, Bruna, Caio, Daiana, Elen, Fabio, Gleice\}$, e o conjunto de arestas $U = \{\ (A, B), (A, C), (A, E), (A, G), (B, F), (B, G), (C, D), (D, E), (E, G), (F, G)\}$, geram o grafo $G = (V, U)$. Note que não é necessário apresentar uma aresta (B, A) por exemplo, já que foi apresentada a aresta (A, B), diferente de um caso que trabalhasse em um grafo direcionado que será visto mais adiante.

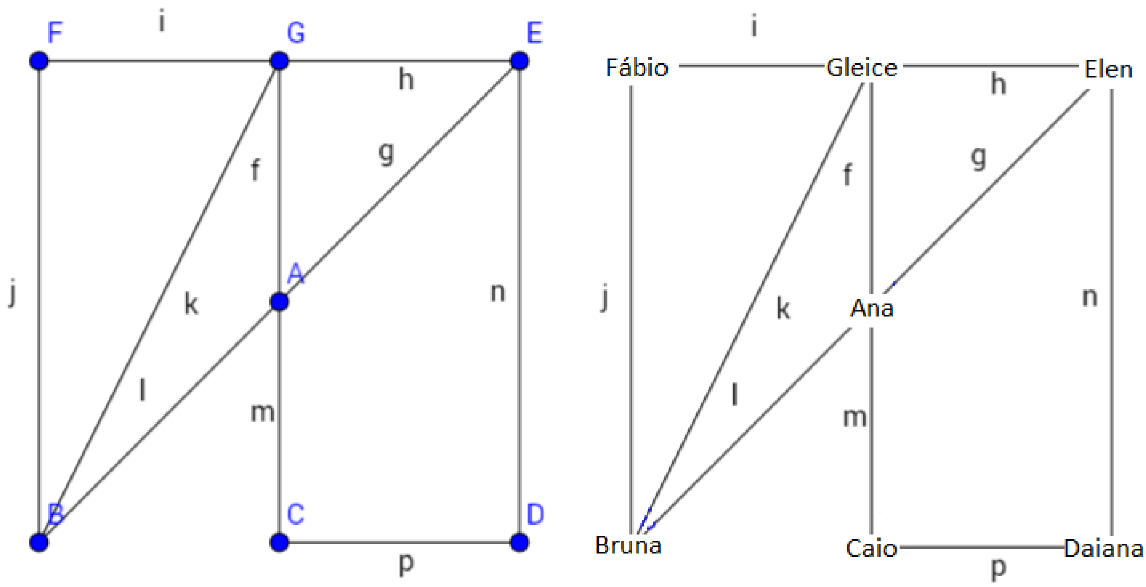
Esse é um dos casos onde pode-se identificar um grafo em um problema escrito. Note que, cabe ao leitor identificar que se trata de um grafo, por isso, estudantes apresentam grandes dificuldades em transitar de problemas escritos a outros modelos, já que é preciso procurar particularidades da matemática em meio ao texto, criando, assim, um modelo correto para o tratamento da situação.

2.1.3 Representando grafos por esquemas ou diagramas

A representação por meio de esquemas ou diagramas talvez seja a representação mais usada para grafos, mas lembre-se de que grafo não é apenas isso. Conforme Boaventura e Jurkiewicz (2009) salientam, muitas vezes, é necessário o uso de computadores para resolver problemas com grafos, e eles não trabalham com desenhos diretamente.

Na representação por diagramas, pontos são normalmente usados para representar os vértices e segmentos de retas para representar as arestas. Mas, é possível representar os vértices e as arestas de outras formas quando esses diagramas são construídos, como no exemplo da Figura 6.

Figura 6 – Contatos em uma rede social



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Os modelos da Figura 6 representam os contatos em uma rede social, do Exemplo 2.1, e em uma delas os pontos A, B, C, D, E, F e G foram substituídos pelos nomes das respectivas pessoas, Ana, Bruna, Caio, Daiana, Elen, Fábio e Gleice. Na situação as arestas representam quem tem uma amizade pela rede social, tornando simples a determinação de quem são os amigos em comum de Bruna e Gleice, ou seja, os vértices que tem ligação com B e G. No esquema, pode-se verificar que A e F são os pontos procurados, o que significa que, Ana e Fábio são os amigos em comum que estávamos procurando.

Uma aresta não precisa ser, necessariamente, um segmento de reta. Na Figura 2, foram utilizadas semi-circunferências como arestas, já que era necessário fazer duas arestas ligando dois vértices.

Nesse trabalho, serão utilizados, principalmente, esquemas feitos apenas com pontos para representar os vértices, e segmentos de retas, semi-circunferências e, em alguns casos, vetores para representar as arestas, pois a maior parte desses diagramas foi desenhado utilizando o Software GeoGebra.

2.1.4 Representando grafos por conjuntos

A representação por conjuntos pode ser de grande utilidade para transpor o problema para um computador, a fim de criar algoritmos para sua solução. Nessa representação, a preocupação constitui em fazer um conjunto para cada vértice, em que os elementos desse conjunto são os vértices adjacentes ou vizinhos, ou seja, vértices que estão ligados por, pelo menos, uma aresta (ver em Definição 2.3 mais adiante)

Veja como fica o Exemplo 2.1 na representação de conjuntos.

- $A = \{B, C, E, G\}$
- $B = \{A, F, G\}$
- $C = \{A, D\}$
- $D = \{C, E\}$
- $E = \{A, D, G\}$
- $F = \{B, G\}$
- $G = \{A, B, E, F\}$

Nessa representação, a resposta para o Exemplo 2.1 seria a intersecção do conjunto B com o conjunto G, ou seja, os elementos A e F. É possível também representar os conjuntos de arestas de cada vértice, assim, o Exemplo 2.1 ficaria da seguinte forma:

- $A = \{f, g, l, m\}$
- $B = \{j, k, l\}$

- $C = \{m, p\}$
- $D = \{n, p\}$
- $E = \{g, h, n\}$
- $F = \{i, j\}$
- $G = \{f, h, i, k\}$

Nesse caso, ambas as representações são satisfatórias, apesar de que a solução é mais simples de ser encontrada na primeira representação, quando representou-se os conjuntos da vizinhança(ver Definição 2.4 mais adiante) de cada vértice. Basta uma única intersecção entre dois conjuntos para obter-se a resposta. No entanto, a representação dos conjuntos de arestas de cada vértice torna-se necessária quando existem arestas múltiplas (será apresentado mais adiante) em um grafo, como ocorre no grafo da Figura 2.

2.1.5 Representando grafos por matrizes ou tabelas

Nesse modelo de representação cria-se vetores para cada vértice, em que os elementos desses vetores demonstram as ligações entre o vértice representado pelo vetor e cada vértice que possui o grafo. Por exemplo, o vetor referente ao vértice A do Exemplo 2.1 ficaria da seguinte forma:

$$A = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

Nesse exemplo o valor 0 significa que não há ligação entre o vértice representado pelo vetor e o vértice representado pela posição do número, já o valor 1 significa que há uma aresta que liga os dois vértices. Veja a Tabela 1.

Tabela 1 – Representação do Exemplo 2.1.

Vértices	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	0	1	0	1
B	1	0	0	0	0	1	1
C	1	0	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0
E	1	0	0	1	0	0	1
F	0	1	0	0	0	0	1
G	1	1	0	0	1	1	0

Esse modelo é chamado de matriz de adjacência, e através dele é possível também representar a ligação com outro valor além de 1, quando, por exemplo, as arestas representam o caminho entre duas cidades. Nesse caso, pode-se utilizar o comprimento desse caminho. Quando um grafo recebe valores diversos, esse grafo é chamado de valorado(ver Definição 2.14 mais adiante); a matriz, por sua vez, é chamada de matriz de valores das ligações ou simplesmente matriz de valores como destacam Boaventura e Jurkiewicz (2009).

Existe também a matriz de incidência, que é especialmente útil quando há a necessidade de representar grafos orientados (ver Definição 2.13 mais adiante), grafos cujas arestas de ligações podem ir de um vértice A a um vértice B, mas nem sempre o contrário, como no caso de uma rua que vai em um único sentido. Veja o exemplo da Figura 4.

Na matriz de incidência, cada linha representa um vértice e cada coluna representa uma aresta. Caso o grafo não seja orientado, basta marcar com 1 as duas posições em cada coluna que representa os vértices que as arestas ligam. No caso de grafos orientados, representa-se com +1 o vértice que a aresta sai e com -1 o vértice que ela chega.

Apesar de um tanto confusas quando comparadas às demais representações, as tabelas são muito úteis quando precisa-se utilizar recursos computacionais. Tal representação se assemelha muito com a representação por conjuntos, já que cada linha ou coluna da matriz se assemelha com o conjunto de vértices adjacentes.

2.1.6 Outras representações

É possível encontrar outras formas de representar grafos, que não serão tratadas nesse trabalho, seja por se parecerem com alguma dessas representações citadas, ou até mesmo pela falta de material que apresente ligação ao Ensino Médio. Além disso, as representações já citadas sofrem várias adaptações para se modelar aos grafos correspondentes.

Lembre-se, sempre que for possível apresentar um modelo que cumpra com a definição de grafos, será uma nova representação e suas definições, teoremas, conceitos e tudo mais a respeito de grafo pode ser aplicado a esse modelo.

2.2 Conceitos básicos a respeito de Grafos

O trabalho tratará agora da teoria dos grafos e algumas definições e conceitos importantes para se trabalhar no Ensino Médio.

Grafos possuem várias características e classificações, que possibilitam diferenciá-los e estudá-los, como no caso dos grafos orientados e não orientados. Vejamos algumas delas:

- Grafo simples: um grafo no qual cada aresta conecta dois vértices diferentes e duas arestas nunca conectam o mesmo par de vértice. (ROSEN, 2009, p.590) Ex: Figura 3.

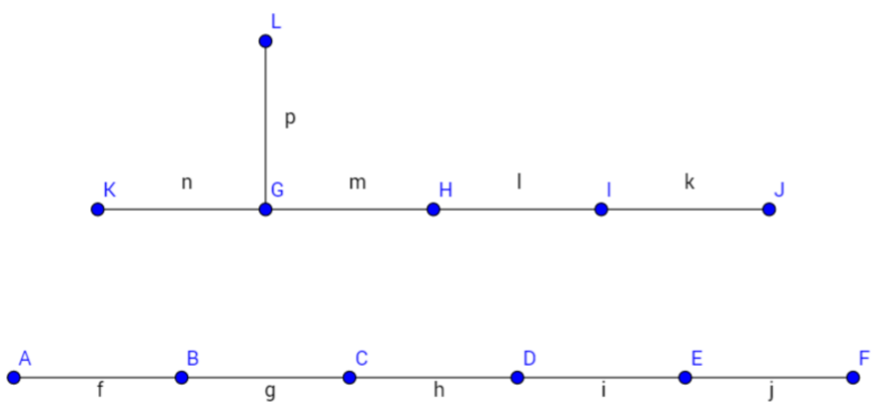
- Arestas múltiplas: mais de uma aresta conectando o mesmo par de vértices. (ROSEN, 2009, p.590) EX: Arestas que unem os vértices A e C, ou que unem os pontos A e D na Figura 2.
- Multigrafo: grafos que apresentam arestas múltiplas. (ROSEN, 2009, p.590)
- Laços: arestas que conectam um vértice a sí mesmo. (ROSEN, 2009, p.590)
- Ordem: número de vértices de um grafo. (CARDOSO, 2005, p.3)
- Dimensão: número de arestas de um grafo. (CARDOSO, 2005, p.3)

A ordem e a dimensão de um grafo são importantes quando trata-se de análise combinatória, já que uma das formas de solucionar problemas envolvendo grafos é fazer por meio de um computador suas várias possibilidades. Nesse caso, a ordem e a dimensão de um grafo determinam a quantidade de possibilidades possíveis, permitindo, assim, calcular a quantidade de possibilidades para determinadas situações.

Cayley, como já citado, utilizava modelos de grafos para representar estruturas de hidrocarbonetos, estruturas formadas de moléculas de carbono e hidrogênio. Nesse ponto é possível fazer um ligação com a química, considerando que o carbono tem valência 4, ou seja, pode fazer 4 ligações, enquanto o hidrogênio pode fazer apenas 1 ligação, Cayley fez representações nas quais os vértices eram os átomos de carbono e as arestas as ligações entre esses átomos, não sendo necessário representar os hidrogênios, já que eles se ligavam aos carbonos a fim de completá-los.

É possível obter compostos diferentes com mesma fórmula condensada, que são chamados de isômeros. Na Figura 7, serão mostrados dois exemplos do Hexano (C_6H_{14}), mas existem no total 5 isômeros.

Figura 7 – Isômeros do Hexano



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

É interessante que o professor paça para que os alunos encontrem os outros isômeros como forma de praticar o conteúdo. Com uma técnica para determinar a quantidade de isômeros dos hidrocarbonetos, Cayley descobriu que o tridecano ($C_{13}H_{28}$) possui 802 representações, o que não significa que ele fez uma a uma para descobrir esse número. Tais contas foram possíveis utilizando apenas a ordem e a dimensão dos grafos.

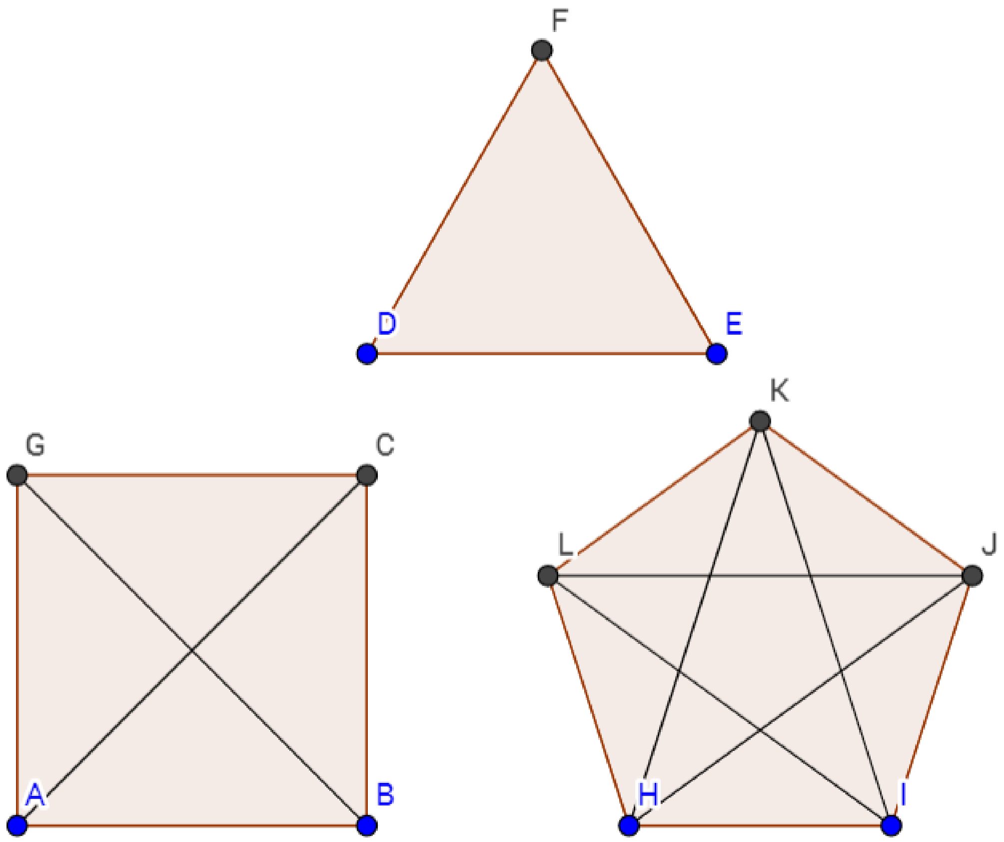
2.2.1 Grafo Completo

Rosen (2009, p.601) define grafo completo como:

Definição 2.2. *Grafo simples que contém exatamente uma aresta entre cada par de vértices distintos.*

Pode-se relacionar essa definição para o aluno com um polígono convexo com todas as suas diagonais, mas lembrando que nem todo grafo completo é um polígono. Veja o exemplo de alguns polígonos com todas as diagonais na Figura 8.

Figura 8 – Polígonos com Diagonais



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

É interessante fazer tal relação pois, a partir disso, é possível pedir ao aluno para calcular a dimensão de um grafo completo sabendo sua ordem ou, ao contrário, calcular sua ordem sabendo sua dimensão. Para isso, basta o aluno lembrar como calcular o número de diagonais de um polígono convexo, veja o exemplo do pentágono:

A ordem de um pentágono é sempre 5 e a quantidade de diagonais de qualquer polígono convexo é dada pela formula $d = n(n-3)/2$, em que d é o número de diagonais e n é o número de vértices do polígono. Logo, para o pentágono, tem-se $d = 5(5-3)/2 = 5$, ou seja, o pentágono possui 5 diagonais. Como o número de lados de qualquer polígono é igual ao número de vértices, tem-se também 5 lados, o que contabiliza um total de 10 arestas para o grafo, como pode ser visto na Figura 8.

Apesar de útil, essa forma de calcular a dimensão de um grafo não é a mais fácil. Observe a representação do pentágono em forma de matriz adjacência na Tabela 2.

Tabela 2 – Grafo que representa o pentágono

Vértices	H	I	J	K	L
H	0	1	1	1	1
I	1	0	1	1	1
J	1	1	0	1	1
K	1	1	1	0	1
L	1	1	1	1	0

Nesse caso, basta somar todos os elementos dessa matriz e dividir por dois, já que, ao somar, conta-se cada aresta duas vezes, pois contabiliza-se, por exemplo, a aresta $A = (H, I)$ e a $A = (I, H)$, mas ambas são a mesma aresta.

Trabalhando com a matriz associada ao grafo, não surgem problemas quando existem arestas múltiplas, já que basta alterar o valor de 1 para o valor da multiplicidade dessa aresta. Vejamos na Tabela 3, que representa o grafo da Figura 2, onde encontram-se arestas duplas entre os vértices A e C e entre A e D. Como a multiplicidade é 2, deve-se colocar 2 nas posições que representam a união desses vértices. Novamente, se todos os elementos dessa matriz forem somados e dividirmos por 2 a dimensão desse grafo será encontrada.

Tabela 3 – Grafo que representa a Figura 2

Vértices	A	B	C	D
A	0	1	2	2
B	1	0	1	1
C	2	1	0	0
D	2	1	0	0

No caso em que o grafo tenha algum lacete, é interessante somar apenas a matriz diagonal superior ou inferior associada ao grafo e não mais dividir por dois, pois quando somam-se todos os elementos da matriz, os lacetes não são somados duas vezes, pois eles aparecem na diagonal principal da matriz.

É possível perceber que, nas tabelas apresentadas para representar a matriz de incidência de um grafo, todos os elementos da diagonal principal são sempre 0, pois ainda não foi mostrada nenhuma matriz com lacetes nesse trabalho.

É interessante ainda analisar grafos completos na forma de matrizes, pois eles sempre geram matrizes em que todos os elementos fora da diagonal principal são não nulos. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n, na Figura 8 há exemplos de K_3, K_4 e K_5.

2.2.2 Relações entre vértices e arestas

É necessário compreender algumas terminologias básicas que descrevem os vértices e arestas de um grafo não orientado, antes de avançar. Vejamos então a definição apresentada por Rosen (2009, p.598)

Definição 2.3. *Dois vértices u e v em um gafo não orientado G são ditos adjacentes (ou vizinhos) em G se u e v são extremidades de uma aresta de G. Se e estiver associado a $\{u, v\}$, a aresta e é dita incidente aos vértices u e v. Diz-se também que a aresta e conecta u e v. Os vértices u e v são chamados de extremidades de uma aresta associada a $\{u, v\}$.*

Dessa forma, é possível entender a definição de vizinhança apresentada por Cardoso (2005, p.5)

Definição 2.4. *O conjunto de vértices adjacentes a um vértice v designa-se vizinhança de v (ou conjunto de vizinhos de v).*

Essa noção de vizinho pode ser útil na solução de alguns problemas, como no Exemplo 2.1, quando buscou-se as indicações de Bruna e Gleice e representou-se o conjunto de vértices vizinhos a outro vértice, simplesmente foi procurada a intersecção dos conjuntos B e G, como visto na Seção 2.1.4.

2.2.3 Grau de um vértice e grafos eulerianos

Agora que algumas terminologias a respeito de das relações entre vértices e arestas foram apresentadas, pode-se compreender o que á grau de um vértice.

Definição 2.5. *O grau de um vértice de um grafo não orientado é o número de arestas incidentes a ele, exceto que um laço em um vértice contribui duas vezes as grau daquele vértice. O grau de um vértice v é indicado por gr (v). (ROSEN, 2009, p.598)*

A definição de grau de um vértice permite que se chegue ao teorema do aperto de mãos, que diz o seguinte.

Teorema 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado com e arestas. Então a soma dos graus de cada vértice v pertencente a G é igual ao dobro da quantidade de arestas e.*

Esse teorema é muito simples, pois, ou a aresta contribui para o grau de dois vértices, ou a aresta contribui duas vezes para o mesmo vértice, caso ela seja um laço.

Observe o exemplo de um grafo completo que possui 4 vértices. Nesse caso, cada vértice tem grau 3, pois deve ser adjacente a cada outro vértice. Se forem somados os graus de cada um desses vértices temos $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Pelo teorema do aperto de mãos, a quantidade de arestas deve ser igual a $12/2 = 6$. Veja o quadrado da Figura 8.

O grau de um vértice é também importante para identificar grafos eulerianos e semi-eulerianos, pois todo grafo euleriano possui todos seus vértices com graus pares e, se for semi-euleriano, deve possuir exatamente 2 vértices de grau ímpar.

Veja então algumas definições para entender o que são grafos eulerianos, conforme aponta Gonçalves et al. (2007, p.30 e 31).

Definição 2.6. *Passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e acaba com vértices, tal que, quaisquer dois elementos consecutivos, nessa sequência, são incidentes. Caso o primeiro e o último vértice dessa sequência sejam o mesmo, dizemos que é um passeio fechado.*

Definição 2.7. *Um passeio que não repete arestas é chamado de Atalho.*

Definição 2.8. *Um passeio que não repete vértices é chamado de caminho.*

Definição 2.9. *Um passeio fechado que passa por todas as arestas é chamado de circuito.*

Definição 2.10. *Um atalho que passa por todas as arestas é chamado de atalho de Euler.*

Definição 2.11. *Um atalho fechado que passa por todas as arestas é chamado de circuito de Euler*

Sabendo disso, chama-se de grafo euleriano todo grafo que possui um circuito de Euler (ou circuito euleriano), grafos semi-eulerianos são grafos que não contém um circuito euleriano mas contém um atalho de Euler.

Segundo essas definições, pode-se identificar grafos eulerianos e entender como Euler foi capaz de constatar que era impossível passar por todas as pontes da cidade de de Konigsberg passando apenas uma vez por cada ponte. O grafo que modela o problema de Konigsberg possui 4 vértices, todos de grau ímpar, logo, não existe um circuito de Euler nele (veja Figura 1).

2.2.4 Grafos Isomorfos

Grafos isomorfos são especialmente úteis em física elétrica, quando trabalha-se com circuitos elétricos. Já que as representação de circuitos elétricos são feitas em forma de diagramas, e conforme esse diagrama é feito, isso pode facilitar ou dificultar o entendimento e a resolução de um problema. Vejamos o que é grafo isomorfo segundo Feofiloff (2012, p.61):

Definição 2.12. *Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção f de V_G em V_H tal que, para todo par (v, w) de elementos em V_G, v e w são adjacentes em G se e somente se $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H.*

Ou seja, *quando dois grafos simples são isomorfos, existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois grafos que preserva a relação de adjacência* (ROSEN, 2009, p.615).

Na relação de circuitos elétricos com grafos isomorfos, o objetivo é refazer o diagrama que representa um circuito elétrico sem alterar a forma como o circuito funciona, mas facilitando o entendimento do caminho da corrente elétrica nele.

2.2.5 Grafo orientado

Grafos orientados, também chamados de dígrafos, são utilizados quando representa-se um caminho que possui apenas um sentido, como é o caso do grafo da Figura 4, apresentado como resposta do problema de passeio do grafo da Figura 3. Pode-se perceber que, na Figura 4, as arestas que ligam os vértices tem indicações de onde saem e para onde vão, simbolizando que não é possível fazer o caminho contrário.

> Nesses casos, usamos uma flecha que indica o sentido do percurso e as arestas passam a ser denominadas de arcos. O grafo passa a ser então um dígrafo ou grafo orientado.(FARIAS, 2014, p.19).

Definição 2.13. *Um grafo orientado (ou digrafo) (V, E) consiste em um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas orientadas (ou arcos) E. Cada aresta orientada está associada a um par ordenado de vértices. É dito que aresta orientada associada ao par orientado (u, v) começa em u e termina em v. (ROSEN, 2009, p.591)*

2.2.6 Grafo valorado

Em alguns casos, os caminhos que ligam os vértices têm valores diferentes uns dos outros, então deve-se atribuir valores às arestas do grafo. Nesse caso dizemos que o grafo é um grafo valorado, veja a Figura 17.

Definição 2.14. *Grafo valorado é todo grafo que suas arestas apresentam valores.*

Capítulo 3

Representações semióticas e o ensino de grafos

Para elaboração das atividades, usou-se como base a teoria das representações semióticas de Raymond Duval, que mostra a matemática como uma língua que possui suas próprias regras e peculiaridades.

A matemática utiliza métodos de representação que são os gráficos, expressões algébricas, tabelas, matrizes, diagramas, entre outros, que dentro de um contexto matemático tem seus significados.

Porém, para pessoas que não os conhecem, é como tentar ler uma frase escrita fora da língua natural. Dessa forma, a dificuldade encontrada por alguns alunos na disciplina de matemática pode estar ligada, especificamente, a uma falta de compreensão da mesma, pois segundo Duval (2011, p.9) (2011, p9)

> os problemas específicos de compreensão que os alunos enfrentam na aprendizagem da matemática têm sua origem na situação epistemológica particular do conhecimento matemático, e não somente nas questões de organização pedagógica das atividades.

A matemática é como uma língua, com suas regras e características, e nem sempre os alunos apresentam conhecimento desta linguagem. Por isso, percebe-se uma grande dificuldade na compreensão e resolução de problemas matemáticos. Além disso, os objetos matemáticos, que nesse trabalho são os grafos, são apresentados aos alunos de maneira diferente dos objetos de outras disciplinas, Duval (1995 apud FEIO, 2009, p.4) ainda afirma;

> a compreensão em Matemática implica na capacidade que um sujeito deve ter de mudar de registros o mais naturalmente possível, mantendo-se em referência o mesmo objeto matemático denotado.

Por isso, é fundamental trabalhar as diversas formas de representação de um objeto matemático, a fim de proporcionar ao aluno uma total compreensão do mesmo, e, para tal, buscou-se tratar a teoria dos grafos com várias representações.

Como já apresentado no capítulo anterior, o trabalho mostra a representação de grafos na forma textual, através de esquemas e diagramas, conjuntos e matrizes. Cada uma delas apresenta suas particularidades, sendo todas importantes, pois, para cada situação, um modelo pode ser melhor que o outro quando deseja-se fazer alguma análise.

O ensino de Matemática trabalha constantemente com mudanças de registro, ou seja, mudanças de representação, como aponta Duval (2009, p.63)

> Basta abrir qualquer manual de matemáticas para constatar, na mesma página, vai-e-vens incessantes entre frases em língua natural, fórmulas literais, expressões em língua formal, figuras geométricas ou gráficos cartesianos.

Essas mudanças são, muitas vezes, necessárias para representar, entender e *tratar* um problema. Tratar um problema, segundo Duval (2009, p.57), *é uma representação interna a um registro de representação ou a um sistema.* Ele ainda exemplifica com o cálculo de uma operação, que altera a escrita da expressão seguindo o mesmo registro de escrita.

Duval (2009, p.39) ainda aponta a dificuldade em distinguir conversão de tratamento e esclarece dizendo,

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro.

Quando é realizada uma conversão em um problema, é importante fixar o objeto de estudo, pois, independentemente do registro, o objeto não pode ser alterado, caso contrário, as conclusões obtidas serão insatisfatórias.

Para exemplificar, voltemos ao problema das sete pontes de Konigsberg. Com a utilização de um esquema conforme a Figura 2, pode-se tentar todas as possibilidades de fazer um circuito de Euler nele e chegar à conclusão de que não é possível. Nesse caso o esquema é a representação do objeto, fazer o desenho do esquema é a conversão, e as tentativas de fazer o desenho obedecendo as regras de funcionamento de um circuito de Euler é o tratamento.

Caso a conversão não tenha sido feita corretamente, como no caso do esquema da Figura 5, se esse objeto for tratado, tentando fazer um circuito de Euler, novamente não seria possível. No entanto, essa conclusão não é válida para o objeto de estudo, mesmo que o tratamento esteja correto, pois a conversão está incorreta.

Supondo ainda que que a pessoa faça outra conversão e represente o grafo da Figura 5, segundo o grau de cada vértice, teríamos $A = (4), B = (2), C = (3), D = (3)$.

Nesse caso também pode-se analisar cada vértice e verificar que não se trata de um grafo euleriano, sendo porém um grafo semi-euleriano, pois tem-se apenas 2 vértices de grau ímpar. Novamente, o tratamento está correto, mas, devido à primeira conversão errada, a resposta não é válida para o objeto de estudo, pois o grafo correto das pontes de Konigsberg não chega a ser nem semi-euleriano.

O erro durante a conversão de um objeto é muito comum, seja por falta de atenção ou por dificuldade em trabalhar com a representação requerida para a situação, diante. Disso, Duval (2009, p.66) afirma que,

> Para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso começar por segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência. Ao final dessa segmentação comparativa, pode-se então ver se as unidades significantes são, em cada um dos dois registros, unidades significantes simples ou combinações de unidades simples.

Em outras palavras, quando procura-se fazer a mudança de representação de um grafo, acaba-se por escrever outro grafo. Para que essas representações sejam congruentes é necessário que esses grafos sejam isomorfos.

Se supormos que um aluno, ao tentar resolver o problema das sete pontes de Konigsberg, tenha feito o modelo da Figura 5, quando analisarmos o problema e procurarmos o isomorfismo entre o grafo da situação e o desenhado, veremos que, na situação, as ilhas são adjacentes e no problema não, logo, essas representações não são congruentes.

Duval (2009, p.78) percebe que, *as dificuldades ligadas à não-congruência da conversão podem ainda ser agravadas pelo desconhecimento de um dos dois registros de representação.* Diante disso, vemos a necessidade do conhecimento prévio na aplicação das atividades, já que um estudante pode não conseguir representar um grafo por meio de um conjunto por não saber o que são conjuntos.

Outra questão importante, tratada por Duval (2011, p.47), é como reconhecer um mesmo objeto em representações diferentes. Ele aponta que podemos considerar duas representações como sendo objetos diferentes, quando, na verdade, essas representações se relacionam ao mesmo objeto, ou, ao contrário, podemos considerar duas representações como sendo de um mesmo objeto quando elas representam objetos diferentes.

A razão dessa dificuldade é destacada por Duval (2011, p.47), pelo fato de que diferentes representações não deixam explícita a mesma coisa do objeto que elas representam. Veja o problemas das sete pontes de Konigsberg e o problemas do Exemplo 2.1: ambos tratam de um grafo, porém, o objetivo de cada um deles é diferente. Logo, um estudante que utiliza grafos apenas para resolver problemas de passeio, pode não perceber que o problema do Exemplo 2.1 também se trata de um grafo.

Capítulo 4

Propostas para trabalhar com Grafos no Ensino Médio

Foram preparadas três atividades relacionadas à conteúdos abordados durante o Ensino Médio. As atividades são destinadas aos educadores que procuram introduzir alguns conceitos de grafos a seus alunos. Apesar da busca por trazer as atividades de forma simples e educativa, é interessante que o educador que tente usar essas propostas tenham compreensão dos termos e conceitos de grafos, pois, caso seja necessário, cabe ao educador intermediar o conhecimento ao seu aluno.

As atividades foram pensadas para que os alunos compreendam algumas representações de grafos e saibam transitar entre elas. Além disso, é bom que as atividades sejam trabalhadas em sequência, pois alguns assuntos abordados em uma atividade posterior podem ter sido explicados na anterior. Caso o educador queira aplicar alguma atividade fora da sequência, é importante que ele defina alguns tópicos a respeito de grafos, já que seus alunos podem não possuir o conhecimento necessário para o desenvolvimento da mesma. Para isso, apontamos no início de cada atividade, os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade.

4.1 Atividade com grafos e conjuntos - 1ª Série do Ensino Médio

Como a própria definição de grafos já propõe (ver definição 2.1), grafos são formados por conjuntos de vértices e arestas. Portanto trabalhar as operações de conjuntos utilizando grafos é interessante, pois ajuda a fixar a definição desse objeto matemático entendendo um pouco melhor sua representação por conjuntos.

Objetivo: Introduzir o estudo de grafos, apresentando o que é um grafo e os elementos que o compõe (vértices e arestas), além de introduzir alguns conceitos relacionados a grafos, como arestas paralelas ou múltiplas, multiplicidade de uma aresta, multigrafo, ordem e dimensão de um grafo e apresentar o que são grafos isomorfos, vértices vizinhos e vizinhança.

Público Alvo: Essa atividade foi projetada para ser desenvolvida com alunos da 1ª série do Ensino Médio, logo após o conteúdo de conjuntos, mas pode ser trabalhada em outro nível de ensino, desde que o público alvo cumpra os pré-requisitos.

Pré-requisitos: Nessa atividade usa-se noções básicas de conjunto, como união e intersecção, logo, é necessário que os educandos tenham um conhecimento básico acerca de conjuntos. Também é necessário que o educador saiba os conteúdos acerca de grafos, propostos no objetivo da atividade, para que ele saiba identificar e corrigir corretamente os educandos durante a atividade.

Materiais e tecnologias: Essa atividade pode ser trabalhada utilizando apenas a lousa e pinceis, com os alunos realizando as atividades no caderno, porém, um material impresso, ou até mesmo o auxilio de um computador com o software GeoGebra, ajuda consideravelmente no tempo de realização da atividade.

Recomendações metodológicas: Como algumas das respostas dessa atividade são progressivas, ou seja, na pergunta anterior há um conhecimento necessário para a pergunta seguinte, essa atividade foi planejada para ser trabalhada como uma espécie de debate, no qual os educandos devem ter um tempo para responder cada pergunta, e, em seguida, o educador apresentará a resposta explicando-a.

Dificuldades Previstas: É comum os alunos apresentarem dificuldades com nomenclaturas, por isso, pode ser necessário que o educador relembre alguns termos durante a atividade, principalmente os relacionados a grafos, já que deve ser a primeira vez que os educandos trabalham com essas nomenclaturas.

Descrição geral:

A atividade foi planejada para utilizar 3 aulas de 55 min não sequenciais, levando em conta que o professor deve perder parte do tempo de suas aulas para fazer seus registros de presença e conteúdo. A 1ª aula será utilizada para a apresentação dos conceitos acerca de grafos. Nela, é considerado um tempo longo para a resposta dos alunos, já que pode ser o primeiro contato deles com o assunto. A segunda aula será utilizada para terminar a apresentação dos conceitos que faltaram e apresentar uma situação que relaciona grafos com o cotidiano e que ajuda a fixar o conteúdo. Por fim, a 3ª aula será para encerrar a atividade e, caso sobre tempo, propor algum problema relacionado aos possíveis desdobramentos. As perguntas da atividade devem ser lançadas aos poucos, já que o tema deve ser novo para o educando e, por isso, é necessário que ele acompanhe a explicação de alguns termos.

Apresentação da atividade

1ª Aula

Vejamos um modelo de grafo que representa a cidade de Konigsberg similar ao que Euler utilizou para resolver o problema das sete pontes de Konigsberg (Figura 2). As linhas que ligam os pontos no esquema dessa figura são chamadas de arestas, enquanto os pontos são chamados de vértices. Sabendo disso:

- Determine o conjunto de vértices (V) e o conjunto de arestas (A) que compõe esse grafo.

  Resposta: $V = \{A, B, C, D\}$ *e* $A = \{c, d, f, g, h, i, j\}$

Esses conjuntos, $G(V, A)$, são chamados de grafo em que V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas. Vejamos agora algumas relações entre as arestas:

- Tente determinar uma semelhança entre as arestas c e g e verifique se mais algum par de arestas apresentam essa semelhança.

  Resposta: As arestas c e g ligam os mesmos vértices A e C, é possível ver essa relação com as arestas d e j que ligam os vértices A e D.

Essa relação é chamada de arestas paralelas ou arestas múltiplas. É possível encontrar essa relação de outra forma, para isso:

- Determine o conjunto de arestas de cada vértice.

  Resposta: $A_A = \{c, d, f, g, j\}; A_B = \{f, h, i\}; A_C = \{c, g, h\}; A_D = \{d, j, i\}$

Para encontrar as arestas múltiplas basta, fazer a intersecção entre o conjunto de arestas de dois vértices, por exemplo, a intersecção entre A_A (arestas do vértice A) e A_C (arestas do vértice C) (A_A intersecção A_C) são as arestas c e g, logo, dizemos que essas arestas são múltiplas e todo grafo que apresenta arestas múltiplas é chamado de multigrafo.

2ª aula

Outra forma de representar as arestas de um grafo é indicando os vértices que a aresta liga. Na figura, por exemplo, podemos chamar a aresta f de AB, pois ela liga os vértices A e B, dessa forma, arestas múltiplas teriam a mesma indicação.

- Escreva o conjunto de aresta indicando cada aresta pelos vértices que ela liga.

  Resposta: $A = \{AC, AD, AB, AC, CB, AD, BD\}$

Quando a intersecção entre o conjunto de arestas de dois vértices não é vazio, diz-se que esses vértices são vizinhos, ou seja, quando existe pelo menos 1 aresta que une dois vértices.

- Identifique quais vértices são vizinhos de quem.

  Resposta: A *é vizinho de* B*,* C *e* D*;* B *é vizinho de* A*,* C *e* D*;* C *é vizinho de* A *e* B*, assim como* D *também só é vizinho de* A *e* B*; ou seja, no exemplo os únicos vértices que não são vizinhos são* C *e* D*.*

No exemplo dado é mais fácil verificar tal relação analisando a Figura 2, ou seja, é melhor analisar o diagrama que representa o grafo. Mas em casos em que os grafos formados são excessivamente grandes, a análise através de conjuntos se torna útil, já que, dessa forma, podemos criar programas computacionais que realizam esse trabalho.

No exemplo, foi utilizado o Grafo da cidade de Konigsberg, mas grafos podem ser usados em várias situações. Vejamos um exemplo simples, um campeonato de futebol como a Liga dos Campeões da Europa, na qual temos 8 grupos com 4 equipes em cada grupo.

Durante a fase de grupos, cada equipe deve jogar 2 vezes contra cada outra equipe do seu grupo É dito que há uma jogo de ida e um jogo de volta, mas, para simplificar, serão considerados os dois jogos como apenas um confronto entre as equipes. Portanto, no grupo A de 2017 tinha-se Arsenal (ARS), Paris Saint-Germain(PSG), Ludogorets (LUD) e Basel (BAS), o que gerou os seguintes confrontos ARS x PSG; BAS x LUD; LUD x PSG; ARS x BAS; ARS x LUD; PSG x BAS.

Agora, pense nos times como sendo vértices e nos confrontos como arestas e, a partir daí, tem-se um Grafo.

- Sabendo que o grupo B desse mesmo ano foi Napoli (NAP), Benfica (BEN), Besiktas (BES) e Dínamo de Kiev (KIE), determine o conjunto de vértices (V) e arestas (A) que compõe o grafo que relaciona as partidas desse grupo e desenhe um modelo que represente a situação.

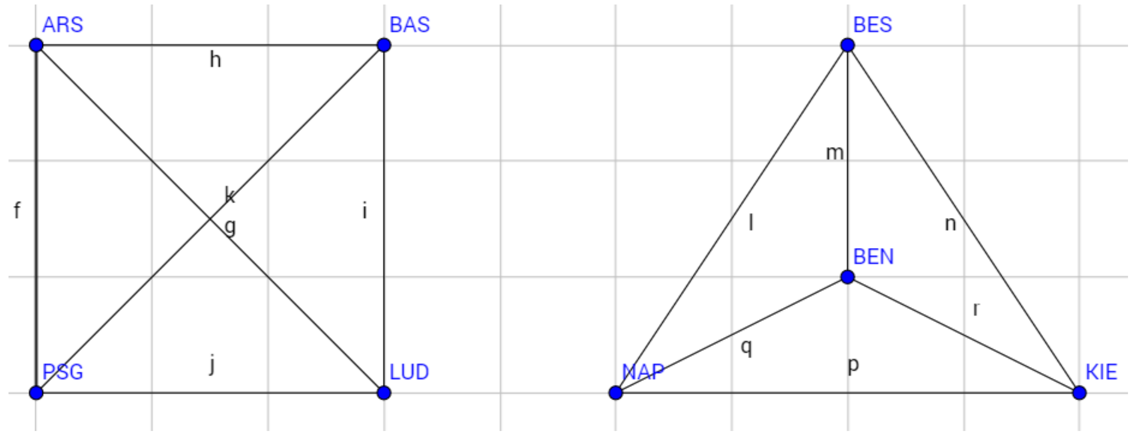
  Resposta: V={ NAP; BEN; BES; KIE} e A={ NAPxBEN; NAPxBES; NAPxKIE; BENx-BES; BENxKIE; BESxKIE}, um possível desenho para representar a situação se encontra na Figura 9.

Os confrontos foram substituídos por consoantes minúsculas para não sobrecarregar a imagem, analisando melhor esses modelos. Como ambos representam jogos entre 4 clubes de um grupo da Liga dos Campeões, é normal pensar que eles deveriam ser iguais, mas a Figura 9 apresenta dois grafos aparentemente diferentes.

3ª aula

Esses grafos apresentados são chamados de grafos isomorfos(ver Definição 2.12). Dessa forma, o uso da representação por conjuntos se faz útil para reconhecer grafos isomorfos.

Figura 9 – Modelo de grafo dos grupos A (direita) e B (esquerda) da Liga dos Campeões



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A.

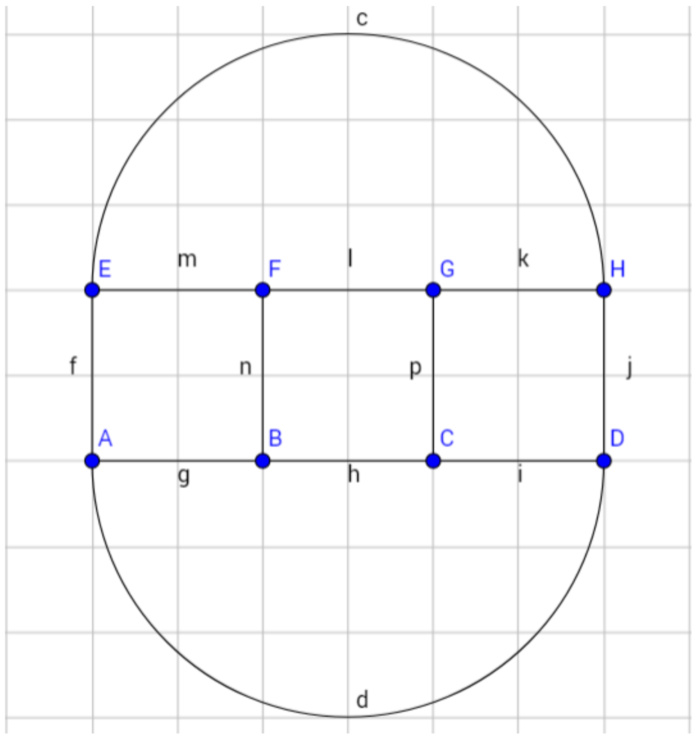
- Desenhe um modelo que represente o grafo:

  $V = \{A; B; C; D; E; F; G; H\}$

  $A = \{AB; AD; AE; BC; BF; CD; CG; DH; EF; EH; FG; GH\}$

  Uma possível resposta está na Figura 10.

Figura 10 – Possível resposta para um modelo de grafo



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A.

Compare os modelos criados por cada aluno e peça que eles verifiquem se o grafo de seu colega é isomorfo ao seu.

Possíveis continuações ou desdobramentos: Algumas atividades disponíveis no ANEXO A são interessantes de serem trabalhadas. Além disso, é possível que os estudantes relacionem situações de seu cotidiano que possam ser representadas com um grafo, sendo essa uma ótima tarefa para fixação e validação do conteúdo.

4.2 Atividades com Grafos e Matrizes - 2ª Série do Ensino Médio

Objetivo: Relacionar Grafos a matrizes mostrando a representação de um grafo por uma matriz de adjacência e matriz de incidência, explicar o conceito de grafo euleriano e semi-euleriano, grafo orientado, grafo valorado e grafo isomorfo, além de apresentar alguns problemas relacionados a grafos e mostrar como solucioná-los.

Público Alvo: Alunos da segunda ou terceira série do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Conhecimento sobre o que é um grafo, o que são arestas, vértices, grafos isomorfos, saber como representar uma matriz e identificar seus elementos, conhecer a definição de uma matriz, matriz transposta, igualdade entre matrizes, adição de matrizes, matriz quadrada, diagonal principal, diagonal secundária.

Materiais e tecnologias: é possível utilizar apenas caderno lápis, borracha, quadro e pinceis, no entanto, o uso de computadores auxilia e dispõe de materiais de apoio, para a segunda aula um tabuleiro de xadrez e as peças podem ser muito úteis.

Recomendações metodológicas: É recomendada a aplicação dessa atividade em turmas que já tenham feito a primeira atividade (Seção 4.1), ou que já tenham algum conhecimento de grafos, pois alguns termos aqui utilizados podem ser desconhecidos dos alunos que nunca tiveram contato com grafos. Contudo, com algum auxilio do professor, os termos podem ser explicados, e também é importante que os alunos já tenham algum conhecimento acerca de matriz.

Dificuldades Previstas: É possível que alguns alunos não lembrem alguns termos a respeito de grafos, ou até mesmo não os saibam, caso nunca tenham trabalhado com tal assunto.

Descrição geral:

Essa atividade foi planejada para ser trabalhada em 5 aulas de 55 minutos, mas pode utilizar algumas aulas a mais, caso os estudantes tenham excessivas dificuldades em algumas tarefas. Além disso, várias etapas possuem um conhecimento cumulativo, então é importante que todos os participantes sigam juntos as atividades. Na primeira aula, expõe-se um problema de circuito e inicia-se o conceito de grafo semi-euleriano. Na segunda aula, mostra-se a definição de grafo euleriano, explica-se o que é matriz adjacência, trabalhando com um problema de movimentação do cavalo no jogo de xadrez, e é passada a noção de grafos isomorfos. Na terceira e quarta aula, apresenta-se o conceito de grafos orientados, exemplificando com a solução já obtida na primeira aula, e, além disso, aborda-se o assunto de grafos valorados, relacionando-o com um problema relativo ao tempo de construção de uma casa. Por fim, na quarta aula, apresenta-se a matriz incidência do grafo de construção da casa.

Apresentação da atividade

1ª Aula

A teoria dos grafos pode ser muito útil para resolver determinados problemas, como o caso das pontes de Konigsberg.

> “a cidade de Königsberg (atual Caliningrado), na região da Prússia, estava localizada nas margens e em duas ilhas do rio Preguel, as quais eram ligadas por sete pontes. A discussão entre os moradores da cidade era a seguinte: É possível sair de casa, atravessar cada ponte apenas uma vez e retornar à casa"(COSTA, 2011).

Problemas como esses parecem ser um tanto simples, mas, quando aumenta-se a quantidade de vértices e arestas, eles podem se tornar um pouco complicados, tornando necessário, muitas vezes, utilizar métodos computacionais a fim de fazer as contas necessárias. No entanto, um computador precisa receber os dados de um grafo de alguma forma, e uma boa maneira de se inserir esses dados nele é utilizando matrizes. Vejamos, então, formas de representar grafos usando matrizes.

Começando por um problema de circuito, no qual é preciso passar por todas as arestas de um grafo uma e apenas uma vez. Para isso, veja o grafo da Figura 3, tente desenhar essa figura sem tirar o lápis do papel (situação adaptada do Problema 4 de Guedes (2014, p.29))

Existem várias soluções para esse problema, uma delas é iniciando em B e seguindo a sequência a1, a2, ..., a8, como aparece na Figura 4. Será usada a representação BDECDABCA para indicar essa solução, em que as letras são os vértices e são colocadas uma ao lado da outra, indicando o passeio realizado. Peça aos alunos que, escrevam a solução encontrada dessa forma e tente encontrar outras duas soluções.

Outras soluções possíveis: ABDECADCB, BDECABCDA, ABCDECADB.

É perceptível que a letra E aparece apenas uma vez em todas as soluções, enquanto as demais letras aparecem duas vezes. Além disso, pode-se notar também que as respostas sempre iniciam e terminam com as letras A e B, sendo que se iniciar com a A termina com a B e vice-versa. Questione o aluno se isso ocorre em todas os casos.

Isso deve ocorrer em todos os casos pois o vértice E possui grau 2 e nunca estará no início nem no fim, já que se trata de um grafo semi-euleriano, ou seja, grafos que apresentam um passeio que percorre cada aresta exatamente uma vez, iniciando em um vértice e terminando em outro (chamado de passeio aberto). Caso o passeio termine no mesmo vértice de início e não repita nenhum vértice, diz-se tratar de um grafo euleriano.

2ª Aula

Como aponta Souza (2014) “Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices apresentam um grau par."e será semi-euleriano caso "houver um único par de vértices de grau ímpar", ou seja, se os vértices de um grafo forem todos de grau par, é possível passar por todas as arestas do grafo exatamente uma vez, terminando no mesmo ponto de início. Caso o grafo tenha 2, e apenas 2, vértices de graus impares, será também possível passar por todas as arestas apenas uma vez, mas é necessário começar em um dos vértices de grau impar e terminar no outro, que é o caso do grafo já visto na Figura 3.

Um computador pode facilmente fazer verificações para encontrar esses passeios, em caso de grafos não muito grandes. Para tal, é interessante representar os grafos na forma de matrizes, vejamos, então, como representá-los assim.

Primeiramente, veja a representação de um grafo pela matriz de adjacência. Nessa matriz, cada linha e cada coluna representa um vértice, então, representamos pelo número 1 quando dois vértices são adjacentes e por 0 quando não são adjacentes. Veja o exemplo da primeira linha da matriz que representa o grafo da Figura 3.

Tabela 4 – 1º linha da matriz adjacência.

Vértices	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0

Veja que o vértice A é adjacente aos vértices B, C e D. Logo temos 1 nas colunas que representam esses vértices e 0 nas colunas que representam A e E. O aluno deve completar a matriz com o restante das linhas. Pode ser útil escrever os conjuntos adjacência de cada vértice para auxiliar na criação da matriz.

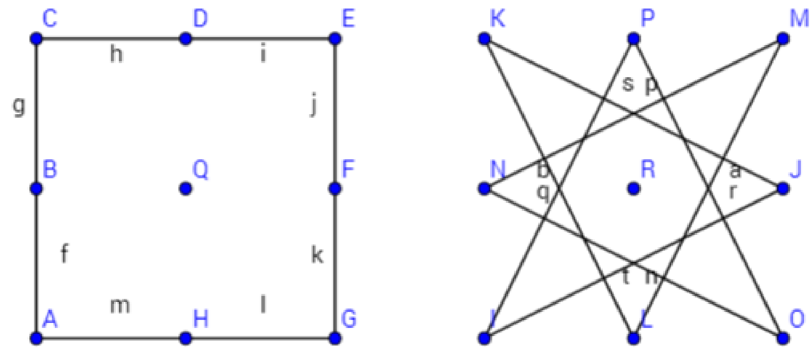
Resposta na Tabela 5:

Tabela 5 – Matriz adjacência do problema

Vértices	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	0	0	1	1	0

Esse modelo de representação pode ser muito útil para identificar grafos isomorfos, já que, ao representar dois grafos na forma de matriz adjacência, fica mais fácil verificar linhas semelhantes entre as matrizes. Veja os grafos da Figura 11 e faça a representações das matrizes adjacentes deles.

Figura 11 – Grafos Isomorfos



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

As respostas das matrizes adjacência de cada um dos grafos podem ser encontradas na Tabela 6 e na Tabela 7. Nesse caso, as matrizes já foram colocadas de forma a ser identificado com facilidade o isomorfismo, porém, em alguns casos pode ser mais trabalhoso. Peça aos alunos que tentem identificar o isomorfismo desses grafos, identificando a relação entre os vértices.

Tabela 6 – Matriz adjacência do primeiro grafo

Vértices	A	B	C	D	E	F	G	H	Q
A	0	1	0	0	0	0	0	1	0
B	1	0	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	1	0	1	0
H	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	0

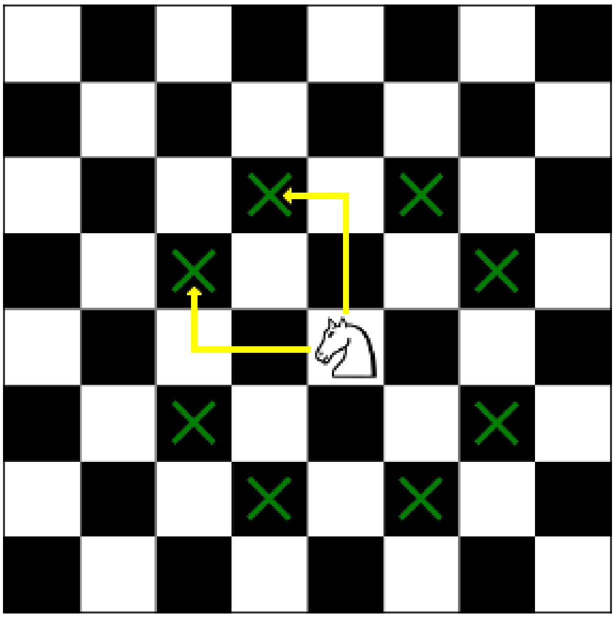
Vejamos o problema dos cavalos no xadrez:

O cavalo no xadrez tem um movimento em L, ou seja, a peça move sempre duas casas em uma direção ortogonal e depois mais uma casa em uma direção perpendicular à movida anteriormente, podendo passar por cima de qualquer peça durante essa ação. Entretanto a casa que encerra seu movimento deve estar vazia, ou com uma peça adversária, situação na qual ocorreria uma captura. Veja os possíveis movimentos de um cavalo na Figura 12.

Tabela 7 – Matriz adjacência do segundo grafo

Vértices	I	J	K	L	M	N	O	P	R
I	0	1	0	0	0	0	0	1	0
J	1	0	1	0	0	0	0	0	0
K	0	1	0	1	0	0	0	0	0
L	0	0	1	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	1	0	1	0	0	0
N	0	0	0	0	1	0	1	0	0
O	0	0	0	0	0	1	0	1	0
P	1	0	0	0	0	0	1	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 12 – Possíveis movimentos do cavalo

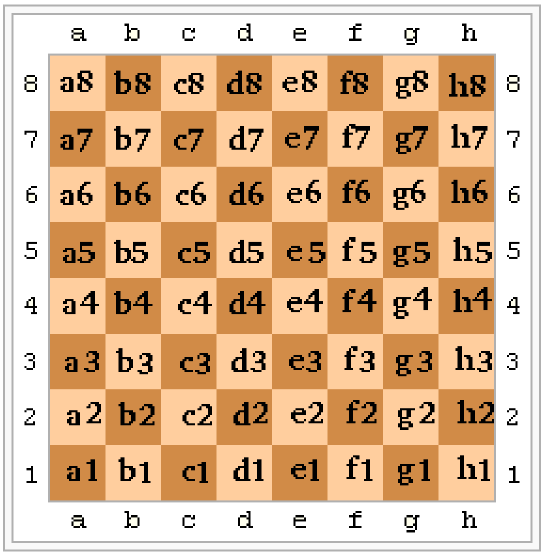


Fonte: <https://docs.kde.org/trunk5/pt_BR/extragear-games/knights/piece-movement.html>

Agora, pense na seguinte situação: há um mini tabuleiro de xadrez (mini pois este possui apenas 3 linhas e 3 colunas, ou seja, 9 espaços). Da esquerda para direita e de baixo para cima, usaremos as letras A, B e C para marcar as colunas e os números 1, 2 e 3 para marcar as linhas. Assim teremos as casas marcadas como A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2 e C3 (veja um exemplo da marcação de um tabuleiro de xadrez na Figura 13). Com essa condição, coloquemos agora um cavalo em cada canto (casas A1, A3, C1 e C3), de forma que na linha 3 estejam 2 cavalos Brancos(casas A3 e C3) e na linha 1 fiquem 2 cavalos negros (casas A1 e C1, veja na Figura 14). Agora tente, usando o movimento do cavalo e sem capturar qualquer peça, colocar, ao mesmo tempo, os cavalos brancos nas casas A1 e C3 e os cavalos negros nas casas A3 e C1.

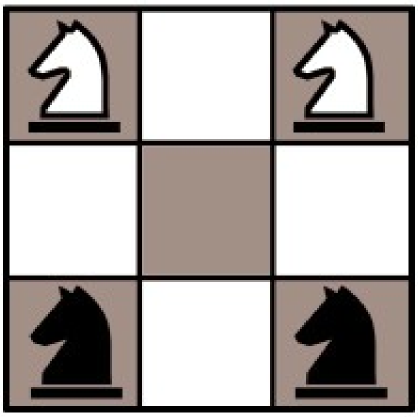
Depois de, algumas tentativas isso parece impossível, e realmente é, mas, inicial-

Figura 13 – Marcação do Tabuleiro de Xadrez



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Notaç~ao_algébrica_de_xadrez>

Figura 14 – Problema dos 4 cavalos



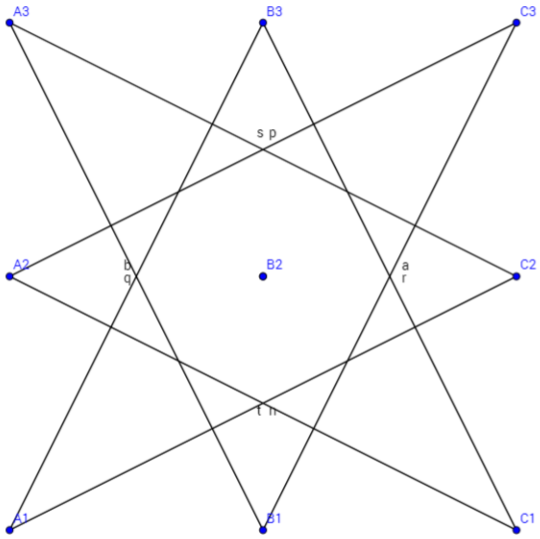
Fonte: <https://rachacuca.com.br/jogos/4-cavalos/>

mente não é fácil perceber. Para facilitar a percepção, criaremos um grafo que represente essa situação. Façamos o seguinte, cada espaço será considerado como um vértice e as arestas serão a possibilidade de movimento do cavalo. Por exemplo, o cavalo na posição A1 pode ir pra posição C2 e B3, então, devemos fazer arestas ligando os vértices A1 a C2 e A1 a B3, e assim por diante. Tente fazer o desenho desse grafo.

O grafo a ser desenhado está representado pela Figura 15 e é idêntico a um dos grafos isomorfos apresentado na Figura 11. Sendo assim, suas características são as mesmas do outro grafo, então podemos representar esse grafo como na Figura 16.

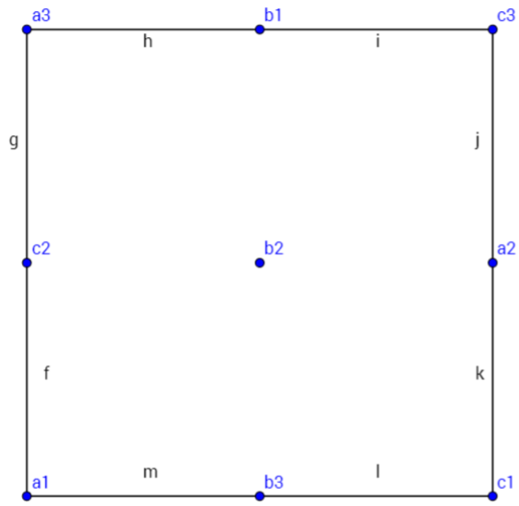
Nesse ponto fica mais fácil perceber que, para conseguir nosso objetivo, um cavalo teria que trocar de posição com outro cavalo, o que, segundo nossas regras, não seria

Figura 15 – Representação do problema dos cavalos



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Figura 16 – Grafo isomorfo do problema dos cavalos



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

permitido. Logo isso é impossível.

3º Aula e 4º Aula

A atividade planejada nessa aula envolve um problema de otimização, e pode ser difícil para o aluno chegar às conclusões sozinho. Por isso, ela foi planejada para utilizar de duas a três aulas, e é provável que seja necessário uma intervenção, a fim de facilitar a obtenção dos resultados.

Além da matriz adjacência, podemos ainda representar um grafo com uma matriz incidência, que é especialmente útil quando tratamos de grafos orientados (ver Denição

2.13).

Um exemplo dessa situação foi a solução apresentada no grafo da Figura 4, em que é mostrado um sentido e ordem para solução do problema. Vejamos agora outra situação que apresenta um grafo orientado.

Atividade retirada do trabalho de Souza (2014, p. 17), que diz *considere a tabela de tarefas para a construção de uma casa de madeira. Qual o tempo mínimo para construção dessa casa?*, considere também que mais de uma etapa pode ser feita ao mesmo tempo, desde que seja cumprido seu pré-requisito (a tabela mencionada no problema é a Tabela 8).

Tabela 8 – Tarefa a serem desenvolvidas

Tarefas	Pré-requisitos	Dias
1. Limpeza do terreno	Nenhum	4
2. Produção e colocação da fundação	1	3
3. Produção e colocação da estrutura	2	7
4. Colocação das tábuas externas	3	4
5. Colocação do telhado	3	6
6. Instalação do encanamento e fiação	4 e 5	6
7. Colocação dos batentes de janelas e portas	3	5
8. Instalação de janelas e portas	6	5
9. Pintura interior	7 e 8	5

Para solucionar esse problema usaremos, além da definição de grafo orientado, a noção de grafo valorado, que, segundo Jurkiewicz (2009, p.33), são grafos nos quais atribuímos valores para suas arestas, valores esses que podem ser tempo, custo, entre outros. No caso do problema da construção, os valores das arestas representarão o tempo gasto para realizar certa tarefa.

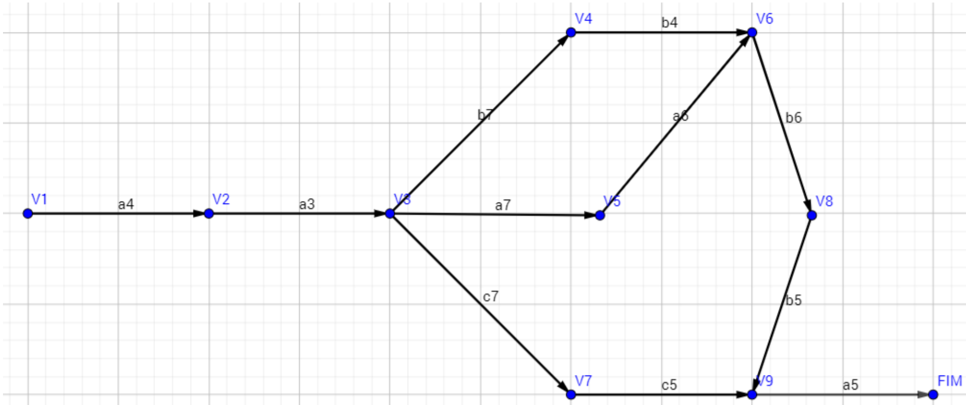
Peça aos alunos que desenhem um diagrama do grafo que representa essa situação. Para isso, consideraremos cada vértice como uma etapa da construção e começaremos pela etapa 1. Colocaremos então, adjacente a cada vértice, um vértice que tenha como pré-requisito o vértice anteriormente colocado. Para ligar os vértices, colocamos setas que saem do vértice que é pré-requisito.

Podemos ver como representar essa situação com um diagrama na Figura 17.

Nesse diagrama, os vértices $V1$, $V2$, $V3$, $V4$, $V5$, $V6$, $V7$, $V8$ e $V9$ são as etapas a serem construídas, e as arestas $a4$, $a3$, $a7$, $b7$, $c7$, $b4$, $a6$, $c5$, $b6$, $b5$, $a5$ representam o tempo gasto para realizar uma epata. Algumas arestas foram chamadas de a, outras de b e outras de c para representar que certas epatas podem ser feitas por equipes diferentes e ao mesmo tempo.

Inicialmente, parece um pouco complicado afirmar qual a quantidade mínima de tempo necessário para realizar a construção da casa, mas, ao avaliar o grafo da Figura 17,

Figura 17 – Grafo da construção da casa



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

a solução pode tornar-se mais fácil, basta um pouco de esforço.

Vejamos o seguinte, segundo o grafo podemos realizar as tarefas nesta ordem:

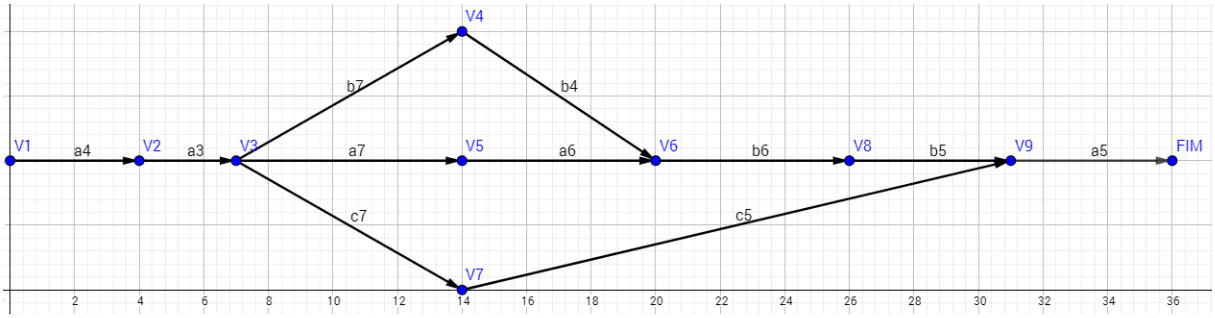
- 1. Limpeza do terreno (4 dias);
- 2. Produção e colocação da fundação (3 dias);
- 3. Produção e colocação da estrutura(7 dias);
- Nesse momento podemos executar mais de uma ação ao mesmo tempo que são:
  - 4. Colocação das tábuas externas(4 dias);
  - 5. Colocação do telhado (6 dias);
  - 7. Colocação dos batentes de janelas e portas (5 dias).

  Como serão realizadas ao mesmo tempo essa etapa deve demorar o maior tempo dentre elas já que as próximas etapas dependem de todas elas (6 dias);
- 6. Instalação do encanamento e fiação (6 dias);
- 8. Instalação de janelas e portas (5 dias);
- 9. Pintura interior (5 dias).

Dessa forma, podemos ver que basta seguir a matriz desenhada e ver qual o maior passeio para chegar ao FIM, que, assim, todas as etapas podem ser concluídas e teremos o menor tempo para concluir a obra, que será de 36 dias segundo o exemplo. Veja outro diagrama que apresenta melhor a solução do problema na Figura 18.

5º Aula

Figura 18 – Novo grafo da construção da casa



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Veja agora a representação do problema de construção da casa em forma de matriz incidência. Para isso tente construir uma matriz em que cada linha represente um vértice e cada coluna uma aresta, de forma a construir uma matriz A_{mxn} onde m deve ser igual a quantidade de vértices e n igual a quantidade de arestas. Note o exemplo da primeira linha dessa matriz na Tabela 9.

Tabela 9 – 1º linha da matriz incidência.

Vértices Arestas	a4	a3	a7	b7	c7	b4	a6	c5	b6	b5	a5
V1	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nessa representação, como o vértice $V1$ tem apenas a aresta $a4$ saindo dele e esta tem 4 de tamanho, colocamos apenas $+4$ na coluna que representa a aresta $a4$ e deixamos o restante com 0. Caso existisse alguma aresta que chegasse a $V1$, colocaríamos $-x$, em que x representa o tamanho dessa aresta. Agora, tente terminar a construção dessa matriz.

Veja a matriz completa na Tabela 10.

Tabela 10 – Matriz incidência para a construção da casa.

Vértices Arestas	a4	a3	a7	b7	c7	b4	a6	c5	b6	b5	a5
V1	+4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V2	-4	+3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
V3	0	-3	+7	+7	+7	0	0	0	0	0	0
V4	0	0	0	-7	0	+4	0	0	0	0	0
V5	0	0	+7	0	0	0	+6	0	0	0	0
V6	0	0	0	0	0	-4	-6	0	+6	0	0
V7	0	0	0	0	-7	0	0	+5	0	0	0
V8	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	+5	0
V9	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	-5	+5
FIM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5

Perceba que cada coluna tem apenas 2 elementos diferentes de zero. Tente imaginar o porquê e como isso pode ser útil na solução do problema de construção da casa.

Cada coluna tem apenas 2 elementos diferentes de zero pois as colunas representam as arestas de um grafo e as linhas os vértices. Como uma aresta pode ligar apenas 2 vértices, os únicos espaços de uma coluna que não estão preenchidos com zero são os espaços que representam os vértices que aquela aresta liga.

A utilização de tal matriz para solução de problemas, como o da construção da casa, se dá de forma que definimos o vértice de início, no caso, o $V1$, então basta procurar os valores maiores que zero na linha desse vértice que teremos as possibilidades de passeio. Escolhendo um desses valores, devemos seguir na coluna que está o valor até encontrar o valor negativo e chegaremos a um novo vértice, então repetimos o processo até que cheguemos ao final. Por fim, somamos todos os valores positivos escolhidos e teremos o tempo gasto para realização da obra, segundo o passeio escolhido.

Repetindo o processo descrito anteriormente, com todos os passeios possíveis, o maior tempo encontrado será o menor tempo possível pra realizar a obra. Apesar de ser um método trabalhoso, um computador pode realizar tais operações com grande agilidade e informar qual o menor tempo para a atividade.

Possíveis continuações ou desdobramentos: Tente fazer o seguinte problema proposto pelo italiano Paolo Guarini de Forli, que consiste na mesma situação do problema dos cavalos descrito anteriormente, mas, ao invés de querermos trocar dois cavalos de cores diferentes de lugar, dessa vez queremos colocar os cavalos pretos na parte de cima e os brancos na parte de baixo. O grafo representado pela Figura 16 pode deixar o problema mais fácil.

É interessante exercitar a criação de matriz adjacência e matriz incidência, além de isomorfismo. Para isso, peça que os alunos criem diagramas, não muito complexos, que representem grafos, e é bom que todos tenham o mesmo número de vértices, algo em torno de 5 a 8 vértices. Em seguida, peça para que troquem esses diagramas entre eles e que cada um represente a matriz adjacência e a matriz incidência de cada grafo. Por fim, selecione alguns grafos e peça que eles tentem identificar se os grafos que eles tem em mãos são isomorfos com os grafos selecionados.

4.3 Problemas envolvendo Grafos - 3ª Série do Ensino Médio

Objetivo: Mostrar a utilidade da teoria dos grafos para resolver alguns problemas.

Público Alvo: alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Conhecimentos básicos acerca de grafos, como vértices, arestas, grau de um vértice,representação de um grafo por meio de diagrama ou imagem, grafo euleriano e semi-euleriano, matriz adjacência de um grafo, representação de um grafo por meio de conjuntos.

Materiais e tecnologias: Para a segunda aula um jogo de dominó é muito útil, mas não é essencial.

Recomendações metodológicas: É recomendada a aplicação das atividades anteriores para que os alunos possam compreender melhor as explicações e para que o desenvolvimento das atividades seja o mais dinâmico possível.

Dificuldades Previstas: Alguns termos relacionados a grafos são pouco usuais, então é presumível que os alunos não lembrem ou não tenham ouvido falar deles. Nesse caso, cabe ao educador esclarecer tais dúvidas.

Descrição geral:

Essa atividade foi projetada para ser trabalhada em 2 aulas de 55 minutos, podendo ser necessária mais uma aula, caso os educandos apresentem muitas dificuldades. Em cada uma das aulas apresentamos problemas e procuramos solucioná-los usando a teoria dos grafos. Na primeira aula, abordamos um problema de popularidade simples, buscamos sua solução por meio da representação por diagrama e matriz adjacência do grafo. Já na segunda aula, tratamos de um problema sobre o jogo de dominós, que a princípio não parece, mas se trata de um problema de passeios. Para sua solução, recorremos a representação do grafo por meio de um diagrama e conjuntos.

Apresentação da atividade:

1ª Aula

Atividade retirada de Bria (2014, p.42)

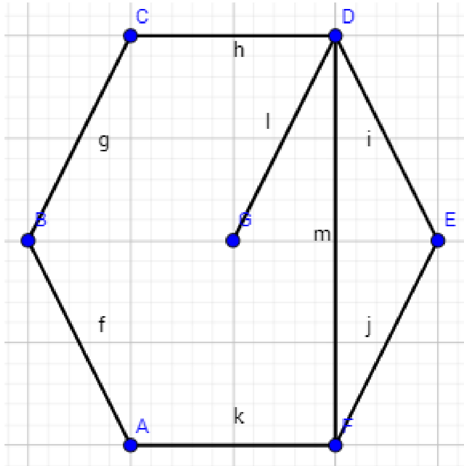
> Sete pessoas (A, B, C, D, E, F e G) moram numa mesma cidade. Cada uma delas conhece as outras seis. São pares de pessoas que se gostam: AB, BC, CD, DE, EF, FA, DG e DF. Qualquer outro par, que não estes, refere-se a duas pessoas que não se gostam. Há, dentre essas sete pessoas, alguma que seja mais (menos) popular do que todas as outras? Quem?

Para solução desse problema, peça para que os alunos inicialmente façam um diagrama que represente a situação. Nesse diagrama, consideraremos os vértices representando as pessoas e as arestas a relação de que uma pessoa gosta da outra. Os possíveis resultados são variados, mas todas as representações devem ser grafos isomorfos, já que retratam a mesma situação.

Diagrama que representa a situação na Figura 19.

Com a representação pronta, fica fácil identificar a pessoa que possui mais relações, basta procurar o vértice de maior grau (vértice D), já a pessoa menos popular é representada pelo vértice de menor grau (vértice G). A fim de dar ênfase à situação, peça que os alunos reproduzam a matriz adjacência e a matriz de incidência desse grafo, e, em seguida,

Figura 19 – Grafo do problema de popularidade



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

pensem em como um computador pode procurar a pessoas mais popular e a pessoa menos popular apenas com as informações dessas matrizes.

Veja a Matriz adjacência do problema na Figura 11.

Tabela 11 – Matriz adjacência do problema de popularidade

Vértices	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	0	1	0
B	1	0	1	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	1	0	1	0
F	1	0	0	1	1	0	0
G	0	0	0	1	0	0	0

Para um computador encontrar a pessoa mais popular ou menos popular com esse representação, basta somar o valor de cada linha e procurar o maior resultado para que for mais popular, ou procurar o menor valor para encontrar a pessoa menos popular.

2ª Aula

Atividade adaptada do material como aplicar grafos em jogos e múltiplas situações, disponível no anexo A.

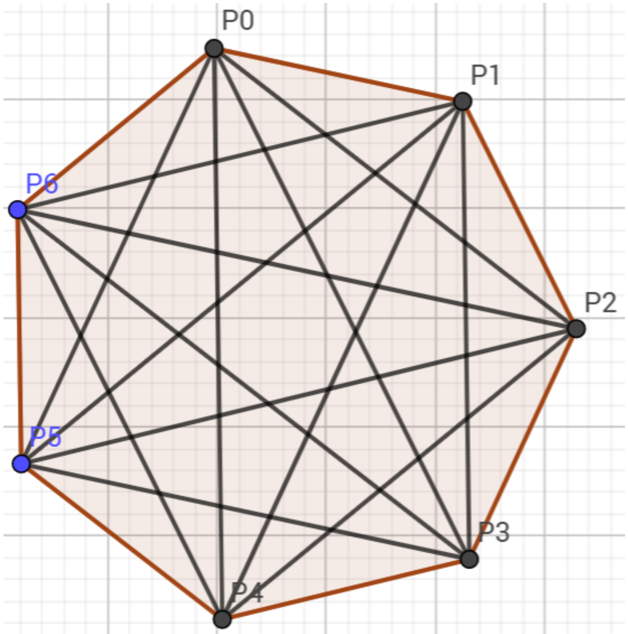
Em um jogo de dominó, temos as seguintes peças, 0/0 0/1 0/2 0/3 0/4 0/5 0/6 1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 2/2 2/3 2/4 2/5 2/6 3/3 3/4 3/5 3/6 4/4 4/5 4/6 5/5 5/6 6/6. Peça, para que os alunos façam um passeio usando todas as peças de um dominó, o que pode ser feito no próprio caderno, sem utilizar um jogo, caso não haja um disponível. Após concluírem, diga pra que reparem quais os números que ficaram nas pontas.

Eles devem perceber que em ambas as pontas sempre fica o mesmo número. Note um exemplo de passeio.

0/0 0/1 1/1 1/2 2/2 2/0 0/3 3/3 3/2 2/4 4/4 4/3 3/1 1/4 4/0 0/5 5/5 5/1 1/6 6/6 6/5 5/4 4/6 6/3 3/5 5/2 2/6 6/0

Nesse caso, temos o zero nas pontas. Peça, então, que eles tentem desenhar um grafo em que cada vértice represente um número de 0 a 6 e que cada peça do dominó represente uma aresta. Por exemplo, a peça 2/5 é a resta que liga os vértices 2 e 5. Para fazer esse desenho, é ideal que os vértices estejam distribuídos como vértices de um heptágono regular já que isso tende a facilitar o desenho (veja Figura 20).

Figura 20 – Grafo dos Dominós



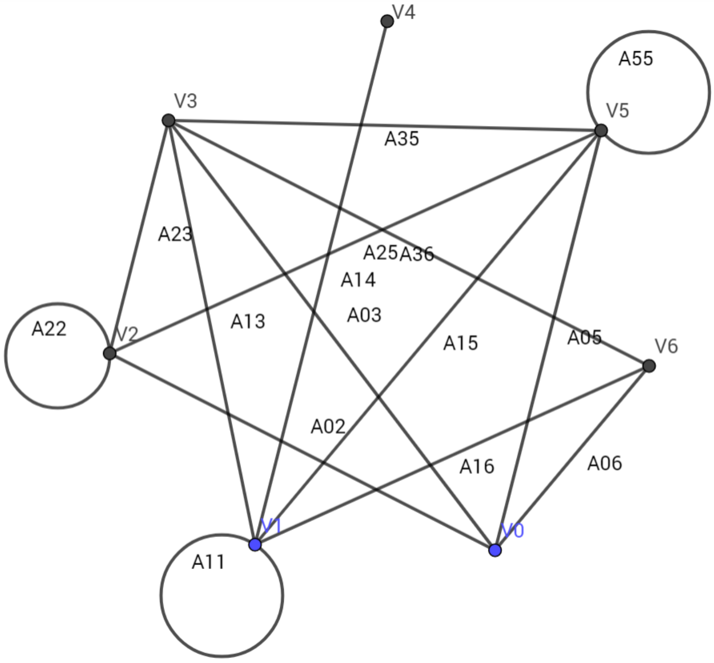
Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Peça para que os alunos analisem esse grafo e tentem chegar à conclusão do motivo do número inicial e final serem sempre iguais. Após algum tempo, explique a ideia de ciclo Euleriano, e mostre a eles que, como o grau de todos os vértices é par, é possível passar em todas as arestas, terminando exatamente no vértice em que foi iniciado o percurso.

Agora, desafie os alunos a descobrirem se é possível fazer um passeio usando as seguintes peças, 0/2 0/3 0/5 0/6 1/1 1/3 1/4 1/5 1/6 2/2 2/3 2/5 3/5 3/6 5/5. Veja se algum deles percebe que é impossível, já que temos 4 vértices de grau ímpar. Incentive que eles façam a representação do diagrama desse grafo, para tentarem chegar a uma conclusão.

Veja uma possível representação desse diagrama na Figura 21, onde as arestas ou circunferências representam as peças, por exemplo, A13 representa a peça 1/3, já os vértices são os números que aparecem nas peças.

Figura 21 – Representação do jogo de dominós faltando peças



Fonte: Imagem de autoria própria, disponível no APÊNDICE A

Caso essa representação seja ainda muito confusa ou os alunos não consigam representá-la, peça a eles que considerem cada vértice como sendo um número e as peças como arestas. Eles devem escrever o conjunto de arestas de cada vértice, e, em seguida, calcular o grau de cada vértice. Por fim, lembre-os do assunto a respeito de grafos semi-eulerianos, peça para que identifiquem quais peças podem ser adicionadas ao jogo, de forma que ele sempre seja possível de ser completado, e qual será a peça inicial e final.

Os conjuntos devem ser:

- $V0 = \{A02, A03, A05, A06\}$ grau 4;
- $V1 = \{A11, A13, A14, A15, A16\}$ grau 6;
- $V2 = \{A02, A22, A23, A25\}$ grau 5;
- $V3 = \{A03, A13, A23, A35, A36\}$ grau 5;
- $V4 = \{A14\}$ grau 1;
- $V5 = \{A05, A15, A25, A35, A55\}$ grau 6;
- $V6 = \{A06, A16, A03\}$ grau 3;

Logo, para ser possível fazer todo o passeio com as peças de dominó, é necessário que exista 0 ou 2 vértices de grau ímpar, então para solucionar o problema basta adicionar uma das seguintes peças, ou 2/4, ou 2/6 ou 3/4, ou 4/6.

Possíveis continuações ou desdobramentos: É possível encontrar outros problemas para serem trabalhados nos trabalhos de Bria (2014), Mauri (2013), caso o professor queira aplicar novas atividades para fixação. Também há outras atividades disponíveis no Anexo A, que tratam de problemas envolvendo grafos.

Um trabalho que busque o desenvolvimento de algoritmos para solução de problemas envolvendo grafos é uma possibilidade, caso os alunos tenham conhecimento sobre algoritmos.

Capítulo 5

Conclusão

As atividades sugeridas nesse trabalho mostram que o objetivo de introduzir grafos junto com outras disciplinas do Ensino Médio é possível, e também demonstrou o uso e a representação de grafos de diversas maneiras, considerando situações variadas e contextualizadas para o aluno do Ensino Médio. plicar grafos em várias situações de forma acessível ao aluno do Ensino Médio.

Diante disso, o trabalho levanta a questão da possibilidade da teoria dos grafos ser inserida em livros didáticos como material complementar em alguns capítulos, junto com outros conteúdos, como conjuntos ou matrizes, da mesma forma que foram abordados nas atividades do Capítulo 4, já que, atualmente, o conteúdo não se apresenta na maioria dos materiais didáticos. Assim, esse trabalho reforça outros conteúdos e enriquece a aula dada pelo professor, com novas oportunidades de aprendizagem.

As propostas de atividades proporcionam ao aluno a oportunidade de aprender os conceitos básicos acerca de grafos durante o Ensino Médio, capacitando ainda mais os estudantes e desenvolvendo percepções que boa parte deles não apresentam, pois tratamos o tema grafos na representação de diagramas, matrizes, conjuntos e textual, e até abordamos problemas que envolvam jogos como dominó, xadrez e situações cotidianas.

Apresentando o tema de diversas formas, possibilitamos que o estudante aumente sua percepção de como usar a teoria dos grafos, até mesmo com outras disciplinas e assuntos que não sejam a Matemática. Sendo assim, mesmo aqueles estudantes menos interessados pela Matemática podem acabar sendo mais atraídos pelo assunto e aplicando a teoria a outras situações.

Por fim, é possível estender as propostas desse trabalho a níveis além do Ensino Médio, como em cursos técnicos, preparatórios ou até a nível superior, como engenharia e cursos de licenciatura em matemática, como introdução a teoria dos grafos, dando ainda mais importância ao trabalho. Nesses casos, é possível uma continuação do assunto na elaboração de algoritmos, computacionais ou não, para resolução de problemas a respeito de grafos.

Referências

ASSIS, J. S. M. *Grafos Eulerianos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. Citado na página 14.

BOAVENTURA, P. O. N. *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*. São Paulo, Edgard Blücher, 2003. Citado na página 18.

BOAVENTURA, P. O. N.; JURKIEWICZ, S. Grafos: introdução e prática. *Editora Edgard Blücher*, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 20, 24 e 27.

BRIA, J. Grafos, por que não. *Caderno de Licenciatura em Matemática UFF*, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 57.

CARDOSO, D. M. *Teoria dos Grafos e Aplicações*. Universidade de Aveiro, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.

CHAGAS, L.; SILVA, S. A. F. da et al. Teoria dos grafos: História, problemas e aplicações. *Encontro de Educação Matemática*, n. 1, 2013. Citado na página 13.

COSTA, P. P. d. *Teoria dos grafos e suas aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2011. Citado na página 43.

DUVAL, R. *Semiosis et pensee humaine: registres semiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, 1995. Citado na página 34.

DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.(trad.). *Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física*, v. 2, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 13, 35 e 36.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. *São Paulo: PROEM*, v. 1, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 22, 34 e 36.

FARIAS, A. A. D. *Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2014. Citado na página 33.

FEIO, E. d. S. P. *A conversão da lingua natural para a linguagem matematica à luz da teoria dos registros de representação semiotica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Para, 2009. Citado na página 34.

FEOFILOFF, P. *Exercícios de Teoria dos Grafos*. Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 33.

GONÇALVES, A. L. et al. *Grafos: Aplicações ao Jogo.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Portucalense, 2007. Citado na página 32.

GUEDES, V. E. P. *Uma Abordagem para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 43.

JURKIEWICZ, S. Grafos: Uma introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009. Citado na página 49.

MALTA, G. H. S. *Grafos no Ensino Médio: uma inserçao possıvel*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008. Citado na página 14.

MAURI, R. *Uma Abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 57.

NOGUEIRA, D. K. *Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2015. Citado na página 14.

ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e suas Aplicaçoes;[Traduçao Joao Giudice]*. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 22, 27, 28, 29, 31 e 33.

SEDU. *SEDU. Currículo Básico Escola Estadual: Área de Ciências da Natureza, Matemática*. [S.l.]: Vitória: SEDU, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

SOUZA, A. L. de. *Teoria dos grafos e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, 2013. Citado na página 18.

SOUZA, R. F. d. *Resolução de problemas via teoria de grafos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 49.

Apêndices

APÊNDICE A

Grafos disponíveis no GeoGebra

- Modelo da cidade de Konigsberg <https://ggbm.at/KFkgyZWj>
- Problema proposto pelos alunos <https://ggbm.at/SAYHPZ9N>
- Solução para o problema proposto pelos alunos <https://ggbm.at/ZRhSS74S>
- Contatos em uma rede social <https://ggbm.at/YtQcp3HW>
- Exemplo do Hexano <https://ggbm.at/>
- Polígonos com as diagonais <https://ggbm.at/GAwPATwy>
- Modelo de grafo dos grupos A e B da Liga dos Campeões <https://ggbm.at/NBpNxvHY>
- Possível resposta para um modelo de grafo <https://ggbm.at/SSpEAEsW>
- Problema das cavalos <https://ggbm.at/xR6Eu55M>
- Representação do problema dos cavalos <https://ggbm.at/pTre2JNq>
- Grafo Isomorof do problema dos cavalos <https://ggbm.at/pTre2JNq>
- Grafo da construção da casa <https://ggbm.at/ufDJY2P4>
- Novo Grafo da construção da casa <https://ggbm.at/HTwNpeBM>
- Grafo do problema de popularidade <https://ggbm.at/SVWfWVq2>
- Grafo dos dominó <https://ggbm.at/UqJerFRq>
- Representação do jogo de dominós faltando peças <https://ggbm.at/WRKqzvQb>

Anexos

ANEXO A

Atividades complementares acerca de Grafos

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

CCET- COLEGIADO DE MATEMÁTICA

XXIV SEMANA DA MATEMÁTICA

MINICURSO

COMO APLICAR GRAFOS EM JOGOS E MÚLTIPLAS SITUAÇÕES

Este trabalho é uma reprodução, com adendos, do minicurso apresentado no X ENEM em Salvador-BA por componentes do Projeto Fundão da UFRJ

Docentes: Arleni Elise Sella Langer
Tânia Stella Bassoi

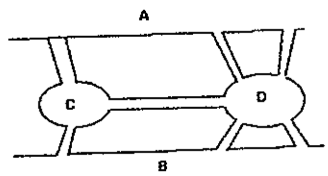
2010
Cascavel

ATIVIDADE 1

Objetivo: Construir grafos traçáveis.

As Sete Pontes De Königsberg

O professor de História conversou com os alunos sobre *O Problema das Sete Pontes de Königsberg*. Disse que era um problema interessante e sugeriu que eles pedissem à professora de matemática para falar sobre ele. A sugestão foi prontamente aceita. Ela encantou os alunos com uma bela exposição sobre o problema.



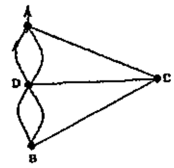
Começou fazendo o mapa ao lado e disse: os habitantes de Königsberg gostariam de percorrer todas as pontes em uma caminhada, sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas. Entretanto, ficavam intrigados porque não conseguiam, apesar de fazerem várias tentativas. A professora propôs que os alunos tentassem, em casa, resolver o problema usando o mapa e, na próxima aula discutissem.

Na aula seguinte, quando a Professora chegou, os alunos foram logo dizendo:

- Nós não encontramos o caminho!

- Fiquem tranqüilos! Vocês estão na mesma situação dos moradores de Königsberg e dos matemáticos da época, disse D. Maria Lúcia. Chamei as margens de A e B e coloquei duas ilhas C e D; a ilha C está ligada a cada uma das margens e à ilha D por uma ponte, enquanto a ilha D está ligada a cada uma das margens por duas pontes.

- Agora vou dizer como Euler fez a modelagem do problema. Começou representando as margens A e B, e as ilhas C e D por quatro pontos, sendo as pontes as sete linhas que ligam os pontos e desenhou o diagrama:



Os alunos exultaram.

- Que legal, Euler fez um grafo, não foi mesmo, D. Maria Lúcia?

- Foi, agora vocês, com este grafo, vão poder achar a solução de Euler, que é o modelo matemático para o problema *As Sete Pontes de Königsberg!*

Exploração:

Pedir aos alunos para verificar se é possível, a partir de um dos quatro pontos, desenhar todo o grafo sem levantar o lápis do papel e sem retraçar nenhuma aresta.

Depois que foi construída uma nova ponte, ligando dois dos quatro pontos, os pedestres de Königsberg puderam fazer o passeio desejado. Faça você o grafo com uma nova ponte e verifique se existe um caminho possível.

ATIVIDADE 2

Objetivo: Construir digrafos

A Copa de 2006

Já que estamos trabalhando com conceitos da Teoria dos Grafos, disse a professora, pensei que vocês achariam interessante ver uma aplicação desse assunto em um acontecimento como a COPA do Mundo que mobiliza bilhões de pessoas.

Vamos começar examinando os resultados da 1ª fase da Copa 2006.

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
Alemanha 4 x 2 Costa Rica	Inglaterra 1 x 0 Paraguai	Argentina 2 x 1 Costa Marfim	México 3 x 1 Irã
Polônia 0 x 2 Equador	Trinid. Tob. 0 x 0 Suécia	Serv.Mon. 0 x 1 Holanda.	Angola 0 x 0 Portugal
Alemanha 1 x 0 Polônia	Inglaterra 2x 0 Trin. Tob.	Argentina 6 x 0 Serv.Mon.	México 0 x 0 Angola
Equador 3 x 0 Costa Rica	Suécia 1 x 0 Paraguai	Holanda 2 x1 CostMar	Irã 0 x 2 Portugal
Equador 0 x 3 Alemanha	Suécia 2 x 2 Inglaterra	Holanda 0 x 0 Argentina	México 1 x 2 Portugal
Costa Rica 1 x 2 Polônia .	Paraguai 2 x 2 Trin. Tob.	Costa Marfim 3 x 2 Serv.Mon.	Irã 1x 1 Angola
GRUPO E	GRUPO F	GRUPO G	GRUPO H
Itália 2 x 0 Gana	Austrália 3 x 0 Japão	Coréia Sul 2 x 1 Togo	Espanha 4 x 0Ucrânia
EUA 0 x 3 Rep.Tcheca	Brasil 1 x 0 Croácia	França 0 x 0 Suíça	Tunísia 2 x 2 Ara.Saud.
Itália 1 x 1 EUA	Japão 0 x 0 Croácia	Togo 0 x 2 Suíça	Arábia Saud 0 x 4 Ucrânia
Rep. Tcheca 0 x 2 Gana	Brasil 2 x 0 Austrália	França 1 x 1 Coréia Sul	Espanha 3 x 1 Tunísia
Rep. Tcheca 0 x 2 Itália	Brasil 4 x 1 Japão	Suíça 2 x 0 Coréia Sul	Ucrânia 1 x 0 Tunísia
Gana 2 x 1 EUA	Croácia 2 x 2 Austrália	Togo 0 x 2 França	Arábia Sau. 0 x1 Espanha

– O nosso problema é construir um grafo a partir dos resultados de um dos oito grupos. Como sei que vocês gostariam de trabalhar com o grupo onde está o Brasil, vamos examinar os resultados do Grupo F. Que sugestões vocês dão para começar o grafo?

Imediatamente, Rosa disse:

– Está claro, os vértices serão os quatro países: Austrália (Au), Brasil (Br), Croácia (C) e Japão (J).

– Ótima sugestão, disse a professora: quais são as arestas?

Prontamente, Maria afirmou:

– Como mostra o quadro, são seis os jogos. Então, o grafo tem seis arestas ligando os países dois a dois.

– Está certo, disse a professora. Mas não sei como indicar o vencedor.

André veio de lá com uma boa idéia:

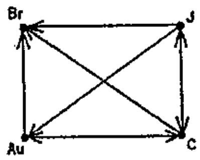
– Como o Brasil venceu a Croácia, a aresta ligando os dois fica orientada da Croácia para o Brasil, assim, C→ Br.

– E quando houver empate? Perguntou Maria.

– Muito fácil, disse André, faço uma dupla orientação, desse modo: J↔C, porque o Japão empatou com a Croácia.

– Estou gostando de ver o entusiasmo da turma. Esclareço que vocês podem construir um digrafo, que é como os matemáticos chamam os grafos com as arestas orientadas.

Então, o digrafo dos resultados da 1ª fase da Copa 2006 do Grupo F é:



Exploração:

1) Pedir para os alunos construírem o digrafo de um dos outros 7 grupos.
2) Pedir para indicarem os dois primeiros colocados do grupo F.
3) Pedir para definirem os dois primeiros colocados nos outros grupos.

Observação:
A classificação definida pela FIFA é feita assim: cada vitória vale 3 pontos e cada empate 1 ponto. Em caso de empate no total de pontos a classificação é feita pelo saldo de gols. Nesse caso, é necessário consultar a tabela. Mantendo-se o empate, a classificação é decidida pelo maior número de gols marcados.

ATIVIDADE 3

Objetivo: Usar um jogo de dominó incompleto para introduzir o conceito de grafos semieulerianos.

Alice no País do Dominó

A mãe havia levado as meninas para a casa dos avós, e aproveitou para sair enquanto eles cuidavam das netas tão amadas.

Vó Ilma perguntou:

- Por que vocês não jogam algo? Olha, peguem o jogo de dominó. Vocês lembram como se joga?

Aline olhou para a avó e disse:

- Vó, você esqueceu o que Alice fez com o dominó quando era pequena? Esqueceu? Alice sumiu com muitas pecinhas e agora que queremos jogar não será possível terminar a partida.

Vô Geraldo pensou um pouco e falou:

- Talvez dê.

- E aí, começamos? E se não der, paramos? Assim não tem graça, retrucou Aline.

- Aline, veja quais as peças que temos, disse o Vô Geraldo.

Aline logo virou cada peça para cima e as ordenou do seguinte modo:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	5
2	3	5	6	1	3	4	5	6	2	3	5	4	5	6	5

Perguntou o avô:

-Vamos contar quantas vezes aparece cada número?

Alice logo começou:

- O zero aparece quatro vezes, o 1 aparece seis vezes, o 2 cinco vezes, o 3 seis vezes, o 4 duas vezes, o 5 seis vezes e, o 6 aparece três vezes.

Vô Geraldo logo reparou que os números 2 e 6 apareciam três vezes e os demais sempre apareciam um número par de vezes. Então, falou:

- Vai dar certo!

- Como você sabe, Vô? Perguntou Aline.

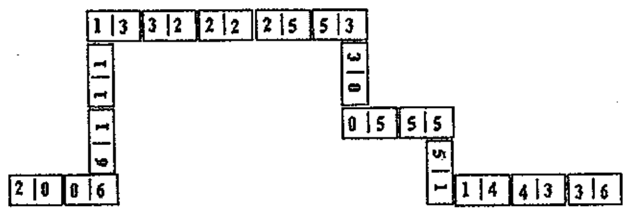
- Depois eu te explico. E tem mais, quando vocês terminarem de colocar as peças, os números que irão aparecer nas pontas serão 2 e 6.

- Alice, vem jogar! Quero ver se o Vô Geraldo é esperto mesmo ou se está só enrolando a gente.

Aline distribuiu as peças e falou:

- Eu começo.

Então começaram a jogar e logo viram que o Vô Geraldo estava certo.



- Olha, não é que vovô está certo! Que legal! Veja Alice, o número 2 e o 6 nas pontas, exclamou Aline.

Aline virou para o Vô Geraldo e perguntou:

- Como você sabia que ia terminar assim, Vô? Sempre dá certo ou só com essas peças? E se em outro dominó estiverem faltando outras peças, dará certo também?

- Tá vendo, Aline, como ficou muito mais divertido sem algumas pecinhas?

- É, Alice, tenho que aceitar que você, mesmo errando, acertou. Valeu!

Agora, que você leu, faça o grafo do dominó incompleto mostrado acima.

Exploração:

1.Agora, junto com seu grupo, retirem algumas peças do seu dominó, joguem e respondam:

a. Vocês conseguiram terminar o jogo, colocando todas as peças?

b.Se não conseguiram, desenhem numa folha a seqüência formada pelas peças e ao lado as peças que sobraram.

c.Em qualquer dos casos, anotem os números que aparecem nas extremidades da seqüência formada e façam o grafo do dominó incompleto que vocês utilizaram no jogo.

2.Se o grupo não conseguiu terminar o jogo, tentem realizar algumas alterações na seqüência formada, com o objetivo de colocar todas as peças. Se, agora, conseguiu, façam o grafo dessa nova sequência.

3.Quais os números que aparecem um número par de vezes e quais aparecem um número ímpar de vezes? No jogo, relacionem este fato com os números que aparecem nas extremidades.

4.No caso das extremidades da sequência obtida no jogo apresentarem números diferentes, verifiquem se esses são os únicos números que apareceram um número ímpar de vezes, e anotem esse fato.

5.Anotem e examinem as seqüências onde não foram colocadas todas as peças. O que o grupo concluiu?

6.Agora, vocês compreenderam a observação do Vô Geraldo?

ATIVIDADE 4

Objetivo: Relacionar a linguagem do computador com Grafos.

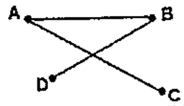
O Computador e Os Grafos

A aula de Matemática começou com os alunos muito animados porque a escola tinha inaugurado um laboratório de informática. Perguntaram ao professor:

- Como podemos usar os computadores nos problemas de Grafos? Lemos na revista da escola que a Teoria dos Grafos teve um grande desenvolvimento depois que o uso dos computadores se tornou uma ferramenta para os problemas da Matemática Discreta.

- É verdade, respondeu o professor. Dou os parabéns à turma pelo interesse que demonstra com as inovações científicas. Vamos ao que interessa. Vocês sabem que o computador só entende a linguagem dos símbolos *0* e *1*.

- Já sei, disse Paulo, o computador usa o sistema binário de numeração, não é mesmo, professor?



- Perfeito! Quero que vocês resolvam o seguinte desafio: passar para a linguagem do computador este grafo. Dou uma dica. Como este grafo tem 4 vértices, façam um quadro onde cada vértice esteja numa linha e numa coluna.

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

- Já sei, o quadro vai ter 4 linhas e 4 colunas, não é mesmo, professor?

- Ótimo, neste quadro coloquem 1 se existir uma aresta ligando os vértices, e 0 se não existir tal aresta.

- Pensamos ter entendido, professor! O quadro fica assim:

	A	B	C	D
A	0			
B				
C				
D				

Como o vértice A não está ligado a ele mesmo, escrevo 0 na posição referente à linha A e coluna A.

Já sei, ponho 0 nos cruzamentos da 2ª linha com a 2ª coluna e assim para os outros cruzamentos.

	A	B	C	D
A	0			
B		0		
C			0	
D				0

	A	B	C	D
A	0	1		
B	1	0		
C			0	
D				0

Como os vértices A e B estão ligados por uma aresta, coloco 1 nos cruzamentos da linha A com a coluna B e no da linha B com a coluna A.

- Que bacana, disseram os outros alunos. O nosso quadro fica assim:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bravo! Vocês estão craques, fizeram uma matriz quadrada 4x4, na linguagem dos matemáticos. Na Teoria dos Grafos, é chamada *matriz de adjacência* do Grafo, toda matriz quadrada formada por 1 e 0, onde 1 representa a existência de aresta ligando dois vértices, e 0, que não há tal aresta.

Agora, mais um desafio! Vocês querem?

- Vamos lá, professor, estamos gostando de prender coisas novas e ver que a Matemática não é um bicho de sete cabeças.

- Então, vamos lá. Dada a matriz de adjacência M, desenhar o grafo correspondente.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIA, J. *Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade.* D.Sc. tese, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2001.

CARVALHO, P. C. P. *Fazer Matemática e usar Matemática.* Boletim do programa Salto para o Futuro, Matemática não é Problema – programa 2, exibido em 10/05/2005. Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/ >. Acesso em: 10 jul.2005.

FRIEDMANN, C. V. P. *Matemática Discreta: Algoritmos, Modelos, Tendências do Ensino de Matemática no Início do Século XXI.* PhD Thesis, COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2003.

GLAESER, G. *Une Introduction à la Didactique Expérimentale des Mathématiques.* p.35. Grenoble, França: Editions La Pensée Sauvage, 1999.

JURKIEWICZ, S. Matemática Discreta em sala de aula. In: *História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* V.1, pp.115 – 161, Carvalho L.M.; Guimarães, L.C. (org.) IME/UERJ, 2002.

___________ e LEVENTHAL, A. Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio. In: *II História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* Resumos estendidos, pp.1 – 6, Carvalho L.M.(org.) IME/UERJ, 2004.

LEVENTHAL, A. *Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio.* M.Sc. dissertação. COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2005.

MUNIZ Jr., I. *Encontrando, Minimizando e Planejando Percursos: uma introdução à teoria dos grafos no Ensino Médio.* M.Sc. dissertação. CEFET, RJ, Brasil, 2007.

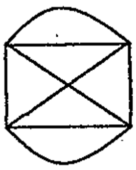
PERDIGÃO, C. Um breve olhar sobre os Grafos. *Educação e Matemática.* n.29, p.19 -20. Portugal, 1994.

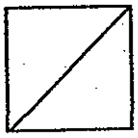
I Olimpíada de Matemática
das Escolas Públicas da Rede Estadual do Piauí

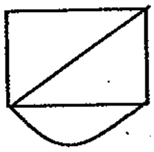
Prova da 1ª Fase - Ensino Médio - 1ª Série

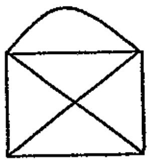
17. Qual dos seguintes desenhos é **impossível** de ser feito sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez por cada linha?

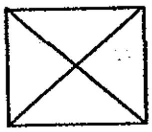
Observação: Pode-se passar mais de uma vez apenas nos vértices dos desenhos.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

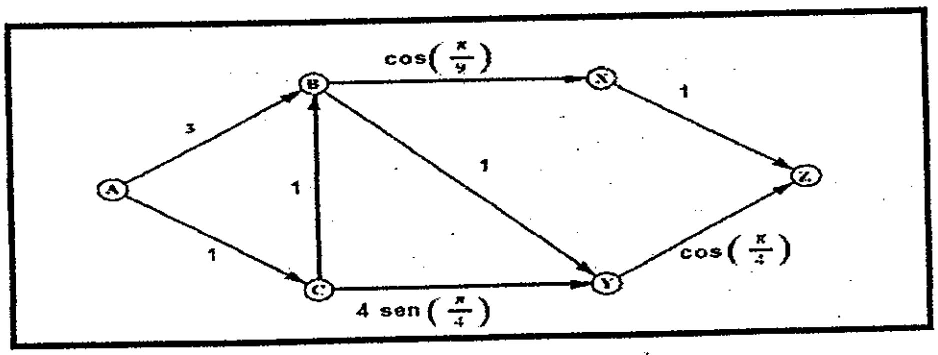
Assunto: Realização de procedimento geométrico investigativo, mediante condições impostas.

Noção de grafos.

UFF 2008 – 1ª Fase

Um caminhão pipa deve transportar água da cidade A para a cidade Z. A figura abaixo ilustra os caminhos possíveis que o motorista do caminhão pode tomar. As setas indicam o sentido obrigatório de percurso. Os valores colocados próximo às setas especificam o custo de transporte (todos dados em uma mesma unidade monetária) para o trecho em questão.

Marque a opção que indica o caminho de menor custo total de transporte de A para Z.



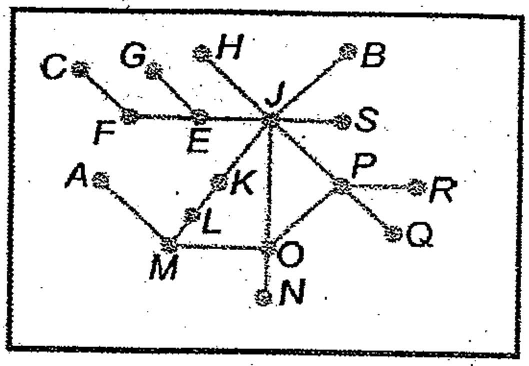
(A) $A \to B \to Y \to Z$ (B) $A \to B \to X \to Z$ (C) $A \to C \to B \to Y \to Z$

(D) $A \to C \to B \to X \to Z$ (E) $A \to C \to Y \to Z$

UFRJ 2008- 1ª Fase

A figura a seguir representa um grafo, isto é, um conjunto de pontos (nós) ligados por segmentos (arestas). Se X e Y são dois nós do grafo, designamos por d(X,Y) o menor número de arestas necessárias para ir de X a Y, percorrendo exclusivamente um caminho sobre as arestas do grafo

(assim, por exemplo, d (N,R)=3).



a) Determine d (A,B).

b) Identifique os nós X e Y para os quais d (X,Y) é máximo.

Nesse caso, quanto é d (X,Y)?

5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Primeira fase- Ensino Básico(nível 3)

18. A figura mostra a planta de uma escola que tem seis salas, indicadas pelas letras de A até F. Joãozinho entrou na escola, percorreu todas as salas e foi embora, tendo passado exatamente duas vezes por uma das portas e uma única vez por cada uma das outras. A porta pela qual Joãozinho passou duas vezes liga:

A) as salas A e B.
B) as salas C e E.
C) as salas E e F.
D) a sala D e o lado de fora da escola.
E) a sala F e o lado de fora da escola.