RAUL ASSIS CAMPOS ALVES

# QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS NA CIRCUNFERÊNCIA. UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

29 de MARÇO DE 2019

RAUL ASSIS CAMPOS ALVES

# QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS NA CIRCUNFERÊNCIA. UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. LUIZ HENRIQUE ZEFERINO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
29 de MARÇO DE 2019

**FICHA CATALOGRÁFICA**
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

A474 Alves, Raul Assis Campos.

QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS NA CIRCUNFERÊNCIA. UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL. / Raul Assis Campos Alves. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

138 f.
Bibliografia: 111 - 113.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.
Orientador: Luiz Henrique Zeferino.

1. Quadriláteros. 2. Circunferência. 3. Lúdico. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

RAUL ASSIS CAMPOS ALVES

# QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS NA CIRCUNFERÊNCIA. UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 29 de Março de 2019.

Monica Souto da Silva Di

**Profª. Mônica Souto da Silva Dias**
D.Sc. - UFF

**Prof. Nelson Machado Barbosa**
D.Sc. - UENF

**Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre**
D.Sc. - UENF

**Prof. Luiz Henrique Zeferino**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus que me deu força para concluir este curso; a minha mãe, meu porto seguro; quem sempre fez o possível para que eu e minha irmã tivéssemos uma excelente educação acadêmica; a meu pai; minha irmã e a minha grande amiga e namorada; que sempre me incentivaram a continuar neste curso.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar, a Deus pela minha vida e por ter permitido esta conquista, sem sua permissão nada seria possível.

À minha família, em especial minha mãe Creuza esta nunca mediu esforços para que eu seguisse neste curso, sem ela eu não teria chegado a este momento final.

À minha amiga e namorada, Josilane, pela paciência e companheirismo, pois mesmo nos momentos difíceis esteve a maior parte do tempo comigo.

À família do meu grande amigo Wesilley, os quais sempre me acolheram como membro da família mesmo nos momentos difíceis.

Às minhas amigas e colegas, professoras Vanessa e Priscila, por toda ajuda nas correções ortográficas.

À Professora Liliana Angelina León Mescua (in memoriam), por inicialmente ter orientado.

À todos os demais professores do PROFMAT - UENF: Elba, Geraldo, Mikhail, Nelson Rigoberto e Oscar, por todos os ensinamentos transmitidos.

Ao meu orientador, professor Luiz Henrique Zeferino, por toda paciência, profissionalismo, dedicação e contribuição para o melhor andamento possível da pesquisa.

Aos meus colegas de turma: Barbara, Bruna, Carla, Diógenes, Eliete, Emanuel, Erika, Gilmar, Rackel, Samara, Tiago, Vitor, com os quais aprendi muito e formaram a melhor turma possível.

Ao meu amigo coordenador do PROFMAT-UENF, professor Oscar Alfredo Paz La Torre, pelo auxílio e atenção sempre que necessário.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao programa PROFMAT por ter me concedido esta oportunidade de aprendizagem.

À UENF pela infraestrutura física e de pessoal.

"Ninguém ignora tudo.
Ninguém sabe tudo.
Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa.
Por isso aprendemos sempre"
Paulo Freire

# Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino para abordagem de quadriláteros inscritíveis na circunferência no nono ano do ensino fundamental. O objetivo principal é apresentar atividades que favoreçam e contribuam para a inserção dos conteúdos propostos utilizando para isso uma metodologia lúdica com jogos e de construção do próprio conhecimento, por meio de materiais de fácil acesso e baixo custo, visto que muitos desses materiais, os alunos precisarão providenciar. O intuito dessas atividades é fazer com que as aulas se tornem mais dinâmicas, sendo algumas delas fora da sala de aula e que os alunos compreendam as propriedades de uma maneira divertida.

**Palavras-chaves**: Quadriláteros. Circunferência. Lúdico.

# Abstract

This academic work presents a teaching proposal to approach in inscriptive quadrilaterals in the circumference for ninth grade students. The main objective is to present activities that favor and contribute to the insertion of the proposed contents using this a ludic and constructive methodology with games for the construction of own knowledge through easily accessible materials and low cost, therefore many of these materials the students will produce them. The purpose of these activities is to make classes become more dynamic, some of them will be made outside of the classroom and that the students understand the properties in a fun way.

**Key-words**:Quadrilaterals. Circumference. Ludic.

# Lista de ilustrações

# Lista de quadros

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais. |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Rede Nacional. |
| SEEDUC-RJ | Secretaria de Estado de Educação do Estado do Rio de Janeiro. |
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular. |
| PNLD | Programa Nacional do Livro e Material Didático. |
| LDB | Lei de Diretrizes e Bases da Educação. |
| RJ | Rio de Janeiro. |
| MEC | Ministério da Educação e Cultura. |
| cm | Centímetro. |
| UENF | Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. |

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\triangle$ | Triângulo. |
| + | Soma. |
| $\circ$ | Grau. |
| $x$ | Multiplicação. |
| $rad$ | Radiano. |
| $\frac{a}{b}$ | Razão de $a$ por $b$. |
| $\overline{AB}$ | Segmento de reta do ponto $A$ até o ponto $B$. |
| $C\hat{A}B$ | Ângulo com vértice no ponto $A$. |
| $\geq$ | Maior ou igual. |
| $>$ | Maior. |
| $<$ | Menor. |
| $=$ | Igual. |
| $\sim$ | Semelhante. |
| $\Longrightarrow$ | Implica que. |
| $\widehat{AB}$ | Arco $AB$. |
| $\alpha$ | Ângulo alfa. |
| $\beta$ | Ângulo beta. |
| $\omega$ | Ângulo ômega. |
| $\gamma$ | Ângulo gama. |
| $\pi$ | Número pi. |
| $\theta$ | Ângulo teta. |

# Sumário

# Introdução

Mesmo sem a vivência diária em sala, o autor através de estágios supervisionados, e um questionário aplicado a professores da área, teve a percepção da dificuldade em obter materiais que abordassem o tema escolhido de uma forma dinâmica e acessível a todos, levando o mesmo a se aprofundar no assunto e buscar levar o tema de forma prática para dentro e fora da sala de aula.

A respeito da escolha do tema Silva e Menezes (2005, p.30) diz que: “A escolha do tema de uma pesquisa, em um Curso de Pós Graduação, está relacionada à linha de pesquisa à qual você está vinculado ou à linha de seu orientador.”

O mesmo autor diz ainda que: “Você deverá levar em conta, para a escolha do tema, sua atualidade e relevância, seu conhecimento a respeito, sua preferência e sua aptidão pessoal para lidar com o tema escolhido.”(SILVA; MENEZES, 2005, p.30).

O tema escolhido já consta na grade curricular, mas durante a pesquisa observa-se que apesar de já terem trabalhado com quadriláteros inscritíveis na circunferência, a maioria dos professores nunca abordou o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência em suas aulas. Um dos motivos para esta falta pode ser sua complexidade na elaboração de atividades que despertem notável interesse nos alunos.

Diante destes fatos, surgiu o seguinte questionamento: “Como auxiliar o professor no ensino de quadriláteros inscritos na circunferência, a partir do uso de atividades lúdicas e com materiais de fácil acesso?"

Um dos maiores desafios do professor, no ensino da matemática, é fazer com que os alunos tenham interesse pelo conteúdo estudado. As novas tecnologias vieram também para tentar aguçar um pouco mais este interesse pelo aprendizado, porém boa parte das escolas públicas, não possuem acesso ao uso dessas tecnologias.

De acordo com BRASIL (1998, p.21)

> “Também existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão, o que os leva a desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática.”

A respeito de atividades lúdicas Fritz (2013, p.11) diz: “A prática de atividades lúdicas, em sala de aula, é uma forma gostosa de ser desenvolvida, em que a criança sente prazer e se diverte com as atividades e agregue cada vez mais conhecimentos.”

Deste modo, o objetivo geral do presente trabalho trata-se de propostas de atividades lúdicas como jogos e atividades práticas, a respeito de quadriláteros inscritíveis na circunferência, utilizando para isto materiais de fácil manipulação, fácil acesso e com baixo custo tanto para os alunos, quanto para os professores na execução e elaboração das atividades.

Alguns autores como: Silva (2016) "Teorema de Casey: Uma Generalização do Teorema de Ptolomeu para Quadriláteros Inscritíveis.", Filho (2016) "O Teorema de Ptolomeu e Aplicações.", utilizaram temas e demonstrações iguais ou parecidos aos contidos neste presente trabalho, possuindo diferenças como: público - alvo, estrutura do texto e metodologia utilizada na aplicação. Outros autores como: Mozelli (2018) "A Matemática na Educação de Jovens e Adultos: O Lúdico como Facilitador do Processo Ensino - Aprendizagem Experienciais numa Escola da Baixada do Rio de Janeiro.", Fonseca (2017) "O Ensino de Geometria no Programa Nova EJA: Uma Abordagem Através de Recursos Lúdico e Tecnológicos.", MONTEIRO (2016) "A Aprendizagem Algébrica no Ensino Fundamental: Uma Abordagem A partir dos Recursos Lúdicos e Digitais."e Silva (2015) "O Uso de Jogos Lúdicos como Recurso Facilitador da Aprendizagem Matemática."utilizaram o lúdico como metodologia em seus trabalhos de conclusão de curso, a diferença dos trabalhos citados para este, é o público - alvo, o tema utilizado e a construção de algumas atividades práticas realizadas pelos alunos.

Sendo assim, o presente trabalho está estruturado em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, apresenta-se uma breve história a respeito da geometria com foco destinado a quadriláteros, circunferências e quadriláteros inscritos na circunferência, que é tema central deste trabalho. Utilizando para isso referências periódicas, filósofos e matemáticos notáveis que apresentaram teorias e demonstrações a respeito deste conteúdo. Citará também, brevemente, um pouco da história do jogo e sua utilização em ambiente escolar.

No segundo capítulo, trata-se da metodologia utilizada neste trabalho, que será uma metodologia lúdica com jogos e atividades práticas, análise de livros , utilizados na rede pública e privada na cidade de São Fidélis - RJ, sobre o tema utilizado, e um questionário aplicado a professores que atuam ou que já atuaram no $9^{\circ}$ ano do Ensino Fundamental.

No terceiro capítulo, aborda-se os conhecimentos necessários para o perfeito entendimento e demonstrações a respeito do tema estudado. Contando, inclusive, com alguns exemplos de autoria própria.

No quarto capítulo, utilizando a metodologia apresentada anteriormente, encontra-se as atividades propostas a respeito de quadriláteros inscritos na circunferência.

No quinto capítulo, se encontra as considerações finais apêndices e referências.

# Capítulo 1

# Um Breve Histórico

"A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente."(BRASIL, 1998)

Neste capítulo, serão apresentados alguns fatos históricos e matemáticos que contribuíram e desenvolveram estudos em geometria, em especial, sobre quadriláteros inscritos na circunferência, estudos esses que serão abordados de alguma forma ao longo deste trabalho. Assim como um pouco da história do jogo, e da sua utilização de forma pedagógica.

## 1.1 Geometria na Pré-História

Não se sabe ao certo, quando e onde a geometria surgiu, o que tem-se da pré-história são registros em fósseis, objetos e figuras rupestre. Essas figuras e alguns objetos são caracterizados por terem conceitos como semelhança e congruência, que são em essência parte da geometria elementar, porém como não havia escrita ou qualquer outra forma de se documentar, nesta época, não é possível determinar uma evolução matemática a partir deste período. (BOYER, 1974)

Segundo Boyer (1974, p. 04) “Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”. Às vezes, a origem presumida de determinado fato, não está exatamente correta, pois o conceito já pode ter sido estudado, mas como não se tem qualquer documento comprovando, este estudo é esquecido.

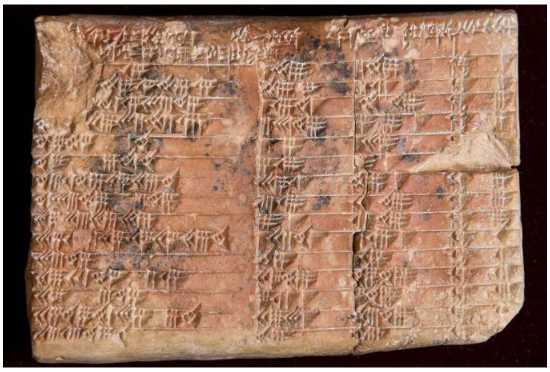
## 1.2 Geometria na Mesopotâmia

Sendo a Mesopotâmia (4000 – 539 A.C.), considerada por historiadores, o berço da civilização, há uma tese que a geometria possa ter se originado nesta época, existe relatos que os babilônicos, um dos povos que viviam na mesopotâmia, conheciam a área do retângulo, do triangulo retângulo e do trapézio, a circunferência do círculo era estimada em três vezes o seu diâmetro e sua área em $\frac{1}{12}$ do quadrado de sua circunferência, assim como tinham ciência que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto, resultado também conhecido como teorema de Tales, mesmo os babilônicos o usando mil anos antes do nascimento deste, (MOL, 2013, p. 19-20).

Há provas concretas que os babilônios conheciam o teorema de Pitágoras. Vários objetos de barro datados de (1800 a 1600 A.C.), foram encontrados,decifrados e hoje se encontram em museus pelo mundo, entre eles está o Plimpton 322, representado na figura1, que se encontra na Universidade de Columbia. Neste fragmento, os pesquisadores descobriram que se tratavam de ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Um outro objeto, se encontra na Universidade de Yale, representado na figura 2, e é o único que contém figuras, um quadrado e suas diagonais. Porém, não há registro de demonstração sobre tal teorema, visto que provavelmente não seria esse o objetivo dos matemáticos da época, (EVES, 2015).

Outro fato que devemos aos antigos babilônios é a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, (EVES, 2015). Deve-se destacar que este povo foi o primeiro a usar base sessenta para realizar contagens, pois o número sessenta pode ser facilmente decomposto em um produto de fatores que facilita muito em diversos cálculos, em especial, a divisão.

Figura 1 – PLimpton 322



Fonte:https://veja.abril.com.br/ciencia/misterio-de-tabua-da-babilonia-e-desvendado-por-cientistas/ Acessada em 02/04/2019.

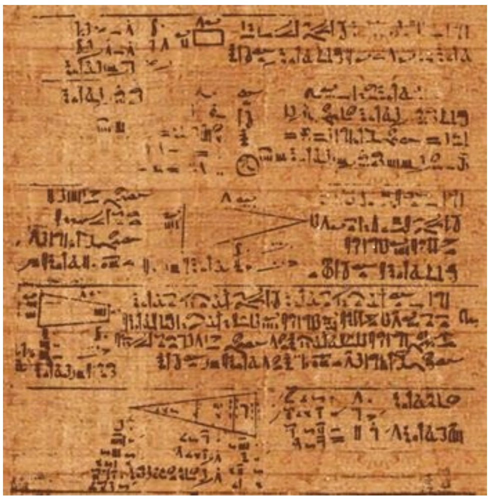
Figura 2 – Desenho Geométrico Mesopotâmico

Fonte:http://platea.pntic.mec.es/ aperez4/html/babiegipt/babiegipto.html. Acessada em 02/04/2019.

## 1.3 Geometria no Egito

De acordo com Boyer (1974, p.13), “Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo,..., estão entre as primeiras afirmações precisas da história referentes a figuras curvilíneas”. A maior parte das informações matemática egípcia vem do Papiro de Rhind ou de Ahmes, representado na figura 3, o mais extenso documento matemático do antigo Egito.

Figura 3 – Papiro de Rhind



Fonte:http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049 Acessada em 02/042019.

Heródoto (485 – 425 A.C.), conhecido como o “Pai da história”, acreditava que a geometria originou-se no Egito, pois pensava que havia surgido da necessidade prática de refazer as medidas de terras e propriedades, após cada inundação anual no vale do rio Nilo. Segundo Boyer (1974, p. 07), Ele dizia:

> Sesóstris..., repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem o rei mandava pessoas para examinar e determinar por medida a extensão exata da perda..., por esse costume eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia.

Já Aristóteles (384 – 322 A. C.), acreditava também que a geometria originou-se no Egito, porém para ele, existia uma classe sacerdotal à qual tinha conduzido ao estudo da geometria, (BOYER, 1974).

## 1.4 Geometria na Grécia

A teoria do surgimento da geometria não está clara nem de modo algum pode ser provada, porém foi na Grécia que a geometria deu o seu maior salto para se tornar o que é hoje, graças a seus matemáticos e pesquisadores, que até os dias atuais são lembrados e mencionados em qualquer artigo que trate geometria.

Há relatos que Hipócrates de Chios (470 – 410 A.C.), escreveu mais de meio século antes de Euclides, uma obra chamada “Os Elementos da Geometria”, no entanto o texto de Hipócrates se perdeu (BOYER, 1974).

"O teorema de Hipócrates sobre áreas de círculos parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego"(por volta de 430 A.C.), (BOYER, 1974, p.49). Não se sabe ao certo se Hipócrates demonstrou este teorema, mas presume-se que se ele de fato tenha provado, então pode ter sido Hipócrates quem introduziu o método indireto de demonstração, neste caso demonstração por absurdo.

Euclides ( século III A.C.), considerado o “Pai da Geometria”, foi um matemático Grego, que viveu em Alexandria durante o reinado de Ptolemeu I. Em matemática, a sua principal contribuição foi a elaboração de uma coleção de livros conhecidos como “Os Elementos”, embora uma parte dessa obra tenha sido tratada por Hipócrates, é de Euclides que se tem a documentação exigida. A geometria é tratada em "Os Elementos"nos quatro primeiros livros, com conteúdo sobre geometria plana elementar e estudo sobre propriedades de figuras retilíneas e do círculo.(MOL, 2013).

Outro matemático Grego que teve grande influência na geometria, foi Tales De Mileto (624 – 546 A.C), considerado o criador da geometria dedutiva, sendo atribuída a ele as primeiras demonstrações matemáticas que se tem registro. Atribuem-se a Tales diversas descobertas matemáticas. As que de alguma forma serão abordadas neste estudo são: Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro e o ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Este último já era conhecido dos babilônios porém foi documentado por Tales.(MOL, 2013).

Com os gregos, pela primeira vez, encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos ou arcos num círculo e os comprimentos das cordas que o subentendem. As propriedades das cordas como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos desde o tempo de Hipócrates, é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra. Nas obras de Euclides, não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis e fórmulas trigonométricas específicas.(BOYER, 1974).

## 1.5 Matemáticos

A seguir será apresentado um pouco da biografia de dois grandes matemáticos que desenvolveram estudos e demonstrações a respeito de quadriláteros inscritos na circunferência.

**Hiparco**

Pouco se sabe sobre a vida de Hiparco de Nicéia (190 – 120 A.C.), considerado o “pai da trigonometria”, a maior parte do que é conhecido, se deve a Ptolomeu, este cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia. Em astronomia, Hiparco é considerado o primeiro a determinar com precisão o nascer de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Para construir esta tabela hiparco necessitava, em primeiro lugar, de ângulos, até "Os Elementos de Euclides", os ângulos eram medidos por múltiplos e submúltiplos do ângulo reto. Mais tarde, os astrônomos gregos passaram a utilizar o sistema sexagesimal dos babilônicos, que dividiam a circunferência em 360 partes cada uma sendo um grau e estabeleciam subdivisões em minutos e segundos usando a base sessenta. Todas as notícias que temos da tabela de Hiparco se deve a fontes indiretas, sobretudo o Almagesto (o maior) escrito por Ptolomeu. É provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco, este seguindo, provavelmente, as ideias de Hipsicles o qual teria dividido o dia em 360 partes, divisão esta inspirada nos astrônomos babilônicos.(PITOMBEIRA; ROQUE, 2012)

Durante cerca de dois séculos e meio, os matemáticos Gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a vários problemas de astronomia, mas nada disso resultou em uma trigonometria sistemática; então, em tese, durante a segunda metade do século II A.C, Hiparco compilou o que seria a primeira tabela trigonométrica que se tem notícia. Aristarco (230 A.C.) sabia que num dado círculo, a razão do arco para a corda diminuía quando o arco diminui de 180° para 0°, aproximando do limite 1. No entanto parece que antes de Hiparco, ninguém havia feito uma tabela com valores correspondentes do arco e da corda para uma série de vários ângulos. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam com o tempo.(BOYER, 1974)

**Ptolomeu**

Embora seja mais um matemático sobre o qual pouco se sabe, Claudio Ptolomeu (90 – 168 D.C.) foi um matemático que teve grande importância para a geometria sobretudo foi através de Ptolomeu e sua obra, o Almagesto, que tomamos conhecimento do quão importante foi Hiparco para a evolução matemática.

Em o Almagesto, Ptolomeu faz diversas referências ao " Cordas num círculo" de Hiparco, porém não podemos precisar qual o tamanho dessa referência, pois a obra de Hiparco se perdeu, ao contrário do Almagesto, por isso temos não só suas tabelas trigonométricas, mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção. De importância central para as cordas de Ptolomeu, era uma proposição conhecida ainda hoje como teorema de Ptolomeu o qual será definido e demonstrado no interior do próximo capítulo deste trabalho.

Um caso especial do teorema de Ptolomeu havia aparecido nos "Dados de Euclides"; se $ABC$ é um triângulo inscrito num círculo e se $BD$ é uma corda que bissecta o ângulo $A\hat{B}C$, então $\frac{AB+BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$. Outro caso especial do teorema de Ptolomeu é aquele em que se leva as fórmulas de seno e cosseno das soma e diferença, foi a fórmula para seno da diferença, ou mais precisamente da corda da diferença que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas. Outra fórmula muito útil é: Dada a corda de um arco num círculo Ptolomeu achava a corda da metade do arco. Agora Ptolomeu estava preparado para construir uma tabela de cordas tão precisa quanto se queira, pois tinha o equivalente a nossas fórmulas fundamentais (BOYER, 1974).

Lembrando que desde os dias de Hiparco não havia coisas como razões trigonométricas. Os Gregos, depois os Hindus e os Árabes, usavam linhas trigonométricas, essas, a princípio, tiveram formas de cordas no círculo. E coube a Ptolomeu dar valores numéricos ou aproximações as cordas, para isso duas convenções eram necessárias: Algum esquema para subsidiar a circunferência de um círculo, e Alguma regra para subsidiar o diâmetro (BOYER, 1974).

Figura 4 – Imagem atribuída a Ptolomeu

http://www.explicatorium.com/biografias/claudio-ptolomeu.html Acessada em 02/04/2019.

## 1.6 Jogo e atividades práticas no ensino de matemática.

Sendo os jogos e as atividades práticas, parte integrante e fundamental deste presente trabalho. A seguir, será apresentado um pouco da história do jogo e das atividades práticas no ensino da matemática.

Os jogos são conhecidos, desde o início da humanidade, sendo utilizados como brincadeiras e passatempo ou como uma forma de facilitar o processo de ensino – aprendizagem. Assim como a humanidade, os jogos também evoluíram desde o Mancala, “O jogo africano Mancala vem de longa data, cerca de 7.000 anos, e, ao que tudo indica, é o “pai” dos jogos.” (SILVA, 2014, p. 05), até os jogos eletrônicos ultra modernos de hoje em dia.

A utilização didática educativa dos jogos, tem início a partir do século $XVI$, com os primeiros estudos a seu respeito sendo situados na Roma e na Grécia.

> “Platão, em Les Lois (1948), comenta a importância do “aprender brincando”, em oposição à utilização da violência e da repressão. Da mesma forma Aristóteles sugere, para a educação o uso de jogos que imitem atividades sérias, de ocupações adultas, como forma de preparação para a vida futura dos jovens” (PEREIRA, 2013).

Na atualidade, considera-se o jogo como uma importante ferramenta para o ensino de matemática. Porém, nem sempre foi assim, em épocas passadas, acreditou – se que esta forma de ensinar seria uma perda de tempo, ou algo que não houvesse relevância no aprendizado do aluno. Sobre esta época, Fiorentini diz que:

> “Até o séc. XVI, [...] A aprendizagem do aluno era considerada passiva, consistindo basicamente em memorização de regras, fórmulas, procedimentos ou verdades localmente organizadas. Para o professor desta escola - cujo o papel era o de transmissor e expositor de um conteúdo pronto e acabado - o uso de materiais ou objetos era considerado pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe.” (FIORENTINI; MIARIM, 1990, p. 02).

Ainda sobre a utilidade do jogo Kishimoto ratifica que: “Se em tempos passados, o jogo era visto como inútil, como coisa não séria, depois do romantismo, a partir do século $XV$, o jogo aparece como algo sério e destinado a educar a criança” (KISHIMOTO, 1994, p. 108).

A medida que as técnicas de ensino-aprendizagem no ensino da matemática foram evoluindo, a utilização de jogos no ambiente escolar foram ganhando destaque pois, estes tipos de atividades, valorizam aspectos como; criatividade, espontaneidade e participação ativa do aluno em todo o processo de aprendizagem. De acordo com Mota (2009, p. 32), “Segundo Piaget os jogos não são apenas uma forma de desafogo ou entretenimento para gastar as energias das crianças, mas meios que contribuem e enriquecem o desenvolvimento intelectual”.

Durante o processo de evolução e da aplicação de jogos e atividades práticas na educação matemática, algumas figuras realizaram estudos e contribuíram de forma significativa, afim de comprovar a eficácia destes métodos. Dentre os quais se destacam:

**Pestalozzi (1746 – 1827)**

JOHANN HEINRICH PESTALOZZI, foi um pensador e pedagogo suíço, considerado o "Pai da psicologia moderna" foi um dos percursores da escola ativa, onde os alunos deveriam aprender muito além do currículo até esta época proposto, com essa visão, "Fundou um internato onde o currículo adotado dava ênfase à atividades dos alunos como canto, desenho, modelagem, jogos, excursões ao ar livre, manipulação de objetos onde as descrições deveriam preceder as definições" (FIORENTINI; MIARIM, 1990, p. 02). Onde tinha como finalidade, buscar um método de ensino tão fácil de modo que qualquer pessoa estaria apta à aplicá-lo.

**Montessouri (1870 - 1952)**

MARIA MONTESSOURI, foi uma educadora e médica italiana, a qual aportou grande contribuição principalmente na inserção de uma metodologia onde se utiliza a prática no processo de ensino - aprendizagem. A esse respeito, Röhrs diz: "Em seus escritos, Montessori não se cansa de ressaltar a importância do empreendimento que consiste em desenvolver atitudes em vez de simples competências; segundo ela, a atividade prática deve criar uma atitude, e isso graças à contemplação" (RÖHRS, 2010, p.20).

**Piaget (1896-1980)**

JEAN PIAGET, foi um psicólogo Suíço, que apesar de ser considerado e referenciado como um pedagogo, o mesmo jamais exerceu esta profissão chegando ao ponto de certa vez declarar: "Em matéria de pedagogia, não tenho opinião" (BRINGUIER, 1977, p. 194). Apesar de possuir inúmeras obras sobre diversos temas, seus trabalhos voltados para educação são referências para inúmeros educadores e pedagogos, inclusive muito citado nos livros de caráter pedagógico durante o curso de licenciatura oferecido pelo CEDERJ. Piaget acreditava que só a educação poderia salvar nossa sociedade da barbárie. "Para ele, a ação educativa é algo pelo que vale a pena lutar, confiando no êxito final" (MUNARI, 2010, p. 17).

Quanto ao seu projeto educativo, Piaget pregava que: "O aluno é convidado a experimentar ativamente, para reconstruir por si mesmo, aquilo que tem de aprender. Este é, em linhas gerais, o projeto educativo de Piaget."(MUNARI, 2010, p. 18). Sendo assim, Piaget foi um grande defensor da metodologia que se utiliza a prática como forma de adquirir conhecimento.

No brasil, a atividade prática vem desde antes de sua descoberta pelos navegantes portugueses pois, os habitantes que neste país viviam, os índios, construíam seus objetos e armas com as próprias mãos utilizando para isso matéria prima oriunda da natureza.

Quanto à jogos, a maioria dos jogos tradicionais que chegaram ao Brasil, veio através dos primeiros portugueses. A esse respeito Alves (2003, p. 07) afirma que: “A influência portuguesa penetrou de tal forma em nossos costumes e valores, que fica difícil detectar a contribuição exata de portugueses no folclore e, respectivamente, nos jogos tradicionais”. Além dos portugueses, outras duas etnias que tiveram grande relevância na estrutura cultural do povo brasileiro foram a indígena nativa e os negros provenientes da África. E os jogos no Brasil foram se moldando a medida que essas três culturas foram se entrelaçando, como ratifica Alves: “O negro acabava por ressignificar jogos do qual participava de forma direta ou indiretamente, auto-afirmando sua cultura e dando novos sentidos aos jogos portugueses e indígenas com o qual entrava em contato” (ALVES, 2003, p. 09).

Ainda sobre a formação e inserção do jogo na cultura brasileira, Alves (2003, p. 12) finaliza com: ”Os jogos e brincadeiras presentes na cultura portuguesa, africana e indígena acabaram por fundirem-se na cultura lúdica brasileira. Esta cultura lúdica é formada, entre outras coisas, por jogos geracionais e costumes lúdicos. Dentre os chamados “jogos tradicionais brasileiros”, podemos citar: a) Queimado/caçador; b) Carniça; c) Pique; d) Cabra-cega; e) Mamãe posso ir; f) Peteca; g) Amarelinha”.

O jogo na educação matemática no Brasil, segundo Raupp e Grando (2016), tem feito parte das propostas pedagógicas desde 1920, iniciando por meio do movimento da escola nova. Sendo recorrente seu uso pedagógico até os dias atuais.

# Capítulo 2

# Aspectos do Desenvolvimento do Trabalho.

## 2.1 Introdução

A lei número: 9.394/1996 (LDB, 9394/96), em seu terceiro artigo, inciso três, normatiza que: "O ensino será ministrado com o princípio do pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas".

Com base na lei, citada acima, este capitulo será dedicado à fundamentação metodológica a respeito da aplicabilidade do conteúdo proposto no ambiente escolar, a análise de livros didáticos ou não, utilizados por professores atuantes nas redes públicas e privadas na cidade de São Fidélis - RJ, e um questionário a respeito da utilização de livros, a empregabilidade do lúdico na escola e a respeito de conteúdos sobre quadriláteros inscritíveis na circunferência, destinado a docentes atuantes, ou que já atuaram no $9°$ Ano do Ensino Fundamental.

Para Manfredi (1993):

> "Considerando a sua origem grega, a palavra metodologia advém de METHODOS, que significa meta (objetivo, finalidade) e HODOS (caminho, intermediação), isto, é caminho para se atingir um objetivo. Por sua vez, LOGIA quer dizer conhecimento, estudo. Assim, metodologia significaria o estudo dos métodos, dos caminhos a percorrer, tendo em vista o alcance de uma meta, objetivo ou finalidade".

Deste modo, o presente trabalho visa apresentar alternativas para que professores atuantes promovam um aprendizado significativo a respeito do conteúdo estudado.

A respeito da metodologia Silva e Menezes (2005) diz: "A Metodologia tem como função mostrar a você como andar no “caminho das pedras” da pesquisa, ajudá-lo a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo: um olhar curioso, indagador e criativo."(SILVA; MENEZES, 2005, p.09)

A metodologia utilizada pelo educador é fundamental no processo de aprendizagem e sendo esta metodologia simples e de fácil compreensão, fará com que resultados positivos sejam alcançados com mais rapidez e precisão.

De acordo com Neves e Domingues: “A metodologia deve ser escrita de modo claro e detalhado, para que o leitor seja capaz de reproduzir, se necessário, o aspecto essencial do estudo.” (NEVES; DOMINGUES, 2007, p.46)

Sendo assim, neste trabalho a metodologia utilizada será composta por atividades lúdicas com jogos que façam com que os alunos, além de conhecimento prévio sobre o tema estudado, também tenham uma percepção rápida de soma e subtração envolvendo números naturais, e atividades onde os alunos construirão seu material de estudo de maneira prática, utilizando materiais de fácil manipulação, fácil acesso e com baixo custo.

As atividades propostas têm por objetivo fazer com que o aluno saia da sua rotina mecânica, normalmente utilizada em salas de aulas, fazendo com que ele tenha prazer em participar da construção do seu conhecimento, fixando os conteúdos de maneira prática e proporcionando uma socialização através do trabalho em equipe, mesmo o conhecimento sendo adquirido de forma individual.

A respeito de atividades lúdicas no ensino de matemática, Mendonça diz:

> "A necessidade de utilizar atividades lúdicas contribui para uma aprendizagem mais satisfatória nesta disciplina, que é tida como uma das mais difíceis de ser compreendida. Isso nos conduziu ao desenvolvimento deste trabalho na tentativa de mostrar caminhos para o ensino da Matemática, de maneira mais prazerosa e gratificante tanto para o aluno quanto para o professor, fortalecendo a relação de troca de conhecimentos entre ambos e estabelecendo uma relação harmoniosa e respeitosa.” (MENDONCA; MACEDO, 2010, p.04)

## 2.2 A pesquisa

Para Neves e Domingues (2007, p.16) “pesquisa é uma atividade voltada para a busca de um determinado conhecimento.”

De acordo com as orientações do PROFMAT para a conclusão do curso, é preciso apresentar uma dissertação, que de algum modo, tenha impacto diretamente na educação básica de ensino. Assim, sendo o 9° ano do ensino fundamental parte integrante deste nível de ensino, este trabalho é destinado a esses alunos na modalidade regular, alunos cuja faixa etária varia entre 14 – 17 anos.

## 2.3 Escolha do tema

A escolha do tema deve-se ao fato de observando o acervo de dissertações anteriores, nota-se a existência de poucos trabalhos sobre quadriláteros inscritos na circunferência. Além disso, existe uma certa resistência do professor em abordar esse assunto em sala de aula pelo fato de, o mesmo não está presente de forma explicita no currículo mínimo do estado do Rio de Janeiro e no PCN nesta área, apesar de quadriláteros e círculos serem sempre citados quando se trata de geometria. As propriedades da inscrição do primeiro no segundo é pouco explorada ou cobrada, pensando nisso, foram elaboradas diversas atividades lúdicas de maneira que o tema possa ser abordado dentro e fora de sala de aula.

Abaixo segue um quadro com algumas exigências dos PCN relativo à geometria no quarto ciclo do ensino fundamental.

Quadro 1 – Parâmetros Curriculares Nacionais

| |
|---|
| Identificação de ângulos congruentes, complementares e Suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais. |
| Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. |
| Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer. |
| Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos. |
| Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). |
| Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos. |
| Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro). |
| Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales. |
| Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras. |
| Cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações. |
| Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência) Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo. |

Fonte: (BRASIL, 1998, p. 88-89)

Abaixo tem um quadro com as exigências da SEEDUC-RJ relativo à geometria para o 9ª Ano do Ensino Fundamental, diferentemente das exigências do PCN, o currículo mínimo do Estado do Rio de Janeiro faz suas exigências por ano de curso.

Quadro 2 – Currículo Mínimo SEEDUC-RJ

| |
|---|
| Identificar figuras semelhantes. |
| Utilizar o Teorema de Tales para resolver situações do cotidiano. |
| Utilizar as relações de proporcionalidade para resolver problemas envolvendo figuras semelhantes. |
| Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos. |
| Utilizar o Teorema de Pitágoras na dedução de fórmulas relativas a quadrados e triângulos equiláteros. |
| Construir alguns números irracionais utilizando o Teorema de Pitágoras. |
| Compreender o conceito de razão trigonométrica a partir da semelhança de triângulos. |
| Calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. |
| Utilizar as razões trigonométricas para resolver problemas do cotidiano. |
| Reconhecer e diferenciar círculo e circunferência, identificando seus elementos. |
| Identificar o número (pi). |
| Calcular o perímetro de uma circunferência e a área de um círculo. |
| Reconhecer polígonos regulares e suas propriedades. |
| Calcular os ângulos internos e externos de um polígono regular. |
| Resolver problemas que envolvam áreas de figuras planas. |

Fonte: (SEEDUC, 2012, 12-13)

A apresentação desses dois quadros teve como objetivo, mostrar a inexistência de conteúdo, de forma explícita, sobre quadriláteros inscritíveis na circunferência no currículo destinado a alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

## 2.4 Elaboração das atividades

Atividades lúdicas são ferramentas importantes para absorção e compreensão do conteúdo proposto pois, traz consigo um caráter informal em suas aplicações. A respeito de atividades lúdicas a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) normatiza que (BRASIL, 2017):

> "A instituição escolar precisa promover oportunidades ricas para que as crianças possam, sempre animadas pelo espírito lúdico e na interação com seus pares, explorar e vivenciar um amplo repertório de movimentos" (BRASIL, 2017, p. 39).

Segundo Oliveira (1983, p.74) o lúdico é:

> "... um recurso metodológico capaz de propiciar uma aprendizagem espontânea e natural. Estimula a crítica, a criatividade, e a sociabilização. Sendo, portanto reconhecido como uma das atividades mais significativas – senão a mais significativa – pelo seu conteúdo pedagógico social."

Sendo assim, usando o lúdico como metodologia espera-se que a criança se divirta enquanto aprende determinado conteúdo.

“Na atividade lúdica, o que importa não é apenas o produto da atividade o que dela resulta, mas a própria ação, o momento vivido.” (DUDAR; SANTOS, 2015).

Deste modo, a seguir será detalhado os conceitos pedagógicos de cada atividade apresentada neste trabalho:

### 2.4.1 Jogos.

Com respeito aos jogos os PCN norteiam que:

> “[...] constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas” (BRASIL, 1998, p.46).

Ainda sobre jogos, Caiado (2012, p.16) diz que:

> “É extremamente rica e diversificada a produção acadêmica sobre o jogo e com o uso de jogos. É igualmente rica, diversificada e inegável a gama de benefícios e contribuições que o jogo fornece para o desenvolvimento da criança.”

Deste modo:

A primeira atividade; **Memorizando Ângulos**, consiste em um jogo da memória com 44 cartas divididas igualmente em 4 cores seguindo a seguinte ordem: verde, amarelo, azul e branco de modo que os pares sejam verde com azul e amarelo com branco, Cada carta terá um valor numérico em graus de um lado e apenas a cor do outro e terá aproximadamente $100cm^2$. Para melhor entendimento dos alunos, ficará exposto um banner retangular com medidas próximas à $60cm$ x $45cm$, representado na figura 54, com um quadrilátero inscrito na circunferência como gráfico deste banner, cujos ângulos A, B, C, D estejam respectivamente nas cores, verde, amarelo, azul e branco de modo que não reste dúvida sobre quais ângulos são suplementares. O jogo deverá ser ambientado preferencialmente fora de sala, como por exemplo: em uma quadra esportiva. As cartas de uma mesma cor deverão ser embaralhadas e postas viradas com a numeração para baixo de modo que ninguém possa ver qual número consta na mesma, as cartas de uma mesma cor formarão uma linha com 11 colunas, onde cada linha com coluna será composta de uma carta. A importância da cor da carta se deve ao fato de que a mesma corresponde ao vértice de mesma cor no banner onde está o quadrilátero inscrito na circunferência.

Esta primeira atividade, trata-se de um jogo baseado no jogo da memória, adaptado para se trabalhar o teorema do quadriláteros inscritível na circunferência. De acordo com as classificações de jogos definidas por Lara (2004, p.05): "O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido.", logo, este jogo será um jogo de treinamento pois, os alunos precisam estar familiarizados com o teorema do quadrilátero inscritível e utilizarão a repetição da propriedade deste teorema, durante o jogo. Ao utilizar o jogo no processo de ensino - aprendizagem, é importante estar atento, para o momento da aplicação do jogo, para que este não seja apenas um passatempo, Kiya e Dionizio (2014) afirmam que: "o professor precisa rever seus conceitos e compreender que o jogo, quando adequado ao processo educativo, torna-se uma ferramenta com grande possibilidade de ensino." Sendo assim, esta atividade deverá ser aplicada após a introdução de quadriláteros inscritos na circunferência e definição do teorema do quadrilátero inscritível na circunferência em sala de aula.

A segunda atividade; **Dominó dos Ângulos Opostos de um Quadrilátero Inscrito na Circunferência.**, consiste em um jogo de dominó com 28 peças representado na figura 56, de forma retangular com lados medindo aproximadamente $2,5cm$ por $4,0cm$ onde cada peça possui dois valores com unidade de medida em graus. O jogo deverá ser ambientado em sala de aula utilizando para isso a carteira dos alunos, em caso de duplas, ou a carteira do professor, em caso de mais participantes, sendo no máximo quatro participantes em cada jogo. Assim como no jogo original de dominó, antes do jogo começar, as peças deverão ser embaralhadas e distribuídas de modo que tenham 7 peças para cada participante, entretanto apenas o proprietário das peças possa vê-las, ficando as peças restantes viradas com a numeração para baixo, como peso "morto"de onde os jogadores retirarão sempre que necessário uma peça de cada vez a fim de continuar o jogo.
Esta atividade é baseada no jogo de dominó adaptado de modo que cada "peça"possua dois ângulos, em graus, adjacentes de um quadrilátero inscrito na circunferência, segundo Lara (2004) jogos estratégicos são:

> "Jogos que façam com que o aluno crie estratégias de ação para uma melhor atuação como jogador. Onde ele tenha que criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema"Lara (2004, p.07).

Deste modo, este jogo será um jogo de estratégia pois, os alunos precisarão desta tática para vencer seus adversários. sendo o momento da aplicação um fator importante, esta atividade deverá ser implantada imediatamente após a definição e demonstração do teorema do quadrilátero inscrito na circunferência.

A terceira atividade; **Bingo com Ângulos Opostos de um Quadrilátero Inscrito em uma Circunferência.**, trata-se de um bingo, com 16 cartelas de forma quadrada cujo lado é de aproximadamente $10cm$, cada tabela possui 20 números entre 1 e 179 todos utilizando como unidade de medida o grau, além da cartela, o jogo ainda possui 131 peças quadradas cujo lado é de aproximadamente $2cm$. Esta cartela possui os ângulos que são suplementares de cada ângulo contido na cartela. O jogo deverá ser ambientado em sala

de aula de modo que cada aluno possua uma única cartela.
Este jogo é baseado em um bingo, adaptado para utilizar o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência de modo que o valor sorteado e o valor da tabela, sejam suplementares. De acordo com Lara (2004, p.05),"o jogo de treinamento pode ser utilizado para verificar se o aluno construiu ou não determinado conhecimento servindo como um “termômetro” que medirá o real entendimento que o aluno obteve."logo, este jogo classifica-se como jogo de treinamento pois ao utilizá-lo, verifica-se se o aluno compreendeu o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência a medida que estes marquem de forma correta as cartelas do presente bingo. Esta atividade deverá ser inserida após a definição e demonstração do teorema do quadrilátero inscrito na circunferência.

O último Jogo deste trabalho será **Jogo de Perguntas e Respostas Sobre Quadriláteros Inscritos na Circunferência**, consiste em um jogo de perguntas e respostas a respeito de quadriláteros inscritos na circunferência, possuindo 24 perguntas escritas em papel de modo que tenha 24 cartões, cada um contendo uma pergunta e no seu verso, terá um Ângulo medido em grau. O jogo deverá ser ambientado em sala de aula, utilizando o quadro ou algum mural para posicionar e prender as perguntas, utilizando fita adesiva dupla face, de modo que os alunos consigam visualizar o lado com os ângulos. Este tipo de jogo é classificado por Lara (2004, p.04):

> "como jogos de construção, aqueles que trazem ao aluno um assunto desconhecido fazendo com que, através da manipulação de materiais ou de perguntas e respostas, ele sinta a necessidade de uma nova ferramenta, ou se preferirmos, de um novo conhecimento, para resolver determina situação-problema proposta pelo jogo.

Pois, esta atividade deverá ser apresentada antes da introdução dos conceitos de quadriláteros inscritíveis na circunferência, como os alunos poderão utilizar diversos meios para encontrar as soluções das questões, inclusive aparelhos eletrônicos com acesso a internet, esta atividade poderá servir de introdução para o tema proposto.

### 2.4.2 Atividades Práticas.

Uma importante ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos é a atividade de forma prática, onde os alunos participam ativamente do processo de aprendizagem desde a confecção até a conclusão da atividade. Para que as aulas de matemática não se torne uma coisa "presa"às aulas expositivas, deve-se elaborar atividades que visam além de aprender determinado conteúdo, façam com que os alunos se divirtam enquanto executam tal atividade, dentre as quais destacam-se jogos e atividades práticas.

Quanto a atividades práticas na escola, UNICSUL (2007, p.11) diz que:

> "O aprender, na prática, focaliza a ação educativa na participação ativa e crítica do aluno em sua aquisição de conhecimentos práticos e teóricos,

> em seu desenvolvimento de habilidades e em sua formação de valores e atitudes".

A matemática é subdividida em alguns campos de atuação como; aritmética, álgebra, análise entre outras dando destaque também para o campo geométrico, o qual com suas formas e cálculos, faz com que seja propícia a utilização de atividades práticas na construção do conhecimento. A respeito da forma de se trabalhar conteúdos de geometria no âmbito escolar o PCN norteia que:

> "As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas."(BRASIL, 1998, p.126)

Deste modo, a seguir serão caracterizadas as duas últimas atividades contidas neste trabalho, tratam-se de atividades práticas a respeito de quadriláteros inscritos na circunferência, onde os alunos mediados pelo professor construirão seus conhecimentos manipulando objetos simples, os quais serão os materiais didáticos das atividades.

A quinta atividade **Construindo Quadriláteros com Bambolê**, trata-se da construção de quadriláteros inscritos na circunferência feitos com bambolês, barbantes, tachinhas, tesoura e transferidor, de modo que cada aluno produza o quadrilátero com o tamanho que desejar, observando assim a "importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento."(BRASIL, 1998, p.20), e cabendo ao professor apenas orientar que a figura inscrita seja um quadrilátero e como utilizar de forma correta o transferidor.
Esta atividade deverá ser realizada com toda a turma em um ambiente amplo, de preferência fora da sala, sugere-se a quadra de esporte da escola.
Observando o bambolê, nota-se que se trata de um material extremamente flexível, assim de acordo com Lara (2004), este tipo de material classifica-se como "manipulável dinâmico", pois este objeto pode sofrer transformações a medida que os alunos os manipule, neste caso, esta atividade deve ser usada para introduzir o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência já que, na maioria das vezes, ao utilizar o transferidor, as medidas dos ângulos opostos não serão necessariamente suplementares, podendo ocorrer algumas variações, possibilitando assim que o professor após a aplicação desta atividade, introduza a definição e demonstração do teorema citado.

A última atividade deste trabalho será **Verificando Quadriláteros Notáveis** e trata-se da construção dos quadriláteros notáveis quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézio utilizando para isto objetos como tesoura, régua, cartolinas, lápis, compasso e conhecimentos básicos de construções geométricas. Esses objetos são caracterizados segundo Lara (2004), como "manipuláveis estáticos"pois, após a construção das figuras as mesmas não sofrerão qualquer tipo de alteração, verificando após essas construções quais quadriláteros são inscritíveis em uma circunferência. A respeito de construções geométricas no ensino de matemática, BRASIL (1998, p.51) "O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso...". Deste modo, cada aluno terá a liberdade de escolher o tamanho e cor de sua figura, a forma caberá o professor orientar, da seguinte maneira:

Para construir o quadrado e o retângulo os alunos farão uma reta $r$ em uma pedaço da cartolina; em seguida, utilizando os conceitos de construções sobre esta reta deverão marcar dois pontos distintos A e B e sobre esses pontos construirão duas retas $s$ e $t$ perpendiculares à reta $r$. No caso do quadrado, com a abertura do compasso medindo $AB$, e centro em A e depois em B, encontre os pontos C em $s$ e D em $t$, ligando $CD$ tem-se o quadrado procurado. No caso do retângulo, basta que a abertura do compasso seja diferente da medida $AB$.

Para construir o paralelogramo, deve-se construir uma reta $r$ e posteriormente uma reta $s$ de modo que tenham apenas um ponto em comum e que uma não seja perpendicular a outra. O ponto de encontro entre $s$ e $t$, será o ponto $A$ e sobre as retas $r$ e $s$ marque $B$ e $C$ respectivamente de modo que $AB$ seja diferente de $AC$. Após isso, basta construir uma paralela à $s$ passando por B e uma outra paralela à $r$ passando por $C$ essas retas, se encontram no ponto $D$ que forma um paralelogramo.

Para a construção do losango, deve-se construir duas retas perpendiculares $r$ e $s$ se encontrando no ponto $O$, sobre a reta $s$, marque um ponto $A$ diferente de $O$, utilizando o compasso tendo abertura como medida $OA$, e centro em $O$ , marque sobre $s$ o ponto $B$, com abertura diferente de $OA$, realize o mesmo processo sobre a reta $r$, encontrando os pontos $C$ e $D$, ligue os pontos $ACBD$ e terá um losango.

Para construir os círculos que esses quadriláteros possam estar inscritos, utilizem a metade das diagonais como raio. Para conferir o teorema do quadrilátero inscrito, utilizem o transferidor.

O trapézio será um caso a parte, pois primeiro será construído um círculo qualquer e neste círculo será construído uma reta $r$ qualquer de modo que os pontos de encontro entre a reta e a circunferência sejam os pontos $A$ e $B$. Em seguida, escolha um ponto fora da reta $r$, porém no interior do círculo trace uma reta paralela à $r$ passando por este ponto. Está nova reta intercepta a circunferência nos pontos $C$ e $D$ ligando $AD$ e $BC$. Assim terá um trapézio inscrito na circunferência e utilizando o transferidor, verifica-se que este quadrilátero é isóceles.

Esta atividade deverá ser realizada no interior da sala de aula, com a participação de toda a turma.

## 2.5 Análise do Livro Didático.

Esta seção traz uma breve análise de livros utilizados no $9^{\circ}$ Ano, nas escolas da rede pública e privada na cidade de São Fidélis - RJ. Como o livro é o material didático mais utilizado por professores de matemática, esta análise tem o objetivo de verificar de um modo geral como é estruturado o livro utilizado atualmente e se consta, nos mesmos, conteúdos a respeito do tema deste trabalho.

A lei federal LDB (9394/96, Artigo 32,IV,§5º), norteia que:

> O currículo do ensino fundamental incluirá, obrigatoriamente, conteúdo que trate dos direitos das crianças e dos adolescentes, tendo como diretriz a Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990, que institui o Estatuto da Criança e do Adolescente, observada a produção e distribuição de material didático adequado.

Com base na lei citada, o professor tem no livro didático uma importante ferramenta para auxiliar alunos no processo de ensino-aprendizagem.

A respeito do uso didático do livro, o PCN norteia que:

> "recursos didáticos como livros [...] têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão"(BRASIL, 1998, p.57).

Dentre os recursos didáticos utilizados no processo de ensino-aprendizagem, o livro didático possui tanta relevância que foi criado um programa governamental para tal recurso didático denominado: Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que de acordo com Brasil (2019):

> "é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público."(BRASIL, 2019).

Deste modo, neste trabalho foram analisados 5 livros utilizados nas escolas, dentre os quais, 2 constam no (PNLD) entre 2016 e 2019, esses livros são os utilizados na rede pública estadual e municipal na referida cidade, os outros três, não constam no (PNLD), porém, são utilizados na rede particular de ensino e são livros compilados feitos por sistemas de ensino.

Para realizar esta análise, foi utilizado critérios avaliativos que são exigências do PCN como: demonstrações dos teoremas propostos,"[...] Há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação"(BRASIL, 1998, p.86). Ilustrações com figuras que facilitam a compreensão do que está sendo estudado,"Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade"(BRASIL, 1998, p.45). Abordagens de exercícios, problemas e exemplos resolvidos, "Educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática"(BRASIL, 1998, p.39). Fatos históricos a respeito dos conteúdos trabalhados,"

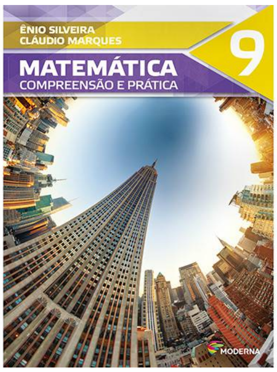
> ..., A História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos"(BRASIL, 1998, p.23).

Por último será verificado, se o livro trás alguma referência a quadriláteros inscritos na circunferência.

Tem-se, a seguir, os livros e as instituições que eles estão sendo ou foram empregados. Antes do final desta seção, constará uma tabela com as especificações dos conteúdos avaliados, para que seja visto de uma forma um pouco mais facilitada:

O livro **“Matemática compreensão e Prática” 9º ano do ensino fundamental, Ênio Silveira e Cláudio Marques, Editora Moderna, PNLD 2017-2019**, utilizado na rede estadual de ensino,na cidade de São Fidélis - RJ, representado na figura 5, Ele aborda o tema em seu capítulo 9,“ Polígonos Regulares”, páginas 226-243; tendo, inclusive, uma demonstração do teorema do quadrilátero inscrito, em sua página 231, representado na figura 6, abordado aqui como propriedade sobre ângulo inscrito em uma circunferência. Informa que todo polígono regular é inscrito em uma circunferência, porém sem qualquer tipo de demonstração, além de em sua página 234, ensinar como construir um polígono regular inscrito com régua e compasso, com destaque para o quadrado.

Figura 5 – Livro Matemática, Compreensão e Prática.

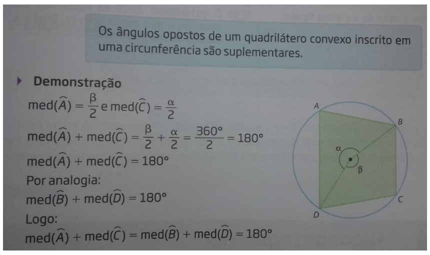



Fonte: Autoria Própria

De acordo com os critérios avaliativos, chegou-se ao seguinte resultado:
Há uma boa quantidade de exercícios, o livro é bem ilustrado com figuras e exemplos, porém não possui qualquer referência aos demais teoremas a respeito de quadriláteros inscritos na

circunferência, ou qualquer relação ou introdução histórica a respeito do conteúdo proposto. Sendo assim, o livro é considerado bom para uma breve introdução ao tema deste trabalho.

Figura 6 – Demonstração do teorema do quadrilátero inscrito na circunferência, neste livro.


Os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares.

Demonstração

$\text{med}(\widehat{A}) = \frac{\beta}{2}$ e $\text{med}(\widehat{C}) = \frac{\alpha}{2}$

$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$

$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = 180°$

Por analogia:

$\text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{D}) = 180°$

Logo:

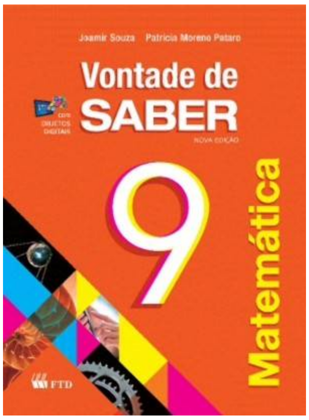
$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{D}) = 180°$



Fonte: Livro Matemática Compreensão e Prática.

**Livro: Vontade de Saber Matemática 9° ano, PNLD 2016, FTD, Joamir Souza e Patrícia Pataro**. Utilizado na rede pública municipal da cidade de São Fidélis - RJ, representado na figura 7.

Figura 7 – Livro Matemática Vontade de Saber 9.



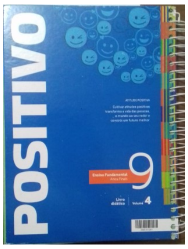

Fonte: Autoria Própria

O livro, em seu capítulo 9, páginas 198 - 225, aborda círculo e circunferência, ilustrando como se utiliza o compasso. Possui bastante ilustrações de todos os conteúdos que o mesmo aborda, com uma quantidade razoável de exercícios, porém não possui qualquer tipo de demonstração a respeito dos conteúdos apresentados, como: áreas do círculo, do setor circular, ângulos centrais, entre outros. A respeito de quadriláteros ou quadriláteros inscritos na circunferência, o livro não aborda estes conteúdos.

De acordo com os critérios avaliativos, chegou-se a conclusão que: o livro é razoavelmente bom, possui bastante figuras ilustrativas, bons exemplos e exercícios, porém não apresenta demonstrações e referenciais históricos a respeito dos conteúdos e também não consta o tema abordado deste trabalho.

**Livro: Ensino fundamental anos finais 9, volume 4, Sistema positivo, editora positivo, Maria Fernanda Martini Campagnaro.2013**. Utilizado em uma escola particular de ensino no município de São Fidélis-RJ, representado na figura 8.

Figura 8 – Livro Positivo 9.



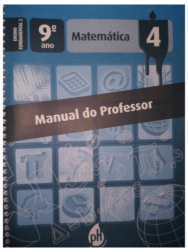

Fonte: Sistema Positivo de Ensino.

O sistema Positivo faz um compilado de conteúdos que serão trabalhados bimestralmente, por ser um compilado, o mesmo não consta no (PNLD). O conteúdo matemático corresponde ao segundo capítulo deste livro. Em seu quarto bimestre, o livro no âmbito geométrico, aborda o tema proposto neste trabalho, entre as páginas 26 – 47.
O livro, em sua página 26, define o que são polígonos inscritos em uma circunferência, porém não possui nenhuma demonstração. Aborda o quadrilátero inscrito, mas não cita o teorema do quadrilátero inscritível. O livro é composto basicamente por exercícios.

Utilizando os critérios avaliativos, conclui-se que: o livro é bem fraco quando trata do tema, não possui qualquer demonstração, nem teoremas básicos como o teorema do quadrilátero inscrito, não cita fato histórico a respeito deste tema, ou de qualquer outro dentro dos conceitos matemáticos que aborda. O livro é basicamente composto por exercícios a serem resolvidos.

**Livro "Matemática"Ensino Fundamental 2, 9º Ano, Número 4, Adair Mendes Nacarato, Carmen Lúcia Brancaglion Passos e Fábio Orfali. Anglo, 2014.** Utilizado em uma escola particular de ensino na cidade de São Fidélis-RJ, representado na figura 9.

Figura 9 – Livro Matemática $9^{\circ}$ Ano, Ensino Fundamental.



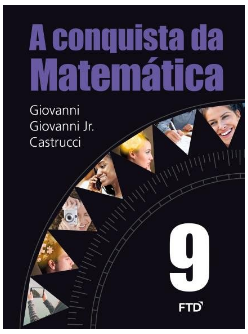

Fonte: Autoria Própria.

O sistema Anglo de ensino, traz o conteúdo do 9º Ano do Ensino Fundamental, dividido em quatro volumes sendo um por bimestre. Apesar de ter bastante conteúdo, em momento algum, qualquer um dos quatro volumes, cita ou versa sobre o tema deste trabalho. Existe até polígono inscrito em uma circunferência, mas não demonstra, nem cita o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência, mesmo tendo a imagem de um quadrado inscrito na circunferência em sua página 385.

De acordo com os critérios avaliativos, o livro possui uma quantidade muito boa de exercício, bastante demonstração de teoremas, porém deixa bastante a desejar na parte histórica a respeito dos conteúdos e no que diz respeito ao tema deste trabalho. O livro não aborda o teorema do quadrilátero inscritível na circunferência.

**O livro: "A conquista da Matemática, $9°$ Ano, Giovanni, Giovanni jr e Castrucci, FTD, São Paulo 2015.** Utilizado na rede particular de ensino na cidade de São Fidélis - RJ, representado na figura 10.

Figura 10 – A conquista da Matemática.




Autoria Própria.

Apesar de ser um livro didático, diferentemente dos dois compilados anteriores, este não consta no (PNLD), mas está aqui nesta análise pois é trabalhado em uma escola da rede particular da cidade de São Fidélis -RJ. O livro, em sua unidade 12 item 3, aborda polígonos regulares inscritos na circunferência, possui uma boa quantidade de exercícios, bastante ilustrações, porém não tem demonstração dos teoremas e conteúdos propostos. Este aborda o tema apenas pelo fato de o quadrado ser um polígono, no entanto não aborda especificamente quadriláteros inscritos na circunferência, nem faz qualquer menção a seus teoremas e propriedades.

Utilizando os critérios avaliativos, chegou-se a conclusão que: o livro é bom, seus exercícios são bem elaborados, as ilustrações são coloridas, porém as fórmulas são apenas expostas sem demonstrações ou menções que as mesmas existam. Não possui qualquer fator histórico a respeito dos conteúdos que aborda e com respeito a quadriláteros inscritos na circunferência o livro é praticamente nulo.

## 2.6 Questionário Aplicado a professores e Resultados Obtidos.

Visando ter uma ideia geral do ensino de quadrilátero inscritível na circunferência e da utilização da metodologia lúdica nas redes pública, estadual e municipal e privada na educação da cidade de São Fidélis - RJ, foi realizado um questionário com professores que atuam ou atuaram no $9^{\circ}$ ano do Ensino Fundamental.

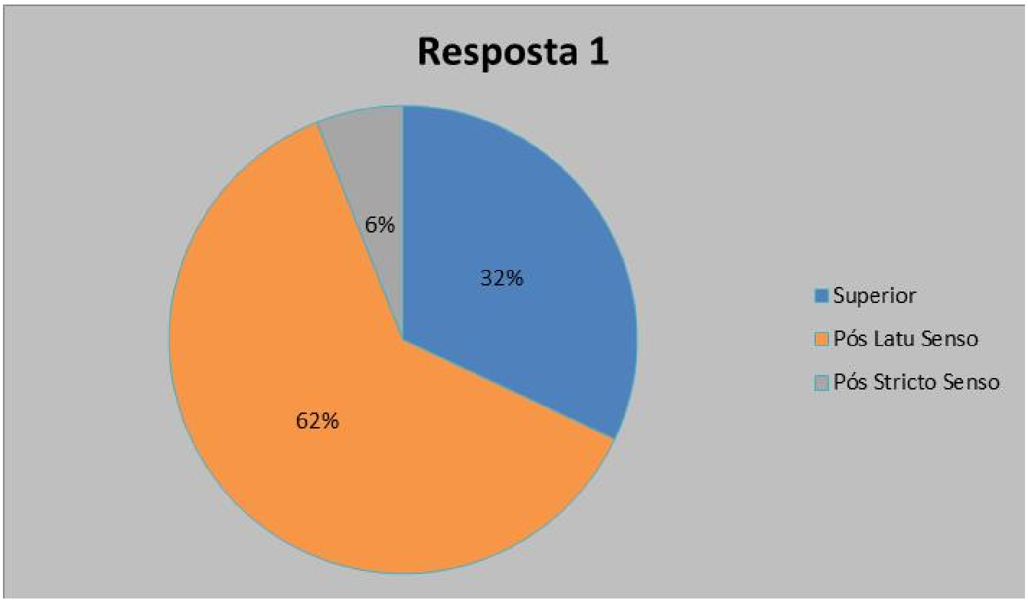
Os resultados e discussões a respeito das respostas dos professores foram organizadas da seguinte forma: os professores responderam de forma individual de modo que cada um será citado pelo número de seu questionário, por exemplo: P1 será o professor cujo questionário preenchido possui o de número 1.

As duas primeiras perguntas foram de caráter pessoal e profissional a respeito do professor consultado.

**Pergunta 1:** Qual sua formação profissional?

Esta pergunta, teve como objetivo conhecer um pouco da vida profissional do docente pesquisado, após as respostas, obteve-se os resultados apresentados no gráfico 1.

Gráfico 1 – Formação Profissional



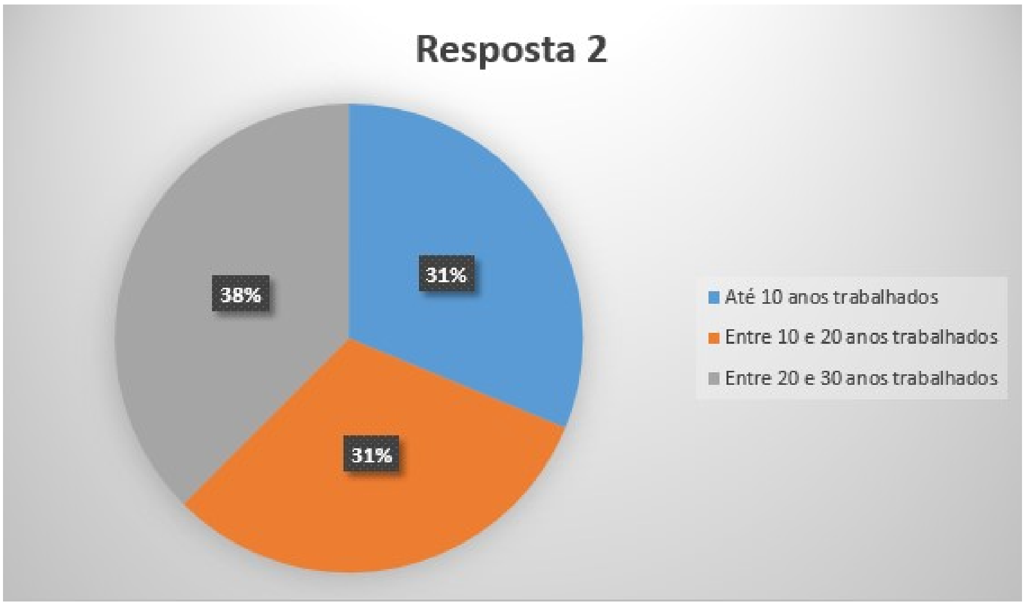

Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: A maioria dos professores que respondeu possui curso de pós-graduação Lato Sensu, em matemática ou áreas diversas.

**Pergunta 2:** Qual sua idade e há quanto tempo trabalha com o ensino de matemática?

Ainda sobre os aspectos pessoais de cada docente, esta questão visa conhecer principalmente o tempo de trabalho com educação de cada um dos pesquisados, após as respostas, obteve-se os resultados apresentados no gráfico 2.

Gráfico 2 – Tempo de Trabalho




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Os professores que responderam possuem idade variando entre 26 e 60 anos com tempo de atuação entre 06 e 30 anos.

A partir da terceira pergunta, os temas foram quadriláteros inscritos na circunferência, livros didáticos e atividades lúdicas.

**Pergunta 3:** O senhor (a) já trabalhou com quadriláteros e circunferências em sala de aula?
( ) Sim ( ) Não.

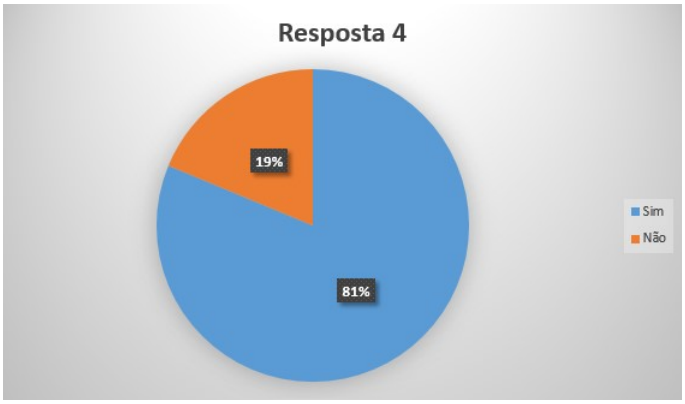
Todos os professores que responderam à esta pergunta, disseram que sim.

Observação: Como estes conteúdos são bases de geometria plana, era de ser esperar que todos os professores tivessem de alguma forma ministrado aulas a respeito dos mesmos.

**Pergunta 4:** O currículo mínimo e o PCN não citam explicitamente este tema, mas mesmo assim, o senhor (a) já trabalhou com quadriláteros inscritos na circunferência em sala de aula?

Esta pergunta tem como objetivo, questionar como o professor age quando um conteúdo importante, não consta no currículo que sua instituição segue. Os resultados da pergunta consta no gráfico 3.

Gráfico 3 – Trabalho com Quadriláteros Inscritos na Circunferência

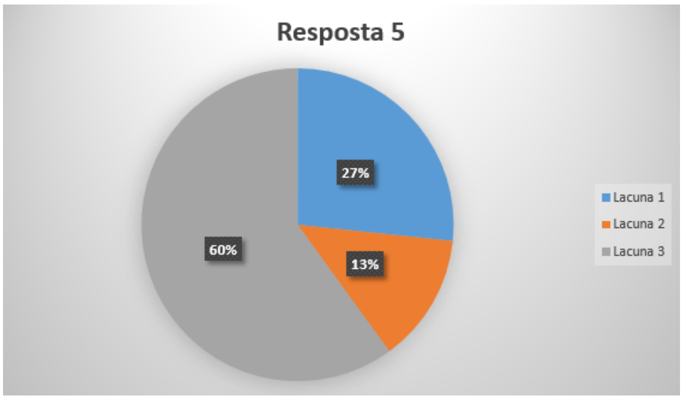



Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Mais de $80\%$ dos pesquisados responderam "sim"para esta pergunta, o que mostra autonomia do professor em sala de aula com relação ao conteúdo aplicado.

**Pergunta 5:** O teorema do quadrilátero inscrito diz que: um quadriláteros está inscrito na circunferência se os ângulos opostos deste quadrilátero são suplementares, o senhor já trabalhou com este teorema?
( ) sim, em geral, os alunos compreenderam de forma satisfatória.
( ) sim; porém, em geral, os alunos não compreenderam de forma satisfatória.
( ) não, nunca apresentei este teorema para meus alunos.

Gráfico 4 – Já trabalhou com o teorema do Quadriláteros inscrito




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação:$60\%$ dos pesquisados responderam que nunca apresentaram este teorema para os alunos, sendo assim, este presente trabalho pode ser uma boa alternativa para que essa realidade mude.

**Pergunta 6:** Ainda sobre quadriláteros inscritos na circunferência, o senhor (a) já trabalhou com o teorema de Ptolomeu?

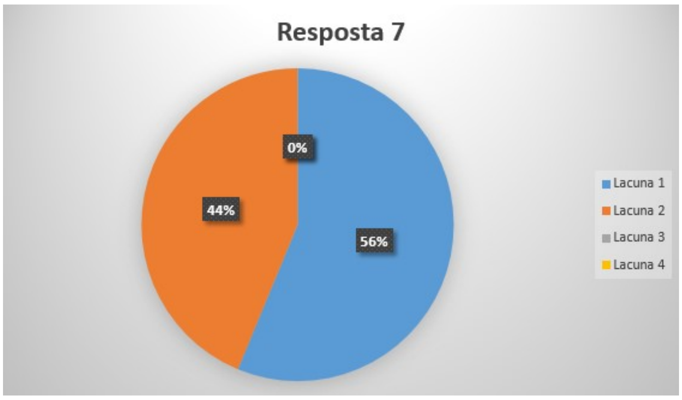
Gráfico 5 – Trabalho com Teorema de Ptolomeu


Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Dentre os professores pesquisados, menos de $30\%$ já trabalhou ou apresentou o teorema de Ptolomeu para os alunos. Para mudar esta realidade, a atividade 04, pode ser uma boa alternativa.

**Pergunta 7:** Em sua opinião, qual é a importância do livro didático no ensino da matemática?
( ) importante, uso sempre.
( ) importante, porém uso pouco.
( ) importante, porém não uso.
( ) não considero importante.

Gráfico 6 – Importância do Livro Didático

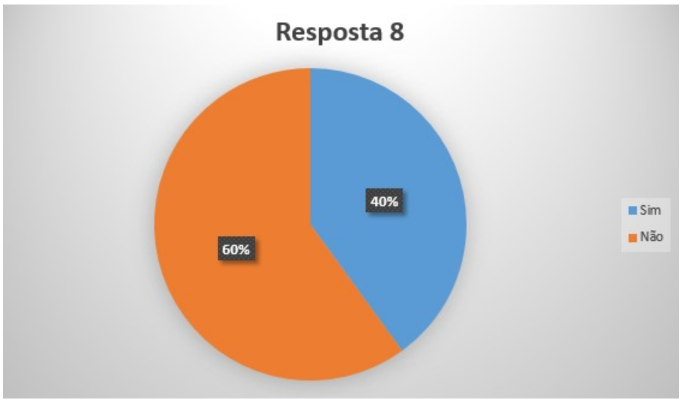



Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Todos os professores pesquisados acham importante o livro didático no ensino da matemática, porém mesmo a maioria usando sempre, essa diferença para os que usam pouco, foi mínima.

**Pergunta 8:** O livro didático atual que sua escola trabalha, contempla algum conteúdo sobre quadriláteros inscritos na circunferência?

Gráfico 7 – Conteúdo do Livro Didático

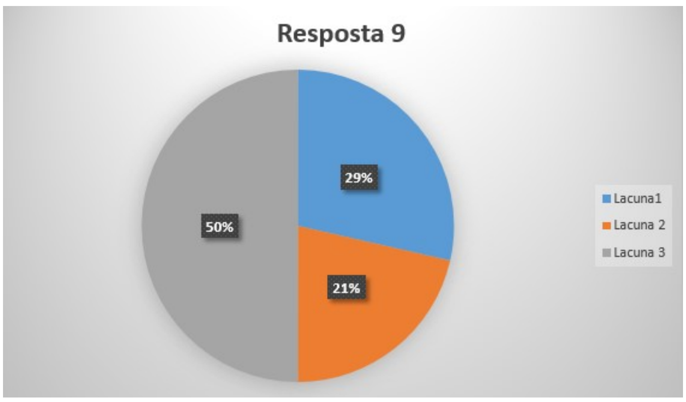



Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Dos professores que responderam, $60\%$ disseram que não, para esta pergunta.

**Pergunta 9:** Caso a resposta anterior tenha sido sim, este livro aborda de forma clara, o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência?
( ) sim.
( ) não.
( ) respondi não no item anterior.

Gráfico 8 – O livro possui o teorema do quadrilátero inscrito




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Dos professores que responderam sim, para a pergunta anterior, mais de $60\%$ disseram que o livro aborda de maneira clara o teorema em questão.

**Pergunta 10:** O PCN normatiza que o uso de atividades lúdicas são importantes para o ensino de conteúdos matemáticos, o senhor (a) concorda?

Esta questão, tem como objetivo saber o que o docente acha, a respeito do emprego de atividades lúdicas no ambiente escolar, em especial, no ensino de matemática. Para demonstrar os resultados desta questão, não foi preciso ilustrar por meio de gráficos pois, $100\%$ dos professores pesquisados, concordam com essa orientação do PCN.

**Pergunta 11:** O senhor (a) já trabalhou com algum tipo de atividade lúdica na escola? Caso sua resposta seja positiva, disserte de maneira sucinta ao final do questionário, esta atividade.

O objetivo desta questão, é saber se o professor já utilizou a metodologia lúdica em suas aulas e indicar um local, última resposta deste questionário, para que o docente compartilhe um pouco dessas experiências.

Gráfico 9 – Trabalho com Atividade Lúdica

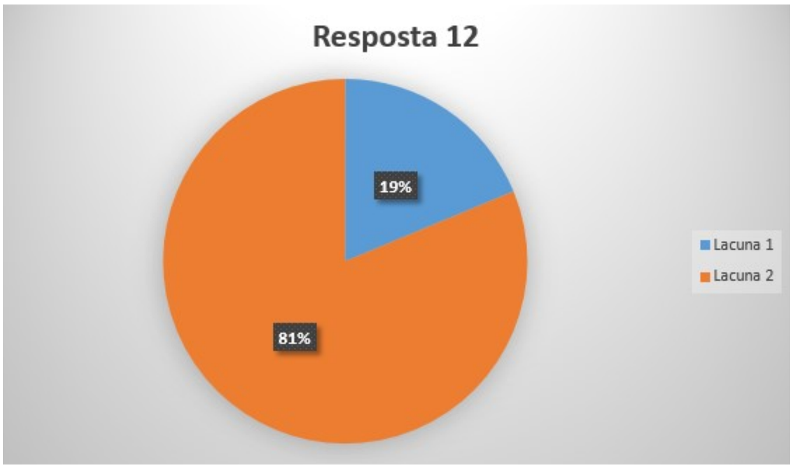

Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Como já era esperado, quase $90\%$ dos Professores pesquisados responderam sim para esta pergunta. O que mostra a coerência dos pesquisados, visto que todos disseram que atividades lúdicas são importantes no ensino de matemática na questão anterior.

**Pergunta 12:** Dentre as alternativas abaixo, qual o senhor (a) acha mais adequada quando se trata da utilização de outros ambientes que não sejam as salas de aula, ambientes como quadras e pátios para o ensino da matemática?
( ) considero importante, uso sempre que possível.
( ) Considero importante, porém dificilmente uso.
( ) não considero importante, acredito que apenas a sala de aula basta.

O objetivo desta pergunta, é saber a opinião do docente, a respeito de utilizar outros ambientes que não seja exatamente uma sala de aula no ensino de matemática.

Gráfico 10 – Ambientes fora da sala de aula




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Todos os professores pesquisados consideraram esses ambientes importantes, porém mais de $80\%$ responderam que dificilmente usam.

**Pergunta 13:** Dentre as atividades lúdicas, o PCN enfatiza os jogos, o senhor (a) já trabalhou com algum tipo de jogo na escola?

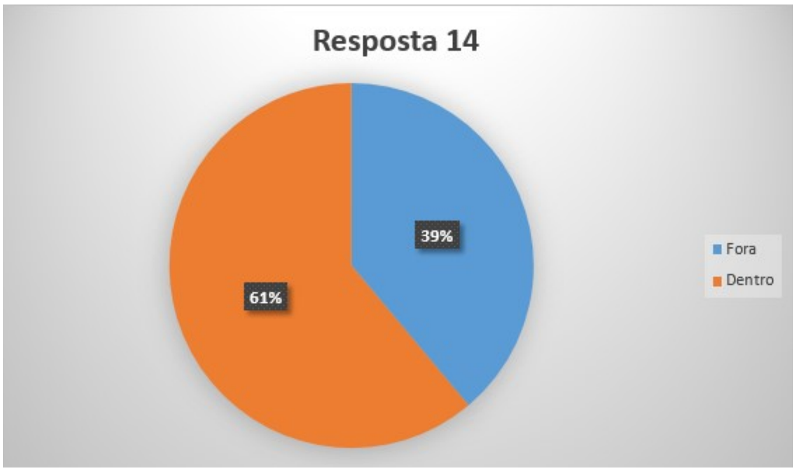
Gráfico 11 – Trabalho com jogos na escola


Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Dentre os professores pesquisados, mais de $90\%$ trabalha ou já trabalhou com um jogo no ensino da matemática na escola, sendo assim as primeiras 4 atividades deste trabalho pode ser de grande valia para estes professores.

**Pergunta 14:** Caso o senhor (a) tenha respondido sim no item anterior, este jogo foi realizado dentro ou fora de sala?

Gráfico 12 – Local de realização do jogo




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Mais de $70\%$ dos professores pesquisados, utilizaram os jogos dentro da sala, destes cerca de $30\%$ responderam que também realizaram atividades fora de sala.

**Pergunta 15:** Caso o senhor (a) tenha respondido sim no item 11, na maioria das vezes, o desempenho dos alunos foi:

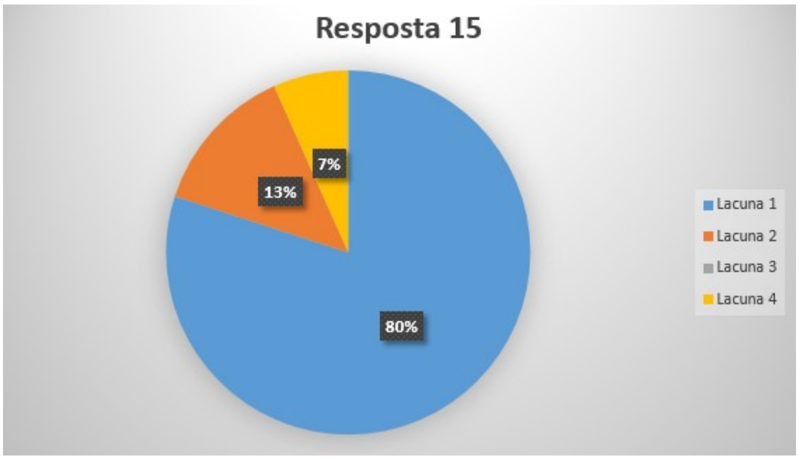
( ) Satisfatório, os alunos demonstraram mais interesse na atividade.

( ) Satisfatório, mas os alunos demonstraram o mesmo interesse das atividades cotidianas.

( ) insatisfatória, os alunos demonstraram menos interesse que as atividades cotidianas.

( ) respondi não no item 11.

Gráfico 13 – Desempenho dos alunos com as atividades lúdicas

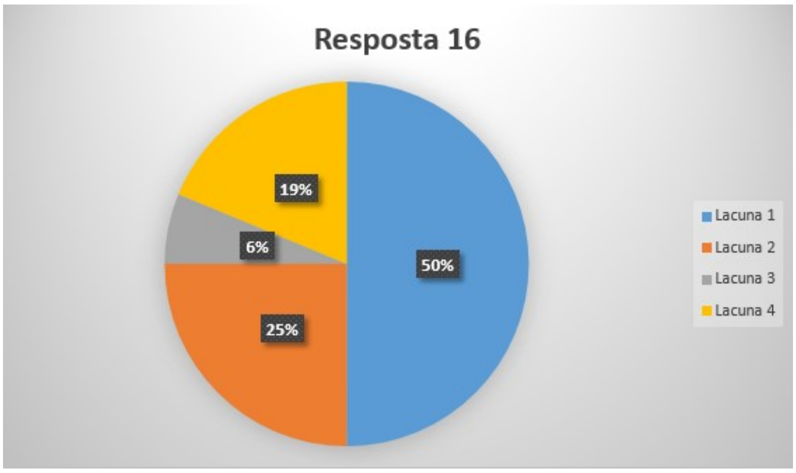



Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Dos Professores que responderam esta questão, $80\%$ disseram que os alunos demonstraram mais interesse nas atividades propostas.

**Pergunta 16:** Em uma atividade com jogo envolvendo questões matemáticas, dentre as características abaixo, qual você considera a mais importante?
( ) trabalho em equipe.
( ) rápida percepção.
( ) sorte.
( ) conhecimento prévio do conteúdo.

Gráfico 14 – Característica das atividades com jogos




Fonte: Dados da Pesquisa

Observação: Apesar de ser a questão que teve uma maior divisão nas respostas, $50\%$ dos professores pesquisados, disseram que o trabalho em equipe é a característica mais importante quando se trata de jogos no ensino da matemática. Deste modo, as atividades 1 e 4 podem ser uma boa alternativa para esses profissionais.

**Pergunta 17:** Espaço destinado a dissertação do item 11.

**P1:** Não houve resposta.

**P2:** "Trabalhei com o intuito de fixação de conteúdo utilizando a atividade passa ou repassa, já trabalhei com construção de figuras geométricas baseado nos campos de futebol da Copa do Mundo."

**P3:** "Utilização de dados para o cálculo de probabilidade de um evento."

**P4:** "Os alunos construíram os jogos propostos e jogaram na sala, mostrando criatividade na elaboração e interesse na participação."

**P5:** "Jogos de tabuleiro, "torta na cara", gincanas interdisciplinar, paródias..."

**P6:** "Já trabalhei com jogos de passa ou repassa, com torta na cara. Os alunos aprendem mais e o interesse se torna maior com o conteúdo Quando trabalho com frações, sendo conteúdo do $6°$ ano utilizo pizza ou chocolate, uma forma saborosa de aprender."

**P7:** "Trabalhei com o conteúdo: Condição de existência de triângulo, com palitos, alfinete e isopor. Foi uma experiência maravilhosa e a aprendizagem foi significativa."

**P8:** "Já fiz jogo de boliche para trabalhar operações com $n^{\circ}$ inteiros/com monômios.
Dominó para frações algébricas"
Músicas para o ensino da geometria como ângulos/ triângulos/ quadriláteros.
Concurso para avaliar a criatividade dos sólidos geométricos ( na construção)."

**P9:** "Fiz um trabalho com a torre de Hanói cujo objetivo é tocar todos os círculos sem que a maior nunca fique sobre o menor no menor sempre possível usado apenas 3 pinos para fazer a troca quanto maior a quantidade de círculos maior é a dificuldade. Essa atividade desenvolve bastante o raciocínio lógico."

**P10:** "Já trabalhei com bingos, jogos de certo ou errado, jogos de tabuleiro, material manipulável e outros respectivos materiais lúdicos de conteúdos matemáticos ( números inteiros, racionais e reais), teorema de Pitágoras, áreas, entre outros."

**P11:** Não houve resposta.

**P12:** "Dobraduras ( confecção dos poliedros a partir das planificações; confecção de tangram etc.)
Geoplano ( quadro de pregos a fim de trabalhar com figuras planas)
Teodolito ( a fim de trabalhar trigonometria)
Jogos ( de tabuleiro, dominó)
Cruzadinhas.
Quebra-cabeça.
Ábaco.
Material dourado."

**P13:** "Dominó matemático (operações e resultados) e olimpíada de matemática (com diversos tipos de jogos como: xadrez humano, montagem de figuras através do tangram, passa ou repassa, etc)."

**P14:** "Trabalho sempre que possível com jogos e curiosidades matemáticas. Geralmente os alunos demonstram maior interesse, pois conseguem enxergar a matemática com outro olhar. Em uma atividade lúdica, alguns alunos descobrem a beleza da matemática.
No item 14 marquei as duas alternativas porque já trabalhei das duas formas.
Acho muito interessante também criar jogos com material reciclável, tipo: garrafa Pet, cartelas de ovos etc."

**P15:** Banco"Um jogo de mesada, onde o aluno que precisasse recorreria a um "banco"e faria empréstimos. O aluno assim calcularia os juros (simples) que deveria pagar e o montante que devolveria ao banco no final do empréstimo."

**P16:** "Foi trabalhado o bingo da tabuada onde vi que houve ótima participação, foi uma aula divertida, os alunos gostaram muito e tinha um prêmio para quem preenchesse a cartela primeiro."

Observação: Dentre os professores que responderam esta questão, a principal atividade lúdica foi a utilização de jogos, os mais variados possíveis como: dominós, bingos e passa ou repassa, com respeito a construção de material pelos alunos, alguns professores utilizaram a técnica do tangram.

# Capítulo 3

# Quadriláteros Inscritíveis na Circunferência

Este capítulo trata sobre os conceitos matemáticos necessários para demonstração do teorema que será estudado neste trabalho, os teoremas e suas demonstrações.

## 3.1 Preliminares

### 3.1.1 Conhecimentos Básicos

A seguir será apresentado algumas definições e postulados básicos que serão úteis ao longo deste trabalho.

**Definição 3.1.** *Noção intuitiva da **Reta:** Segundo Pinho, Batista e Carvalho (2010, p.21) "Será definida a partir de quaisquer dois de seus pontos, uma vez que todos os pontos de uma reta estão distribuídos de uma maneira uniforme"*

**Postulado de Euclides:**"Dois pontos quaisquer determinam uma única reta."(PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010, p.21)

**Definição 3.2.** ***Semirreta:** Dados dois pontos A e B sobre uma reta, a semi-reta $\overline{AB}$ é o subconjunto de pontos formado pelo segmento $\overline{AB}$ e por todos os pontos C sobre a reta $\overline{AB}$ tais que B esteja entre A e C .*

**Definição 3.3.** ***Retas paralelas:** Duas retas distintas em um plano são ditas paralelas se a sua intersecção, como conjunto de pontos é um conjunto vazio.*

**Definição 3.4.** ***Retas concorrentes:** Duas retas distintas em um plano são ditas concorrentes se a sua intersecção consiste de um conjunto de um único ponto.(PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010, p.26)*

**Definição 3.5.** ***Circunferência:*** *"é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância é o raio da circunferência."(DOLCE; POMPEO, 1995, p.147)*

**Definição 3.6.** ***Círculo:*** *É a reunião da circunferência com seu interior.*

**Definição 3.7.** ***Corda de uma circunferência:*** *é um segmento cujas extremidades pertencem a circunferência.*

**Definição 3.8.** ***Diâmetro de uma Circunferência:*** *É a corda que passa pelo seu centro.*

**Definição 3.9.** ***Raio:*** *É o segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência.(DOLCE; POMPEO, 1995, p.148)*

**Definição 3.10.** ***Ângulos:*** *Duas semirretas distintas e não opostas $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de mesma origem $O$, definem um ângulo sendo $O$, o vértice e $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os lados do ângulo. (PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010)*

**Definição 3.11.** ***Ângulos adjacentes:*** *"Dois ângulos consecutivos são adjacentes se e somente se, não têm pontos internos comum."(DOLCE; POMPEO, 1995, p.22)*

**Definição 3.12.** ***Bissetriz de um ângulo:*** *"É a semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes."(DOLCE; POMPEO, 1995, p.22)*

**Definição 3.13.** ***Ângulos complementares e suplementares:*** *Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas resulta em $90°$, sendo um o complemento do outro. E dois ângulos são suplementares se, e somente se,a soma de suas medidas resulta em $180°$, sendo um o suplemento do outro. (DOLCE; POMPEO, 1995)*

**Definição 3.14.** ***Polígonos:*** De acordo com Dolce e Pompeo (1995, p.132)

> *"Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos são colineares, considerando-se consecutivos,$A_{n-1}, A_n$ e $A_1$, assim como $A_n, A_1$ e $A_2$, chama-se polígono a reunião dos segmentos*
>
> $$\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \ldots,\ \overline{A_nA_1}$$
>
> *"(DOLCE; POMPEO, 1995, p.132)*

O mesmo autor ainda define os seguintes polígonos:

**Definição 3.15.** *"Um polígono é simples, se e somente se, a interseção de qualquer dois lados não consecutivos é vazia".(DOLCE; POMPEO, 1995, p.133)*

**Definição 3.16.** *"Um polígono simples é convexo, se e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n-2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina".(DOLCE; POMPEO, 1995, p.134)*

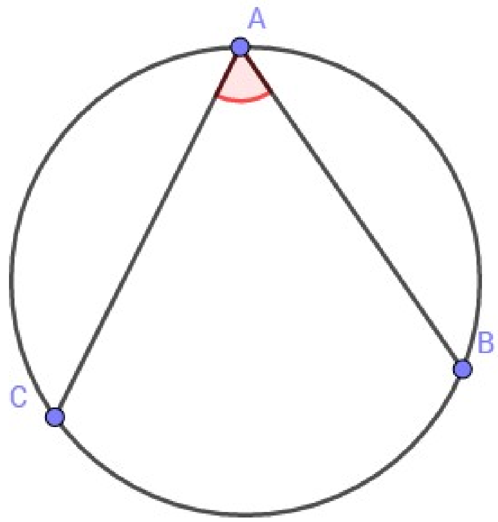
**Definição 3.17.** *Um polígono é regular, se possui todos os lados e ângulos congruentes entre sí.(DOLCE; POMPEO, 1995)*

**Definição 3.18.** ***Quadrilátero:*** *É um polígono simples de quatro lados, ele é convexo quando a reta que une dois vértices consecutivos não encontra o lado formado pelos outros vértices.*

### 3.1.2 Ângulos Inscritos na Circunferência

Para Dolce e Pompeo (1995, p.168)) "Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela."Observando a Figura 11 tem-se; o vértice A pertence à circunferência e os lados intersectam a circunferência em pontos B e C, distintos do vértice. O arco que não contém o vértice A é chamado de arco correspondente ao ângulo inscrito $C\hat{A}B$.

Figura 11 – Ângulo inscrito na circunferência




Fonte: Autoria Própria

**Teorema 3.1.** *De acordo com Santos e VIGLIONI (2011, p.113) "Todo ângulo inscrito em uma circunferência mede metade do arco correspondente."*

**Demonstração**: Sendo $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito em uma circunferência de centro P, tem-se três casos a considerar:

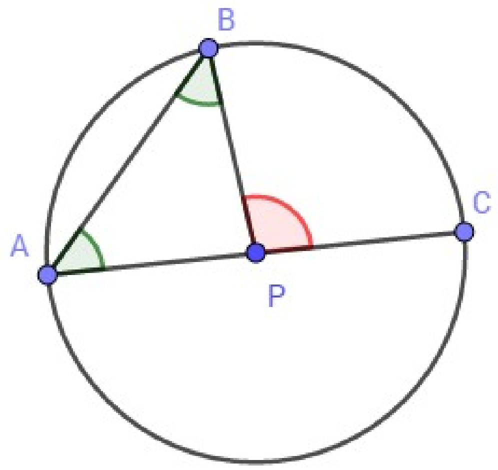
**Caso 1:**

Supondo que um dos lados do ângulo contenha um diâmetro.

Note que $\triangle$ PAB é isósceles de base AB assim, $B\hat{A}P = P\hat{B}A$. logo:

$A\hat{B}P + B\hat{P}A + P\hat{A}B = 180°$ e $B\hat{A}C + B\hat{A}C = 180°$ assim: $C\hat{A}B = P\hat{A}B = \frac{1}{2}P\hat{P}C$

Figura 12 – Parte 1, demonstração do Teorema 3.1




Fonte: Autoria Própria

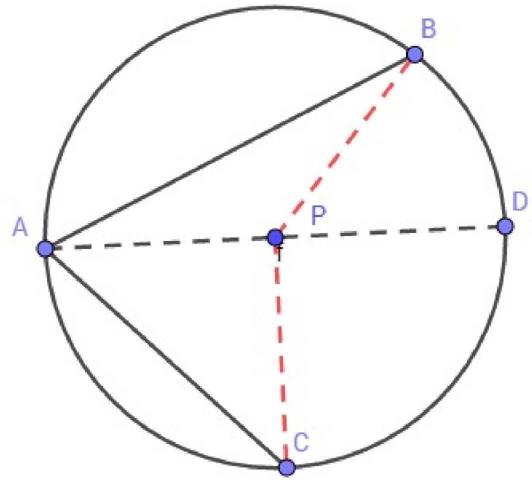
**Caso 2:**

Supondo $B$ e $C$ em lados opostos do diâmetro com extremidade $A$. Seja $D$ a outra extremidade do diâmetro contendo $A$. Assim, $B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C$.

Pelo caso 1, $B\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{P}D$ e $D\hat{A}C = \frac{1}{2}D\hat{P}C$

logo: $B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{P}D + \frac{1}{2}D\hat{P}C = \frac{1}{2}B\hat{P}C$.

Figura 13 – Parte 2, demonstração do Teorema 3.1



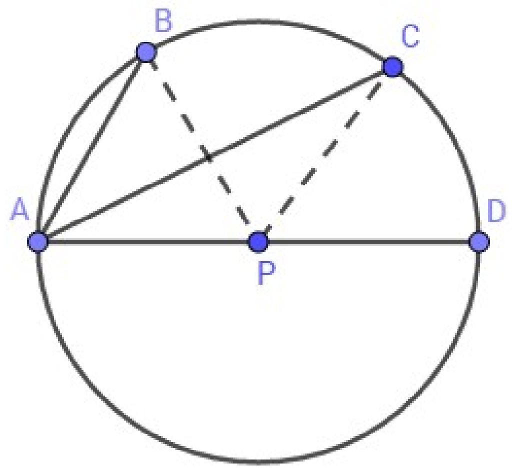

Fonte: Autoria Própria

**Caso 3:**

Supondo que $B$ e $C$ estejam do mesmo lado do diâmetro que contenha $A$, assim pelo caso 1 tem-se:

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D = \frac{1}{2}B\hat{P}D - \frac{1}{2}C\hat{P}D = \frac{1}{2}B\hat{A}C.$$

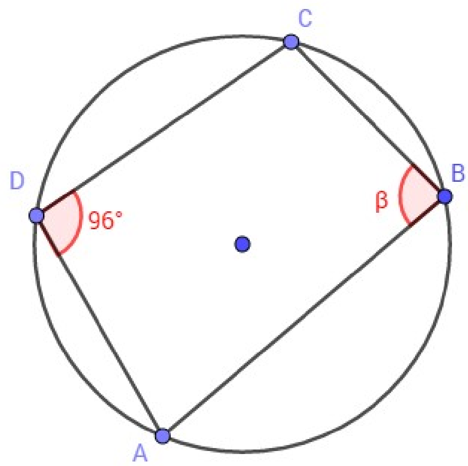
Figura 14 – Parte 3 demonstração do Teorema 3.1




Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.1.** *Usando o Teorema 3.1, encontre o valor do ângulo $\beta$ na seguinte figura:*

Figura 15 – Exemplo 3.1




Fonte: Autoria Própria

***Solução:***

*Pelo Teorema 3.1,* $\frac{\widehat{ABC}}{2} = A\hat{D}C \Longrightarrow \widehat{ABC} = 96°.2 = 192°.$

*Assim:*

$\widehat{ABC} = 360° - 192° = 168°$

*e* $\beta = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{168°}{2} = 84°$

### 3.1.3 Arcos

**Definição 3.19.** *considere uma circunferência de centro O e sejam A e B dois pontos da circunferência que não sejam extremidades de um diâmetro. Nessas condições tem-se:*

*a) O arco menor $\widehat{AB}$ é a reunião dos pontos A, B e de todos os pontos que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$;*

*b) O arco maior $\widehat{AB}$ é a reunião dos pontos A, B e de todos os pontos que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$. (DOLCE; POMPEO, 1995)*

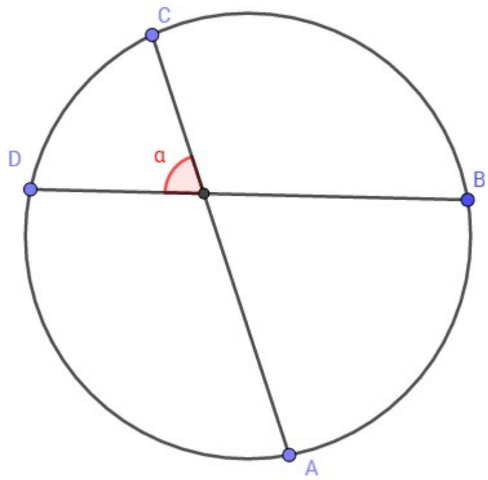
A medida de um arco é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito correspondente.

**Definição 3.20.** *Dois arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ de uma mesma circunferência de centro $O$ são iguais se, e somente se, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.*

**Teorema 3.2.** *A medida do ângulo de vértice interior, é igual à semi-soma dos arcos determinados pelo seus lados prolongados.*

$\alpha = \frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2}$.

Figura 16 – Ângulo de Vértice Interior




Fonte: Autoria Própria

**Demonstração**: Ligando os pontos $D$ e $A$, tem-se o triângulo $ADE$, sendo $\alpha$ um ângulo externo deste triângulo. Assim pelo teorema 3.1, $\beta = \frac{\widehat{AB}}{2}$ e $\omega = \frac{\widehat{CD}}{2}$.

Pelo teorema do ângulo externo:

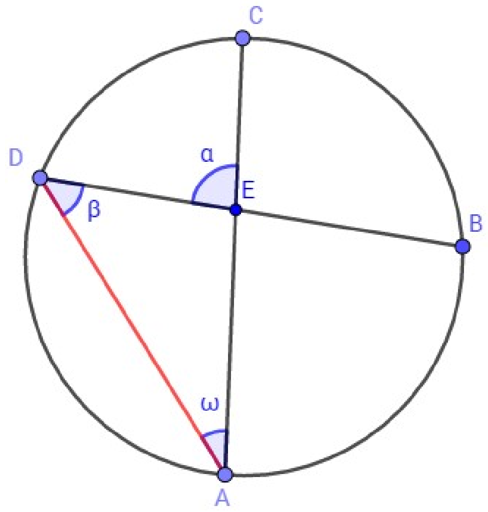
$\alpha = \beta + \omega$.

assim:

$\beta + \omega = \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB}+\widehat{DC}}{2}$.

Observe a Figura 17.

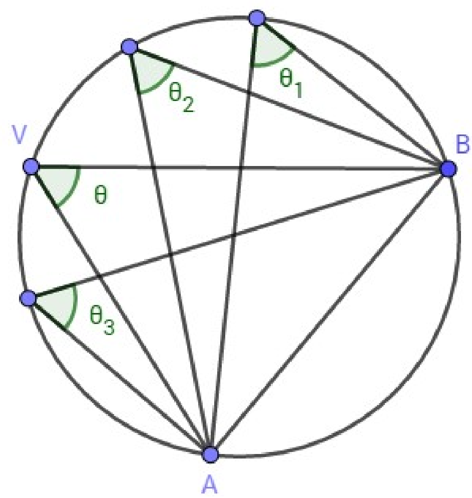
Figura 17 – Demonstração Teorema 3.2




Fonte: Autoria Própria

**Definição 3.21.** *Considere uma corda $\overline{AB}$ de um círculo e V um ponto pertencente ao círculo porém fora da corda $\overline{AB}$, verifica-se que para qualquer ponto V de um dos arcos podem-se ver o segmento $\overline{AB}$ sob o mesmo ângulo $\theta$.Para qualquer posição sobre um dos arcos, tem-se $\theta = \frac{\widehat{AB}}{2}$ sendo constante. O arco $\widehat{AVB}$ é chamado de arco capaz do ângulo $\theta$ sobre o segmento $\overline{AB}$. (MORGADO; WAGNER; JORGE, 1990)*

Figura 18 – Arco Capaz sobre o segmento AB



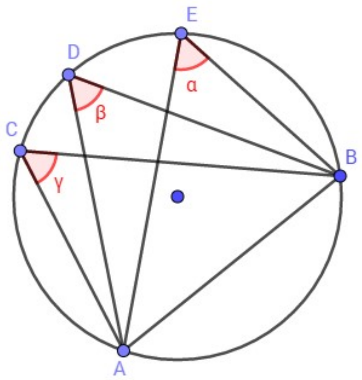

Fonte: Autoria Própria

**Teorema 3.3.** *Todos os ângulos inscritos no mesmo arco são congruentes.*

A demonstração é trivial pelo teorema 3.1

**Exemplo 3.2.** *Observando o círculo abaixo Figura19 e sabendo que o arco* $\widehat{AB} = 140°$*, encontre o valor de* $\alpha + \beta + \gamma$*.*

Figura 19 – Exemplo 3.2




Fonte: Autoria Própria

*Solução:*

*Pelo teorema 3.3;* $\alpha = \beta = \gamma$

*Pelo teorema 3.1;* $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{140°}{2} = 70°$.

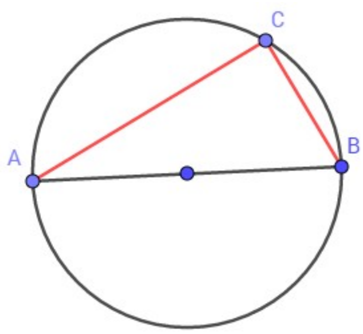
$\alpha = \beta = \gamma = 70° \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 70°.3 = 210°$.

**Teorema 3.4.** *Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto.*

**Demonstração**: Seja $\overline{AB}$ o diâmetro de um círculo, e seja C um ponto pertencente ao círculo de modo que C seja diferente dos pontos A e B. Assim pelo teorema 3.1, o ângulo $A\hat{C}B$ mede metade do arco $\widehat{AB}$. logo $A\hat{C}B = \frac{180°}{2} = 90°$ .

**Exemplo 3.3.** *Seja* $\overline{AB}$ *o diâmetro de um círculo, sendo C um ponto deste círculo de modo que o arco* $\widehat{BC} = 80°$*. Encontre o valor do ângulo* $A\hat{B}C$*.*

Figura 20 – Exemplo 3.3




Fonte: Autoria Própria

*Solução:*

*Pelo teorema 3.4; O $\triangle ABC$ é retângulo com ângulo reto em $\hat{C}$.*

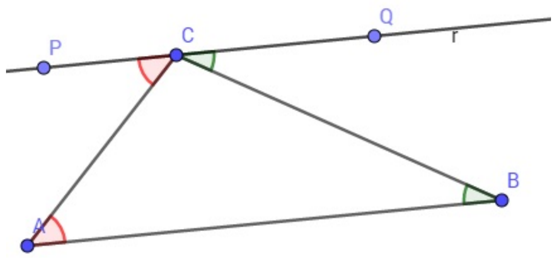
*Pelo teorema 3.1; $C\hat{A}B = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$.*

*Logo: $A\hat{B}C = 90° - 40° = 50°$.*

**Teorema 3.5.** *Segundo Pinho, Batista e Carvalho (2010, p.85) "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$."*

**Demonstração**: Seja ABC um triângulo qualquer e seja r uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ passando por C. Sejam P e Q pontos de r tais que C está entre P e Q.

Figura 21 – Demonstração teorema. Fonte: Autoria Própria.



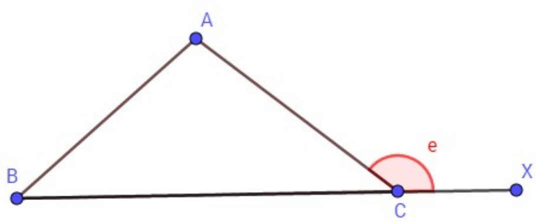

Fonte: Autoria Própria

Utilizando o teorema das paralelas cortadas por uma transversal tem-se $P\hat{C}A = C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C = Q\hat{C}B$, como $P\hat{C}A$ e $A\hat{C}Q$ são adjacentes suplementares, tem-se $P\hat{C}A + A\hat{C}Q = 180°$ e sendo$A\hat{C}Q$ = $B\hat{C}A + B\hat{C}Q$, segue-se: $P\hat{C}A + B\hat{C}A + B\hat{C}Q = 180°$

**Teorema 3.6.** *Teorema do Ângulo Externo*

Dado um triângulo ABC e sendo $\overline{CX}$ a semirreta oposta à semirreta $\overline{CB}$, o ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$ é o ângulo externo do triângulo ABC e adjacente à $\hat{C}$ e não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.O ângulo $\hat{e}$ é suplementar adjacente de $A\hat{C}B$, logo: $A\hat{C}X + A\hat{C}B = 180°$ e como $A\hat{C}B + A\hat{B}C + B\hat{A}C = 180°$, $A\hat{C}X = A\hat{B}C + B\hat{A}C \Longrightarrow \hat{e} = A\hat{B}C + B\hat{A}C$.

Figura 22 – Ângulo Externo ao triângulo ABC.

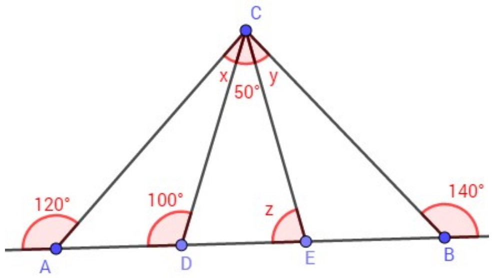



Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.4.** *Encontre o valor de x, y e z na figura 23 indicada abaixo.*

*Solução:*

Figura 23 – Exemplo 3.4




Fonte: Autoria Própria

*Pelo teorema 3.5*

$120° = x + 100° \Longrightarrow x = 120° - 100° \Longrightarrow x = 20°$

$100° = 50° + z \Longrightarrow z = 100° - 50° \Longrightarrow z = 50°.$

$50° = y + 40° \Longrightarrow y = 50° - 40° \Longrightarrow y = 10°.$

*logo:* $x = 20°$ *,* $y = 10°$ *e* $z = 50°.$

**Teorema 3.7.** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*

**Demonstração**: seja F o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente a semirreta $\overline{BF}$ tal que: $\overline{BF} = \overline{FP}$. Pelo caso (LAL) os triângulos BAM E PMC são semelhantes e daí:

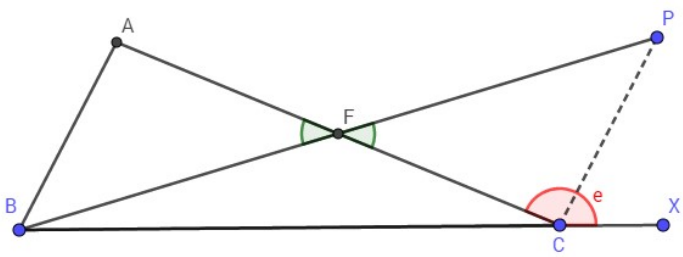
$B\hat{A}F = P\hat{C}F$. (1)

Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vem que $\hat{e}$ é maior que $P\hat{C}F$. (2)

De (1) e (2) decorre que $\hat{e}$ > $\hat{A}$.

Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que $\hat{e} > \hat{B}$.

Figura 24 – demonstração, teorema 3.7




Fonte: Autoria Própria

### 3.1.4 Semelhança de triângulos

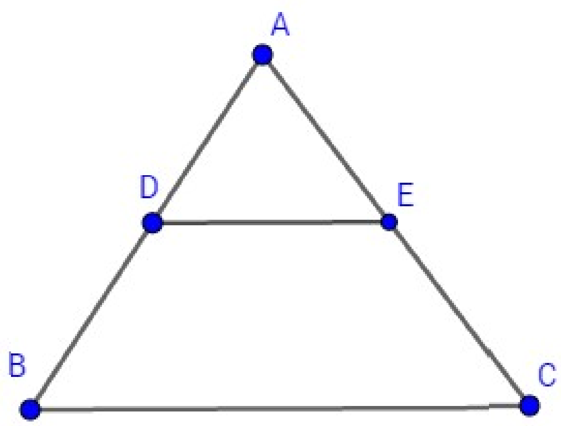
De acordo com Dolce e Pompeo (1995, p.198) "Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais."

Sendo k a razão entre os lados homólogos, k é chamado razão de semelhança dos triângulos. Se $k = 1$, os triângulos serão congruentes.

**Teorema 3.8.** *Teorema Fundamental*

*Para Dolce e Pompeo (1995, p. 200) "Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triangulo que ela determina é semelhante ao primeiro."*

Figura 25 – Teorema fundamental.




Fonte: Autoria Própria

**Demonstração**:

Para provar que são semelhantes, precisamos provar que os ângulos ordenadamente são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

1) Ângulos congruentes:

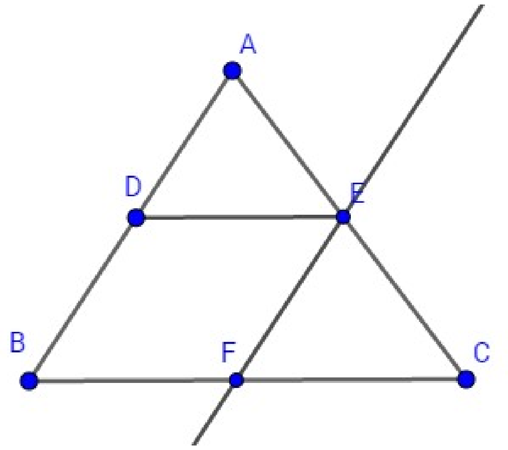
DE//BC $\Longrightarrow \hat{D} = \hat{B}$ e $\hat{E} = \hat{C}$ (ângulos correspondentes) e $\hat{A}$ comum. (I)

2) Lados proporcionais:

pelo teorema de Tales. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.
Traçando as paralelas a $\overline{AB}$ passando por E, tem-se o ponto F no segmento $\overline{BC}$. Assim tem-se o paralelogramo BDEF $\Longrightarrow \overline{DE} = \overline{BF}$.
Pelo teorema de Tales: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$, logo: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \longrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (II).

assim, de(I) e (II) tem-se; $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

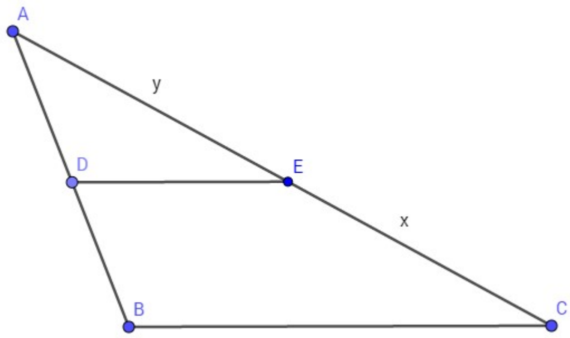
Figura 26 – Demonstração do teorema fundamental.




Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.5.** *Na figura abaixo, sabe-se que* $\overline{BC}//\overline{DE}$*,* $\overline{AC} = 50m$*,* $\overline{AD} = 10m$ *e* $\overline{DB} = 20m$ *nessas condições, determine as medidas de x e y.*

Figura 27 – Exemplo 3.5




Fonte: Autoria Própria

*Pelo teorema 3.7,* $\triangle ABC \sim \triangle ADE$*, logo;* $\frac{x}{10} = \frac{x+y}{30}$ *,como,* $x + y = \overline{AE} = 50m.$

$\frac{x}{10} = \frac{x+y}{30} = \frac{50}{30} \Longrightarrow x = \frac{50}{3} \Longrightarrow y = 50 - \frac{50}{3} \Longrightarrow y = \frac{100}{3}.$

**Casos ou critérios de semelhança de triângulos.**

**Caso I (AA)**

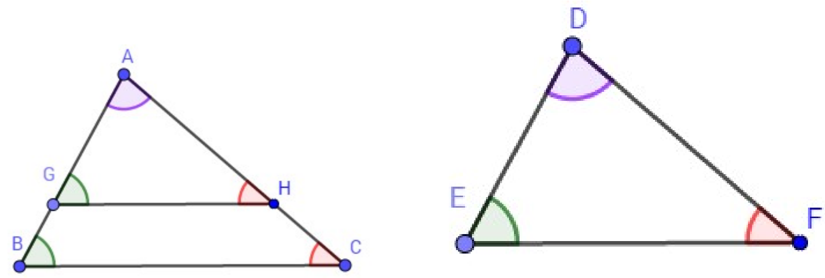
De acordo com Dolce e Pompeo (1995, p.204) "Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

**Demonstração**: Sejam $ABC$ e $DEF$ dois triângulos tais que os ângulos $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Supondo que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{DE}$. Seja G um ponto em $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} = \overline{DE}$ e o triangulo $AGH$ com $\hat{G} = \hat{D}$ e H no lado $\overline{AC}$ tal que $\overline{GH}//\overline{BC}$. Assim tem-se: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{G} = \hat{E}$ e $\overline{AG} = \overline{DE} \Longrightarrow \triangle AGH = \triangle DEF$. (I)

$\overline{GH}//\overline{BC} \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle AGH$ (II)

De (I) e (II) tem-se; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

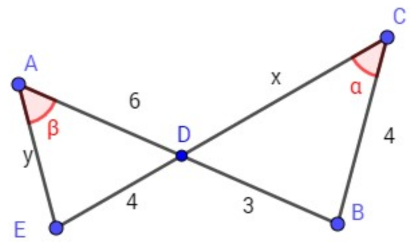
Figura 28 – Demonstração Caso AA.




Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.6.** *Se $\alpha = \beta$, determine x e y.*

Figura 29 – Exemplo 3.6




Fonte: Autoria Própria

*solução:*

*Tem-se $A\hat{D}E = C\hat{D}B$ por serem opostos pelo vértice.*

*Assim pelo caso (AA), $\triangle ADE \sim \triangle CDB$ então;*

$\frac{y}{4} = \frac{4}{3} \Longrightarrow y = \frac{16}{3}$.

$\frac{6}{x} = \frac{4}{3} \Longrightarrow x = \frac{9}{2}$.

**Caso II (LAL)**

De acordo com Dolce e Pompeo (1995, p.206) "Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então: os triângulos são semelhantes."

**Demonstração**: Sejam $ABC$ e $DEF$ dois triângulos tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k$ e $\hat{A} = \hat{D}$. Supondo $\overline{AB} > \overline{DE}$, sendo G um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} = \overline{DE}$ e seja H o ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{GH}//\overline{BC}$, assim temo-se: $A\hat{G}H = A\hat{B}C$ e $A\hat{H}G = A\hat{C}B \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle AGH$ , pelo caso (I). Como $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$ , segue que $\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$, ou seja, $\overline{DF} = \overline{AH}$ e pelo caso (LAL) de congruência, segue que $\triangle AGH = \triangle DEF$ assim: como $\triangle ABC \sim \triangle AGH \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$.

**Caso III (LLL)**

Se dois triângulos tem lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

**Demonstração**: Sejam $ABC$ e $DEF$ dois triângulos tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$. Supondo $\overline{AB} > \overline{DE}$ e seja G um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AG} = \overline{DE}$ e seja H o ponto sobre $\overline{AC}$ tal que $\overline{GH}//\overline{BC}$ assim tem-se: $A\hat{G}H = A\hat{B}C$ e $A\hat{H}G = A\hat{C}B \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle AGH$, pelo caso (I).

logo; $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}$, como $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, tem-se: $\frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \Longrightarrow \overline{GH} = \overline{EF}$.

Da mesma forma: $\overline{AH} = \overline{DF}$ e $\overline{AG} = \overline{DE}$.

### 3.1.5 Polígonos Inscritos na Circunferência.

**Definição 3.22.** *um polígono está inscrito numa circunferência se todos seus vértices pertencem à circunferência.(SANTOS; VIGLIONI, 2011)*

**Definição 3.23.** *De acordo com Santos e VIGLIONI (2011, p.117) "Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular que passa pelo seu ponto médio."*

**Lema 3.1.** *Os pontos da mediatriz de um segmento são equidistantes das extremidades do segmento.*

**Teorema 3.9.** *A mediatriz dos lados de um triangulo encontram-se em um ponto, o circuncentro.*

**Teorema 3.10.** *Três pontos não colineares determinam um círculo.*

**Teorema 3.11.** *como três pontos não colineares definem um triângulo e pelo corolário, também determinam um círculo, conclui-se que todo triangulo está inscrito em um círculo.*

**Definição 3.24.** *De acordo com Santos e VIGLIONI (2011, 123) "Um polígono regular é um polígono com todos os lados e ângulos congruentes."*

**Teorema 3.12.** *Todo polígono regular está inscrito em um círculo.*

**Demonstração**: Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$, um polígono regular, pelo corolário pode-se traçar um círculo contendo $A_1, A_2, A_3$,. seja P o centro deste círculo. deve-se demonstrar que $A_4, A_5, ..., A_n$, pertencem a este círculo.

para isto note que o $\triangle PA_2A_3$, é isóceles já que $\overline{PA_3}$ e $\widehat{PA_2}$ são raios de um mesmo círculo. assim os ângulos $P\hat{A}_2A_3$ e $P\hat{A}_3A_2$ são congruentes, como o polígono é regular, todos os seus ângulos são congruentes. portanto $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$, além disso tem-se: $A_1\hat{A}_2A_3$ = $A_1\hat{A}_2P + P\hat{A}_2A_3$ e $A_2\hat{A}_3P = A_2\hat{A}_3P + P\hat{A}_3A_4 \Longrightarrow A_1\hat{A}_2P = P\hat{A}_3A_4$ e também $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$, pois são lados de um polígono regular, e $\overline{PA_2} = \overline{PA_3}$ pelo fato de $A_1$ e $A_2$, pertencerem ao mesmo círculo de centro P. pelo caso (LAL) de congruência de triângulos, tem-se $\triangle PA_1A_2 = \triangle PA_4A_3$. em particular obtem-se $\overline{PA_4} = \overline{PA_1}$ implicando que $A_3$ pertence ao círculo contendo $A_1, A_2$ e $A_3$.

Análogamente mostra-se que cada um dos pontos $A_5, A_6, ..., A_n$, pertencem a este mesmo círculo.

**Exemplo 3.7.** *Prove que um quadrado qualquer ABCD é inscrito em alguma circunferência.*

*solução:*

*Como um quadrado é um quadrilátero que possui lados e ângulos congruentes entre si, este quadrilátero é um polígono regular. Pelo teorema 3.11, tem – se que um quadrado é inscrito em uma circunferência*

**Quadriláteros notáveis.**

**Trapézio.**

Um quadrilátero convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos. os lados paralelos são as bases do trapézio, de acordo com os lados não bases, os trapézios podem ser: Escaleno, lados não congruentes; retângulo, um dos lados é perpendicular as bases; isósceles, lados congruentes.(DOLCE; POMPEO, 1995)

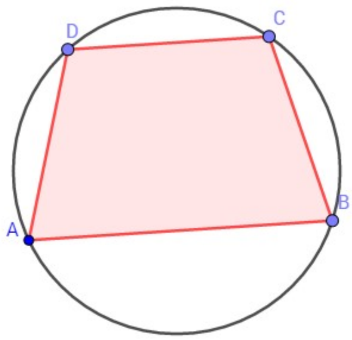
Este último tem as seguintes propriedades: seja ABCD um trapézio isósceles, tem-se: Os ângulos de cada base são iguais.

$\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$ assim:

$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$

Deste último tem-se que o trapézio isósceles é inscritível em uma circunferência.

Figura 30 – Trapézio inscrito na circunferência




Fonte: Autoria Própria.

**Paralelogramo.**

Um quadrilátero convexo é um paralelogramo, se e somente se, possui os lados opostos paralelos.

Propriedades:

i) Em todo paralelogramo os dois ângulos opostos são congruentes.

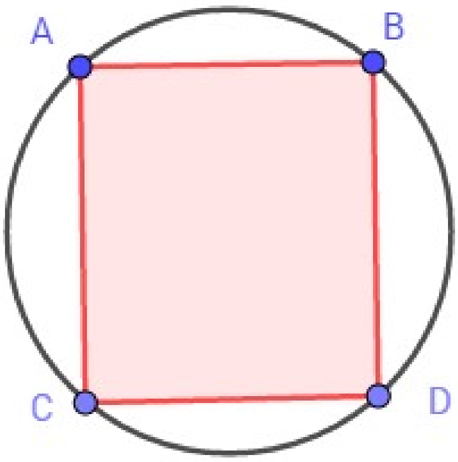
ii) Todo quadrilátero convexo que possuir dois ângulos opostos congruentes, é um quadrilátero.

iii) Um quadrilátero convexo é um retângulo, se e somente se, possui todos os ângulos congruentes e seus lados paralelos são congruentes dois a dois.

iv) Todo retângulo é um paralelogramo.

v) O único paralelogramo inscrito na circunferência é o retângulo.

Figura 31 – Retângulo inscrito na circunferência




Fonte Autoria Própria.

**Losango**.

Um quadrilátero convexo é um losango, se e somente se, possui os quatro lados congruentes. propriedades:

i) Todo losango é paralelogramo.

ii) Todo losango tem diagonais perpendiculares.

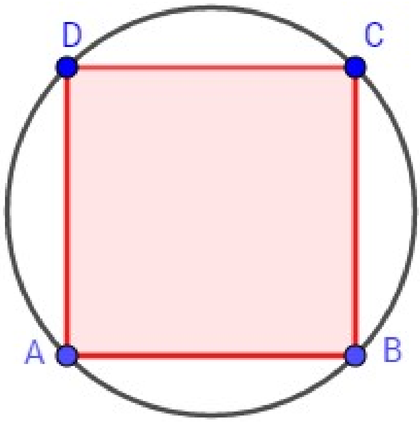
iii) Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares, é um losango.

iv) Um quadrilátero convexo é um quadrado, se e somente se, possui todos os lados e ângulos congruentes entre si.

v) Todo quadrado é um losango.

vi) O único losango inscrito na circunferência é o quadrado.

Figura 32 – Quadrado inscrito na circunferência




Fonte: Autoria própria.

### 3.1.6 Trigonometria

Para medir um arco $\widehat{AB}$, limita-se as unidades de arcos a apenas duas, o grau $(°)$ e o radiano $(rad)$, o grau é um arco unitário igual à $\frac{1}{360}$ da circunferência que contenha o arco a ser medido,o radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.(IEZZI, 1995)

Para fazer a conversão entre essas duas unidades, há uma relação correspondente à seguinte regra de três simples diretamente proporcional:

$360° \longleftrightarrow 2\pi.rad$

$180° \longleftrightarrow \pi.rad$

**Exemplo 3.8.** *Utilize a conversão para transformar 135° em radianos e $\frac{4\pi}{5}$ em graus.*

*Soluções:*

*resolvendo a regra de três simples diretamente proporcional;*

$180° \longleftrightarrow \pi.rad$

$135° \longleftrightarrow x.rad$

*obtém-se:*

$180.x = 135\pi \Longrightarrow x = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}rad$

*De mesmo modo:*

$180° \longleftrightarrow \pi.rad$

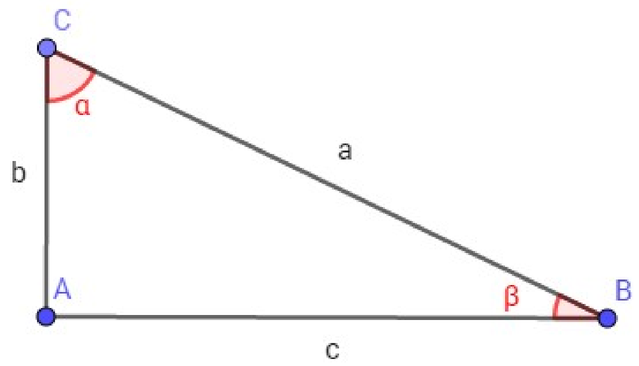
$x° \longleftrightarrow \frac{4\pi}{5}rad$

$x.\pi = \frac{4\pi.180}{5} \Longrightarrow x = \frac{144\pi}{\pi} = 144°$

**Trigonometria no Triângulo Retângulo**

Seja $ABC$ um triângulo retângulo, com ângulo reto em A. E sendo os lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e os ângulos agudos sendo $A\hat{B}C = \alpha$ e $A\hat{C}B = \beta$.

Figura 33 – Triângulo Retângulo




Fonte: Autoria própria.

No triângulo da figura 33, o lado a é a hipotenusa e os lados b e c são os catetos.

Uma maneira de associar ângulos e lados de um triângulo é usando as funções trigonométricas, no triângulo retângulo tem-se as seguintes definições:

**Definição 3.25.** *De acordo com Iezzi (1995, p.146)"Seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa."*

**Definição 3.26.** *"Cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa."*

**Definição 3.27.** *Tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo.*

Assim, na figura 19 tem-se:

$sen\hat{C} = sen\alpha = \frac{c}{a}$.

$cos\hat{C} = cos\alpha = \frac{b}{a}$.

$tg\hat{C} = tg\alpha = \frac{c}{b}$.

$sen\hat{B} = sen\beta = \frac{b}{a}$.

$cos\hat{B} = cos\beta = \frac{c}{a}$.

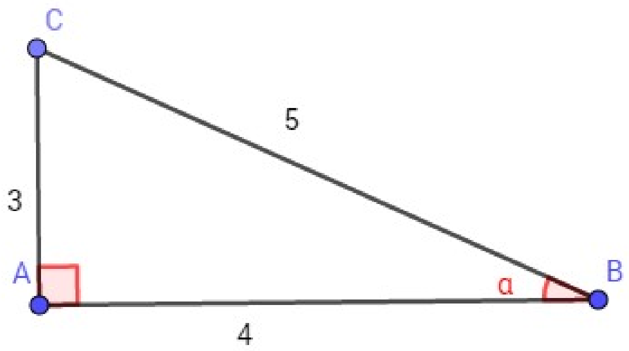
$tg\hat{B} = tg\beta = \frac{b}{c}$.

observe que:

$sen\alpha = cos\beta = \frac{c}{a}$, $sen\beta = cos\alpha = \frac{b}{a}$, e $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$.

**Exemplo 3.9.** *Seja ABC um triângulo retângulo como na Figura 34, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\alpha$.*

Figura 34 – Exemplo de Triângulo Retângulo




Fonte: Autoria Própria.

$sen(\alpha) = \frac{3}{5}$

$cos(\alpha) = \frac{4}{5}$

$tg(\alpha) = \frac{3}{4}$

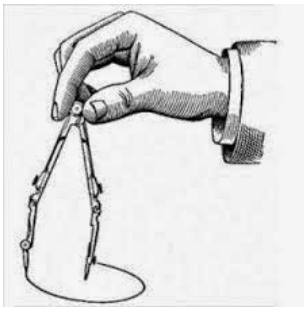
### 3.1.7 Introdução a Construções Geométricas.

A seguir será apresentado os conceitos de construções geométricas, necessário para a construção de quadriláteros; em especial, os quadriláteros notáveis, quadrado, retângulo paralelogramo, losango e trapézio, utilizando para isso lápis, borracha, régua e compasso.

De acordo com Souza, Pimenta e Arnaut (2007, p.13) "O compasso é um aparelho utilizado na construção de circunferências ou arcos de circunferências desde que se saiba o centro e o raio."Este aparelho é formado por dois braços unidos por uma extremidade e nas outras extremidades têm-se duas pontas, uma é chamada de ponta seca, a qual será o centro da circunferência, e a outra ponta com grafite, a qual deve-se desenhar a circunferência ou arco desejado. Exatamente na junção das duas extremidades encontra-se o apoio de mão, que serve para rotacionar a ponta com grafite. Os demais objetos, todos conhecem desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Para a construção de uma circunferência deve-se escolher o raio e o centro da mesma, posicionar o compasso sobre uma folha de papel de modo que a ponta seca esteja no local destinado para ser o centro da circunferência e girando o compasso com a mão no apoio e o grafite no papel.Observe a ilustração da figura 35.

Figura 35 – Como utilizar o compasso.



Fonte:http://aprendausinagem.blogspot.com/2014/05/material-para-desenho-tecnico-compasso.html. Acessada em 19/04/2019.

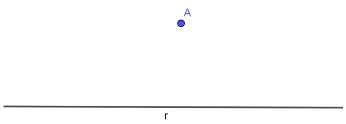
A régua é um instrumento de medida ou um instrumento que serve para traçar linhas retas. Em construções geométricas o segundo sentido é comumente utilizado.(SOUZA; PIMENTA; ARNAUT, 2007)

As construções necessárias neste trabalho serão:

**Construção de uma reta Perpendicular passando por um ponto dado.**

Dado uma reta r qualquer e um ponto A fora desta reta. Para construir uma reta que seja perpendicular a r passando por A deve-se seguir os seguintes passos:

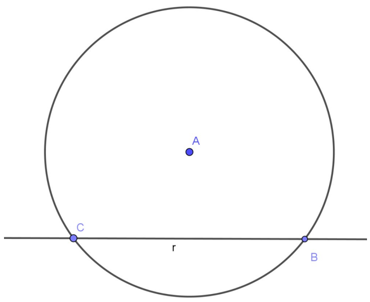
Figura 36 – Reta r e ponto A.




Fonte: Autoria Própria.

**Passo 1** Constrói-se uma circunferência de centro em A, utilizando uma abertura no compasso de maneira que ela toque na reta r dada em dois pontos distintos.

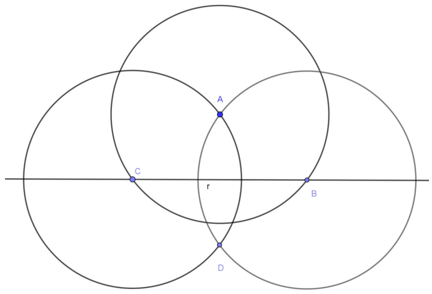
Figura 37 – Construção parte 2.




Fonte: Autoria Própria.

**Passo 2** Chamando esses pontos de B e C, com o mesmo tamanho de raio, utilizando como centro os pontos B e C constrói-se dois círculos. Estes círculos se encontram em dois pontos, sendo um acima e outro abaixo da reta r.

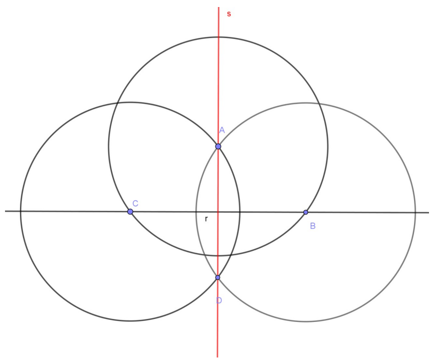
Figura 38 – Construção parte 3.




Fonte: Autoria Própria.

**Passo 3** Ligando os pontos de encontro têm-se a reta S, perpendicular à r passando por A.

Figura 39 – Construção parte 3.

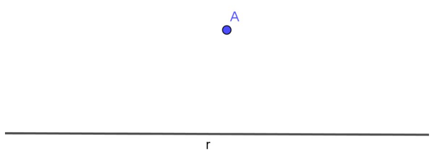



Fonte: Autoria Própria.

**Construção de uma reta paralela passando por um ponto dado.**

Dado uma reta r e um ponto A que não pertence a reta r. Para construir uma reta s que passe por A e seja paralela à reta r deve-se utilizar os seguintes passos:

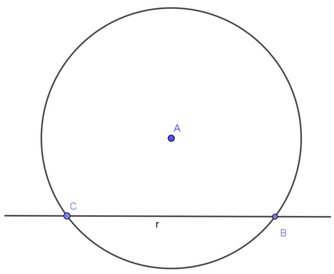
Figura 40 – Reta r e ponto A.




Fonte: Autoria Própria.

**Passo 1** Com um raio maior do que a distância entre A e r e centro em A, constrói-se um círculo que toque r nos pontos B e C.

Figura 41 – Construção da paralela parte 1.

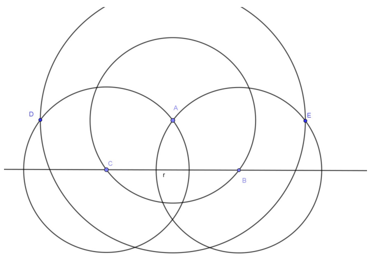



Fonte: Autoria Própria.

**Passo 2** Com raio de mesma medida constrói-se dois círculos com centros em B e C respectivamente.

**Passo 3** Com raio de medida BC constrói-se um círculo com centro em A, este círculo corta os dois construídos em 2., nos pontos D e E.

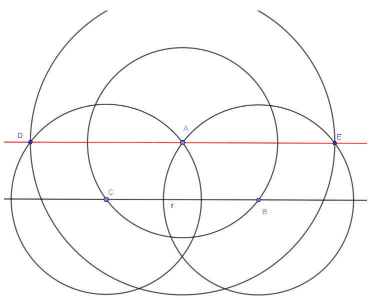
Figura 42 – Construção da paralela parte 2.




Fonte: Autoria Própria.

**Passo 4** Com uma régua ligando DE este segmento passará por A e será paralelo a reta r.

Figura 43 – Construção da paralela parte 3.




Fonte: Autoria Própria.

A seguir, serão enunciados, demonstrados e exemplificados, os principais teoremas a respeito de quadriláteros inscritíveis na circunferência

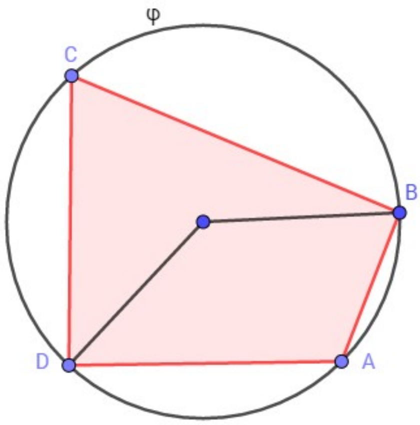
## 3.2 Teorema do Quadrilátero Inscrito em uma Circunferência

**Teorema 3.13.** *De acordo com MORGADO, WAGNER e JORGE (1990, p.67) "Um quadrilátero convexo é inscritível, se e somente se, os ângulos forem suplementares.*

**Demonstração**:

$\Longrightarrow$

Figura 44 – Quadrilátero inscrito na circunferência.




Fonte: Autoria Própria.

Seja $\varphi$ uma circunferência, cujo quadrilátero $ABCD$ está inscrito, deve-se demonstrar que a soma dos ângulos opostos são suplementares.

Como $\hat{A}$ é inscrito, $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$.

Como $\hat{C}$ é inscrito, $\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}$.

Assim $\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = 180°$.

E como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$, tem-se $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

$\Longleftarrow$

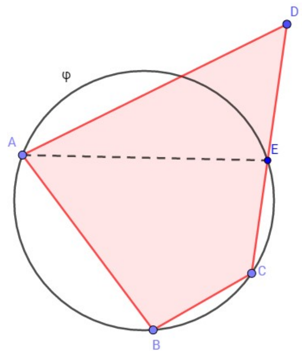
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e supondo que $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$, deve-se demonstrar que $ABCD$ é inscritível.

Se $ABCD$ não fosse inscritível, haveria uma circunferência $\varphi$, que passa pelos pontos $A, B$ e $C$. Esta circunferência não passaria pelo ponto $D$ e teria o que segue: Sendo E o ponto de interseção da reta $\overline{CD}$ com a circunferência $\varphi$, o quadrilátero $ABCE$ é inscritível em $\varphi$.

Sendo $ABCE$ inscrito $\longrightarrow \hat{B} + \hat{E} = 180°$

Pela hipótese, $\hat{B} + \hat{D} = 180°$, tem-se $\hat{D} = \hat{E}$, o que é um absurdo de acordo com o teorema do ângulo externo no triângulo $ADE$. Logo $ABCD$ é inscritível. (PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010)

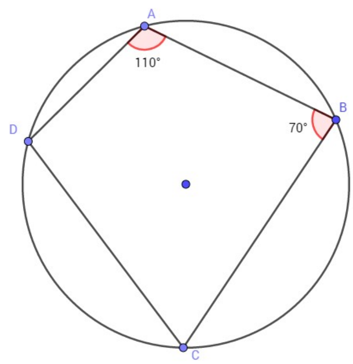
Figura 45 – Demonstração do Teorema 3.13.




Fonte: Autoria Própria.

**Exemplo 3.10.** *Seja ABCD um quadrilátero inscrito na circunferência, tal que os ângulos* $A = 70°$ *e* $B = 110°$ *sejam adjacentes. Calcule o valor dos ângulos* $\hat{C}$ *e* $\hat{D}$*.*

Figura 46 – Exemplo 3.12.




Fonte: Autoria Própria.

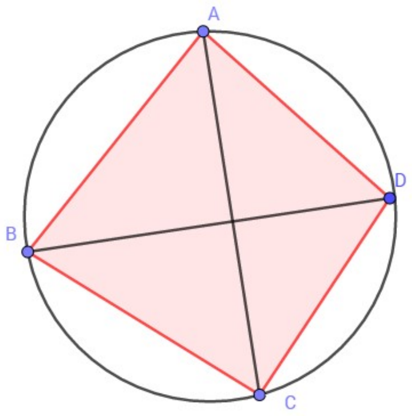
*Pelo teorema do quadrilátero inscrito, em uma circunferência, os ângulos* $A$ *e* $C$ *são suplementares, assim como os ângulos* $B$ *e* $D$*, logo:*

$C = 70°$ *e* $D = 110°$

## 3.3 Teorema de Ptolomeu

**Teorema 3.14.** *Se* $ABCD$ *é um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência então, a soma dos produtos de seus lados opostos é igual ao produto de suas diagonais, isto é,* $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} = \overline{AC}.\overline{BD}$ *(FREITAS; OLIVEIRA, 2014)*

Figura 47 – Teorema de Ptolomeu.

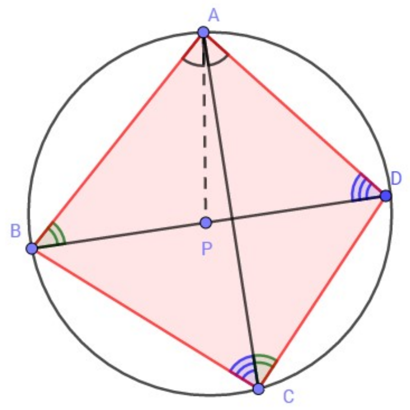



Fonte: Autoria Própria.

**Demonstração**: Seja P um ponto sobre $\overline{BD}$ tal que $B\hat{A}P = C\hat{A}D$, como $A\hat{C}B = P\hat{D}A$ (ângulo inscrito em um mesmo arco $\widehat{AB}$), tem-se $\triangle APD \sim \triangle ABC$, daí:

$\frac{\overline{PD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{AC}.\overline{PD} = \overline{AD}.\overline{BC}$. (I)

Figura 48 – Demonstração teorema 3.13




Fonte: Autoria Própria.

Do mesmo modo: $\triangle APB \sim \triangle ADC \Longrightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{BP}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{CD}$. (II)

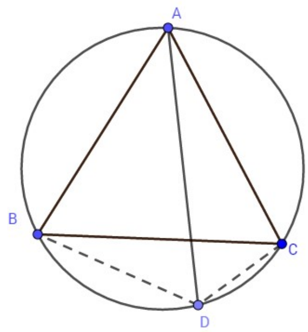
Somando (I) e (II) tem-se;

$\overline{AC}.\overline{PD} + \overline{BP}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} \Longrightarrow \overline{AC}.(\overline{PD} + \overline{BP}) = \overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} \Longrightarrow \overline{AD}.\overline{BD} = \overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD}$.

**Exemplo 3.11.** *seja $ABC$ um triângulo equilátero, e seja $D$ um ponto fora do triangulo $ABC$, tal que D pertença ao círculo circunscrito ao triângulo $ABC$, e que $DC = 3$ e $BD = 6$, calcule $DA$.*

*Observe a figura 49:*

Figura 49 – Exemplo 3.13.




Fonte: Autoria Própria.

*Solução:*

*Como o triângulo ABC é equilátero, tem-se; AB = AC = BC e como D pertence ao círculo circunscrito ao triângulo, o quadrilátero ABCD está inscrito na circunferência. E assim pelo teorema de Ptolomeu:*

$AC.BD + AB.DC = AD.BC$

*Assim:* $AD.BC = 3.AB + 6.AB = 9.AB = 9.BC$ *logo:* $AD = \frac{9BC}{BC} = 9.$

**Teorema 3.15.** *Recíproca do Teorema de Ptolomeu.*

*Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com a seguinte propriedade; $\overline{AD}.\overline{BD} = \overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD}$, deve-se demonstrar que $ABCD$ é um quadrilátero inscrito na circunferência.*

**Demonstração**:

Seja E um ponto tal que $C\hat{D}E = A\hat{D}B$ e seja $\overline{DE}$ tal que $\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{DE}$ e unindo o ponto E com A e C tem-se os triângulos semelhantes; $EDC$ e $ADB$ por terem lados proporcionais que compreendem ângulos congruentes.

Do mesmo modo tem-se; $\triangle BDC \sim \triangle ADE$, assim:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \Longrightarrow C\hat{E}D = \hat{A}$

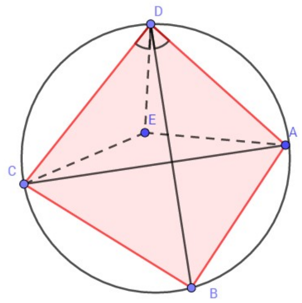
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Longrightarrow A\hat{E}D = \hat{C}$

Somando:

$\overline{AC}(\overline{AE} + \overline{EC}) = \overline{AB}.\overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AD}$, $C\hat{E}D + A\hat{E}D = \hat{A} + \hat{C}$.

Como $\overline{BD}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{DC} + \overline{BC}.\overline{AD}$, $\overline{BD}.\overline{AC} = \overline{BD}(\overline{AE} + \overline{EC}) \Longrightarrow \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ o que implica que $AEC$ é uma reta linear, logo; $\hat{A} + \hat{C} = 180°$, ou seja, $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em uma circunferência (Pelo teorema 3.11).

Figura 50 – Demonstração teorema 3.14.




Fonte: Autoria Própria.

## 3.4 Teorema de Hiparco

**Teorema 3.16.** *De acordo com Freitas e Oliveira (2014, p.05),"(Teorema de Hiparco) A razão das diagonais de um quadrilátero inscritível é igual a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais."Da Figura 48, o teorema de Hiparco será:* $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{AB.BC+CD.AD}{AB.AD+DC.BC}$

**Demonstração**: Como os ângulos $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$ são suplementares, $cos(A\hat{B}C)+cos(A\hat{D}C) = 0$.

Usando a lei dos cossenos no $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ e multiplicando por $2.AB.BC.CD.AD$, para eliminar os denominadores resulta:

$$\overline{AB}.\overline{BC}(\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{AC}^2) + \overline{CD}.\overline{DA}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2) = 0$$

$$\begin{aligned}
\overline{AC}^2(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA}) &= \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CD}^2 + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{DA}^2 + \overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AB}^2 + \overline{CD}.\overline{DA}.\overline{BC}^2 \\
&= \overline{AB}.\overline{CD}.(\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{AB}.\overline{DA}) + \overline{BC}.\overline{AD}.(\overline{AB}.\overline{DA}.\overline{BC}.\overline{CD}) \\
&= (\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{AB}.\overline{DA})(\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma nos $\triangle DAB$ e $\triangle BCD$ tem-se:

$$\overline{BD}^2(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{BC}) = (\overline{DA}.\overline{CD}.\overline{AB}.\overline{BC})(\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}) \qquad (3.2)$$

Multiplicando (3.1) e (3.2) membro por membro tem-se;

$$\begin{aligned}
&\overline{AC}^2(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA}).(\overline{DA}.\overline{CD}.\overline{AB}.\overline{BC})(\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}) \\
&= \overline{BD}^2(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{BC}).(\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{AB}.\overline{DA})(\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Então

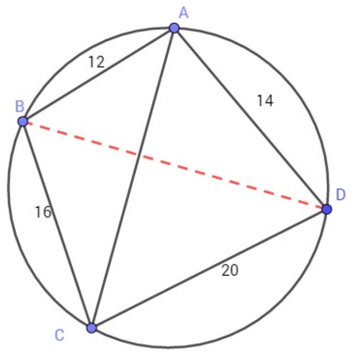
$$\overline{AC}^2(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA})^2 = \overline{BD}^2(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{BC})^2$$

Consequentemente

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA})^2}{(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{BC})^2} \Longrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA})}{(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{CD}.\overline{BC})}$$

**Exemplo 3.12.** *Considere o quadrilátero ABCD, inscritível, com a diagonal AC = 22 cm. Determine a medida da diagonal BC pelo teorema de Hiparco.*

Figura 51 – Exemplo teorema de Hiparco.




Autoria Própria

*Solução:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{(\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{BC}.\overline{CD})}{(\overline{AB}.\overline{BC} + \overline{CD}.\overline{DA})}$$

.

$$\frac{22}{\overline{BD}} = \frac{(12.14 + 16.20)}{(12.16 + 20.14)}$$

.

$$\frac{22}{\overline{BD}} = \frac{488}{472}$$

.

$$488.\overline{BD} = 10384$$

$$\overline{BD} = 21,28$$

# Capítulo 4

# Atividades

A seguir são apresentadas as atividades propostas, relacionadas aos teoremas que abordam o tema quadrilátero inscrito na circunferência, a serem trabalhadas com alunos do 9º ano do ensino fundamental. As regras de cada jogo está no Apêndice A.

## 4.1 Memorizando ângulos

### 4.1.1 Material para confecção da atividade:

$i)$ Papel A4 branco, 11 unidades.

$ii)$ Papel cartão colorido, 4 unidades.

$iii)$ Cola.

$iv)$ Tesoura.

$v)$ Duas cartolinas de cores, diferentes entre si e diferente das cores do papel cartão.

$vi)$ Acesso ao programa Word para digitação dos ângulos.

$vii)$ Acesso a impressora.

### 4.1.2 Confecção da atividade:

$i)$ No programa Word, editar um quadrado de lado 10cm. Deste modo, tem-se 4 quadrados por página.

$ii)$ Em cada quadrado, digitar os ângulos de forma que sejam suplementares dois à dois.

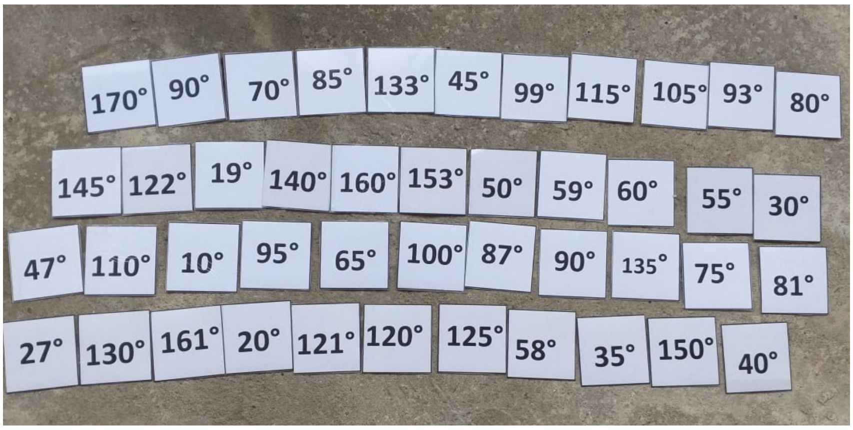
$iii)$ Após, imprimir as 11 folhas com os ângulos digitados em cada quadrado, estes deverão ser cortados e colados nos papéis cartão, de modo que os ângulos suplementares fiquem em cores diferentes.

$iv)$ Para ter uma maior durabilidade deve-se revestir as cartas com papel adesivo transparente.

### 4.1.3 Dinâmica da atividade:

$i)$ Inicialmente as cartas deverão ser expostas com os ângulos voltados para cima, afim de que os participantes vejam que todos os pares são suplementares.

Figura 52 – Início de jogo.




Fonte: Autoria Própria.

$ii)$ O professor deverá embaralhar as cartas separadamente entre cada cor. E em seguida, pôr as cartas uma após a outra em fila de modo que tenha-se 4 linhas de mesma cor e 11 colunas de 4 cartas de cores distintas.

Figura 53 – Cartas posicionadas para iniciar o jogo.

Fonte: Autoria Própria.

$iii)$ O professor posiciona o banner em um local de fácil visualização.

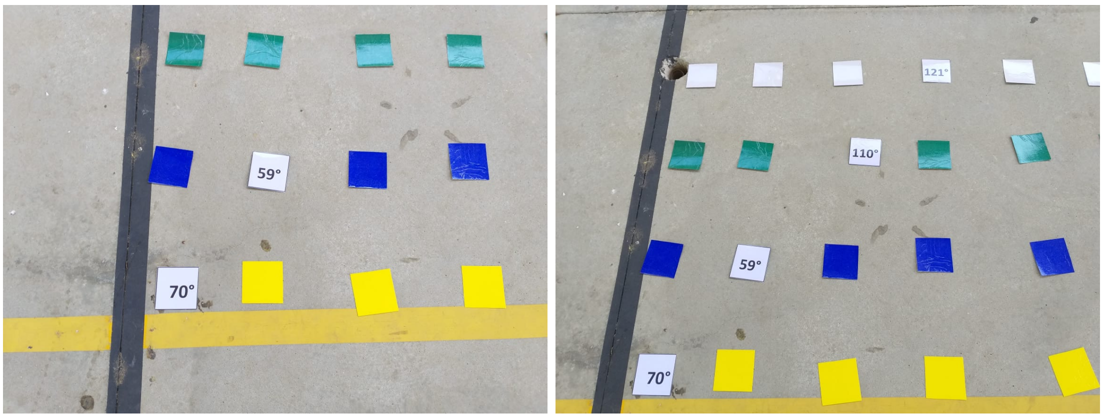
Figura 54 – Banner.


Fonte: Autoria Própria.

$iv)$ Após a decisão de qual equipe começará o jogo, os alunos deverão ficar em seus respectivos lugares.

$v)$ Uma equipe começa o jogo, virando a primeira carta, segunda, terceira e quarta.

Figura 55 – Sequência do Jogo.




Fonte: Autoria Própria.

### 4.1.4 Objetivo:

$i)$ Fazer com que os alunos entendam o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência.

$ii)$ Fazer com que os alunos desenvolvam cálculos matemáticos com os ângulos em grau.

$iii)$ Fazer com que os alunos desenvolvam o trabalho em equipe.

$iv)$ Diversão dos alunos enquanto aprendem.

$v)$ Desenvolver raciocínio e rápida percepção nos alunos.

Uma simulação deste jogo está no Apêndice B.

## 4.2 Dominó dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência.

### 4.2.1 Material para confecção da atividade:

$i)$ Acesso a um computador com programa Word.

$ii)$ Papel A4.

$iii)$ Impressora.

$iv)$ Tesoura.

$v)$ Papelão.

$vi)$ Cola.

$vii)$ Um papel colorido.

$viii)$ Papel contact transparente.

### 4.2.2 Construindo o Jogo.

$i)$ Utilizando a ferramenta de construção de tabelas no programa Microsoft Word, construa uma tabela com 8 linhas e 7 colunas tendo assim 28 "peças"com 2 linhas e uma coluna cada. Nestes pares deve-se escrever ângulos, em graus, que sejam ângulos adjacentes de um quadrilátero inscrito na circunferência. Deve-se escolher oito ângulos diferentes que sejam suplementares dois a dois, e fazer as combinações de modo que nenhum se repita na mesma "peça".

$ii)$ Em seguida, deve-se, imprimir em uma folha de papel A4.

$iii)$ Colar esta folha impressa em um papelão.

$iv)$ Colar a parte de baixo, sem os ângulos colados anteriormente, na folha de papel colorido.

$v)$ Recortar cada par de duas linhas e uma coluna, separadamente.

$vi)$ Envelopar com papel contact a fim de que o material possa ter uma maior durabilidade.

Figura 56 – Peças do jogo em graus

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100° | 100° | 100° | 100° | 100° | 100° | 100° |
| 130° | 80° | 70° | 40° | 140° | 110° | 50° |
| 80° | 80° | 80° | 80° | 80° | 80° | 70° |
| 70° | 40° | 140° | 110° | 50° | 130° | 140° |
| 70° | 70° | 70° | 70° | 110° | 40° | 50° |
| 110° | 40° | 130° | 50° | 140° | 110° | 110° |
| 130° | 130° | 130° | 50° | 50° | 40° | 130° |
| 110° | 50° | 40° | 40° | 140° | 140° | 140° |

Fonte: Autoria Própria.

### 4.2.3 Dinâmica da atividade.

$i)$ Este jogo pode ser jogado por duas, três ou quatro alunos, de modo que cada aluno fique inicialmente com sete "pedras"do dominó.

$ii)$ Assim, como no jogo que foi a inspiração para esta atividade, este jogo será iniciado por um aluno escolhendo uma "peça"qualquer que esteja em seu poder, e iniciando o jogo. Cada um dos outros alunos terão os dois lados da "peça"para completar a fila. Porém, diferentemente do jogo original, neste o complemento não serão valores iguais, e sim o suplementar do ângulo em questão. Pois, o encaixe deverá ser feito sempre por ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência.

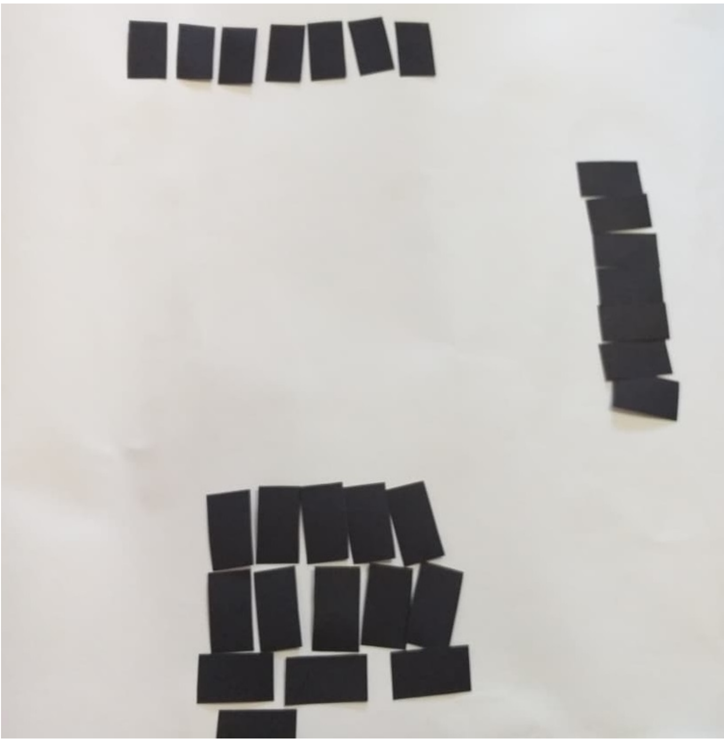
$iii)$ Vence o jogo aquele aluno que, ao final de todas as "pedras"serem expostas, obtiver um número menor de pedras em seu poder.

A seguir será apresentado, uma sequência simulada de uma partida com dois jogadores. No apêndice, constará duas simulações do jogo para três e quatro participantes, visando ilustrar a dinâmica do jogo.

Figura 57 – Embaralhando as peças.

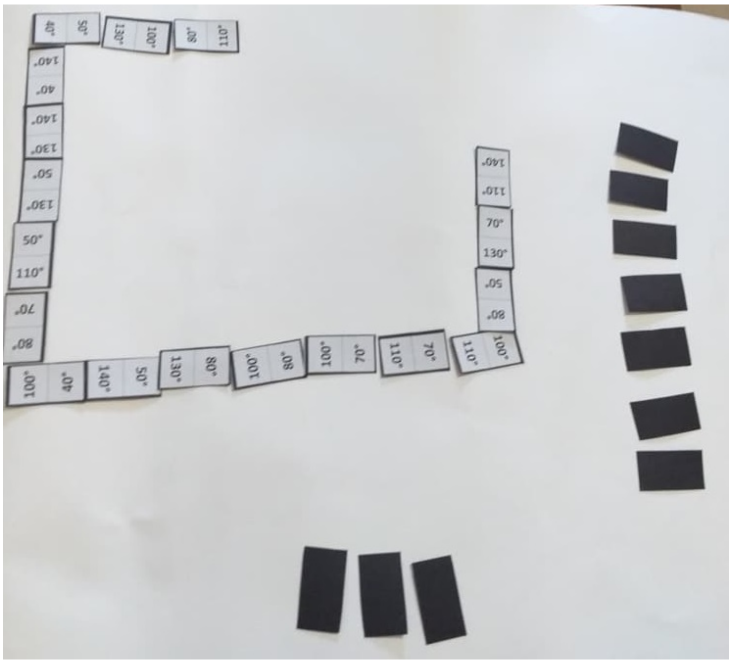
Fonte: Autoria Própria.

Figura 58 – Jogo armado para iniciar.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 59 – Jogo finalizado com um vencedor.



Fonte: Autoria Própria.

### 4.2.4 Objetivos.

$i)$ Fazer com que os alunos compreendam o que ocorre com os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência.

$ii)$ Realizar cálculos de soma ou subtração envolvendo ângulos em graus, exatos.

$iii)$ Desenvolver raciocínio e rápida percepção.

$iv)$ Fazer com que os alunos respeitem as regras previamente estabelecidas.

$v)$ Diversão dos alunos enquanto realizam o jogo.

Duas simulações para três e quatro jogadores, estará no Apêndice C.

## 4.3 Bingo com ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

### 4.3.1 Materiais para confecção da atividade:

$i)$ Computador com acesso ao programa Microsoft Word.

$ii)$ Impressora.

$iii)$ Mínimo de cinco folhas de papel A4.

$iv)$ Cola.

$v)$ Tesoura.

$vi)$ Uma folha de papel cartão.

$vii)$ Papel contact.

### 4.3.2 Construção da atividade.

$i)$ No programa Microsoft Word, faça uma tabela com 4 linhas e 5 colunas totalizando assim vinte lacunas para escrever números inteiros, os quais serão os ângulos medindo em grau.

$ii)$ Nestas lacunas, escreva valores distintos que estejam entre zero e cento e oitenta.

$iii)$ Em cada folha A4, deve-se fazer quatro tabelas idênticas, porém com uma condição única, que todos os valores de uma tabela nunca sejam iguais à todos os valores de uma outra tabela. Estas tabelas serão chamadas de cartelas do Bingo.

Figura 60 – Cartelas do bindo prontas.

Fonte: Autoria Própria.

$iv)$ A última folha deverá ser destinada a confecção de uma tabela maior dos valores que serão os suplementares de cada um valor utilizado em todas as tabelas menores. Por exemplo, se foi utilizado o número 1 em alguma tabela, então deverá ter o número 179 nesta grande tabela.

$v)$ Após a impressão de todas essas páginas, deve-se expor, com os números virados para cima, na folha de papel cartão. Após isto, as tabelas menores ou cartelas, deverão ser cortadas separadamente. e a cartela maior deverá ser cortado lacuna por lacuna de modo que fique cada número sozinho.

$vi)$ Ao final deve-se envelopar com papel Contact a fim de que o material tenha uma maior durabilidade.

Figura 61 – Valores suplementares aos ângulos de cada cartela.

Fonte: Autoria Própria.

### 4.3.3 Dinâmica da atividade.

$i)$ Cada aluno receberá uma cartela do jogo, neste exemplo, foram produzidas 16 cartelas.

$ii)$ Os valores suplementares de cada número das cartelas, deverão estar todos em um recipiente de cor escura, de modo que não se saiba qual valor será retirado.

$iii)$ O professor deverá ser o mediador do jogo, ou seja, será ele o responsável por sortear os valores dentro do recipiente, um de cada vez e o mesmo professor ainda "cantará"qual foi o valor retirado. Além disso, será o professor o responsável para conferir se o aluno finalizou ou não o jogo.

$iv)$ Ao aluno cabe marcar corretamente sua cartela, sabendo que o número "cantado"pelo professor, não necessariamente será o que ele marcará em sua cartela, mas sim deverá marcar o suplementar do valor "cantado". Por exemplo: o professor diz que o ângulo sorteado foi o $30°$, o aluno deverá marcar o valor de $150°$.

$v)$ Vence o jogo aquele aluno que primeiro marcar completamente sua tabela. O aluno que marcar a tabela de forma equivocada, e na hora da conferência for comprovado que o mesmo ainda não venceu, será desclassificado do jogo.

### 4.3.4 Objetivo.

$i)$ Fazer com que os alunos compreendam o que ocorre com os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

$ii)$ Desenvolver nos alunos uma rápida percepção de soma e subtração de ângulos exatos com medidas em grau.

$iii)$ Respeito à regras previamente definidas por parte dos alunos.

$iv)$ Interação entre todos os alunos da sala, visando uma socialização maior.

$v)$ Diversão dos alunos enquanto realizam o jogo.

Uma simulação deste bingo, está no Apêndice D.

## 4.4 Jogo de Perguntas e Respostas sobre Quadriláteros Inscritos na Circunferência.

### 4.4.1 Material para confecção da atividade:

$i)$ Acesso ao programa Word em um computador.

$ii)$ Acesso à impressora.

$iii)$ Papel A4.

$iv)$ Cartolina.

$v)$ Tesoura.

$vi)$ Fita dupla face.

$vii)$ Papel contact.

### 4.4.2 Construção da atividade.

$i)$ No programa Microsoft Word, fazer 24 figuras idênticas, neste caso uma elipse, e no seu interior, escrever as perguntas que se queira de modo que tenha-se uma questão por figura, a respeito de quadriláteros inscritos na circunferência.

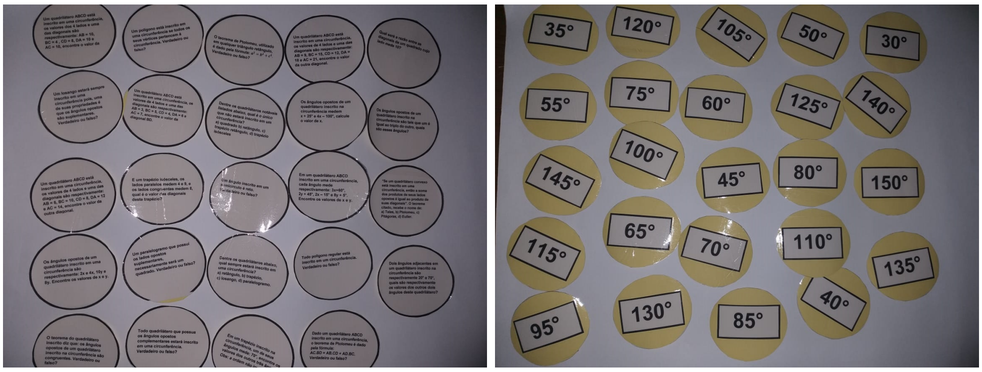
$ii)$ Utilizando uma figura menor, construir 24 ângulos de modo que sejam suplementares dois a dois, exemplo; construindo 30, deverá construir o 150, todos utilizando o grau como unidade de medida.

$iii)$ Após imprimir todo material confeccionado no word, deverá cortar as elipses e colar em uma cartolina e no verso de cada uma, deverá ser colado os ângulo,s e utilizando a tesoura, cortar cada elipse com a frase de um lado e o ângulo em outro.

$iv)$ Utilizando papel contact, deve-se revestir cada objeto confeccionado, a fim de que se obtenha uma maior durabilidade, representado na figura 62.

$v)$ Utilizando a fita dupla face, deve-se colar a parte adesiva no lado das frases para que quando, em sala de aula, possa ser colado esta parte voltada para parede.

Figura 62 – Jogo perguntas e respostas.




Fonte: Autoria Própria.

### 4.4.3 Dinâmica da atividade.

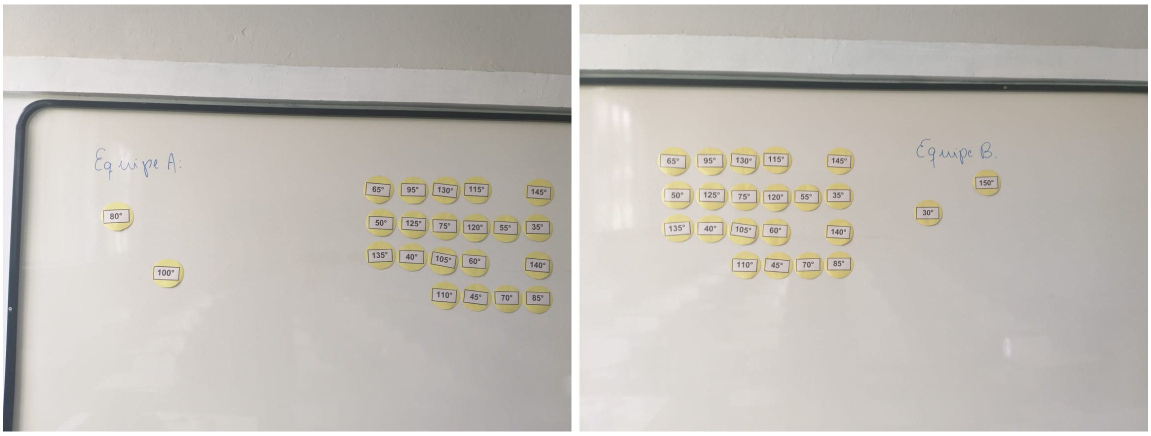
$i)$ O professor deverá fixar todas as questões em um quadro ou mural da sala de modo que os alunos visualizem todos ângulos possíveis. De preferência, que os ângulos fiquem no centro do quadro e em cada lado será escrito Equipe A e equipe B, representado na figura 63.

Figura 63 – Fixando os ângulos.

Autoria Própria.

$ii)$ A medida que os grupos forem acertando as respostas, o professor deverá ir montando os quadriláteros das equipes, representado na figura 64.

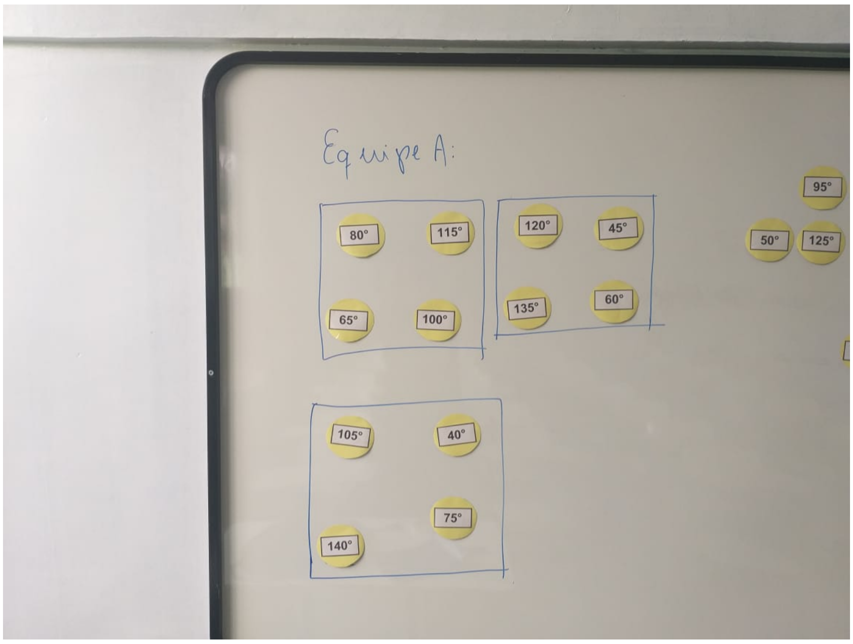
Figura 64 – Formando quadriláteros.




Autoria Própria.

$iii)$ Vence a equipe que primeiro completar três quadriláteros, representado na figura 65

Figura 65 – Equipe vencedora.




Autoria Própria.

### 4.4.4 Objetivo.

$i)$ Reconhecer um quadrilátero inscritível na circunferência, por seus ângulos opostos.

$ii)$ Disciplina e respeito pois, só valerá a resposta do seu representante, mesmo que outros alunos da equipe entendam que a resposta correta seja outra.

$iii)$ Desenvolver raciocínio e rápida percepção.

$iv)$ Fazer com que os alunos utilizem o teorema de Ptolomeu.

$v)$ Trabalho em equipe.

As questões utilizadas nesta atividade, assim como suas respectivas respostas, estarão no Apêndice.

As perguntas e respostas deste jogo, está no Apêndice E.

## 4.5 Construindo Quadriláteros com Bambolê.

### 4.5.1 Material para confecção da atividade:

$i)$ Um bambolê para cada aluno.

$ii)$ Barbante de modo que possa fazer um quadrilátero na circunferência do bambolê.

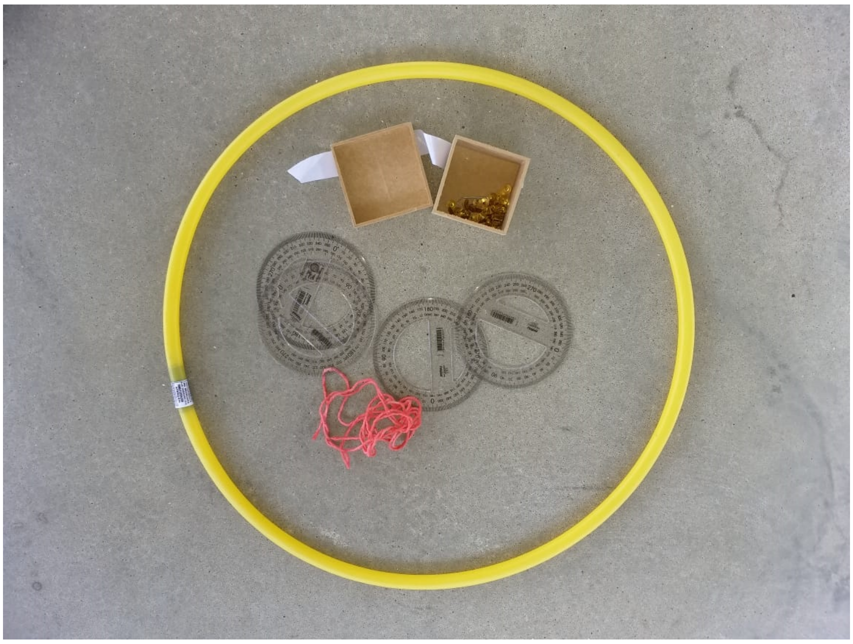
$iii)$ Tachinhas para pender os barbantes no bambolê.

$iv)$ Transferidor para medir os ângulos. Se for possível, quatro transferidores para cada aluno.

$v)$ Tesoura.

Representados na figura 66.

Figura 66 – Materiais para construção da atividade.



Fonte: Autoria Própria.

### 4.5.2 Dinâmica da atividade:

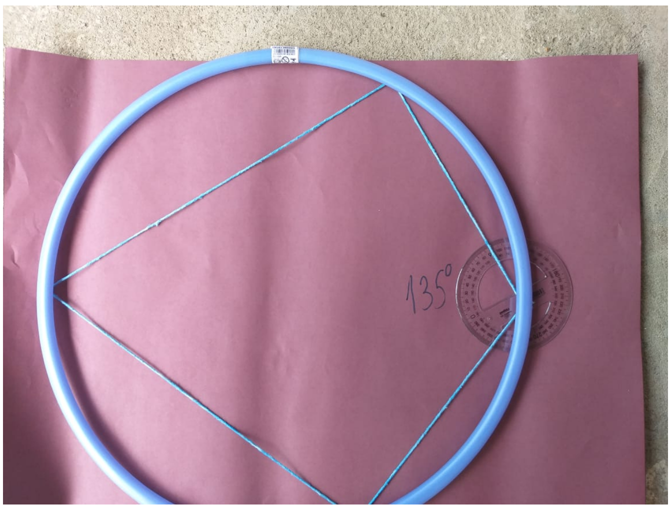
$i)$ Os alunos deverão colocar o bambolê no chão, prendendo a ponta do barbante com tachinha em qualquer ponto da circunferência do bambolê e o prolongamento do barbante.Deverão também fazer um quadrilátero com os vértices, sendo as tachinhas que prendem o barbante ao bambolê.

Figura 67 – Construção da atividade.

Fonte: Autoria Própria.

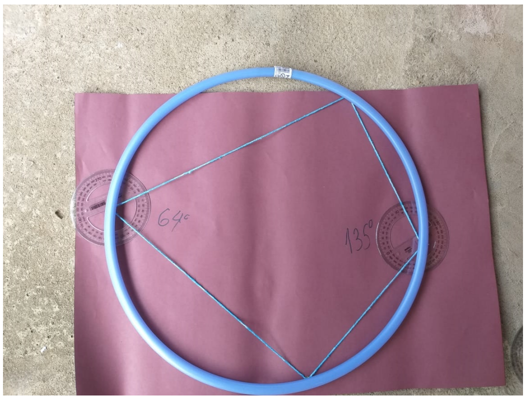
$ii)$ Após o quadrilátero estar pronto, utilizando um transferidor, cada aluno deverá medir os quatro ângulos deste quadrilátero. De acordo com a sequência das seguintes figuras: 68, 69, 70, 71.

Figura 68 – Medindo o primeiro ângulo.



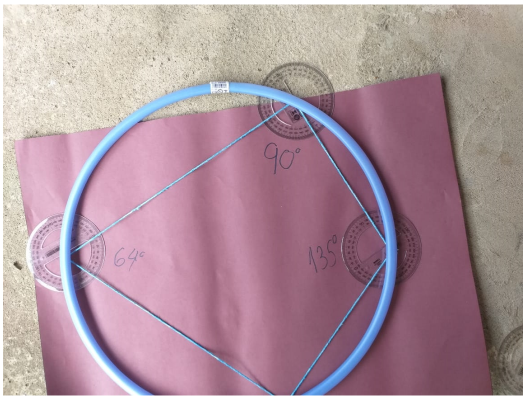

Fonte: Autoria Própria.

Figura 69 – Medindo o segundo ângulo.



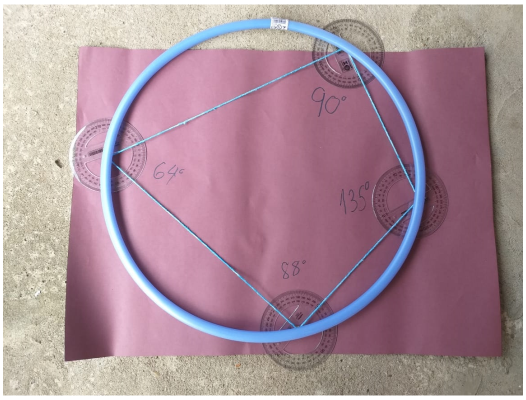

Fonte: Autoria Própria.

Figura 70 – Medindo o terceiro ângulo.




Fonte: Autoria Própria.

Figura 71 – Medindo o quarto ângulo.




Fonte: Autoria Própria.

### 4.5.3 Objetivo:

$i)$ Fazer com que os alunos entendam que existem várias maneiras de se aprender, e construir o próprio conhecimento é uma delas.

$ii)$ Fazer com que os alunos utilizem de forma correta o transferidor.

$iii)$ Realizar uma comparação entre os valores dos ângulos encontrados, com os valores que deveriam ser encontrados caso a circunferência do bambolê não fosse volátil.

$iv)$ Servir como pré - teste para inserção do teorema do quadrilátero inscrito na circunferência.

$v)$ Diversão dos alunos enquanto realizam a atividade.

Duas outras simulações desta atividade, está no Apêndice F.

## 4.6 Verificando Quadriláteros Notáveis

### 4.6.1 Material para confecção da atividade:

$i)$ Cartolinas de cores diferentes.

$ii)$ Compasso.

$iii)$ Régua.

$iv)$ Tesoura.

$v)$ Transferidos.

$vi)$ Lápis.

Figura 72 – Materiais.

Fonte: Autoria Própria.

### 4.6.2 Introdução:

Cada aluno deverá trazer o seu material. Esta atividade será feita, preferencialmente, em sala de aula, cada aluno terá a liberdade para escolher o tamanho que desejar em suas figuras.

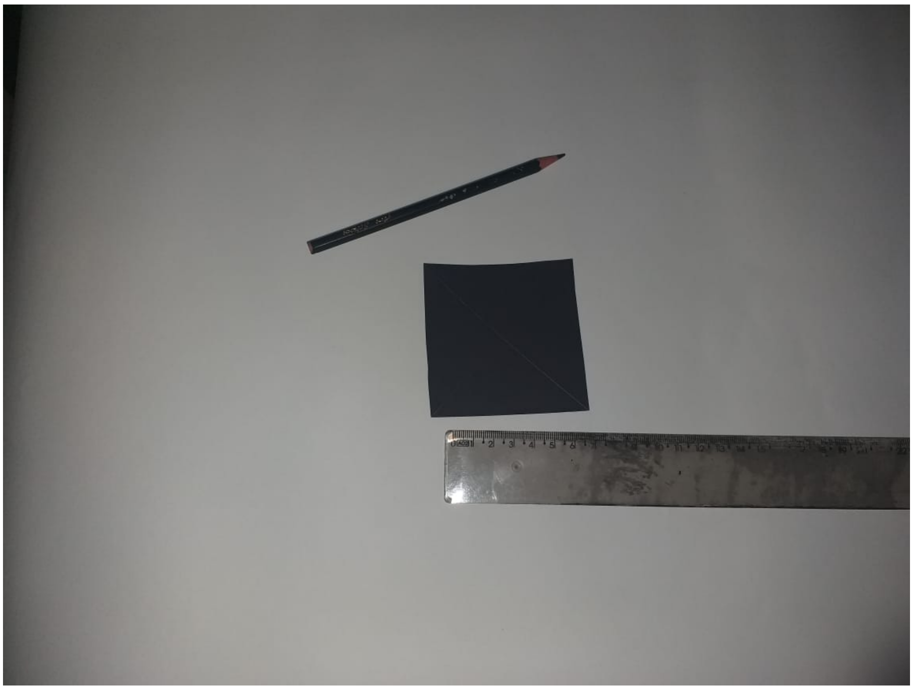
### 4.6.3 Quadriláteros Notáveis

$*$ **Quadrado**

Como um quadrado possui os ângulos opostos suplementares, este será inscrito.
Em uma cartolina, corta-se um quadrado de lado x, utilizando um compasso, com raio medindo a metade da diagonal deste quadrado, corta-se uma circunferência em uma cartolina de cor diferente do quadrado.
Podendo assim, de maneira prática, demonstrar que um quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência.

$i)$ Utilizando os conceitos de construções geométrica, constrói-se um quadrado, e utilizando lápis preto número um, constrói-se também as diagonais do quadrado utilizando uma régua.

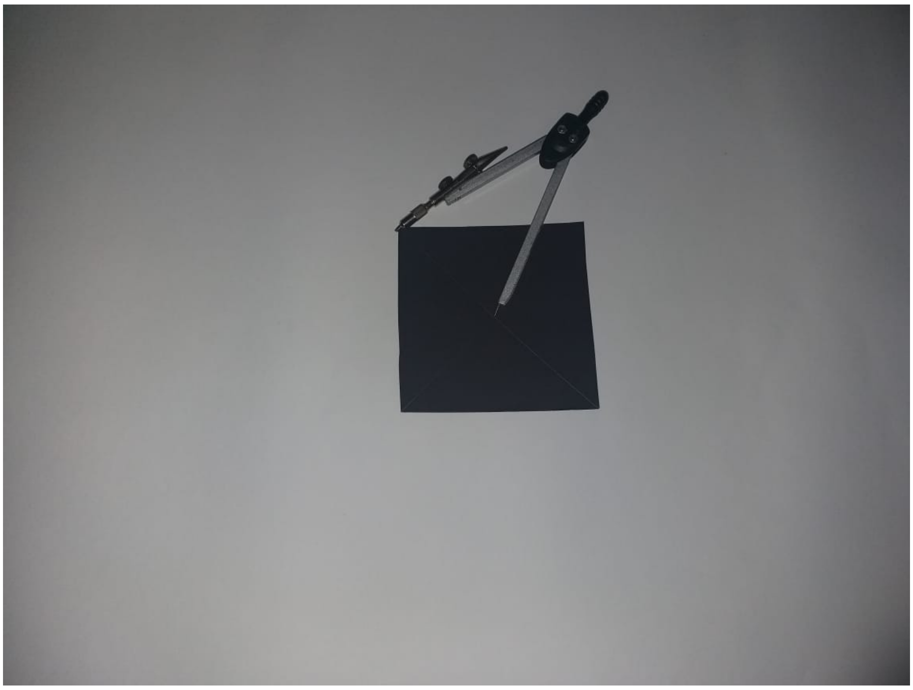
Figura 73 – Construção do quadrado.



Fonte: Autoria Própria.

$ii)$ Utilizando a metade da diagonal do quadrado, como unidade de medida para abertura do compasso.

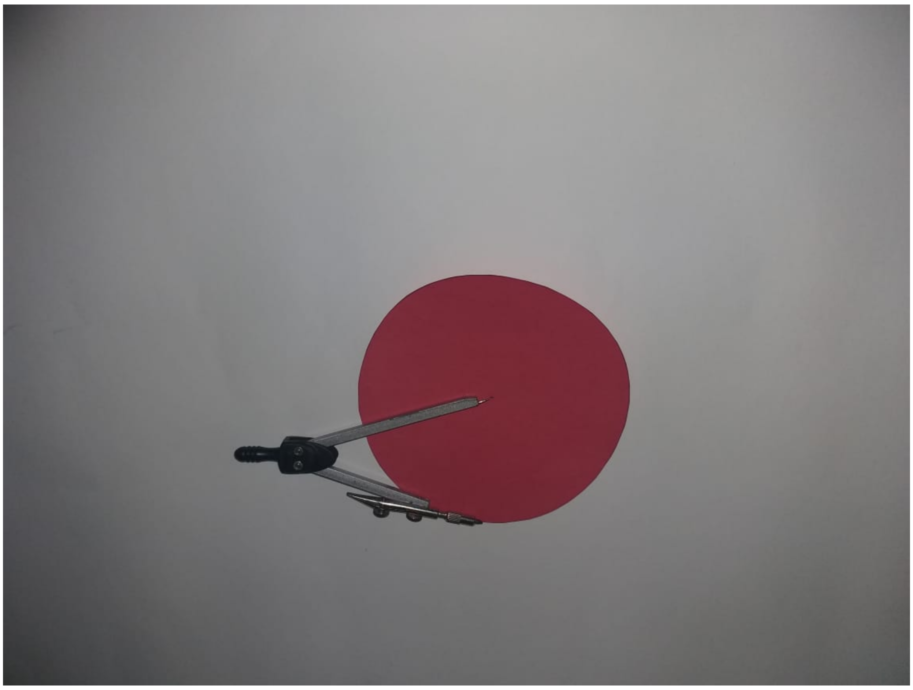
Figura 74 – Medida da metade da diagonal do quadrado.



Fonte: Autoria Própria.

$iii)$ Construa uma circunferência utilizando como raio, a metade da diagonal do quadrado.

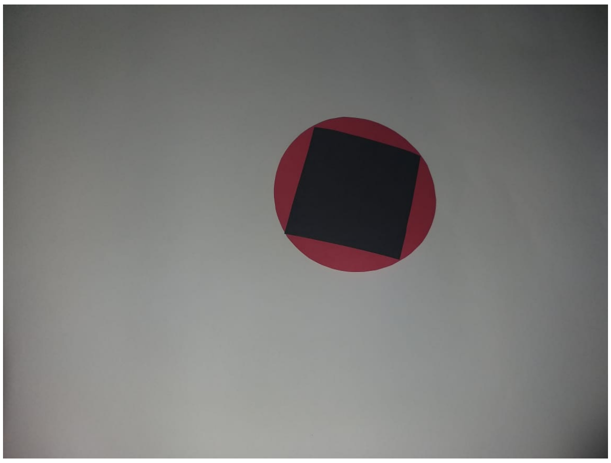
Figura 75 – Construção do círculo.



Fonte: Autoria Própria.

$iv)$ Obtém-se um quadrado inscrito na circunferência.

Figura 76 – Quadrado inscrito na circunferência.



Fonte: Autoria Própria.

$*$ **Retângulo**

Como um retângulo possui os ângulos opostos suplementares, este será inscrito em uma circunferência.

Em uma cartolina, corta-se um retângulo de lados x e y, com x diferente de y, utilizando um compasso, com raio medindo a metade da diagonal deste retângulo, corta-se uma circunferência em uma cartolina de cor diferente do retângulo.
Podendo assim, de maneira prática, demonstrar que um retângulo estará sempre inscrito em uma circunferência.

$i)$ Utilizando os conceitos de construções geométricas, constrói-se um retângulo e utilizando lápis preto número um, constrói-se as diagonais do retângulo utilizando uma régua.

Figura 77 – Construção do Retângulo.

Autoria Própria.

$ii)$ Utilizando a metade do tamanho da diagonal do retângulo como unidade de medida para abertura de um compasso.

Figura 78 – Medida da metade da diagonal do retângulo

Fonte: Autoria Própria.

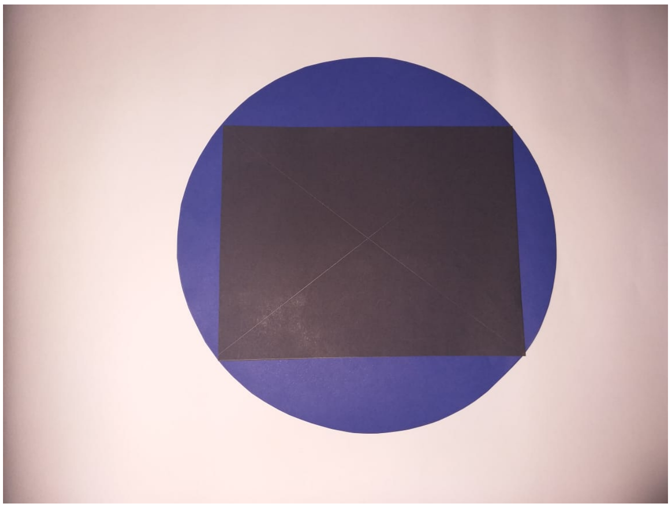
$iii)$ Construa uma circunferência utilizando como raio, a metade da diagonal do retângulo.

Figura 79 – Construção do círculo.

Fonte: Autoria Própria.

$iv)$ Obtém-se um retângulo inscrito em uma circunferência.

Figura 80 – Retângulo inscrito na circunferência.



Font: Autoria Própria.

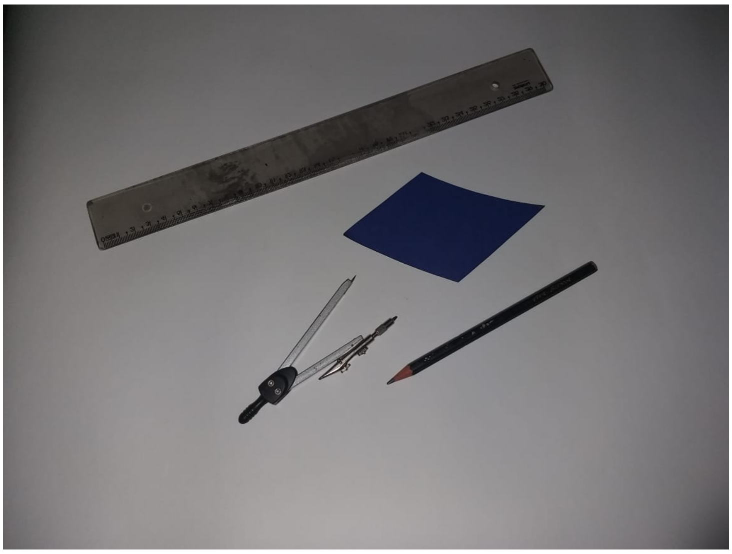
$*$ **Paralelogramo.**

Como os ângulos opostos de um paralelogramo não são suplementares, ele não será inscrito em uma circunferência, utilizando o mesmo método do retângulo e quadrado, deve-se mostrar ainda que não será inscritível.

Neste caso, deve-se observar que as diagonais são de tamanhos diferentes, logo, é preciso fazer dois círculos cujo raio seja metade de cada diagonal.

$i)$ Utilizando conceitos de construções geométricas.

Figura 81 – Construção do Paralelogramo.



Fonte: Autoria Própria.

$ii)$ Utilizando a metade da diagonal menor como raio, constrói-se uma circunferência.

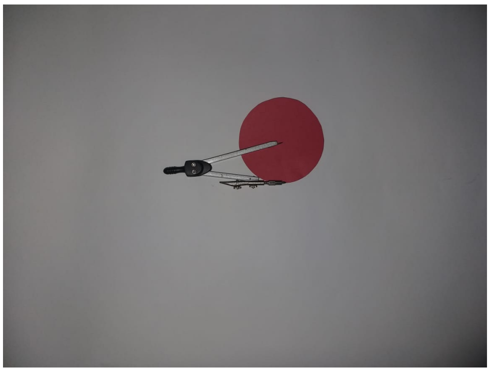
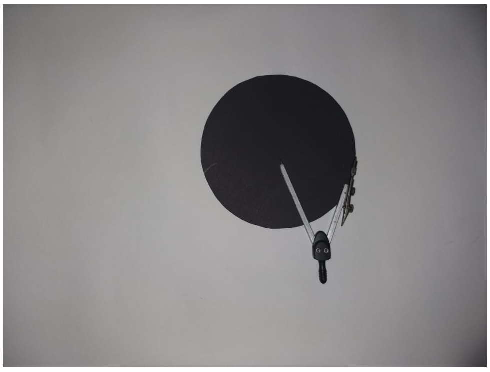


Figura 82 – Construção da Circunferência.

$iii)$ Utilizando metade da diagonal maior como raio, constrói-se uma nova circunferência.

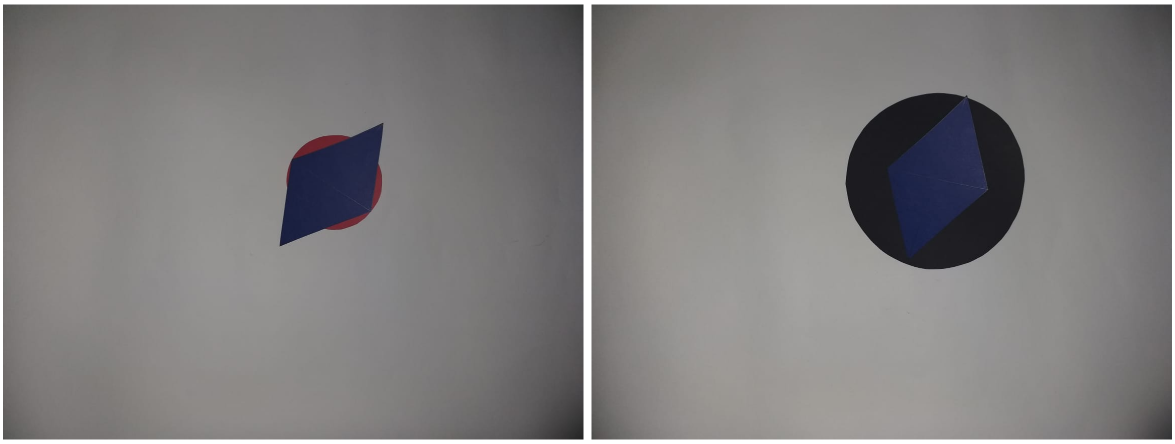
Figura 83 – Construção da circunferência maior.



Fonte: Autoria Própria.

$iv)$ Verificando, o paralelogramo não está inscrito em nenhuma das duas circunferências.

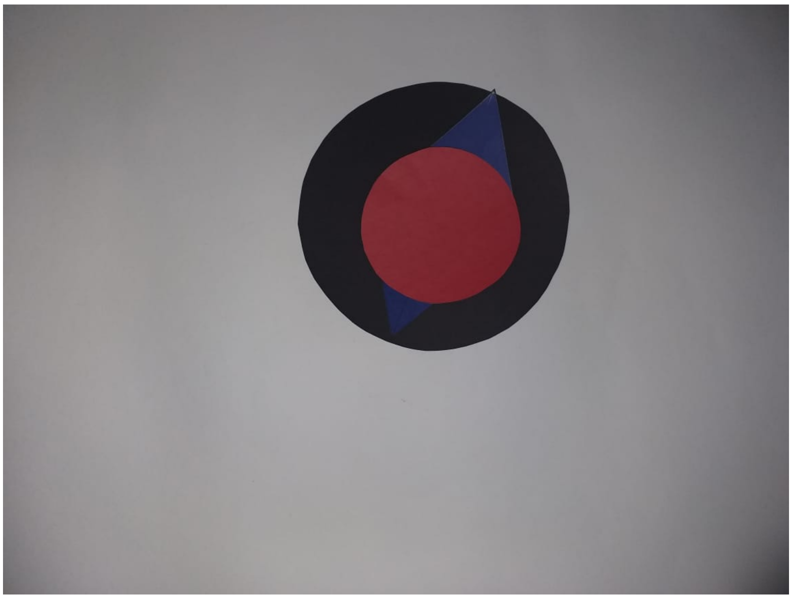
Figura 84 – Inscrição nas circunferências.



Fonte: Autoria Própria.

$v)$ Observando assim que o paralelogramo não está inscrito em uma circunferência.

Figura 85 – O paralelogramo não é inscritível em uma circunferência.



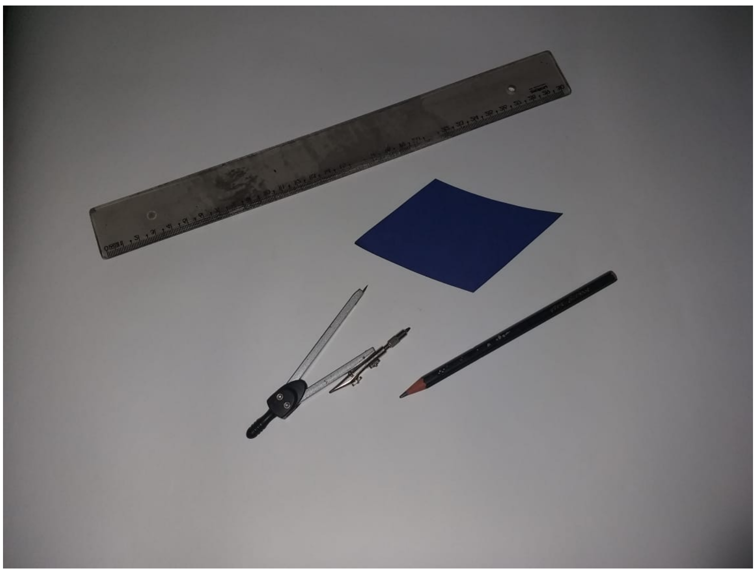
Fonte: Autoria Própria.

$*$ **Losango**

Como os ângulos opostos não são suplementares, ele não será inscrito em uma circunferência. Utilizando o método do paralelogramo, deve-se mostrar que não será inscritível.

$i)$ Utilizando os conceitos de construções geométricas, constrói-se um losango.

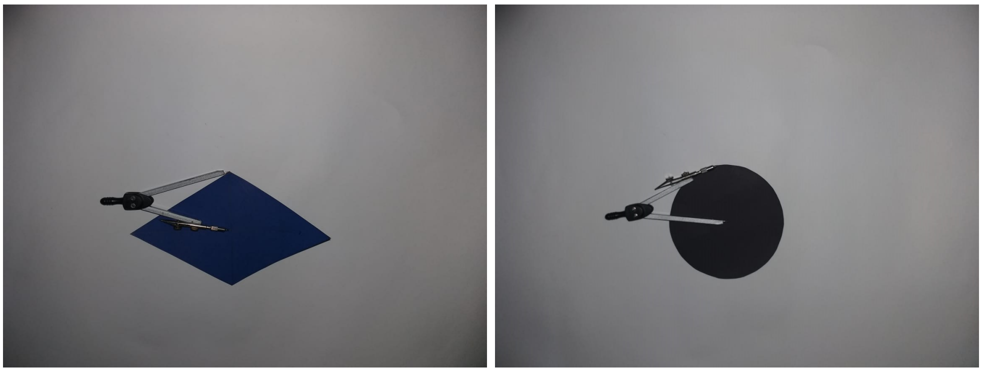
Figura 86 – Construção de um losango.



Font:Autoria Própria.

$ii)$ Utilizando a metade da diagonal menor como unidade de medida do raio, constrói-se um círculo.

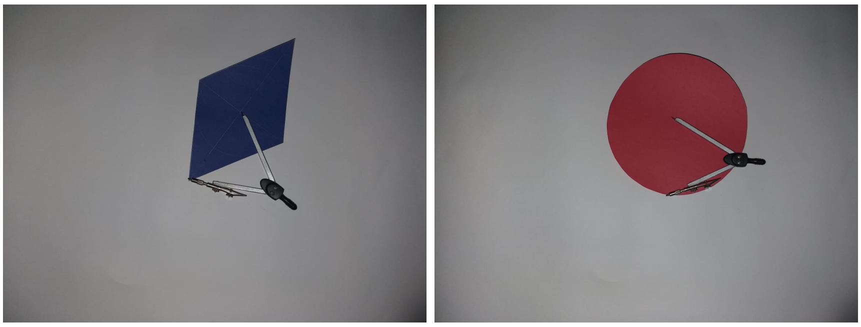
Figura 87 – Construção do círculo.



Fonte: Autoria Própria.

$iii)$ Utilizando a metade da diagonal maior como unidade de medida do raio constrói-se um outro círculo.

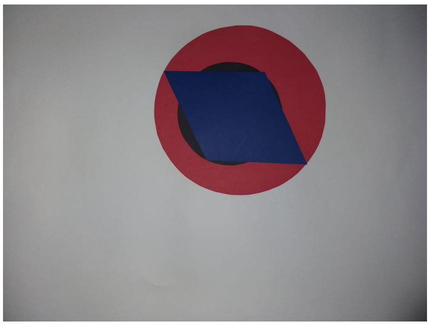
Figura 88 – Construção de um círculo.



fonte: Autoria Própria.

$iv)$ Verificando que um losango não está inscrito em uma circunferência.

Figura 89 – Verificando.



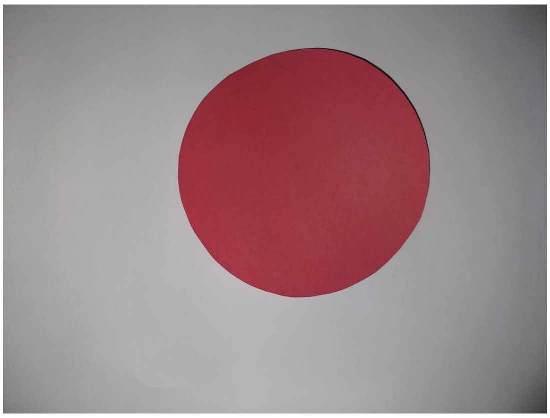
Fonte: Autoria Própria.

$*$ **Trapézio**

Os trapézios, podem ser de três tipos diferentes de modo que apenas um deles é inscritível em uma circunferência.
Para esta figura, deve-se usar uma estratégia diferente, construa assim um círculo, em seguida, com cartolina de cor diferente, construa um trapézio inscrito, e verifique que este trapézio é isósceles.

$i)$ Com um compasso, constrói-se uma circunferência.

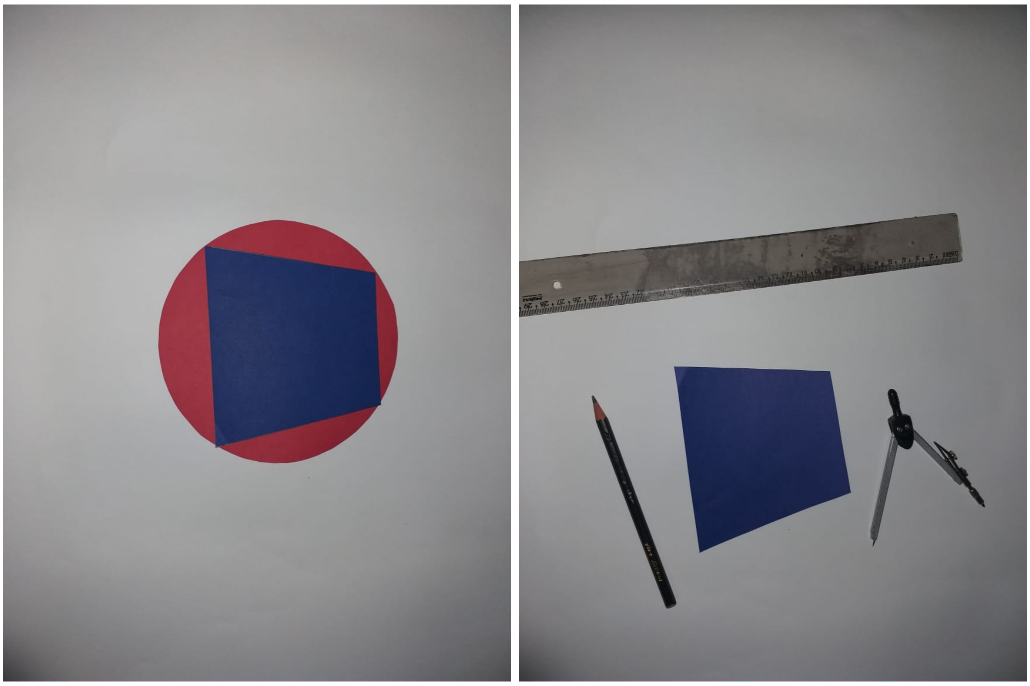
Figura 90 – Construção do círculo.



Fonte: Autoria Própria.

$ii)$ Utilizando os conceitos de construções geométricas, constrói-se um trapézio inscrito na circunferência.

Figura 91 – Construção do trapézio inscrito.



Fonte: Autoria Própria.

$iii)$ Utilizando um transferidor, verificar que este trapézio construído, trata-se de um trapézio isóceles.

Figura 92 – Verificando os ângulos da base do trapézio.

Fonte: Autoria Própria.

### 4.6.4 Objetivo:

$i)$ Fazer com que os alunos aprendam de forma prática.

$ii)$ Utilização de forma correta o transferidor.

$iii)$ Mostrar de forma prática a veracidade do teorema do quadrilátero inscritível na circunferência.

$iv)$ Fazer com que os alunos entendam, quais quadriláteros notáveis são inscritíveis em uma circunferência.

$v)$ Diversão dos alunos enquanto realizam a tarefa.

# Capítulo 5

# Conclusões

Ao longo dos estudos realizados nessa pesquisa, percebe-se que o tema quadriláteros inscritíveis na circunferência é deixado um pouco de lado tanto por quem norteia, como os parâmetros curriculares nacionais e currículo mínimo do estado do Rio de Janeiro, quanto por quem executa; neste caso, as escolas e professores de rede pública ou privada na cidade de São Fidélis - RJ

Para tentar mudar este cenário e facilitar a inserção e o processo de ensino - aprendizagem desse tema, procurou-se deixar esse assunto mais "leve"e dinâmico, utilizando para isso atividades com uma metodologia lúdica com jogos e práticas.

Objetivando proporcionar aos alunos aulas mais atrativas, foram propostas atividades variadas podendo ser realizadas em equipes, duplas ou de forma individual. Cada uma visando suas particularidades, dentro ou fora da sala de aula, porém ainda em ambiente escolar.

Ao sugerir essas atividades, espera-se que os alunos compreendam as propriedades e, em especial, saibam utilizar o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência, utilizando para isso, o raciocínio de forma rápida. Espera-se também que saibam as operações aritméticas básicas como soma e subtração, e a utilização de objetos como compasso, régua e transferidor nas construções das diversas atividades propostas.

Sendo essas atividades voltadas especificamente para o ensino fundamental, sugeriu - se que as mesmas fossem produzidas com materiais simples e com cores diversas visando proporcionar o fácil acesso, uma maior curiosidade e visualização por parte dos alunos.

Deste modo, acredita-se que ressaltando este conteúdo na grade curricular do nono ano do ensino fundamental, a mesma se tornará mais completa. E como não haverá acréscimo, visto que já se trabalha com polígonos regulares inscritos e quadriláteros notáveis justamente neste período de ensino, não haverá qualquer prejuízo ou desvio no desenvolvimento pedagógico traçado na grade curricular existente.

Este trabalho seguiu uma ordem sequencial que inicialmente se preocupou em abordar fatos históricos a respeito de geometria com ênfase em quadriláteros e circunferências. Logo em seguida, foram abordados metodologia, base teórica necessária para o entendimento das propriedades dos quadriláteros inscritos na circunferência, e atividades propostas.

Mesmo sendo essencial o avanço tecnológico no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, deve-se ter em mente que em algumas escolas não possuem tais recursos, logo faz-se necessário atividades criativas que utilizem materiais de fácil acesso à todos. E isso é uma das propostas deste presente trabalho.

Assim, com este trabalho, espera-se que o professor tenha em mãos uma ferramenta que o possibilite a abordagem de quadriláteros inscritos na circunferência de uma forma objetiva e prática para alunos do nono ano do ensino fundamental.

Antes do término deste trabalho, este autor sugere a quem se interessar em utilizá - lo como ferramenta de ensino, que seja realizado uma oficina com os jogos da seguinte forma:

i) Introduza o conteúdo realizando a atividade com bambolê, a fim de que os alunos observem que mesmo que os ângulos opostos não sejam exatamente suplementares, pois o bambolê e o barbante são voláteis, os valores desses ângulos estarão sempre próximos de serem suplementares.

ii) Após a aplicação do conteúdo e da demonstração do teorema do quadrilátero inscrito na circunferência, divida a turma em dois grupos e aplique o jogo de bingo, pode-se utilizar a seguinte estratégia; cada aluno que completar uma linha na horizontal ou vertical, ganha 10 pontos para sua equipe, e quem completar a cartela inteira ganha 50 pontos para sua equipe.

iii) Em seguida, cada grupo escolherá quatro participantes, e será realizado o jogo memorizando ângulos.

iv) Utilizando a mesma estratégia, escolhe-se um aluno de cada equipe, e realize uma partida de dominó.

v) Por último, realize o quarto jogo deste trabalho com a turma já dividida em dois grupos.

A pontuação de cada atividade ficará a cargo do mediador, mas sugere-se que a última atividade tenha um peso maior do que as outras, visto que os alunos precisarão responder uma boa quantidade de perguntas.

# Referências

ALVES, A. M. P. A história dos jogos e a constituição da cultura lúdica. Revista Linhas, v. 4, n. 1, 2003. Citado na página 30.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. [S.l.]: São Paulo., 1974. Citado 5 vezes nas páginas 22, 24, 25, 26 e 27.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5 $^a$ a 8 $^a$ séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado 9 vezes nas páginas 19, 22, 33, 35, 38, 39, 40, 41 e 118.

BRASIL. *Base nacional comum curricular – Educação Infantil e Ensino Fundamental. MEC/Secretaria de Educação Básica*. Brasília, DF, 2017. Citado na página 34.

BRASIL. *Programa Nacional do Livro Didático*. Brasília – DF, 2019. Acesso 01/02/2019 às 22:18 p. m. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao>. Citado na página 40.

BRINGUIER, J. *Conversations Libres AVEC Jean Piaget*. Paris: [s.n.], 1977. Citado na página 29.

CAIADO, A. P. S. *A regra em jogo: um estudo sobre a prática de jogos de regras e o desenvolvimento moral infantil*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 116.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar. *São Paulo: Atual*, v. 9, p. 7, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 57, 58, 61, 66, 67, 68 e 70.

DUDAR, C. z.; SANTOS, J. I. G. D. O lúdico e o papel do jogo na aprendizagem infantil. *https://www.pedagogia.com.br/artigos/o_ludico/*, 2015. Citado na página 35.

EVES, H. W. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.: s.n.], 2015. Tradução Hygino H. Citado na página 23.

FILHO, R. A. M. O teorema de ptolomeu e aplicações. Universidade Estadual da Paraíba, 2016. Citado na página 20.

FIORENTINI, D.; MIARIM, M. Ángela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. v. 4, n. 7, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

FONSECA, M. I. P. D. *O ENSINO DE GEOMETRIA NO PROGRAMA NOVA EJA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE RECURSOS LÚDICO E TECNOLÓGICOS*. Dissertação (Mestrado), 2017. Citado na página 20.

FREITAS, V. P. d.; OLIVEIRA, N. V. Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações. Universidade Federal do Amazonas, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 82.

FRITZ, A. N. D. As atividades lúdicas no processo de ensino-aprendizagem: um olhar docente. Universidade Tecnologica Federal do Paraná, 2013. Citado na página 19.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar Vol 3.* [S.l.]: Atual, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 73.

KISHIMOTO, T. M. O jogo na educação infantil. NUP, Florianópolis. UFSC/CED, n. 22, 1994. Citado na página 28.

KIYA, M. C. da S.; DIONIZIO, F. A. Q. O uso de jogos e de atividades lúdicas como recurso pedagógico facilitador da aprendizagem. Paraná, v. 1, 2014. Citado na página 36.

LARA, I. C. M. de. O jogo como estratégia de ensino de 5 $^a$ a 8 $^a$ série. 2004. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC63912198004.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 38.

LDB. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96)*. Brasília, DF, 9394/96. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 40.

MANFREDI, S. M. Metodologia do ensino: diferentes concepções. *Campinas: F. E./UNICAMP, mimeo*, 1993. Citado na página 31.

MENDONCA, T. C.; MACEDO, A. B. A importância do lúdico durante o tratamento fisioterapêutico em pacientes idosos com déficit cognitivo–estudo de caso. *Revista Eletrônica Saúde CESUC*, v. 1, p. 1, 2010. Citado na página 32.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

MONTEIRO, F. D. A. *A APRENDIZAGEM ALGÉBRICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM A PARTIR DOS RECURSOS LÚDICOS E DIGITAIS*. Dissertação (Mestrado), 2016. Citado na página 20.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria i. *Rio de Janeiro: FC Araújo da Silva*, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 78.

MOTA, P. C. C. L. de M. *Jogo no ensino da Matemática*. Dissertação (Mestrado), 2009. Citado na página 28.

MOZELLI, V. A. d. S. *A MATEMÁTICA NA EDUCACÃO DE JOVENS E ADULTOS: O LÚDICO COMO FACILITADOR DO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM. EXPERIENCIAS NUMA ESCOLA DA BAIXADA DO RIO DE JANEIRO*. Dissertação (Mestrado), 2018. Citado na página 20.

MUNARI, A. *Jean Piaget*. Paris: [s.n.], 2010. Citado na página 29.

NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. *Manual de Metodologia da Pesquisa Científica*. [S.l.]: Rio de Janeiro CENTRO DE ESTUDOS DE PESSOAL - CEP ESCOLA DE APERFEIçOAMENTO DE OFICIAIS, 2007. Citado na página 32.

OLIVEIRA, V. M. d. O que é educação física. *São Paulo: Brasiliense*, v. 5, 1983. Citado na página 34.

PEREIRA, A. L. L. A utilização do jogo como recurso de motivação e aprendizagem. Faculdade de Letras Universidade do Porto, 2013. Citado na página 28.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. *Geometria I*. [S.l.]: UFSC, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 56, 57, 64 e 79.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. Tópicos de história da matemática. *Coleção PROFMAT*, v. 1, 2012. Citado na página 26.

RAUPP, A. D.; GRANDO, N. I. *Educação matemática: Em foco o jogo no processo ensino — aprendizagem*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 30.

RÖHRS, H. *Maria Montessouri*. [S.l.]: Fundação Joaquim Nabuco, 2010. Citado na página 29.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. d. B. Geometria euclidiana plana. *Aracaju: UFS*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 69.

SEEDUC. *Currículo Mínimo*. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matematica>. Citado na página 34.

SILVA, E. A. D. Teorema de casey: Uma generalizaçao do teorema de ptolomeu para quadriláteros inscritıveis. 2016. Citado na página 20.

SILVA, E. L. D.; MENEZES, E. M. *Metodologia da Pesquisa e Elaboraçã de Dissertação*. [S.l.]: Florianópolis, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 31.

SILVA, R. D. Os desafios da escola pública paraense na perspectiva do professor pde. Unioeste/ Marechal Cândido Rondon. Santa Teresinha de Itaipu, 2014. Citado na página 28.

SILVA, R. S. *O uso de jogos lúdicos como recurso facilitador da aprendizagem matemática*. Dissertação (Mestrado), 2015. Citado na página 20.

SOUZA, C. S. d.; PIMENTA, M. M. D.; ARNAUT, R. G. T. *Construções Geométricas - Vol.1*. [S.l.]: : Consórcio CEDERJ/UENF/UERJ/UFF/UFRJ/UFRRJ/UNIRIO, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

UNICSUL, U. C. d. S. Aprender na prática. *São Paulo: Edições inteligentes.*, 2007. Citado na página 37.

# Apêndices

# APÊNDICE A

# Regras do Jogo.

Regras do jogo.

Para Caiado (2012, p.21) as regras servem: “ ... aos jogadores como ponto de referência para a realização de coordenações ou troca de ideias com base na reciprocidade.”

Sendo assim, este apêndice é destinado a explicar as regras de cada um dos quatro jogos propostos neste trabalho.

## A.1 Regras do jogo Memorizando ângulos

A atividade 4.1, será o jogo Memorizando Ângulos. E para realizá-lo, é preciso de oito participantes divididos em dois grupos de quatro pessoas de modo que cada aluno seja responsável por desvirar uma carta de cada cor a sua escolha.

Para iniciar o jogo, escolhe-se um aluno de cada grupo, de forma aleatória para realizar um sorteio onde o vencedor começará o jogo.

Chamando as equipes de 1 e 2, supondo que a equipe 1 comece o jogo assim: o participante vira a carta referente ao vértice A, em seguida o segundo vira à referente ao vértice B, em seguida o terceiro vira à referente ao vértice C e depois o quarto vira à referente ao vértice D. Se os vértices A e C e B e D forem suplementares, este grupo fará um ponto, ficará com as 4 cartas e continuará jogando. Mas agora inverterá a ordem, sendo a primeira carta a ser virada o vértice D. Caso um dos vértices A e C ou B e D não sejam suplementares, as cartas voltaram para a sua linha inicial. E assim a outra equipe jogará.

Vencerá o jogo a equipe que primeiro fizer 6 pontos, ou tiver um total de 24 cartas em seu poder.

## A.2 Regras do jogo Dominó dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência

A Atividade 4.2, Será um jogo de dominó chamado "Dominó dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência". Este jogo deverá ser ambientado em sala de aula e para realização deste jogo, é preciso de no mínimo dois participantes e no máximo quatro.

Para iniciar o jogo, é preciso realizar um sorteio para ver qual participante começará o jogo. O jogo se inicia com o primeiro participante virando uma peça de sua escolha, o segundo participante terá duas possibilidades de completar os ângulos suplementares da peça virada, caso ele não possua peça que forme ângulo suplementar com os valores da peça virada, ele deverá "comprar"no "morto", até que encontre uma peça ou que o "morto"acabe. Caso isso aconteça, o participante deverá passar sua vez, caso o participante tenha uma ou mais peças que sejam suplementares com a peça virada, ele deverá jogar a peça de sua escolha e assim o próximo jogador deverá fazer como o anterior.

Vencerá o jogo, o participante que primeiro utilizar todas as peças que possua.

## A.3 Regras do jogo Bingo dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência

A atividade 4.3 será um bingo denominado; "Bingo dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência". O jogo deverá ser realizado em sala de aula, utilizando a turma inteira, caso 16 cartelas não sejam suficientes, basta o professor confeccionar a quantidade desejada.

Neste jogo, o professor será o mediador cabendo a este, distribuir as cartelas para cada aluno, mostrar de onde as peças menores serão sorteadas, explicar que o aluno que marcar a cartela de forma errada será desclassificado e conferir a corretamente a tabela daquele aluno que julgar ser o vencedor.

O jogo se inicia com o professor sorteando a primeira peça e falando em bom tom, de modo que todos os alunos escutem, por duas ou três vezes qual foi o valor sorteado e deverá registrar esse valor em uma folha ou deixar a peça sobre sua mesa e prosseguir sorteando outro valor, até que se tenha um vencedor.

Ao aluno, cabe a marcação correta de sua cartela, sabendo ele que os valores sorteados e dito pelo professor, não será necessariamente o valor a ser marcado na cartela, mas sim o suplementar deste valor, pois o valor sorteado e o valor da cartela são ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência. Após ter marcado todos os 20 números, o aluno deverá levantar e dizer ao professor para que este compare sua cartela com os valores sorteados, só é possível vencer o jogo se todos os 20 valores possuírem suplementares sorteados.

## A.4 Regras do jogo Jogo de perguntas e respostas sobre Quadriláteros inscritíveis na Circunferência.

A atividade 4.4,será o último jogo deste trabalho, e foi denominada; "Jogo de perguntas e respostas sobre Quadriláteros inscritíveis na Circunferência".

O jogo se inicia dividindo a turma em duas equipes podendo ser denominadas Equipe A e Equipe B, cada equipe deverá escolher seu representante o qual será o único responsável por validar a resposta final de cada pergunta. Os alunos poderão utilizar - se de qualquer meio para responder as respostas inclusive meios eletrônicos.

Os dois alunos que irão responder deverão realizar um sorteio, para saber quem começará o jogo.

Supondo que a equipe A começará o jogo, então ela escolherá um ângulo qualquer, o professor virará a carta com o ângulo correspondente e lerá por duas vezes seguidas a pergunta, sem qualquer tipo de orientação, após o término da segunda leitura, o tempo de um minuto começará a valer, este tempo é o máximo que a equipe terá para responder a pergunta, caso a resposta esteja positiva, a equipe começará a montar o seu quadrilátero, e passará a vez para a equipe B, caso não consiga responder ou a resposta esteja errada, a carta voltará para o seu lugar de origem e qualquer equipe poderá escolher está mesma pergunta.

As equipes precisam montar com os ângulos possíveis quadriláteros inscritos em uma circunferência, ou seja, precisam que os ângulos opostos sejam suplementares e que tenham quatro ângulos para formar um quadrilátero.

Vencerá o jogo a equipe que primeiro completar 3 quadriláteros corretamente.

“A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática.”(BRASIL, 1998, p.47)

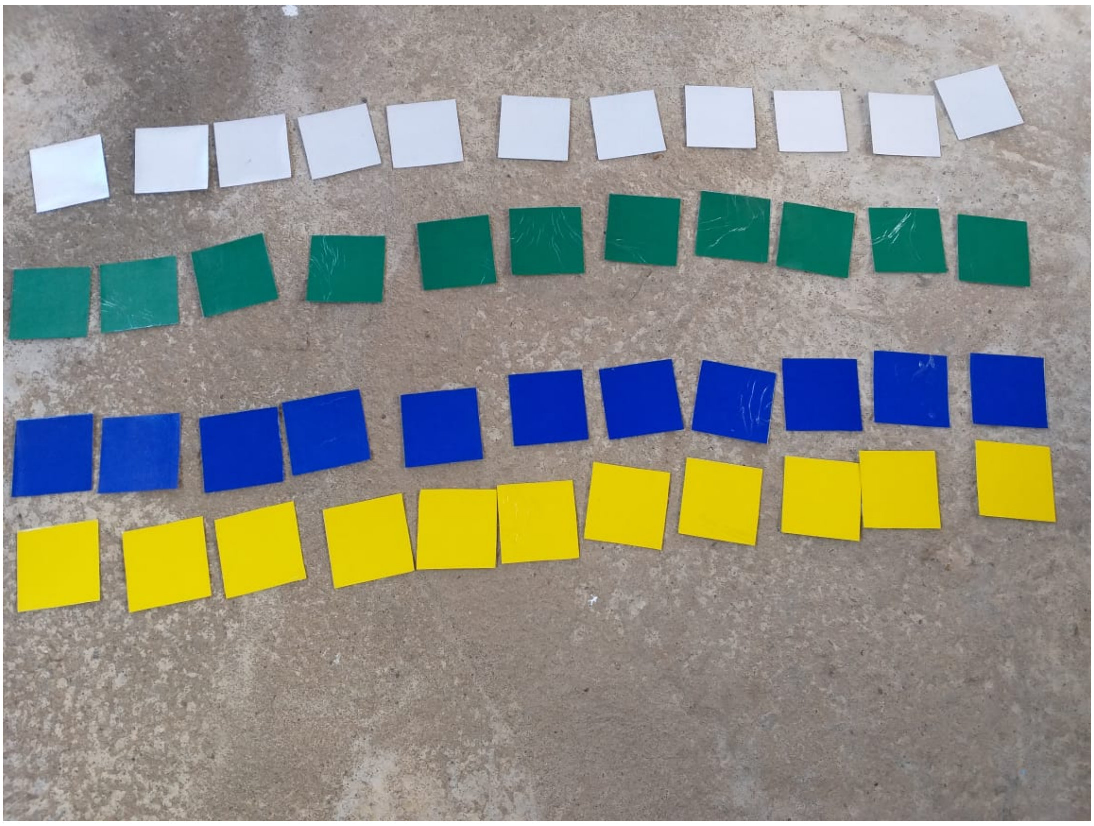
# APÊNDICE B

# Memorizando Ângulos.

A seguir será ilustrado uma outra simulação do jogo memorizando ângulos.

i) Antes de iniciar o jogo, deve-se embaralhar as cartas e em seguida, deve-se organizar as cartas em quatro linhas de mesma cor ou 11 colunas com quatro cores diferentes cada, de modo que cada aluno de uma mesma equipe será responsável por virar uma cor de carta.

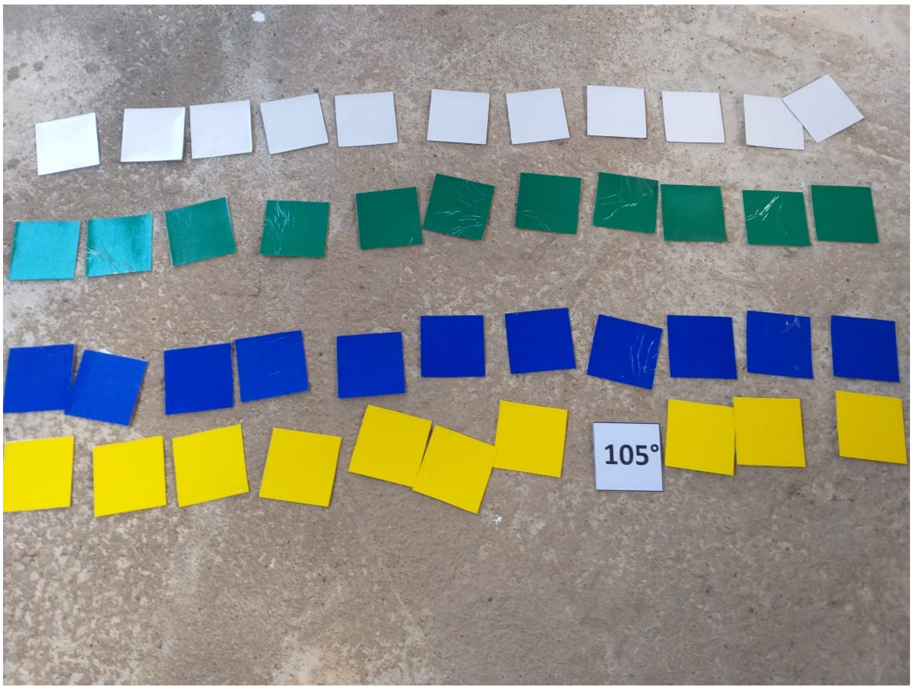
Figura 93 – Iniciando o jogo.



Fonte: Autoria Própria.

ii) Virando a primeira carta.

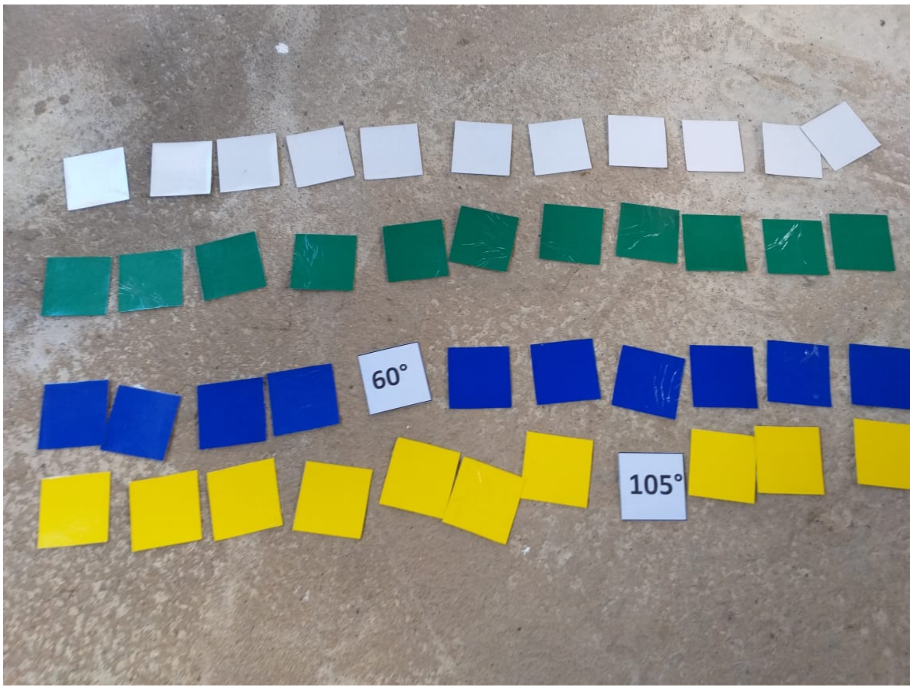
Figura 94 – Virando a primeira carta.




Fonte: Autoria Própria.

iii) Virando a primeira carta.

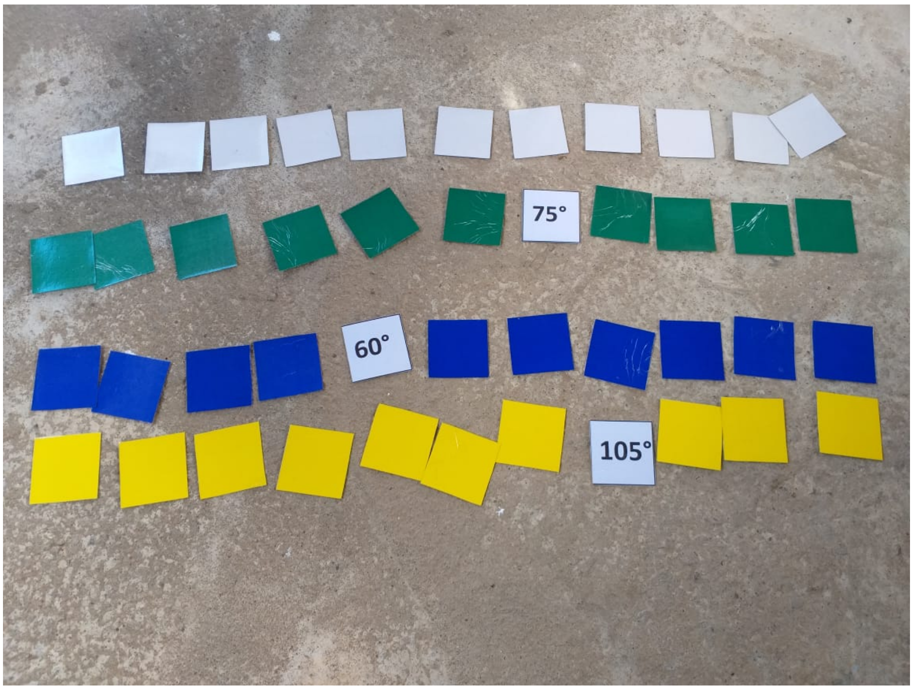
Figura 95 – Virando a segunda carta.




Fonte: Autoria Própria.

iv) Virando a terceira carta.

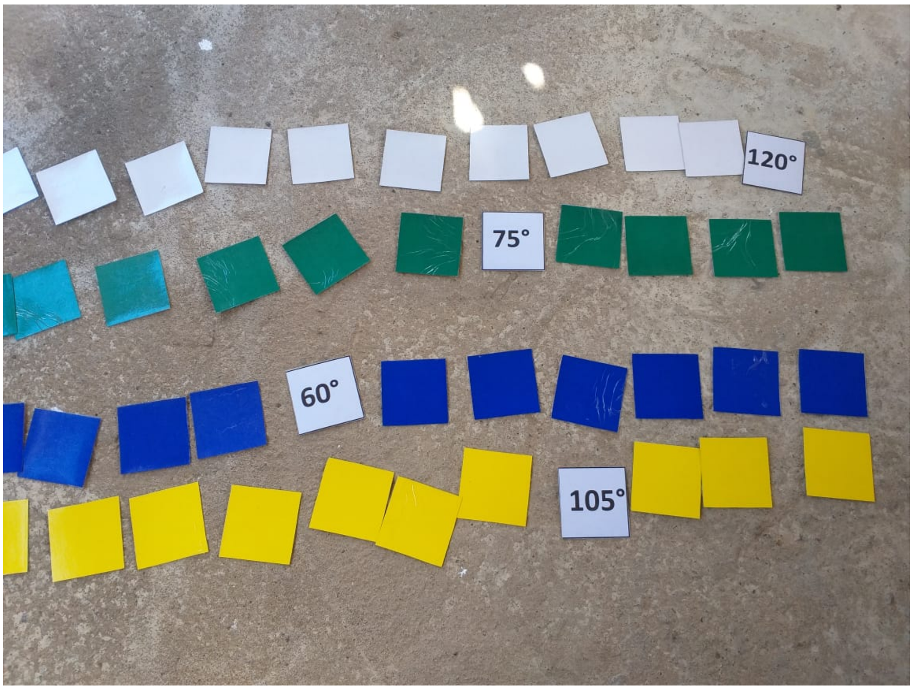
Figura 96 – Virando a terceira carta.




Fonte: Autoria Própria.

v) Virando a quarta carta carta.

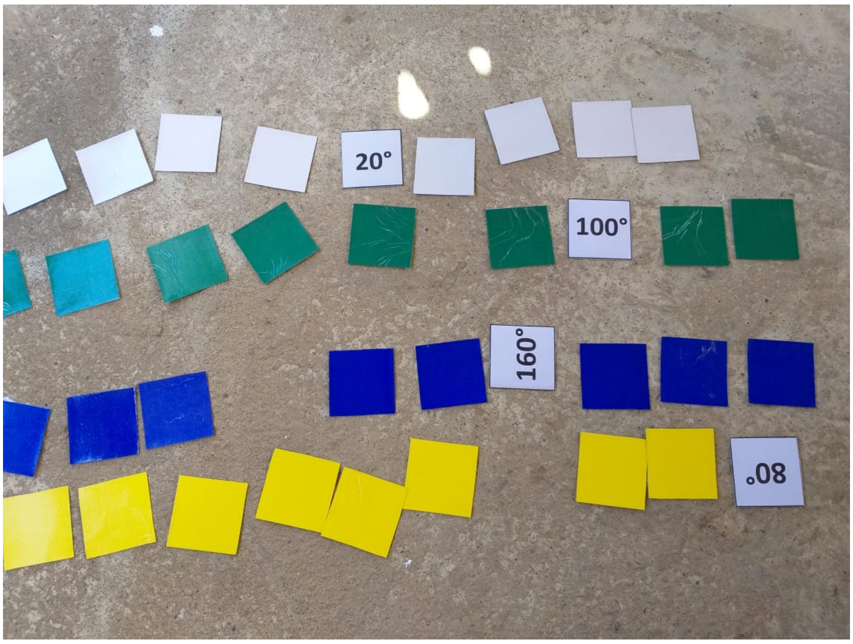
Figura 97 – Virando a quarta carta.




Fonte: Autoria Própria.

vi) Outra equipe completando uma quadrilátero inscrito na circunferência.

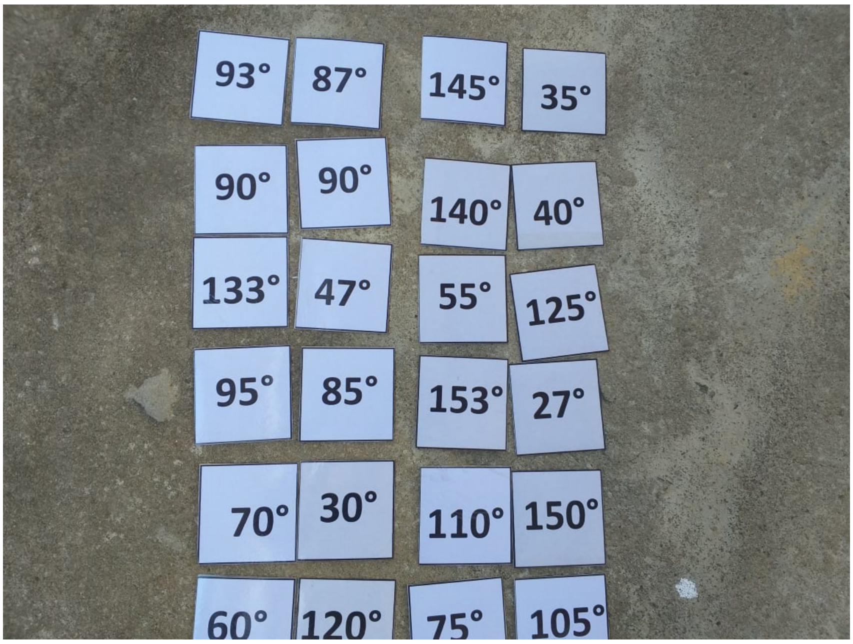
Figura 98 – Mais uma quadrilátero certo.




Fonte: Autoria Própria.

vii) Equipe vencedora, conseguindo montar 6 quadriláteros inscritíveis em uma circunferência por seus ângulos.

Figura 99 – Equipe vencedora.




Fonte: Autoria Própria.

# APÊNDICE C

# Dominó dos Ângulos Opostos de um Quadrilátero Inscrito na Circunferência.

A seguir será ilustrado uma simulação de jogo para três participantes.

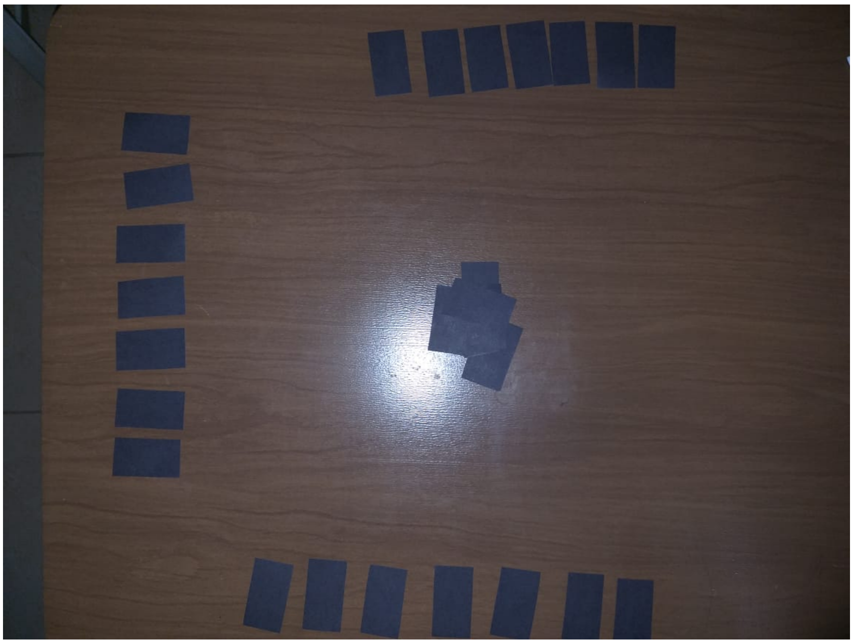
i) Para iniciar o jogo, deve-se embaralhar todas as peças de modo que nenhum participante consiga ver a parte dos ângulos das mesmas.

Figura 100 – Embaralhando as peças do dominó.

Fonte: Autoria Própria.

ii) Após as peças serem embaralhadas, deve-se direcionar 7 peças para cada participante, como nesta simulação teremos 3 participantes, 7 peças das 28 possíveis, ficará em local apropriado de onde cada participante poderá resgatá-las sempre que necessário este local, será denominado "Morto".

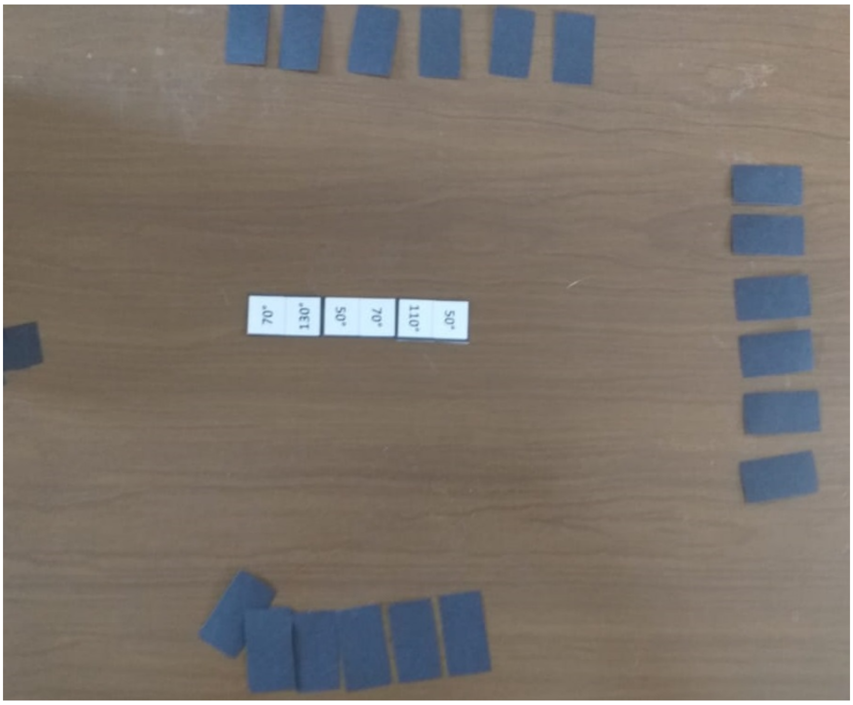
Figura 101 – Organizando o jogo.



Fonte: Autoria Própria.

iii) Após realizar o sorteio para saber qual participante iniciará o jogo, este escolherá de forma aleatória a primeira peça que será exposta no jogo, e a partir desta peça, os demais terão que completar com os suplementares de dois possíveis valores das pontas.

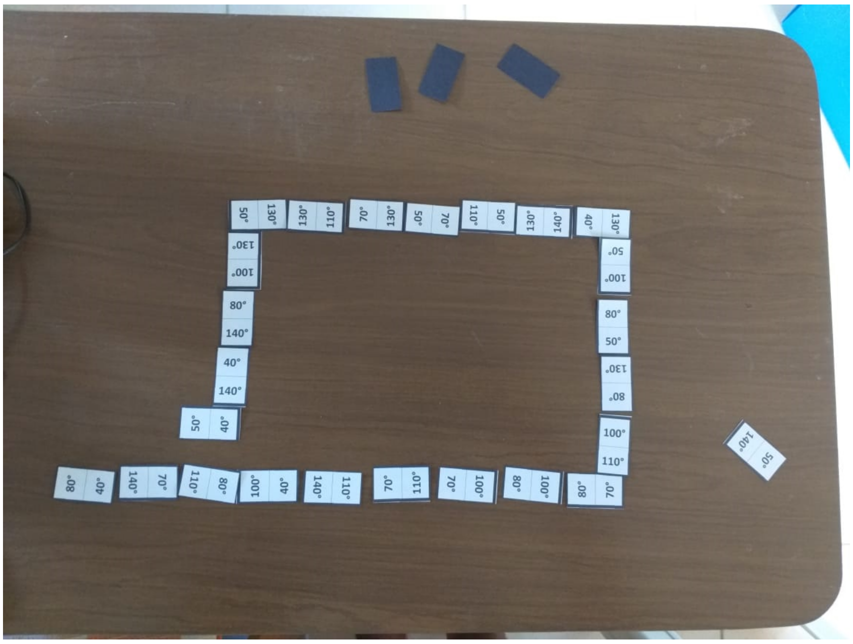
Figura 102 – Primeira rodada do jogo.




Fonte: Autoria Própria.

iv) Após diversas rodadas, tem-se o vencedor como aquele participante que primeiro utilizar todas as peças em seu poder no jogo.

Figura 103 – Final de jogo.



Fonte: Autoria Própria.

A seguir será ilustrado uma simulação de jogo para quatro participantes.

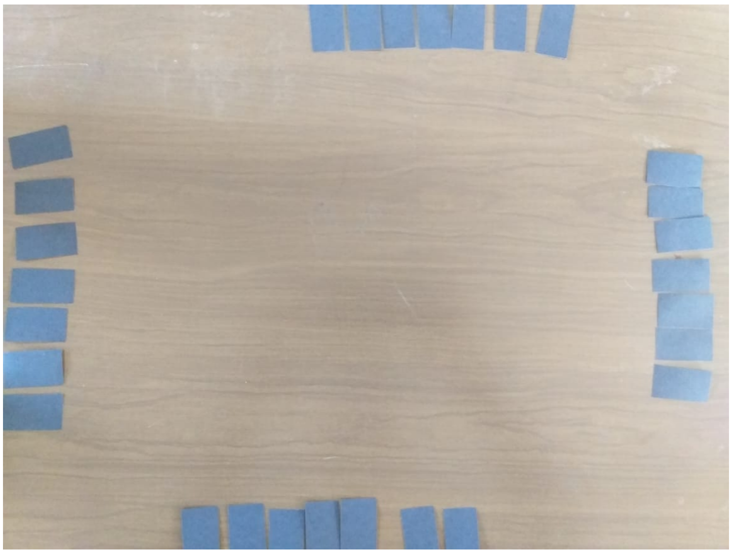
i) Novamente, para iniciar o jogo, deve-se embaralhar todas as peças de modo que nenhum participante consiga ver a parte dos ângulos das mesmas.

Figura 104 – Embaralhando as peças do dominó.

Fonte: Autoria Própria.

ii) Após as peças serem embaralhadas, deve-se direcionar 7 peças para cada participante, como nesta simulação teremos 4 participantes, todas as 28 peças possíveis, estará no jogo, sendo assim neste caso, não terá o "morto", e o participante que não possuir peça para completar, obrigatoriamente, terá que passar sua vez.

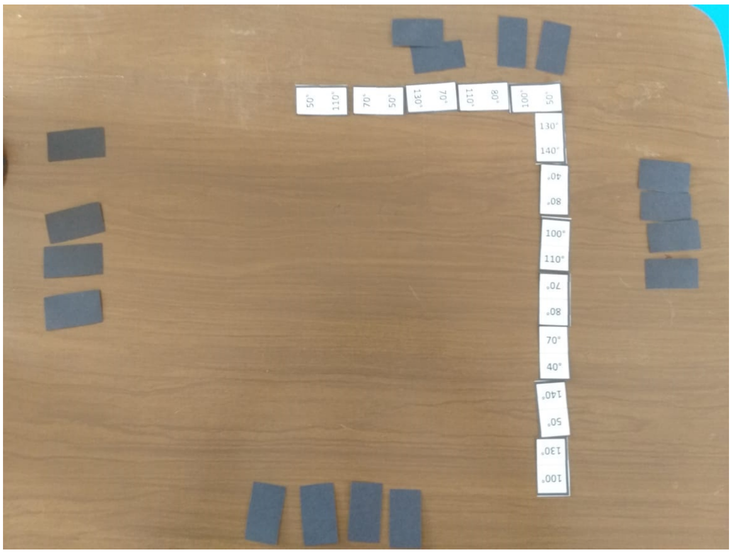
Figura 105 – Organizando o jogo para 4 pessoas.



Fonte: Autoria Própria.

iii) Após realizar o sorteio para saber qual participante iniciará o jogo, este escolherá de forma aleatória a primeira peça que será exposta no jogo, e a partir desta peça, os demais terão que completar com os suplementares de dois possíveis valores das pontas.

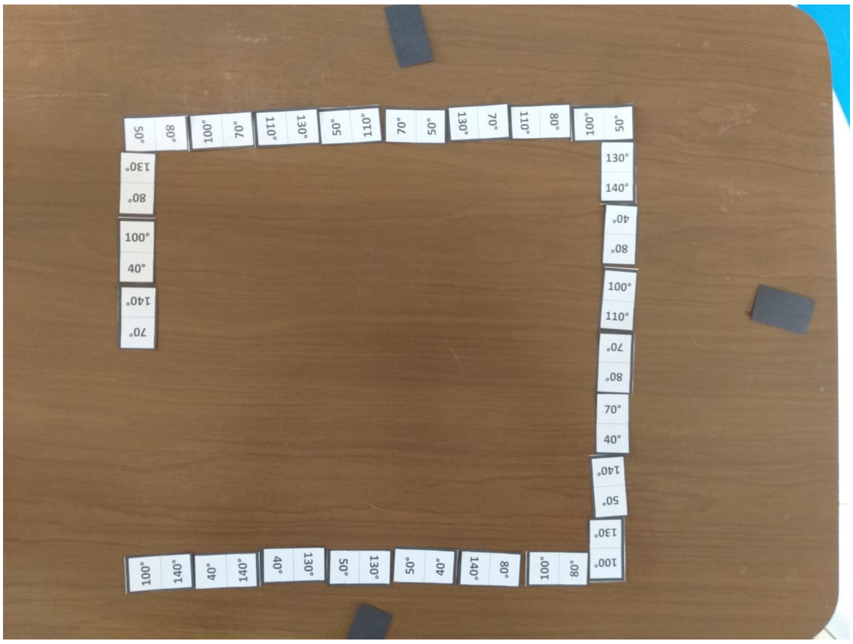
Figura 106 – Terceira rodada do jogo.



Fonte: Autoria Própria.

iv) Após diversas rodadas, tem-se o vencedor como aquele participante que primeiro utilizar todas as peças em seu poder no jogo.

Figura 107 – Final de jogo.



Fonte: Autoria Própria.

# APÊNDICE D

# Bingo dos Ângulos Opostos de um quadrilátero inscritível na circunferência.

A seguir será ilustrado uma simulação de como será a dinâmica do jogo.

i) Após sortear um ângulo qualquer, este deverá ser dito em voz alta e depois exposto sobre a mesa.

Figura 108 – Sorteando um Ângulo.


Fonte: Autoria Própria.

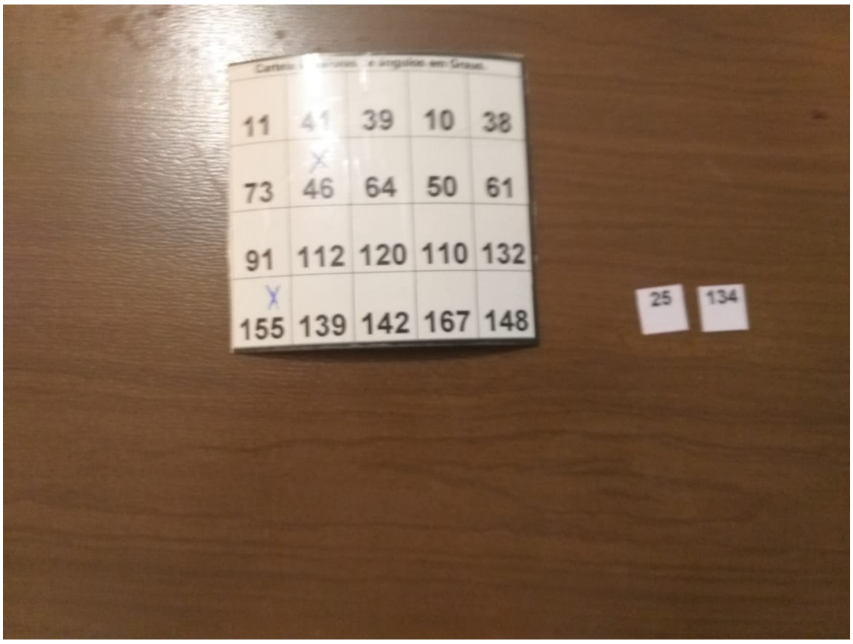
ii) Após ouvir qual ângulo foi sorteado, o aluno deverá raciocinar e marcar o valor correto, sabendo que o ângulo marcado será o suplementar do ângulo sorteado.

Figura 109 – Ângulo a ser marcado na cartela.


Fonte: Autoria Própria.

iii) Segue a sequência, até que toda a cartela esteja completamente marcada.

Figura 110 – Segundo ângulo a ser marcado na cartela.




Fonte: Autoria Própria.

# APÊNDICE E

## Jogo de Perguntas e Respostas sobre Quadriláteros Inscritos na Circunferência.

**Atividade.**

**Jogo de perguntas e respostas.**

Perguntas:

1. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência, os valores de 4 lados e uma das diagonais são respectivamente: AB = 3, BC = 5, CD = 4, DA = 6 e AC = 7, encontre o valor da outra diagonal. R = 6

2. O teorema de Ptolomeu, utilizado em qualquer triângulo retângulo, é dado pela fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$. Verdadeiro ou falso? Falso, este é o teorema de Pitágoras.

3. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência, os valores dos 4 lados e uma das diagonais são respectivamente: AB = 10, BC = 4 , CD = 8, DA = 10 e AC = 10, encontre o valor da outra diagonal.
R = 12.

4. Dentre os quadriláteros notáveis listados abaixo, qual é o único que não estará inscrito em um circunferência?
a) quadrado b) retângulo, c) trapézio retângulo, d) trapézio isósceles. R c)

5. Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência medem x + 25° e 4x – 100°, calcule o valor de x. x = 51°

6. Um losango estará sempre inscrito em uma circunferência pois, uma de suas propriedades é que os ângulos opostos são suplementares. Verdadeiro ou falso? Falso.

7. Qual será a razão entre as diagonais de um quadrado cujo lado mede 10? R=1

8. Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência são tais que um é igual ao triplo do outro, quais são esses ângulos? R = 45 e 135°

9. Dado um quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência, o teorema de Ptolomeu é dado pela fórmula: AC.BD = AB.CD + AD.BC. Verdadeiro ou falso? V

10. “Se um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência, então a soma dos produtos de seus lados opostos é igual ao produto de suas diagonais”. O teorema citado, recebe o nome de:
a) Tales, b) Ptolomeu, c) Pitágoras, d) Euller. b

11. Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Verdadeiro ou falso? Verdadeiro

12. Dois ângulos adjacentes em um quadrilátero inscrito na circunferência são respectivamente 20° e 70°, quais são respectivamente os valores dos outros dois ângulos deste quadrilátero? 160 e 110°

1. O teorema do quadrilátero inscrito diz que: os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência são congruentes. Verdadeiro ou falso? Falso.

2. Em um quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência, cada ângulo mede respectivamente: 3x+60°, 2y + 45°, 2x – 15° e 8y + 5°. Encontre os valores de x e y. x =27 e y =19

3. Todo polígono regular está inscrito em um circunferência. Verdadeiro ou falso? V

4. Em um trapézio inscrito na circunferência, um de seus ângulos mede: 70°, encontre os valores dos outros três ângulos. Obs: a ordem não importa. 110, 70, 110.

5. E um trapézio isósceles, os lados paralelos medem 4 e 9, e os lados congruentes medem 8, qual é o valor das diagonais deste trapézio? R=10

6. Dentre os quadriláteros abaixo, qual sempre estará inscrito em uma circunferência?
   a) retângulo, b) trapézio, c) losango, d) paralelogramo. A

7. Um polígono está inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência. Verdadeiro ou falso? Verdadeiro.

8. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência, os valores de 4 lados e uma das diagonais são respectivamente: AB = 6, BC = 10, CD = 8, DA = 12 e AC = 14, encontre o valor da outra diagonal. R = 12

9. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência, os valores de 4 lados e uma das diagonais são respectivamente: AB = 9, BC = 15, CD = 12, DA = 18 e AC = 21, encontre o valor da outra diagonal. R = 18

10. Os ângulos opostos de uma quadrilátero inscrito em uma circunferência são respectivamente: 2x e 4x, 10y e 8y. Encontre os valores de x e y. x= 30° e y = 10°

11. Um paralelogramo que possui os lados opostos suplementares, necessariamente será um quadrado. Verdadeiro ou falso? Falso.

12. Todo quadrilátero que possua os ângulos opostos complementares estará inscrito em uma circunferência.
    Verdadeiro ou falso? Falso.

# APÊNDICE F

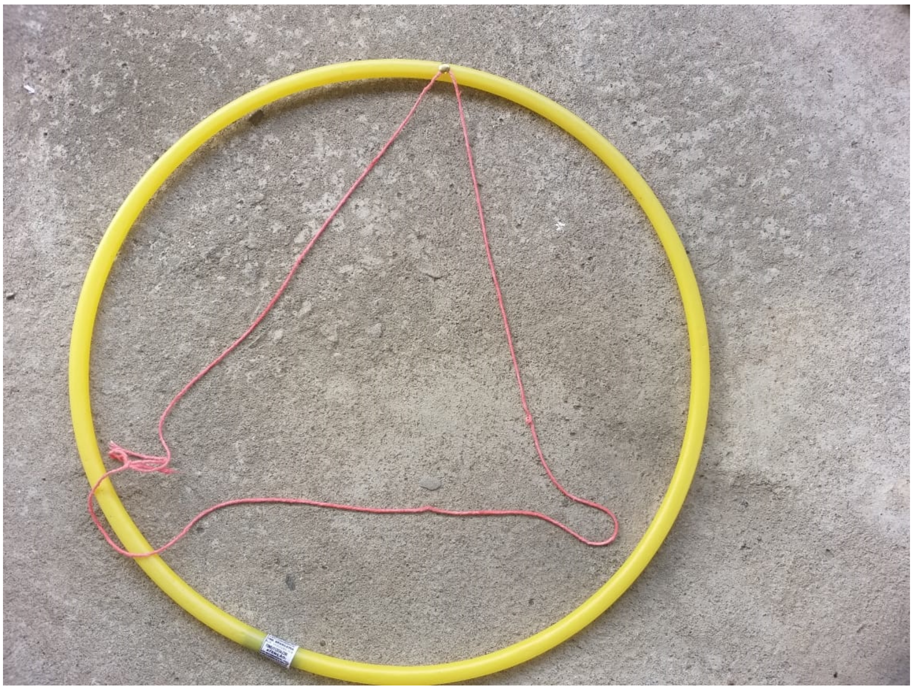
# Construindo Quadriláteros com o Bambolê.

Este apêndice será destinado a duas outras simulações da atividade prática a ser realizada pelos alunos, afim de verificar os valores dos ângulos de um quadrilátero inscrito na circunferência do bambolê.

Lembrando que esta atividade serve como uma introdução para o teorema do quadrilátero inscrito na circunferência.

i) Iniciando a construção do quadrilátero com tachinhas, bambolê e barbante.

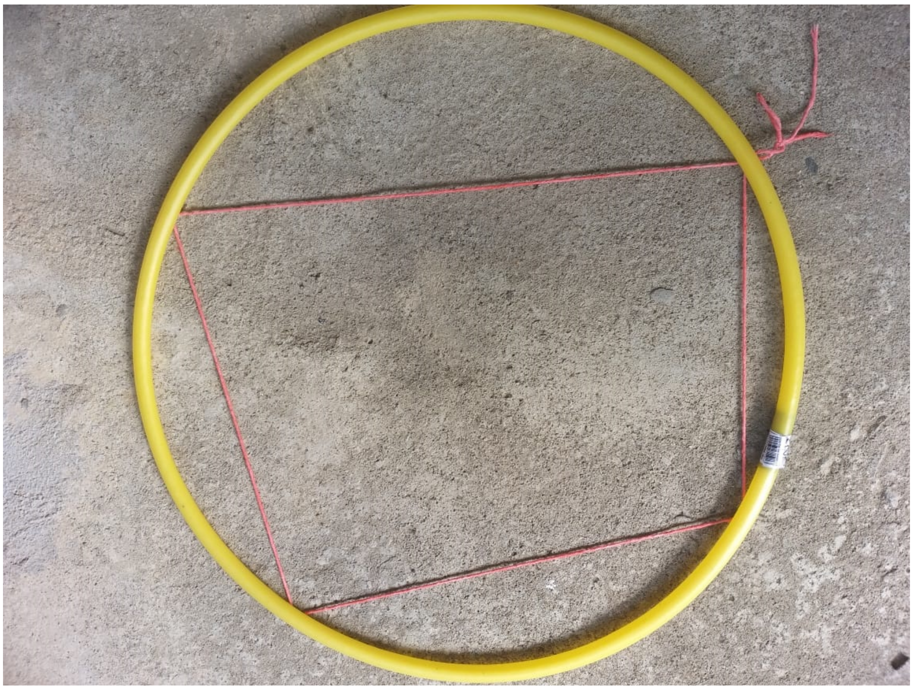
Figura 111 – Iniciando a construção.



Fonte: Autoria Própria.

ii) Quadrilátero pronto inscrito no bambolê.

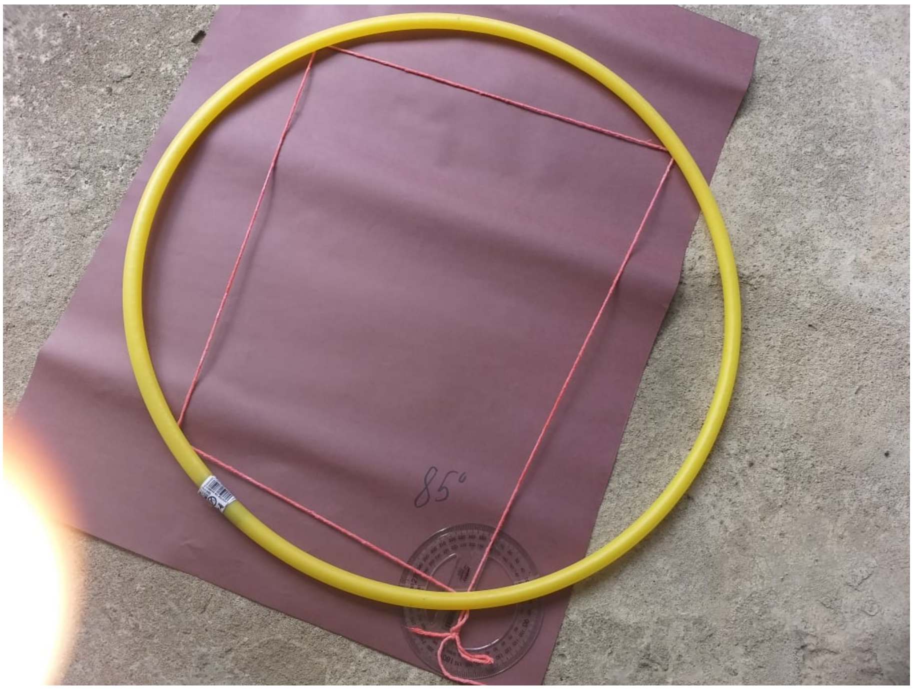
Figura 112 – Quadrilátero inscrito na circunferência do bambolê.



Fonte: Autoria Própria.

iii) Medindo os ângulos parte 1.

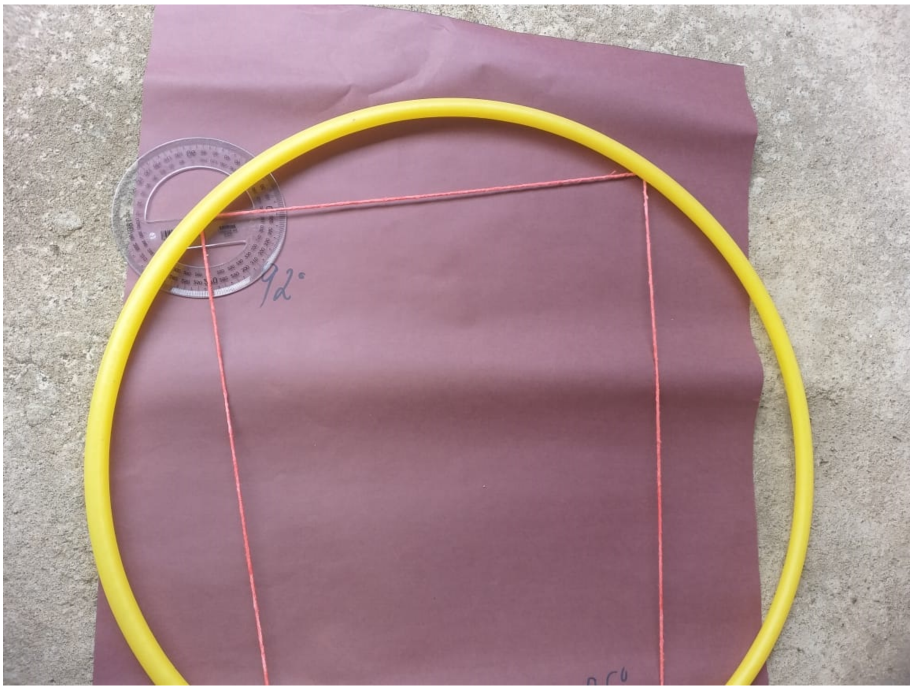
Figura 113 – Iniciando a medição dos ângulos.




Fonte: Autoria Própria.

iv) Medindo os ângulos parte 2.

Figura 114 – Medição dos ângulos.




Fonte: Autoria Própria.

iii) Medindo os ângulos parte 3.

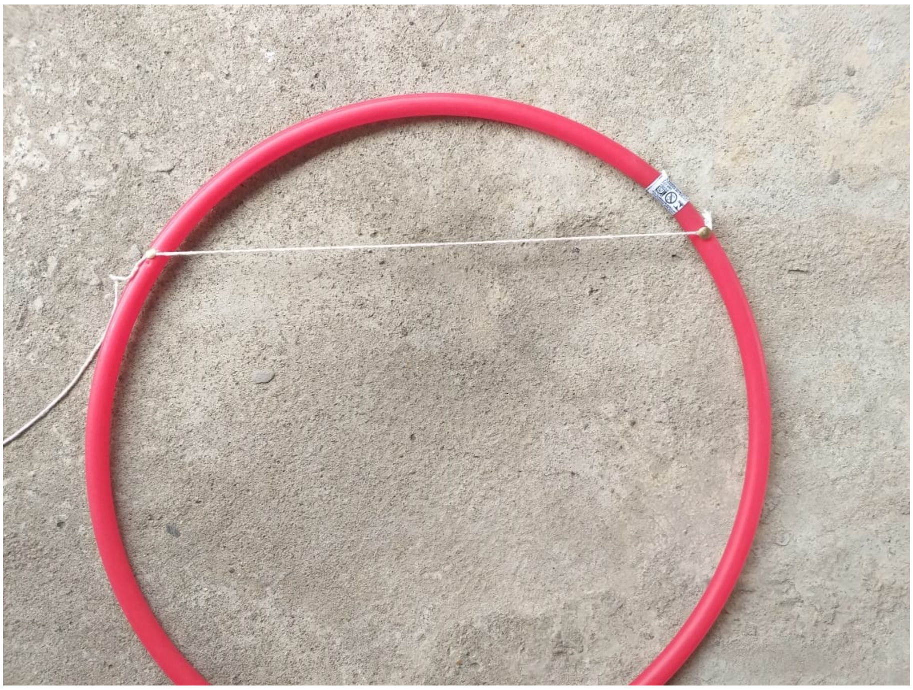
Figura 115 – Medição final dos ângulos.


Fonte: Autoria Própria.

Uma última simulação será a sequência a seguir:

i) Iniciando a construção do quadrilátero com tachinhas, bambolê e barbante.

Figura 116 – Iniciando a construção.



Fonte: Autoria Própria.

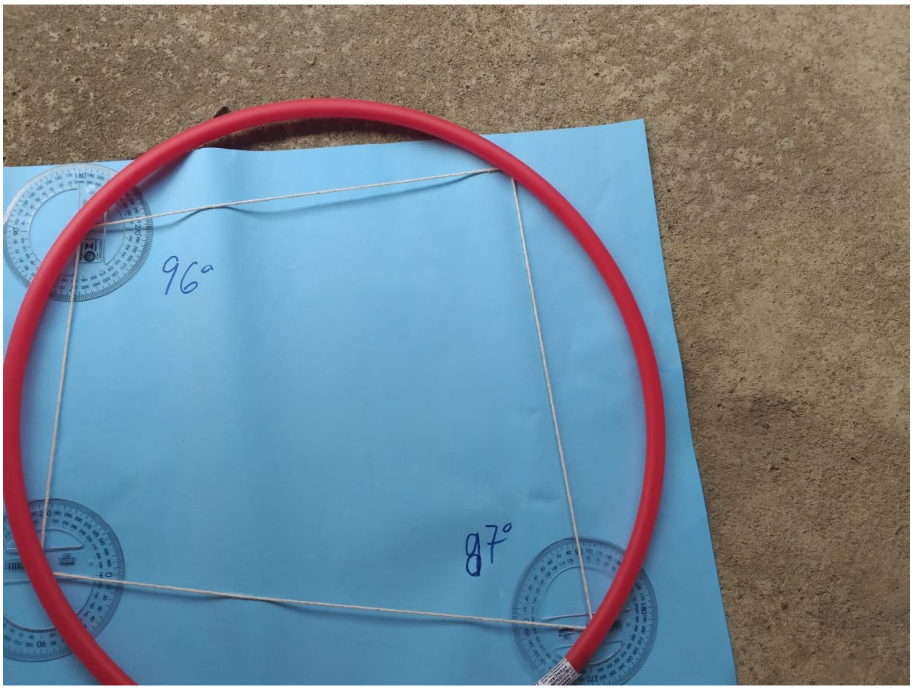
ii) Quadrilátero pronto inscrito no bambolê.

Figura 117 – Quadrilátero inscrito na circunferência do bambolê.

Fonte: Autoria Própria.

iii) Medindo os ângulos parte 1.

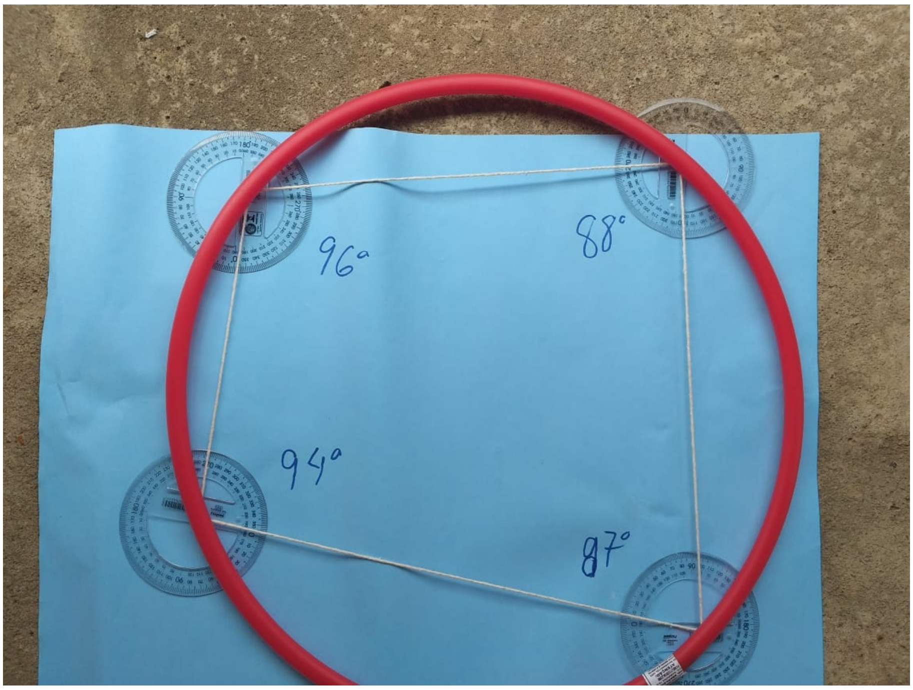
Figura 118 – Iniciando a medição dos ângulos.




Fonte: Autoria Própria.

iv) Medindo os ângulos parte 2.

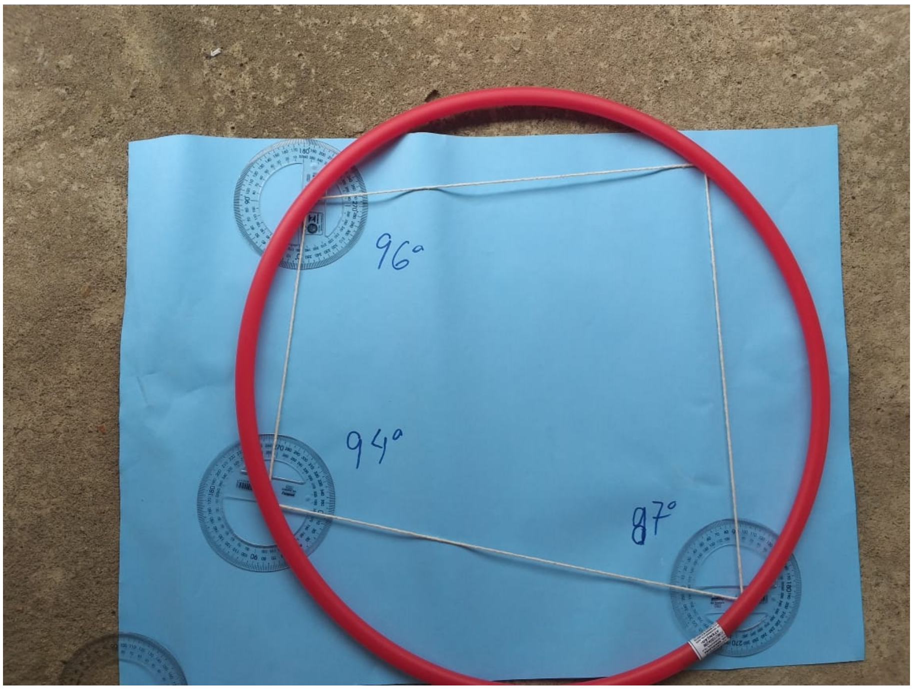
Figura 119 – Medição dos ângulos.




Fonte: Autoria Própria.

iii) Medindo os ângulos parte 3.

Figura 120 – Medição final dos ângulos.




Fonte: Autoria Própria.