

DIÓGENES FERNANDES MARRA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA DO  
ENSINO MÉDIO NA ENGENHARIA DE  
PETRÓLEO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

ABRIL - 2019

DIÓGENES FERNANDES MARRA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA DO ENSINO  
MÉDIO NA ENGENHARIA DE PETRÓLEO

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Geraldo de Oliveira Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF  
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

ABRIL - 2019

**FICHA CATALOGRÁFICA**

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

M358

Marra, Diogenes Fernandes.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO NA ENGENHARIA DE PETRÓLEO  
/ Diogenes Fernandes Marra. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

151 f. : il.

Bibliografia: 129 - 132.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade  
Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.

Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.

1. Engenharia de Petróleo. 2. Modelagem Matemática. 3. Curvas de declínio de  
produção. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

DIÓGENES FERNANDES MARRA

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA DO ENSINO  
MÉDIO NA ENGENHARIA DE PETRÓLEO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 18 de Abril de 2019.



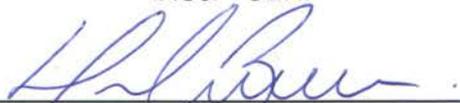
---

**Prof.ª. Sílvia Cristina Freitas Batista**  
D.Sc. - IFF



---

**Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro**  
D.Sc. - UENF



---

**Prof. Nelson Machado Barbosa**  
D.Sc. - UENF



---

**Prof. Geraldo de Oliveira Filho**  
D.Sc. - UENF  
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho a meus pais, Altivino (in memoriam) e Terezinha, que desde muito cedo me apoiaram em meus estudos; à minha esposa, Márcia, que muito se sacrificou para que eu pudesse me dedicar a este curso; à minha filha Tâmara e ao meu filho Daniel, pela confiança e incentivo.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha esposa, Márcia, por assumir praticamente sozinha a responsabilidade por nossos afazeres, para que eu tivesse mais tempo para estudar.

Aos meus filhos e demais familiares, que sempre me incentivaram a alcançar minhas metas.

À SBM, CAPES e IMPA por oferecer essa oportunidade de cursar o mestrado Profmat e à UENF por executá-lo.

Aos professores do Profmat, por sua dedicação e pelos conhecimentos que me possibilitaram adquirir ao longo do curso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Geraldo de Oliveira Filho, cujo entusiasmo me deu forças para enfrentar este desafio.

Ao professor e coordenador do Curso, Prof. Dr. Oscar Paz La Torre, por seu empenho na coordenação deste curso.

Aos meus colegas de turma, pelo bom humor, pelo compartilhamento de nosso tempo nas horas de almoço, assim como de material e conhecimentos.

A todas as outras pessoas que de alguma forma contribuíram para o sucesso deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

(Madre Teresa de Calcutá)

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo elaborar e apresentar material didático abordando assuntos da Engenharia de Petróleo que utilizam a Matemática do Ensino Médio para solucionar seus problemas. A partir de pesquisa bibliográfica, foi selecionada e apresentada uma grande quantidade de conteúdo de Engenharia de Petróleo e assuntos correlatos, de forma a prover uma base de conhecimento para o leitor. São apresentados também, capítulos sobre conteúdos da Física e da Matemática envolvidos na solução dos problemas de Engenharia de Petróleo que são mostrados como exemplo. São apresentadas propostas de atividades a serem realizadas em sala de aula, que, em conjunto com os exemplos, demonstram a grande aplicabilidade da Matemática do Ensino Médio na Engenharia de Petróleo. As atividades propostas, assim como o material como um todo, podem ser utilizadas pelos professores de Matemática como fonte de consulta e apoio na preparação de atividades a serem realizadas em sala de aula. Nem sempre os alunos estão cientes da importância e da utilidade de se aprender Matemática, assim, este material seria uma fonte a ser utilizada como forma de sensibilizá-los quanto a isso.

**Palavras-chaves:** Engenharia de Petróleo, Modelagem Matemática, Curvas de Declínio.

# Abstract

This work aims at creating and presenting didactic material addressing Petroleum Engineering subjects that use High School Mathematics in order to solve their problems. Through a bibliographical research a large amount of Petroleum Engineering content and correlated subjects was selected and gathered in this work to provide a basic knowledge to the reader. Chapters on Physics and Mathematics contents involved in the solution of Petroleum Engineering problems, showed as examples, are also presented. Three Activity Proposals are presented, which can be performed in the classroom. Those activities, along with the examples, demonstrate the great applicability of High School Mathematics to Petroleum Engineering. The activities as well the whole work can be used by Mathematics teachers as a source for research and an aid to preparing activities to be worked in the classroom. Not always are the students aware of the importance and utility of learning Mathematics, thus this material would be a source to be used as an attempt to make them sensitive to this matter.

**Key-words:** Petroleum Engineering, Mathematical Modeling, Decline Curves.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – A pressão é maior no contato com a ponta do lápis . . . . .	24
Figura 2 – A pressão é menor quando o tijolo está apoiado na base de maior área .	26
Figura 3 – Balança de pratos . . . . .	28
Figura 4 – Cilindro líquido de peso $\vec{P}$ , forças $\vec{F}_A$ na base superior e $\vec{F}_B$ na base inferior	31
Figura 5 – Experiência de Torricelli . . . . .	34
Figura 6 – O plano numérico ou plano cartesiano . . . . .	37
Figura 7 – Principais mecanismos de trapeamento . . . . .	58
Figura 8 – Armadilha estrutural . . . . .	59
Figura 9 – Seção transversal de uma amostra de rocha . . . . .	59
Figura 10 – Seção sísmica utilizada para definir a trajetória do poço . . . . .	61
Figura 11 – Tipos de sondas marítimas . . . . .	62
Figura 12 – Esquema do revestimento de poços . . . . .	63
Figura 13 – Árvore de Natal Molhada (ANM) . . . . .	64
Figura 14 – Esquema de uma coluna convencional de produção equipada com sistema de gas-lift . . . . .	65
Figura 15 – Exemplo de um conjunto de perfis obtidos a poço aberto . . . . .	67
Figura 16 – Interpretação de um registro de Raios Gama . . . . .	68
Figura 17 – Princípio de funcionamento da ferramenta de raios gama . . . . .	69
Figura 18 – Exemplo de um perfil Raios Gama Espectral . . . . .	70
Figura 19 – Exemplo de uma suíte de perfis obtidos a poço aberto . . . . .	72
Figura 20 – Ferramentas BHC e LSS . . . . .	73
Figura 21 – Esquema da ferramenta do perfil de densidade LDT . . . . .	73
Figura 22 – Esquema da ferramenta CNL (perfil neutrônico) . . . . .	74
Figura 23 – Perfil composto LDT/CNL/Indução/GR/CAL; identificado contato gás/óleo	75
Figura 24 – Perfis a poço aberto: Raios Gama (GR), neutrão NPHI, resistividade ILD, densidade RHOB, sônico DT . . . . .	76
Figura 25 – À esquerda: resistividade ILD; no meio: GR e sônico DT; à direita: densidade RHOB) . . . . .	77
Figura 26 – Esquema de uma ferramenta de perfilagem de ressonância magnética .	78
Figura 27 – Esquema de uma das ferramentas de LWD . . . . .	79
Figura 28 – Esquema de uma ferramenta de perfis de imagens resistivas . . . . .	81

Figura 29 – À esquerda: apresentação de um perfil de imagens resistivas de seis patins. À direita: interpretação do perfil em Estações de Trabalho . . . . .	82
Figura 30 – Perfil de imagem acústica: amplitude à esquerda, <i>caliper</i> à direita . . . . .	83
Figura 31 – Tipos de medidores de fluxo . . . . .	84
Figura 32 – Interpretação de uma passagem do perfil de fluxo contínuo . . . . .	85
Figura 33 – Comportamento da pressão ( <i>pressure</i> ) e da vazão ( <i>rate</i> ) ao longo de um teste de formação . . . . .	86
Figura 34 – Volume poroso da rocha-reservatório contendo fluidos: água, óleo e gás	90
Figura 35 – Fluxo radial permanente . . . . .	95
Figura 36 – Reservatório de óleo e gás . . . . .	96
Figura 37 – Função linear . . . . .	104
Figura 38 – Sistema de Bombeio Mecânico com Hastes . . . . .	108
Figura 39 – Parâmetros e fórmulas dos declínios . . . . .	116
Figura 40 – Distribuição da pressão, do poço ao limite do reservatório . . . . .	119
Figura 41 – Esquema de um poço de petróleo . . . . .	123

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de densidade, em $g/cm^3$ , para alguns materiais . . . . .	30
Tabela 2 – Tabela auxiliar para construir o gráfico de $y=f(x)$ . . . . .	38
Tabela 3 – Países com maiores produções de petróleo (em milhões de barris por dia)	57
Tabela 4 – Vazões de produção (em barris/dia), para vários diâmetros de coluna (em polegadas) em um determinado poço . . . . .	65
Tabela 5 – Países com maiores reservas de petróleo (em bilhões de barris) . . . . .	100
Tabela 6 – Vazão de produção observada em três reservatórios diferentes . . . . .	111
Tabela 7 – Dados de produção do Exemplo 5.4 . . . . .	114
Tabela 8 – Tabela auxiliar para construção do gráfico de $q$ versus $p_w$ . . . . .	120
Tabela 9 – Tabela auxiliar preenchida . . . . .	121
Tabela 10 – Dados de produção do campo . . . . .	126
Tabela 11 – Tabela solução da atividade 3b . . . . .	126
Tabela 12 – Dados de produção do Exemplo B.1 . . . . .	137
Tabela 13 – Valores de $1/q$ do Exemplo B.1 . . . . .	138
Tabela 14 – Dados de produção do Exemplo C.1 . . . . .	141
Tabela 15 – Valores de $(q_i/q)^n$ do Exemplo C.1 . . . . .	142

# Lista de gráficos

Gráfico 1 – Gráfico da função $y = x^2 + 2x + 1$ . . . . .	38
Gráfico 2 – Gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . . . . .	39
Gráfico 3 – Gráfico da função $y=2x+1$ . . . . .	40
Gráfico 4 – Inclinação da reta, sinal do coeficiente $a$ e tangente do ângulo . . . . .	41
Gráfico 5 – O coeficiente $b$ é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo OY . . . . .	42
Gráfico 6 – Quilometragem do carro versus tempo . . . . .	45
Gráfico 7 – Aplicação da regressão linear para ajustar os dados . . . . .	46
Gráfico 8 – Gráfico da função $f(x) = a^x$ . . . . .	52
Gráfico 9 – Curvas de permeabilidade relativa versus saturação de água . . . . .	91
Gráfico 10 – Vazão versus Pressão de fluxo no fundo . . . . .	94
Gráfico 11 – Quanto maior a densidade, maior a inclinação da reta . . . . .	104
Gráfico 12 – A pressão em uma determinada profundidade é proporcional à densidade . . . . .	105
Gráfico 13 – Nível de líquido no poço . . . . .	109
Gráfico 14 – Vazão de produção observada em três reservatórios diferentes . . . . .	112
Gráfico 15 – Declínio Exponencial - Valores de $\ln(q)$ versus $t$ - exemplo 5.4 . . . . .	115
Gráfico 16 – $q$ versus $p_w$ atividade 1 questão 5 . . . . .	121
Gráfico 17 – Solução atividade 1 questão 5 . . . . .	121
Gráfico 18 – $\ln(q)$ versus $t$ . . . . .	127
Gráfico 19 – Declínio Harmônico - Valores de $1/q \times t$ - exemplo B.1 . . . . .	138
Gráfico 20 – Declínio Hiperbólico - Valores de $(q_i/q)^n$ versus $t$ - Exemplo C.1 . . . . .	143

# Lista de abreviaturas e siglas

ANM	Árvore de Natal Molhada
IP	Índice de Produtividade
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

# Lista de símbolos

$p$	pressão
$F$	força
$A$	área
$P$	peso
$m$	massa
$g$	aceleração da gravidade
$q$	vazão
$a$	taxa de declínio
$\Delta t$	intervalo de tempo
$\Delta q$	variação de vazão
$K$	constante elástica de uma mola
$d$	densidade
$V$	volume
$h$	espessura da formação
$k$	permeabilidade
$h$	altura ou elevação em relação a um nível de referência
$c_g$	Compressibilidade do gás
$c_w$	Compressibilidade da água
$c_o$	Compressibilidade do óleo
$V_o$	Volume de óleo
$S_o$	Saturação de óleo

$p_{atm}$	pressão atmosférica
$p_w$	pressão no poço
$p_H$	pressão hidrostática
$p_e$	pressão estática do reservatório
$p_{sat}$	pressão de saturação
$\subset$	contido em
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais]
$\in$	pertence
$a$	taxa de variação de uma função afim ou de uma função linear
$a$	coeficiente angular de uma reta
$b$	coeficiente linear de uma reta
$\neq$	diferente
$<$	menor que
$>$	maior que
$\leq$	menor ou igual
$\geq$	maior ou igual
$R^2$	coeficiente de determinação (regressão linear)
FR	Fator de recuperação
$N_p$	Volume de óleo produzido acumulado

# Sumário

Introdução . . . . .	18
<b>1</b> <b>FUNDAMENTOS DE FÍSICA . . . . .</b>	<b>24</b>
1.1      Conceito de pressão . . . . .	24
1.2      Conceito de densidade . . . . .	29
1.3      Pressão hidrostática . . . . .	31
1.4      Pressão atmosférica . . . . .	33
<b>2</b> <b>FUNÇÃO AFIM . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1      Conceitos preliminares . . . . .	36
2.2      Definição de função . . . . .	37
2.3      Gráfico de uma função . . . . .	37
2.4      Função Afim . . . . .	39
2.5      Função Linear . . . . .	43
2.6      Regressão linear . . . . .	44
2.7      Linearização de um gráfico . . . . .	47
<b>3</b> <b>FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA . . . . .</b>	<b>49</b>
3.1      Revisão de potências de expoentes racionais . . . . .	49
3.2      A Função Exponencial . . . . .	51
3.3      A Função Logarítmica . . . . .	52
3.4      A Função Exponencial de Base $e$ e a Função Logarítmica de Base $e$ . . . . .	54
<b>4</b> <b>FUNDAMENTOS DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO . . . . .</b>	<b>55</b>
4.1      Histórico do petróleo . . . . .	55
4.2      Geologia do petróleo . . . . .	57
4.3      Prospecção do petróleo . . . . .	60
4.4      Perfuração de poços de petróleo . . . . .	61
4.5      Completação de poços de petróleo . . . . .	63
4.6      Avaliação de formações . . . . .	66
4.7      Engenharia de reservatórios de petróleo . . . . .	87
4.7.1      Propriedades de rocha e de fluidos . . . . .	87
4.7.2      Fluxo de fluidos em meios porosos . . . . .	94
4.7.3      Tipos de reservatórios quanto ao estado físico dos fluidos . . . . .	96
4.7.4      Mecanismos de produção . . . . .	97

4.7.5	Estimativa de reservas . . . . .	99
4.7.6	Métodos de recuperação . . . . .	101
4.8	Elevação . . . . .	102
5	<b>APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA EM POÇOS E CAMPOS DE PETRÓLEO . . . . .</b>	<b>103</b>
5.1	Unidades de pressão utilizadas na indústria do petróleo . . . . .	103
5.2	Cálculos envolvendo a pressão no fundo de um poço de petróleo	104
5.3	Pressão e densidade do fluido: evitando acidentes . . . . .	106
5.4	Otimização da produção por bombeio mecânico . . . . .	107
5.5	Previsão de produção de petróleo utilizando curvas de declínio de produção . . . . .	110
5.5.1	Análise de curvas de declínio de produção . . . . .	111
5.5.2	Declínio Exponencial . . . . .	113
6	<b>PROPOSTA DE ATIVIDADES . . . . .</b>	<b>117</b>
6.1	Atividade 1 . . . . .	117
6.2	Atividade 2 . . . . .	122
6.3	Atividade 3 . . . . .	124
7	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>129</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>APÊNDICE A – MAIS SOBRE O DECLÍNIO EXPONENCIAL . . . . .</b>	<b>134</b>
	<b>APÊNDICE B – DECLÍNIO HARMÔNICO . . . . .</b>	<b>136</b>
	<b>APÊNDICE C – DECLÍNIO HIPERBÓLICO . . . . .</b>	<b>140</b>
	<b>APÊNDICE D – FOLHAS DE ATIVIDADES . . . . .</b>	<b>144</b>

# Introdução

A indústria do petróleo contém aspectos diversos, desde os mais simples até os mais complexos. É curioso notar que mesmo pessoas que trabalham neste ramo desconhecem noções básicas sobre o petróleo. É comum ficarem perplexas quando alguém experiente no assunto lhes diz que o petróleo não está lá embaixo da terra na forma de um lago, um rio ou algo semelhante, mas sim dentro das rochas, preenchendo os espaços entre seus grãos. Este é apenas um dos exemplos que serão mostrados ao longo do trabalho.

O interesse pelo tema deste trabalho surgiu a partir da experiência profissional deste pesquisador na indústria do petróleo, na qual a Matemática foi bastante utilizada. Por trinta e sete anos teve a oportunidade de trabalhar como engenheiro de petróleo em uma grande empresa do ramo. Com formação anterior em Engenharia Civil, ao ingressar na empresa cursou uma especialização em Engenharia de Petróleo, com duração de um ano, seguido de estágio nas unidades operacionais de produção. Inicialmente, trabalhou em campos terrestres na operação de poços produtores, incluindo o escoamento, a coleta e o tratamento do petróleo produzido. Após dois anos, passou a atuar na atividade chamada Reservatórios, que é menos operacional e mais direcionada a estudos, projetos e controle. Após dezesseis anos de trabalho com campos terrestres, passou a atuar na Bacia de Campos, onde os campos são todos marítimos.

A empresa em que o pesquisador trabalhou sempre teve uma política de treinamento bastante forte, dotada de universidade interna própria, de forma que ao longo da carreira foi possível participar de pelo menos três cursos de atualização ou aperfeiçoamento a cada ano, inclusive um mestrado, sem dissertação, nos Estados Unidos.

Quanto à utilização da Matemática, a partir de sua experiência o pesquisador pode perceber que os estudos e problemas do dia-a-dia da Engenharia de Petróleo podem ser subdivididos em dois grupos: 1) aqueles que demandam a aplicação de conceitos de Matemática (e áreas correlatas, como a Física) que só são estudados em cursos de Nível Superior e 2) aqueles que podem ser resolvidos a partir de conteúdos estudados no Ensino Médio. Este trabalho aborda os do segundo grupo.

Cabe lembrar a grande importância da indústria do petróleo para a nossa região, o Norte Fluminense, devido aos vultosos investimentos realizados pelas empresas do ramo petrolífero e à localização da sede da Unidade de Negócios da Bacia de Campos,

da Petrobras, em Macaé, o que movimenta a economia regional e oferece numerosos empregos. Este é um fator que pode gerar o interesse de alunos e professores pelo assunto tratado neste trabalho.

Nota-se nas citações de vários pesquisadores, como os mencionados a seguir, suas constatações de que os alunos do Ensino Médio, de uma maneira geral, não percebem a importância e utilidade da Matemática que lhes é ensinada.

[Souza \(2001\)](#) afirma que a utilidade da Matemática é algo sempre questionado nas aulas dessa disciplina, não sendo fácil para o professor justificar essa utilidade de maneira imediata, principalmente quando os alunos ainda não tem maturidade para compreender a amplitude dessa discussão.

Apesar da importância da Matemática, como observa [Nascimento \(2016\)](#), seu ensino não apresenta uma boa recepção pelos discentes, sendo tida como bastante abstrata e pura, fazendo com que o aluno, de forma geral, não perceba a importância do assunto para a sua formação como cidadão e para o seu futuro profissional.

Em sua dissertação sobre o estudo de funções, [Souza \(2016\)](#) menciona que durante seus dez anos de experiência docente tem encontrado alunos questionando a utilidade, em seu dia-a-dia e posteriormente na sua vida profissional, dos conteúdos ensinados. Surgem, então, questões sobre de que maneira pode-se ensinar um determinado conteúdo de forma mais interessante, que faça mais sentido para os alunos? Como responder ao aluno sobre a utilidade de tal conteúdo? A pesquisadora acrescenta: "Apesar de nem sempre ser possível usar situações do cotidiano para ensinar conteúdos matemáticos, acredita-se ser positivo fazê-lo, uma vez que a Matemática deu-se a partir da necessidade humana de respostas para situações práticas do dia-a-dia". ([SOUZA, 2016](#), p. 15)

[Santos \(2017\)](#), em sua dissertação, menciona que em muitos momentos, o professor de Matemática é questionado por seus alunos a respeito da aplicabilidade de alguns conteúdos em seu cotidiano. Dependendo do contexto, tal situação exige um esforço por parte do professor para justificar o seu ensino, já que este pode não ter uma relação direta com o dia-a-dia ou com a cultura dos mesmos.

Como destaca [Cunha \(2017\)](#), com o avanço científico e tecnológico, a Matemática tornou-se essencial na sociedade devido à sua necessidade diária, pois está ligada a vários ramos, como a economia, finanças, saúde, engenharia, entre outras. Para melhor efetividade, deve ser transmitida aos alunos de uma forma contextualizada, invocando fatos e acontecimentos ligados às suas operações.

Como referenciado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

[...] em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos

matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. [...] No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional (BRASIL, 1998, p. 40).

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 42) elencam vários objetivos relacionados às finalidades do ensino de Matemática no nível médio. Dentre eles, pode-se citar:

- levar o aluno a compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

- levar o aluno a aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- levar o aluno a analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

Entre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, (BRASIL, 1998, p. 46) cita, dentre outras:

- desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;

- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em dezembro/2018, propõe "a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida" (BRASIL, 2018, p. 15).

Ainda segundo a BNCC:

[...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências, com indicação clara do que os alunos devem "saber" e, sobretudo, do que devem "saber fazer". A cada competência está relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 13).

[...] Para garantir aos sistemas de ensino e às escolas a construção de currículos e propostas pedagógicas flexíveis e adequados à sua realidade,

as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação. (BRASIL, 2018, p. 32).

Enquanto no Ensino Fundamental, a área de Matemática tem foco no desenvolvimento da compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos, visando à resolução de situações-problema, no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias vai além: "os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área" (BRASIL, 2018, p. 470). A ampliação e o aprofundamento das aprendizagens que foram desenvolvidas no Ensino Fundamental possibilitam que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018, p. 517).

A motivação para a realização deste trabalho surgiu a partir da combinação de fatores, tais como:

- a) a percepção de que grande parte das situações-problemas da Engenharia de Petróleo pode ser resolvida com a aplicação de conceitos relativamente simples da Matemática do Ensino Médio;
- b) a constatação de que a importância ou utilidade desses conceitos não é percebida pelos alunos, conforme atestam diversos pesquisadores citados ao longo do trabalho;
- c) o desconhecimento pela comunidade em geral, em particular professores e alunos do Ensino Médio, sobre o assunto petróleo;
- d) a importância da indústria do petróleo para a nossa região.

Assim, o objetivo deste trabalho é elaborar e apresentar material didático abordando alguns assuntos da Engenharia de Petróleo que utilizam a Matemática do Ensino Médio para solucionar seus problemas. Além do conteúdo teórico nas áreas de Matemática, Física e Engenharia de Petróleo, acompanhado de exemplos, são apresentadas propostas de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula pelos professores de Matemática, ou servir de consulta e apoio na preparação de suas próprias atividades. O material serve também como meio de sensibilizar os alunos quanto à importância e aplicabilidade do estudo da Matemática.

Os objetivos específicos são:

- 1) realizar pesquisa bibliográfica na área da Física, da Matemática e da Engenharia de Petróleo;
- 2) mostrar exemplos de problemas que ocorrem na Engenharia de Petróleo cujas soluções demonstram a aplicabilidade da Matemática do Ensino Médio nesta atividade profissional;

3) apresentar três propostas de atividades em sala de aula, envolvendo Matemática e Engenharia de Petróleo.

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica aplicada, de acordo com os critérios propostos por Vergara (2007) e consistiu principalmente da leitura de textos na área da Física, da Matemática e da Engenharia de Petróleo. Apesar do alvo principal ser a Engenharia de Petróleo, entendeu-se que para facilitar o entendimento de seus conteúdos seria necessário discorrer primeiramente sobre os conceitos de Física e Matemática envolvidos. Após a leitura, foi feita a seleção e apresentação de assuntos dessas disciplinas para nivelamento de conhecimento tanto de alunos quanto de professores e a apresentação de exemplos que demonstram a aplicabilidade de conteúdos matemáticos do Ensino Médio na solução de problemas da Engenharia de Petróleo.

Ao longo dos capítulos sobre a Engenharia, percebe-se como a Matemática está presente, sendo possível ver a correlação das atividades da primeira com os assuntos abordados na segunda.

No que diz respeito à Engenharia de Petróleo, este trabalho foi delimitado às etapas que compõem o *upstream*, que é a parte da cadeia produtiva do petróleo que antecede o refino. Em relação à Matemática, se restringiu às funções afim, linear, exponencial e logarítmica, que foram as que mostraram maior aplicabilidade.

O trabalho está estruturado em sete capítulos, excetuando a introdução. Nesta são apresentados os fatores que motivaram este trabalho, sua relevância e os objetivos deste; São citados depoimentos de pesquisadores que reforçam a importância e necessidade deste tipo de trabalho, apresentada a metodologia utilizada, a delimitação e a estruturação do trabalho.

O capítulo um discorre sobre Fundamentos de Física. O assunto principal é a pressão hidrostática, ou pressão exercida por um líquido em repouso, mas para seu entendimento foram introduzidos conceitos preliminares, tais como massa, gravidade, peso, densidade, pressão.

O capítulo dois apresenta a função afim, enquanto o capítulo três faz uma breve explanação sobre as funções exponencial e logarítmica. Os vários exemplos da Engenharia de Petróleo que são abordados em capítulos posteriores utilizam os conteúdos destas funções para suas soluções.

O capítulo quatro dá ao leitor uma visão geral sobre a exploração, perfuração e produção de um campo de petróleo, etapas que compõem o *upstream*, já mencionado. Discorre sobre a história do petróleo, a exploração (busca, investigação), a perfuração e avaliação dos poços, o preparo destes para a produção, a engenharia de reservatórios, as reservas e a elevação do petróleo até a superfície.

O capítulo cinco apresenta exemplos de aplicação da Matemática do Ensino Médio

à Engenharia de Petróleo.

O capítulo seis traz a proposta de três atividades para serem utilizadas em sala de aula.

No capítulo sete são apresentadas as considerações finais. Em seguida, as referências bibliográficas.

E por último, vêm os apêndices: o apêndice A aborda a Matemática Superior necessária para se chegar às equações descritas no capítulo cinco, na previsão por análise de declínio, no caso do declínio exponencial. Os apêndices B e C abordam respectivamente, os declínios harmônico e hiperbólico, que são apenas mencionados no capítulos cinco. Já o apêndice D apresenta as Folhas de Atividades, que serão entregues aos alunos em sala de aula, para execução das atividades propostas.

# Capítulo 1

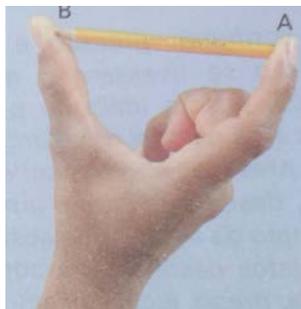
## FUNDAMENTOS DE FÍSICA

Vários fenômenos estudados na Engenharia de Petróleo estão relacionados às grandezas massa, força, pressão, densidade, volume, velocidade, tempo e vazão de fluidos. Como neste trabalho são abordadas questões relacionadas principalmente à pressão exercida por um fluido dentro de um poço de petróleo, o assunto inicial é a pressão. São mostrados os conceitos básicos e as unidades dos parâmetros envolvidos, tanto no trato acadêmico como na prática da indústria. Em capítulos posteriores serão apresentadas situações da indústria do petróleo que envolvem pressão, correlacionando-as com os conceitos matemáticos aplicados para solucioná-las.

### 1.1 Conceito de pressão

Como ilustrado por [Ramalho Júnior, Ferraro e Soares \(2001\)](#) e por [Máximo e Alvarenga \(2003\)](#), se apertarmos um lápis entre os dedos, sentiremos dor apenas no dedo em contato com a extremidade apontada, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – A pressão é maior no contato com a ponta do lápis



Fonte – [Máximo e Alvarenga \(2003, p. 174\)](#)

Como isso é possível, uma vez que a força exercida tem a mesma intensidade em ambas as extremidades do lápis? A razão é que na ponta a força se distribui por uma área

menor. Há mais força por unidade de área na ponta do que na outra extremidade. Dizemos, então, que no lado da ponta a pressão é maior.

Se uma força  $\vec{F}$  é aplicada perpendicularmente a uma superfície e está uniformemente distribuída sobre uma área  $A$ , então, definimos a pressão  $p$ , exercida pela força sobre essa superfície, como a razão entre o módulo da força e a área  $A$  (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001, p. 436). Denotando  $\|\vec{F}\| = F$ ,

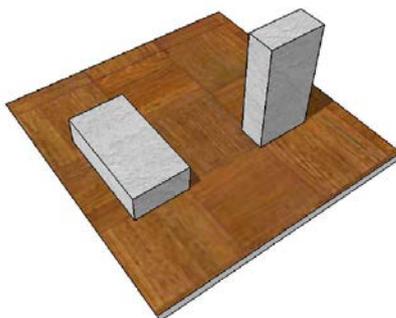
$$p = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

Vê-se, portanto, que pressão e força são grandezas diferentes. Força está associada à noção de esforço, por exemplo, quando se empurra algum objeto. A idéia de pressão envolve a força mas, também envolve a área na qual essa força atua. Quando se amola uma faca, está-se reduzindo a superfície de contato da faca com o objeto a ser cortado, de forma que a pressão fica muito grande e a faca corta melhor. Uma agulha de seringa tem a ponta tão fina, que é possível penetrar a pele de uma pessoa com ela de maneira fácil, sem muita força. Estes são exemplos de como a área de um objeto é reduzida para obter pressões maiores (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003, p. 173).

Em algumas situações deseja-se o oposto, isto é, obter pressões menores, logo, deve-se aumentar a área de contato. É o caso dos pneus de automóveis: quanto maior o peso do veículo, que é a força atuante, mais largo deve ser o pneu, para aumentar a área de contato com o solo. Na construção de casas, suas paredes são apoiadas sobre alicerces, que são mais largos do que as paredes, para distribuir o peso da casa de modo a não ultrapassar o limite de pressão que o solo pode suportar. Neste caso, a força atuante é o peso da casa. Cada alicerce deve suportar a pressão devida ao peso da parede que está sobre ele e do que nela estiver apoiado (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003, p. 174).

Um outro exemplo: o peso, que é uma força, de um tijolo de dimensões 5cm x 10cm x 20cm, exerce pressões diferentes sobre a mesa na qual ele é colocado conforme a face que está em contato com a mesa (Figura 2). Quanto maior a área em contato com a mesa, menor será a pressão exercida pelo tijolo sobre a mesa.

Figura 2 – A pressão é menor quando o tijolo está apoiado na base de maior área



Fonte – autoria própria, baseado em Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2001, p. 436) e Máximo e Alvarenga (2003, p. 175)

O sistema de unidades adotado oficialmente no Brasil é o Sistema Internacional de Unidades (SI), também conhecido como MKS. Nele são utilizadas as unidades metro (m), quilograma (kg) e segundo (s). Nesse sistema, a unidade de força é o newton (N), onde 1 N corresponde à força necessária para imprimir uma aceleração de  $1 \frac{m}{s^2}$  a um corpo de massa 1 kg.

Unidades:  $[P] = N$ ,  $[m] = kg$ ,  $[g] = \frac{m}{s^2}$

$$1 \text{ N} = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}.$$

É importante fazer distinção entre massa e peso. A massa é uma propriedade invariante de um corpo, pois é a quantidade de matéria de que ele é constituído. Mas o seu peso não é invariante, ele depende do valor local de  $g$ , a aceleração da gravidade, pois o peso é a força de atração gravitacional exercida pela Terra sobre o objeto. O peso de um corpo é igual à sua massa multiplicada pela aceleração local (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001).

$$P = m \cdot g \tag{1.2}$$

**Exemplo 1.1.** Calcular o peso, em newtons, de um corpo de massa 100 kg em um local onde a latitude é de  $45^\circ$  e a altitude é próxima à do nível do mar.

**Resolução:**

Em locais com latitude de  $45^\circ$  e altitude próxima à do nível do mar a aceleração da gravidade é aproximadamente  $9,8 \text{ m/s}^2$  (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001). Logo,

$$P = m \cdot g \Rightarrow P \approx 100 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 980 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 980 \text{ N}.$$

A intensidade do peso de um corpo de massa 1 kg sob a atuação de uma aceleração da gravidade de  $9,8 \text{ m/s}^2$  é denominada um **quilograma-força** (1 *kgf*) (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001).

$$\text{Então, } P = m \cdot g \Rightarrow 1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8 \text{ N. Concluimos, assim, que}$$

$$1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}.$$

Pela definição de quilograma-força, podemos dizer que no exemplo 1.1 o corpo de massa 100 kg (quilogramas) tem peso de 100 kgf (quilogramas-força), pois a aceleração da gravidade é de  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

É comum alguém dizer que um determinado objeto pesa um quilograma. Quando se trata de peso, o correto é dizer que este objeto pesa um quilograma-força, pois, quilograma é uma unidade de massa e quilograma-força é uma unidade de força, usada, por exemplo, para expressar o peso de um objeto.

Quanto pesaria o corpo de massa 100 kg, do exemplo 1.1, se ele estivesse na superfície da Lua? Segundo Máximo e Alvarenga (2003) a aceleração da gravidade na superfície da Lua é de  $1,6 \text{ m/s}^2$ , logo

$$P = m \cdot g = 100 \text{ kg} \cdot 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 160 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 160 \text{ N}$$

ou

$$P = 160 \text{ N} = 160 \text{ N} \cdot \frac{\text{kgf}}{9,8 \text{ N}} = 16,3 \text{ kgf}.$$

O resultado mostra que um corpo de massa 100 kg pesa 100 kgf na Terra (ao nível do mar), enquanto que na superfície da Lua este mesmo corpo pesaria apenas 16,3 kgf.

A medida da massa de um corpo é feita por meio de balanças. De acordo com [Teixeira \(2018\)](#), as mais antigas eram as balanças de dois pratos, constituídas por uma barra horizontal que tinha em cada extremidade um prato e era suportada no meio por uma haste vertical como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Balança de pratos



Fonte – [Teixeira \(2018\)](#)

Colocava-se o objeto que se pretendia medir a massa em um prato e no outro eram adicionados objetos com "pesos" de referência até que o equilíbrio fosse estabelecido, isto é, os dois pratos ficassem na mesma altura. Então, a massa do objeto era igual à soma das massas de referência colocados no outro prato. Como a aceleração da gravidade é a mesma para os dois pratos, pode-se afirmar que, se as massas são iguais, os pesos também são.

Segundo [Saint'Pierre \(2018\)](#), atualmente, existem diversos tipos de balança: de precisão, analítica, industrial, rodoviária, etc. De acordo com o tipo de funcionamento, podem ser mecânicas, eletrônicas ou híbridas. As balanças mais utilizadas são as eletrônicas, cujo funcionamento se baseia na relação entre a flexão de uma mola e a massa do objeto que se deseja pesar. De acordo com a Lei de Hook, a força elástica de uma mola é dada pela equação

$$F = K \cdot x \quad (1.3)$$

onde  $F$  [N] é a força,  $k$  [N/m] é a constante elástica da mola;  $x$  [m] é o deslocamento sofrido pela mola ao ser comprimida.

Ao se colocar o objeto sobre a balança, ela está sujeita à força peso desse objeto, e a mola em seu interior sofre uma flexão  $x$ . Essa flexão faz com que entre em rotação um disco codificado, que ativa detectores fotoelétricos por meio de ondas luminosas. Cada código do disco corresponde a um valor de peso. Apesar de o termo utilizado ser o peso, o que a balança mede é a massa dos corpos ([SAINT'PIERRE, 2018](#)).

A unidade de pressão no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o newton por metro quadrado ( $N/m^2$ ), denominada pascal (Pa) e é usada nos trabalhos científicos. Por outro lado, a unidade geralmente usada por engenheiros e técnicos é o quilograma-força por centímetro quadrado ( $kgf/cm^2$ ).

Fazendo a conversão de unidades, pode-se determinar a relação entre estas unidades de pressão  $N/m^2$  e  $kgf/cm^2$ :

$$1 \frac{kgf}{cm^2} = \frac{9,8N}{cm^2} = 9,8 \frac{N}{cm^2} \frac{10^4 cm^2}{m^2} = 9,8 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

$$1 \frac{kgf}{cm^2} \approx 10^5 Pa$$

Em alguns equipamentos, por exemplo nos calibradores de pneus nos postos de gasolina, encontramos também a unidade libra-força por polegada quadrada ( $lbf/pol^2$ ), cuja abreviação é psi (do inglês *pounds per square inch*), popularmente conhecida no Brasil como "libra". Esta unidade é bastante utilizada em equipamentos importados de outros países. Vejamos a equivalência entre essas unidades, fazendo a conversão:

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{lbf}{pol^2} = 1 \frac{lb \cdot g}{pol^2} = 0,454kg \cdot \frac{9,8m/s^2}{(2,54cm)^2} = \frac{1}{14,22} \cdot \frac{kgf}{cm^2}$$

$$1 \frac{kgf}{cm^2} = 14,22 \text{ psi}$$

## 1.2 Conceito de densidade

Denomina-se densidade de uma substância, representada pela letra  $d$ , o valor que se obtém ao se dividir sua massa  $m$  por seu volume  $V$  (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003). Ela define a quantidade de massa de uma substância contida por unidade de volume.

$$d = \frac{m}{V} \quad (1.4)$$

Imagine um bloco de alumínio, de volume  $V = 10 \text{ cm}^3$  e massa  $m = 27g$ . Ao se dividir a massa  $m$  deste bloco pelo seu volume  $V$  obtém-se a densidade do alumínio, isto é:

$$d = 27/10 = 2,7 \text{ g/cm}^3.$$

A tabela 1 mostra exemplos de densidade de alguns materiais, uns sólidos, outros líquidos.

Tabela 1 – Valores de densidade, em  $g/cm^3$ , para alguns materiais

MATERIAL	DENSIDADE		MATERIAL	DENSIDADE
Alumínio	2,70		Ouro	19,32
Mercúrio	13,55		Ferro	7,87
Chumbo	11,34		Platina	21,45
Álcool	0,79		Água	1,0
Lítio	0,53		Cortiça	0,24
Isopor	0,03		Petróleo tipo Brent (leve)	0,836
Petróleo do pré-sal	0,887			

Fontes: [Ramalho Júnior, Ferraro e Soares \(2001\)](#), [Leite e Costa \(2015\)](#), [Cardoso \(2005\)](#), [Man \(2018\)](#)

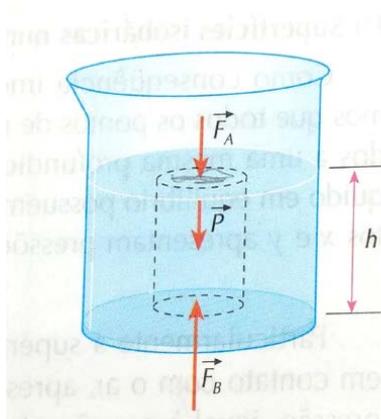
Em 2016 a Boeing desenvolveu um novo metal, o Microlattice, que foi reconhecido pelo Livro dos Recordes, como o metal mais leve do mundo. Ele é cerca de 100 vezes mais leve do que o isopor e é feito de níquel fósforo, contendo em sua composição 99,99% de ar. ([HAUS, 2016](#); [LYNCH, 2016](#)).

### 1.3 Pressão hidrostática

Hidrostatica é o estudo dos fluidos em repouso, sejam eles líquidos ou gases, logo, pressão hidrostática é a pressão exercida por um fluido em repouso. Ao entrar em uma piscina uma pessoa sente que a água exerce uma pressão sobre seu corpo. Se mergulhar mais fundo, sentirá uma pressão maior ainda (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003). Ao longo desta seção será mostrado como calcular a pressão em uma profundidade qualquer em um recipiente preenchido com um fluido, segundo Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2001).

Considere um recipiente com um líquido de densidade  $d$ , conforme a Figura 4.

Figura 4 – Cilindro líquido de peso  $\vec{P}$ , forças  $\vec{F}_A$  na base superior e  $\vec{F}_B$  na base inferior



Fonte – Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2001, p. 441)

Imagine uma porção desse líquido com a forma de um cilindro reto de altura  $h$  e cujas bases tenham área  $A$  e a base superior coincidam com a superfície livre do líquido.

Como o líquido está parado, pode-se afirmar que ele está em equilíbrio estático e, portanto, a resultante das forças atuantes sobre ele tem módulo igual a zero.

As forças atuantes sobre o cilindro líquido são  $\vec{F}_A$  exercida pelo ar na base superior, devido à pressão atmosférica, o peso  $\vec{P}$  do cilindro líquido e  $\vec{F}_B$  exercida pelo fundo do recipiente na base inferior. A pressão atmosférica será vista posteriormente, com mais detalhes. Como o sistema está em equilíbrio, pode-se afirmar que o somatório de forças é nulo, logo,  $\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_B = \vec{0}$

Considerando que os três vetores forças têm mesma direção, pode-se trabalhar com seus módulos ou intensidades, observando que  $\vec{F}_A$  e  $\vec{P}$  atuam para baixo e  $\vec{F}_B$  atua para cima. Logo, para estarem em equilíbrio:

$$F_B = F_A + P,$$

O peso  $P$  do cilindro líquido é dado por:

$$P = m.g,$$

onde  $m$  é a massa e  $g$  a aceleração da gravidade. A massa é igual à densidade vezes o volume:  $m = d.V$ , e o volume é igual à área vezes a altura do cilindro,  $V = A.h$ , então

$$P = (d.V).g = (d.A.h).g = d.A.h.g$$

$$\text{Logo: } F_B = F_A + d.A.h.g$$

Para transformar as forças em pressões, divide-se cada termo pela área  $A$ :

$$\frac{F_B}{A} = \frac{F_A}{A} + \frac{dAhg}{A}$$

Como  $\frac{F_A}{A} = p_A$  é a pressão exercida pelo ar na base superior e  $\frac{F_B}{A} = p_B$  é a pressão na base inferior do cilindro, chega-se, assim, na expressão do Teorema de Stevin:

$$p_B = p_A + d.h.g \quad (1.5)$$

O Teorema de Stevin diz que a pressão em um ponto situado à profundidade  $h$  no interior de um líquido em equilíbrio é dada pela pressão na superfície mais a pressão exercida pela coluna de líquido situada acima do ponto, que é expressa pelo produto  $d.h.g$  (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001; MÁXIMO; ALVARENGA, 2003).

Leite e Costa (2015, p. 35) expressam o Teorema de Stevin de outra forma: "para dois pontos situados em profundidades diferentes, em um líquido em equilíbrio, a diferença de pressão entre esses dois pontos é igual ao produto da densidade do líquido pela aceleração da gravidade e pela diferença de profundidades entre esses pontos".

Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2001) concluem, a partir da equação 1.5, que uma coluna líquida exerce na sua base uma pressão, devida ao seu peso, denominada pressão hidrostática ( $p_H$ ), igual à diferença de pressão entre os pontos A e B, situados, respectivamente, no topo e na base da coluna. A pressão hidrostática é expressa pela equação

$$p_H = p_B - p_A = d.h.g \quad (1.6)$$

Algumas observações podem ser feitas a partir da equação 1.6:

a) a pressão hidrostática em um ponto qualquer é diretamente proporcional à altura da coluna de líquido acima daquele ponto (a pressão hidrostática é igual a uma constante vezes a altura da coluna); como consequência, todos os pontos de uma mesma superfície horizontal (mesma profundidade  $h$ ) e pertencentes a um mesmo líquido em equilíbrio possuem a mesma pressão (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001; MÁXIMO; ALVARENGA, 2003);

b) a pressão hidrostática em um ponto qualquer é diretamente proporcional à densidade do líquido (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003);

c) a pressão exercida por um líquido sobre uma superfície não depende da área desta superfície (a área  $A$  não aparece na expressão de  $p$ ) (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003);

A partir dessas observações, concluímos que a pressão hidrostática não depende da forma do recipiente. Seja em uma piscina, em uma caixa d'água ou no interior de um tubo com fluido, a pressão só dependerá da densidade do fluido e da profundidade (distância vertical entre a superfície da água e o ponto onde se quer avaliar a pressão), uma vez que  $g$  é constante.

Máximo e Alvarenga (2003) mostram, com uma simples experiência, que um líquido exerce pressão em todas as direções sobre um corpo nele mergulhado.

## 1.4 Pressão atmosférica

A Terra está envolta por uma imensa massa de ar, chamada atmosfera. Esta é constituída por uma mistura de gases, tais como o nitrogênio (78,08%), o oxigênio (21%), o argônio (0,92%), o gás carbônico (0,035%) e outros. Toda essa massa de ar é atraída pela Terra, logo, tem peso. Em UFPR (2018) afirma-se que:

**A pressão atmosférica é a pressão exercida pelo peso do ar atmosférico sobre qualquer superfície em contato com ele.**

À medida em que se sobe para uma altitude maior, o ar se torna mais rarefeito, sua densidade diminui e a espessura da camada acima desse ponto fica menor, portanto, a pressão atmosférica é mais baixa em altitudes maiores. Assim, a pressão atmosférica em cidades litorâneas, como Rio de Janeiro, Salvador, etc, é maior do que em cidades como Belo Horizonte ou Brasília, por exemplo, que têm altitudes de 836 m e 1150 m, respectivamente.

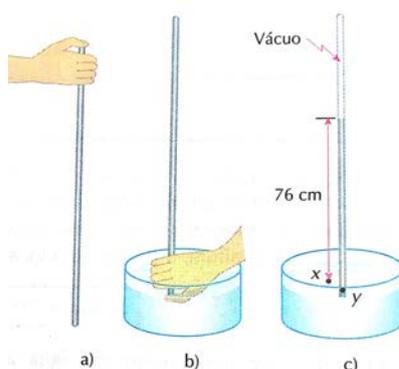
Segundo Máximo e Alvarenga (2003), ao nível do mar um volume de 1000 litros de ar ( $1 \text{ m}^3$ ) tem massa de  $1,3 \text{ kg}$ , logo, sua densidade é de  $1,3 \text{ kg/m}^3$ , o que equivale a  $0,0013 \text{ g/cm}^3$ , valor um pouco diferente do indicado por Leite e Costa (2015), que é de  $0,00121 \text{ g/cm}^3$ . A essa altitude a gravidade é  $9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , logo, o peso dessa massa de ar é de  $1,3 \text{ kgf}$ . Convertendo a unidade para Newtons, tem-se:

$$P = m \cdot g = 1,3 \times 9,8 = 12,74 \text{ N}$$

### Medida da pressão atmosférica: Experiência de Torricelli

Segundo [Máximo e Alvarenga \(2003\)](#), a primeira pessoa a medir o valor da pressão atmosférica foi o físico italiano Torricelli. Ele pegou um tubo de vidro, com aproximadamente 1 m de comprimento, fechado em uma de suas extremidades, enchendo-o completamente com mercúrio (Figura 5). Tapando a extremidade livre (Figura 5a) e invertendo o tubo (Figura 5b), mergulhou-a em um recipiente contendo também mercúrio. Ao destampar o tubo (Figura 5c), Torricelli verificou que a coluna líquida desceu, estacionando a uma altura de 76 cm acima do nível do mercúrio no recipiente. Uma vez que os pontos  $x$  (fora do tubo) e  $y$  (dentro do tubo) estão na mesma profundidade, eles têm a mesma pressão. Torricelli concluiu, então, que a pressão atmosférica atuando na superfície do líquido no recipiente equilibrava o peso da coluna de mercúrio. Portanto, o valor da pressão atmosférica equivale à pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 76 cm de altura.

Figura 5 – Experiência de Torricelli



Fonte – [Ramalho Júnior, Ferraro e Soares \(2001, p. 443\)](#)

Com base nos resultados da experiência de Torricelli, definiu-se que

**"uma atmosfera é a pressão hidrostática que exerce na sua base, uma coluna de mercúrio com 76 cm de altura, a 0°C e num local onde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ "** ([RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2001, p. 444](#)).

Através da equação 1.6 pode-se calcular a pressão devida a uma coluna de mercúrio de altura 76 cm, ao nível do mar. De acordo com a tabela 1, a densidade do mercúrio é de  $13,6 \text{ g/cm}^3$  ou  $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , logo, ao nível do mar temos:

$$p_{atm} = d \cdot h \cdot g = (13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (0,76\text{m}) \cdot (9,8\text{m/s}^2) = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 0,76 \cdot 9,8 \text{ N/m}^2$$

$$p_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Dividindo por  $9,8 \cdot 10^4$ , obtemos o valor em  $\text{kgf/cm}^2$ :

$$p_{atm} = 1,0336 \text{ kgf/cm}^2.$$

Multiplicando por 14,22 obtemos o valor em psi:

$$p_{atm} = 14,7 \text{ psi.}$$

Logo,

$$1 \text{ atm} = 1,0336 \text{ kgf/cm}^2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 14,7 \text{ psi}$$

Para efeito de comparação com a pressão atmosférica:

- "Quando um motorista chega a um posto de gasolina e pede para calibrar os pneus, por exemplo, 30 "libras", na realidade ele deseja que a pressão nos pneus seja ajustada para 30  $lbf/pol^2$ " (MÁXIMO; ALVARENGA, 2003, p. 173) ou libra-força por polegada quadrada (psi). Fazendo a conversão de unidades, vê-se que este valor corresponde a 2,04 *atm*. No entanto, o manômetro, na verdade, indica a pressão relativa, ou seja, a diferença entre a pressão absoluta (real) e a pressão atmosférica. Portanto, a pressão absoluta dentro do pneu é 2,04 *atm* + 1 *atm*, ou seja, 3,04 *atm*.
- Em uma piscina, onde a densidade da água é em torno de  $1 \text{ g/cm}^3$ , a cada 10,336 m de profundidade, a pressão aumenta 1 *atm*. Para chegar a este valor basta utilizar a Equação 1.6, substituindo os valores de  $h = 1 \text{ m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e  $d = 1 \text{ g/cm}^3$  e converter o resultado para *atm*.

Este capítulo apresentou os principais conceitos da Física necessários para um bom entendimento do capítulo Fundamentos da Engenharia de Petróleo.

## Capítulo 2

# FUNÇÃO AFIM

O objetivo deste capítulo é fazer uma abordagem sobre a função afim, compreendendo alguns conceitos, a construção e a interpretação de gráficos dessa função, de modo a facilitar o entendimento dos exemplos de sua aplicação na indústria do petróleo, que serão apresentados em capítulos posteriores.

Este capítulo é baseado em [Lima \(2014\)](#), portanto, quando não mencionado o contrário, esta é a fonte utilizada. O autor sugere começar pelo entendimento de alguns conceitos preliminares, como a seguir.

### 2.1 Conceitos preliminares

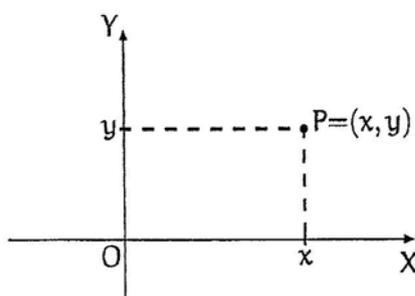
Par ordenado: "Um par ordenado  $p = (x, y)$  é formado por um objeto  $x$ , chamado a primeira coordenada de  $p$  e um objeto  $y$ , chamado a segunda coordenada de  $p$ ". Os pares ordenados  $(x, y)$  e  $(u, v)$  são iguais somente quando  $x = u$  e  $y = v$ . Da mesma forma, os pares ordenados  $(x, y)$  e  $(y, x)$  são iguais somente quando  $x = y$ .

Produto Cartesiano: "O produto cartesiano  $X \times Y$ , de dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , é o conjunto  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$  cuja primeira coordenada  $x$  pertence a  $X$  e cuja segunda coordenada  $y$  pertence a  $Y$ ". Ou seja,

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

O Plano Numérico  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbb{R}^2$  é o produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , cujos elementos  $(x, y)$  são os pares ordenados de números reais. Esses pares são as coordenadas cartesianas de um ponto  $P$  do plano  $\Pi$  ( $x =$  abscissa,  $y =$  ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$ , que se intersectam no ponto  $O$ , chamado a origem do sistema de coordenadas, conforme mostra a Figura 6.

Figura 6 – O plano numérico ou plano cartesiano



Fonte – Lima (2014, p. 75)

Dado um ponto  $P \in \Pi$ , a abscissa de  $P$  é o número  $x$ , coordenada do pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o eixo  $OX$ , enquanto a ordenada de  $P$  é a coordenada  $y$  do pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o eixo  $OY$ . Assim,  $(x, y)$  é o par de coordenadas do ponto  $P$  relativamente ao sistema de eixos  $OXY$ , onde a abscissa é lida no eixo horizontal e a ordenada no eixo vertical. A cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  corresponde seu par de coordenadas  $f(P) = (x, y)$  e vice-versa, estabelecendo uma correspondência biunívoca.  $\mathbb{R}^2$  é o modelo aritmético do plano  $\Pi$ , enquanto  $\Pi$  é o modelo geométrico de  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Definição de função

Segundo Lima (2014, p. 36), dados os conjuntos  $X, Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  é uma regra que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um único elemento  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto  $X$  chama-se o domínio e  $Y$  é o contradomínio da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a imagem de  $x$  pela função  $f$ .

## 2.3 Gráfico de uma função

Nesta seção é mostrado como construir um gráfico de funções reais de uma variável real, isto é, de funções  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que tem como domínio um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  e cujos valores  $f(x)$ , para todo  $x \in X$ , são números reais.

O gráfico de uma função  $f : X \rightarrow Y$  é o subconjunto  $G(f)$  do produto cartesiano  $X \times Y$  formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x$  é um ponto qualquer de  $X$  e  $y = f(x)$ . Como se trata de uma função, para cada  $x \in X$  existe um, e somente um,  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in G$ .

Este gráfico pode, geralmente, ser visualizado como uma curva, formada pelos pontos de coordenadas  $(x, f(x))$ , quando  $x$  varia no conjunto  $X$ . Para obter essa curva, deve-se atribuir valores à abscissa  $x$ , variável independente, e calcular o valor da ordenada  $y = f(x)$ ,

variável dependente, encontrando os pontos  $(x, f(x))$ . Ao se unir os pontos, fica determinado o gráfico desejado. Quanto maior o número de pontos, melhor será a aproximação da curva real do gráfico.

**Exemplo 2.1.** (Autoria própria)

Dada a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , construir seu gráfico.

*Resolução:*

Atribuindo valores a  $x$  e calculando  $f(x)$ , chega-se aos valores da tabela 2.

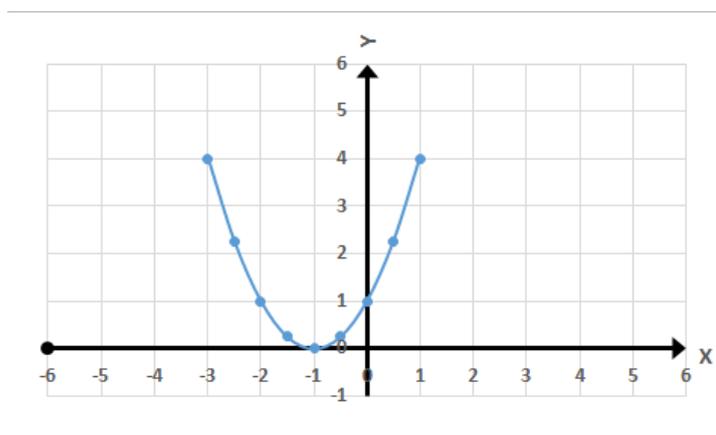
Tabela 2 – Tabela auxiliar para construir o gráfico de  $y=f(x)$

$x$	$y=f(x)$	$(x, y)$
-3,0	4,0	(-3, 4)
-2,5	2,25	(-2,5, 2,25)
-2,0	1,0	(-2, 1)
-1,5	0,25	(-1,5, 0,25)
-1,0	0,0	(-1,0, 0,0)
-0,5	0,25	(-0,5, 0,25)
0	1,0	(0, 1,0)
0,5	2,25	(0,5, 2,25)
1,0	4,0	(1,0, 4,0)

Fonte: Autoria própria

A partir dos valores da tabela, constrói-se o Gráfico 1:

Gráfico 1 – Gráfico da função  $y = x^2 + 2x + 1$



Fonte – Autoria própria

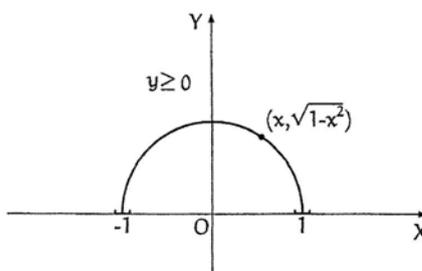
**Exemplo 2.2.** Adaptado de Lima (2014, p. 78).

Construir o gráfico da função  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

*Resolução:*

Desenvolvendo  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , obtém-se  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , que é a equação de uma semi-circunferência  $C_+$ , de centro na origem  $= (0, 0)$  e raio 1, situada no semi-plano  $y \geq 0$ , como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2 – Gráfico da função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



Fonte – Lima (2014, p. 78)

## 2.4 Função Afim

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Uma característica marcante do gráfico  $G$  de uma função afim é que este é uma linha reta. A demonstração desse fato pode ser feita mostrando que três pontos quaisquer desse gráfico são colineares, porém isso não foi feito aqui por fugir ao escopo deste trabalho.

Para construir o gráfico da função afim usa-se o fato de que bastam dois pontos para definir uma reta. Assim, calcula-se o valor de  $f(x)$  para dois valores distintos de  $x$  pertencentes ao domínio da função, obtém-se dois pontos  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ , a partir dos quais se traça a reta que representa o gráfico da função.

**Exemplo 2.3.** (Autoria própria)

Dada a função  $f(x) = 2x + 1$ , construir seu gráfico.

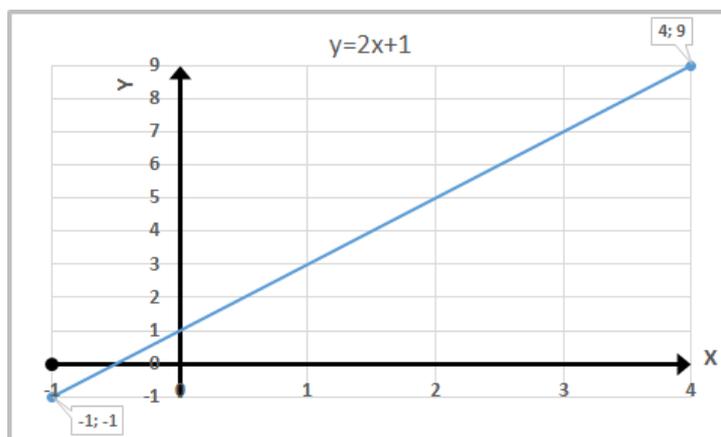
*Resolução:* A função é do tipo  $f(x) = ax + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes, logo é uma função afim e seu gráfico é uma reta. Para traçar a reta, primeiramente calcula-se o valor da função para dois valores distintos de  $x$ , por exemplo,  $x = -1$  e  $x = 4$ .

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow (x,y) = (-1, -1).$$

$$f(4) = 2(4) + 1 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow (x,y) = (4, 9).$$

Traça-se, então, uma reta passando pelos dois pontos determinados  $(-1, -1)$  e  $(4, 9)$ , como pode ser visto no Gráfico 3.

Gráfico 3 – Gráfico da função  $y = 2x + 1$



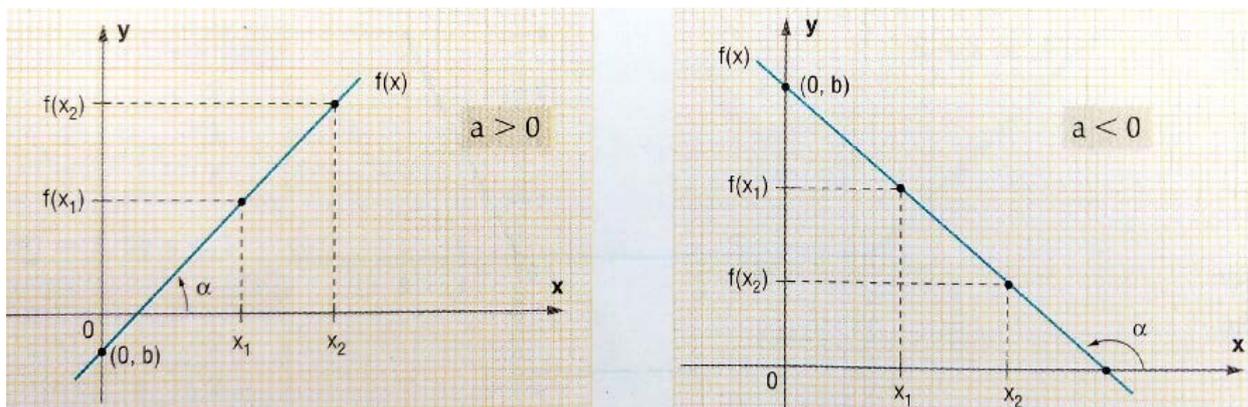
Fonte – Autoria própria

O processo inverso, isto é, determinar a regra ou expressão de  $f(x)$  a partir do gráfico da função, é feito calculando-se os coeficientes  $a$  e  $b$ .

O coeficiente  $a$  é conhecido como taxa de crescimento ou taxa de variação da função  $f$ . Isso significa que para cada unidade que a variável  $x$  aumenta, a variável  $y$  aumenta  $a$  unidades.

Um valor positivo do coeficiente  $a$  indica que a reta é ascendente quando se caminha para a direita. Analogamente, quando  $a$  é negativo, a reta é descendente, conforme mostra o Gráfico 4. Quanto maior o valor absoluto de  $a$ , mais inclinada é a reta, ou seja, mais ela se afasta da posição horizontal.

Gráfico 4 – Inclinação da reta, sinal do coeficiente  $a$  e tangente do ângulo



Fonte – Dante (2001, p. 106)

Os valores de  $a$  e  $b$  podem ser determinados algebricamente, a partir das coordenadas de dois pontos distintos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pertencentes à função (ou ao gráfico da função).

O valor do coeficiente  $a$  é obtido calculando-se o quociente entre a variação de  $f(x)$  e a variação de  $x$  entre os dois pontos:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.1)$$

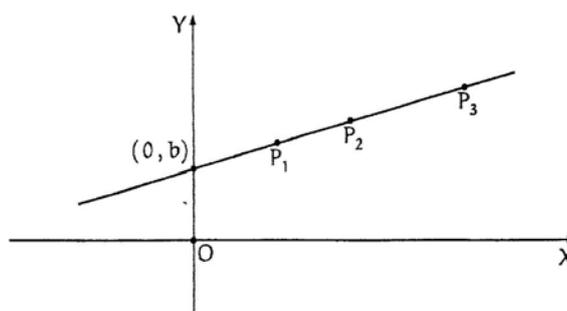
A taxa de variação da função afim é constante, o que significa dizer que a acréscimos iguais de  $x$  correspondem acréscimos iguais de  $f(x)$ . Esta é uma característica importante desta função.

Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subset \mathbb{R}$ , pode ser classificada como:

- crescente: quando  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ; corresponde a  $a > 0$ .
- decrescente: quando  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ; corresponde a  $a < 0$ .
- monótona não-decrescente: quando  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ; corresponde a  $a \geq 0$ .
- monótona não-crescente: quando  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ; corresponde a  $a \leq 0$ .

O valor do coeficiente linear  $b$  pode ser obtido de duas maneiras. Uma é a partir do gráfico da função. Ele corresponde ao valor da ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo OY. Ou seja, é o valor de  $f(x)$  quando  $x = 0$ , pois  $f(0) = a \cdot 0 + b = b$ , como mostra o Gráfico 5.

Gráfico 5 – O coeficiente  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo OY



Fonte – Lima (2014, p. 82)

A outra maneira de se determinar  $b$  é substituindo o valor de  $a$ , previamente calculado com a equação 2.1, e os valores de  $x$  e  $y$  de um ponto  $(x, y)$  qualquer da função, na equação geral  $y = ax + b$  e isolando  $b$ , obtendo-se:

$$b = y - ax \quad (2.2)$$

Nota-se pelas equações 2.1 e 2.2 que a solução é única, logo, pode-se afirmar que, dados arbitrariamente  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $x_1 \neq x_2$ , existe uma, e somente uma, função afim  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .

A equação 2.1 mostra ainda, que a reta não pode ser vertical, pois nesse caso teríamos  $x_1 = x_2$  e a equação não teria solução. Este resultado já era esperado, uma vez que uma função não admite a existência de mais de um valor de  $y$  para um mesmo valor de  $x$ , que é o caso de uma reta vertical. Reciprocamente, pode-se provar que toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.

Da equação 2.1 resulta que o incremento de  $f(x)$  entre dois pontos distintos quaisquer da reta  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  é dado por:

$$f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad (2.3)$$

Logo,

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

Caminhando sobre a reta, partindo de  $(x_1, y_1)$ , fazendo  $x$  variar, a ordenada  $y$  começa com o valor  $y_1$  e sofre um incremento igual ao incremento  $(x - x_1)$  vezes a taxa de variação  $a$ .

$$y = y_1 + a(x - x_1).$$

Fazendo o mesmo, partindo do ponto  $(x_2, y_2)$ , obtém-se

$$y = y_2 + a(x - x_2).$$

Procedendo da mesma forma, pode-se chegar à equação da reta que passa por um ponto qualquer  $(x_0, y_0)$  e tem inclinação  $a$ :

$$y = y_0 + a(x - x_0) \quad (2.5)$$

São casos particulares de função afim,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a função identidade  $f(x)=x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- as translações  $f(x) = x + b$ ;
- as funções lineares  $f(x) = ax$ ;
- as funções constantes  $f(x) = b$ .

## 2.5 Função Linear

Tomando-se uma função afim  $f(x)=ax + b$  e fazendo-se  $b = 0$ , obtém-se uma função linear  $f(x) = ax$ . Geometricamente, o gráfico de uma função linear é uma reta passando pela origem  $(0, 0)$ , pois  $b=0$ . Segundo Lima (2014), a função linear é o modelo matemático utilizado para os problemas de proporcionalidade.

Uma proporcionalidade é uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer números reais  $c, x$ , tem-se  $f(cx) = c \cdot f(x)$  (proporcionalidade direta) ou  $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$  (proporcionalidade inversa). A grandeza  $y$  é diretamente proporcional à grandeza  $x$  quando existe um número  $a$ , chamado a constante de proporcionalidade, tal que  $y = a \cdot x$  para todo valor de  $x$ .

A função linear se aplica a várias situações que envolvem a proporcionalidade, como já foi dito. Em alguns casos, a proporcionalidade é facilmente percebida, por exemplo, se um litro de gasolina custa  $a$  reais então  $x$  litros custam  $y = a \cdot x$  reais. Em algumas situações não se tem certeza se é um caso de proporcionalidade. O teorema mostrado a seguir é chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é ou não linear.

**Teorema Fundamental da Proporcionalidade:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1)  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(2) Pondo  $a = f(1)$ , tem-se  $f(x) = a \cdot x = ax$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(3)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

O teorema vale também para funções decrescentes; neste caso  $a < 0$ .

Para que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função linear ela deve satisfazer duas condições:

(1)  $f$  deve ser crescente ou decrescente.

(2)  $f(n \cdot x) = n f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Se as grandezas são números positivos, verificar para todo  $n \in \mathbb{N}$  em vez de para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 2.6 Regressão linear

Em situações da vida real, geralmente os pares ordenados  $(x, y)$  relativos a um determinado fenômeno, não correspondem exatamente aos pontos do gráfico de uma determinada função. Ou seja, se for traçada a curva de uma determinada função para representar a relação entre as variáveis, ela não passará sobre todos os pontos.

Quando a relação é linear, é bastante comum se traçar manualmente uma reta que se “ajusta” aos pontos, usando o bom senso, a intuição visual.

Quando se pretende uma solução mais precisa, recorre-se a programas (*softwares*) disponíveis na internet ou no mercado de informática. Eles são capazes de representar a relação entre as variáveis por meio de uma equação, por sua vez, associada a um tipo de função, não somente a linear ou afim, mas também a exponencial, a logarítmica e a polinomial.

Esses *softwares* utilizam a Regressão Linear, método que permite:

- determinar como duas ou mais variáveis se relacionam;
- estimar a função que determina a relação entre as variáveis;
- usar a equação ajustada para prever valores da variável dependente.

Para estimar os parâmetros do modelo de Regressão Linear, o método mais utilizado é o dos mínimos quadrados. Neste método, os parâmetros são obtidos de forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima, onde, por desvio entende-se a diferença entre o valor observado e o valor estimado da variável dependente. Apesar do nome ser Regressão Linear, pode-se ajustar uma curva de outras funções, que não a função linear. Mais detalhes podem ser consultados na literatura, por exemplo, em [Edti \(2015\)](#) ou em [Oliveira \(2007\)](#).

Um dos resultados da regressão é o  $R^2$ , chamado coeficiente de determinação. Quanto mais próximo de 100%, maior a representatividade da variável  $x$  ao explicar o comportamento da variabilidade que ocorre com a variável  $y$ .

Um exemplo de software que permite o ajuste de curvas é o Microsoft Excel. Após construir o gráfico com os pontos  $(x,y)$ , é possível escolher o tipo de função à qual se quer ajustar os dados e adicionar uma “linha de tendência”. Pode-se solicitar a exibição da equação no gráfico, assim como o coeficiente  $R^2$ . É possível também extrapolar os valores da função fora dos limites dos dados observados, tanto para a frente como para trás.

**Exemplo 2.4.** (Autoria própria)

Considere-se um carro que é utilizado por uma pessoa somente na cidade. Devido à rotina, as distâncias percorridas a cada período de tempo, um mês por exemplo, não variam muito. O Gráfico 6 foi construído a partir das anotações feitas pelo proprietário nas datas em que abasteceu o carro.

Gráfico 6 – Quilometragem do carro versus tempo



Fonte – Autoria própria

*Pede-se:*

- determinar uma equação que exprima a relação entre a quilometragem e o tempo;
- determinar a quilometragem 365 dias após o início dos registros;
- determinar a média de quilômetros rodados por dia no período dos registros.

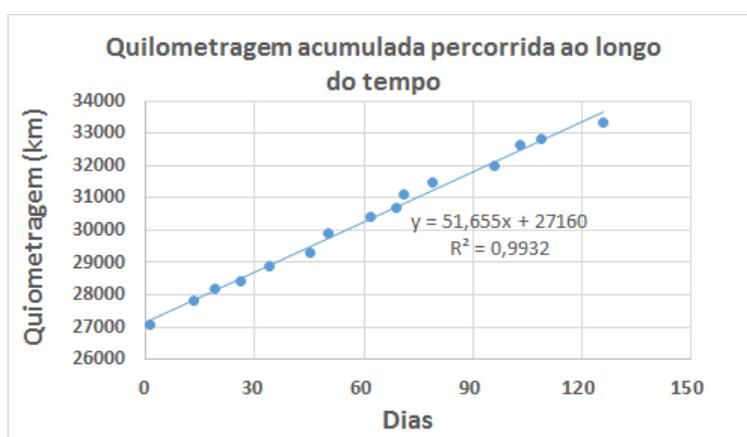
Resolução:

O gráfico mostra no eixo OX o tempo, em dias, a partir da última revisão; no eixo OY a quilometragem na data em que o carro foi abastecido. Pode-se observar que os pontos do gráfico seguem a forma aproximada de uma reta, o que era de se esperar devido à

regularidade na utilização do carro. Portanto, o primeiro passo será traçar uma reta que se ajuste aos dados. Pode-se fazer isso manualmente ou utilizando um software comercial.

Mostra-se aqui como ajustar uma reta utilizando-se o software Microsoft Excel, assumindo-se que o usuário já tenha familiaridade com o Excel. Preenche-se uma tabela com os dados, no Excel, e constrói-se um gráfico do tipo “gráfico de linha”. Na aba Design, escolhe-se Adicionar Elemento Gráfico e em seguida Linha de Tendência. Escolhe-se o tipo de função, Linear, e já aparece desenhada a reta que se ajusta aos dados. Selecionando a linha de tendência com o botão direito do mouse, pode-se mandar exibir a equação no gráfico, bem como o coeficiente  $R^2$ . O resultado, mostrado no Gráfico 7 ajudará nas respostas às perguntas.

Gráfico 7 – Aplicação da regressão linear para ajustar os dados



Fonte – Autoria própria

a) a relação encontrada foi  $y = 51,655x + 27160$ , onde  $x$  é o tempo, em dias, e  $y$  é a quilometragem. O coeficiente  $R^2$  encontrado foi de 0,9932, bastante próximo de 1, o que indica que a variável tempo explica fortemente o valor da variável quilometragem, ou seja, a quilometragem é bastante influenciada pelo tempo.

b) para estimar a quilometragem no tempo  $x = 365$  dias, substituímos o valor de  $x$  por 365 na equação encontrada:

$$y = 51,655 \cdot 365 + 27160 = 46014 \text{ km}$$

c) a média de quilômetros rodados por dia é a taxa de variação da quilometragem em relação ao tempo, logo, é igual ao coeficiente angular da reta ajustada aos dados. Assim, a média é de 51,655 km/dia.

## 2.7 Linearização de um gráfico

No estudo de fenômenos é comum a existência de casos em que duas grandezas  $x$  e  $y$  se relacionam linearmente, ou seja, a relação pode ser representada pela equação de uma reta, do tipo  $y = A + Bx$ . Nesses casos, faz-se um ajuste manual ou uma regressão linear para encontrar as constantes  $A$  e  $B$  da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, conforme descrito anteriormente.

Porém, há casos em que a relação entre as grandezas não é linear, sendo necessário aplicar um processo de linearização de gráfico, que consiste em encontrar as ordenadas e abscissas adequadas de forma que a relação entre elas seja linear (UFMG, 2018).

Por exemplo, a força elétrica entre duas cargas pontuais é dada pela Lei de Coulomb, cuja expressão é:

$$F = \frac{Kq_1q_2}{r^2} \quad (2.6)$$

onde  $F$  é a força elétrica entre as duas cargas, em Newtons;  $K$  é a constante de proporcionalidade, em  $\frac{N.m^2}{C^2}$ ;  $q_1$  e  $q_2$  são as cargas elétricas, em Coulombs;  $r$  é a distância entre as cargas, em metros.

Dadas as cargas  $q_1$  e  $q_2$ , fazendo  $C = Kq_1q_2 = \text{constante}$ , a força elétrica entre elas, em função da distância entre elas é dada por

$$F = \frac{C}{r^2} \quad (2.7)$$

Definindo-se uma outra variável  $X$  igual ao inverso do quadrado de  $r$ , tem-se uma relação linear entre  $F$  e  $X$ .

$$Y = A + BX, \text{ onde } Y = F, X = \frac{1}{r^2}, A = 0, B = C.$$

Em cada situação, as equações envolvidas na análise do problema irão definir o que deve ser feito para se encontrar novas variáveis, que serão função das anteriores, de forma que elas tenham relação linear entre si.

Vários fenômenos físicos apresentam uma relação entre as variáveis  $x$  e  $y$  do tipo:

$y = ae^{bx}$ , sendo  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. Aplicando o logaritmo em ambos os lados, obtém-se:

$$\ln(y) = \ln(a) + bx.$$

Caso o leitor não esteja familiarizado ainda com a função exponencial e/ou a função logarítmica, poderá consultar o próximo capítulo.

Esta nova equação é do tipo  $Y = A + BX$ , onde  $Y = \ln(y)$ ,  $A = \ln(a)$ ,  $B = b$  e  $X =$

$x$ , portanto, representa uma função afim, cujo gráfico é uma reta. Desta forma, não há dificuldade em se determinar graficamente o valor de  $b$ , que é a taxa de variação (inclinação da reta). Como o valor de  $\ln(a)$  é o coeficiente linear, este valor pode ser lido diretamente no gráfico (valor de  $y$  onde a reta intersecta o eixo  $OX$ ). A partir de  $\ln(a)$ , calcula-se  $a$ .

## Capítulo 3

# FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Estas funções tem aplicações nas Finanças, nos modelos de fenômenos naturais, por exemplo, no modelo que descreve a variação de um capital aplicado a juros fixos, em função do tempo; no modelo de desintegração radioativa, para estimar a quantidade de matéria que já se desintegrou até um certo momento; no modelo de crescimento de uma população; na relação entre os termos de uma Progressão Aritmética e os de uma Progressão Geométrica, e vários outros.

### 3.1 Revisão de potências de expoentes racionais

Com base em [Lima \(2014\)](#), é apresentada a seguir uma breve recapitulação do conteúdo de potências de expoentes racionais. Seja  $a$  um número real positivo. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a potência  $a^n$ , de base  $a$  e expoente  $n$  é definida como o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ . Para  $n=1$ , tem-se  $a^1 = a$ , por definição. Seguindo este raciocínio, tem-se:

$$a \cdot a^n = a^{n+1}$$

Para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

pois em ambos os membros desta igualdade tem-se o produto de  $m + n$  fatores iguais a  $a$ . Para  $m_1, m_2, \dots, m_k$  quaisquer, vale

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\dots+m_k}$$

Se  $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$ , então  $(a^m)^k = a^{mk}$ .

E qual é o valor de  $a^0$ ?

$$a = a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1 = a^0 \cdot a, \text{ logo, temos que } a^0 = 1.$$

Se  $a > 1$ , multiplicando ambos os membros desta desigualdade por  $a^n$ , obtem-se  $a^{n+1} > a^n$ . Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots .$$

Se  $a > 1$ , a sequência formada pelas potências  $a^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é ilimitada superiormente: nenhum número real  $c$ , por maior que seja, pode ser superior a todas as potências  $a^n$ . Dado arbitrariamente  $c \in \mathbb{R}$ , pode-se sempre achar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a^n > c$ .

Lima (2014) prova isto da seguinte forma: escreve-se  $a = 1 + d$ ,  $c > 0$ . Pela desigualdade de Bernoulli, temos  $a^n > 1 + nd$  (pode-se provar esta desigualdade por indução finita em  $n$  ou pela expansão do binômio de Newton). Para qualquer  $c > 0$ , se tomarmos  $n > (c - 1)/d$ , teremos  $1 + nd > c$  e, portanto,  $a^n > c$ .

Portanto, pode-se afirmar que, quando  $a > 1$ , a sequência  $(a^n)$  é crescente e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

Analogamente, se  $0 < a < 1$ , as potências sucessivas  $a, a^2, a^3, \dots$  decrescem abaixo de qualquer cota positiva. Para qualquer número  $c > 0$ , por menor que seja, pode-se sempre achar um expoente  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a^n < c$ .

De fato, sendo  $0 < a < 1$ , escrevendo  $b = 1/a$ , tem-se  $b > 1$ . Logo, pode-se achar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b^n > 1/c$ , ou seja,  $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$ , daí  $a^n < c$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

Dado qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \text{ logo, } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Define-se a potência  $a^r$ , com  $r = m/n$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , como

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

As potências  $a^r$ , com expoente racional, não contêm todos os números reais positivos, porém estão espalhadas por toda parte em  $\mathbb{R}^+$ , desde que  $a \neq 1$ . Esta propriedade está explicitada no lema abaixo, cuja demonstração será omitida.

**Lema 3.1.** Fixado o número real positivo  $a \neq 1$ , em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$  existe alguma potência  $a^r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ .

## 3.2 A Função Exponencial

Seja  $a$  um número real positivo,  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$ ,  $f: \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^+$ , indicada pela notação  $f(x) = a^x$ , deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ :

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;

desta propriedade decorre que a função exponencial não pode assumir o valor zero, pois, se existir algum  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) = 0$ , então, para todo  $x \in \mathbb{R}$  teria-se  $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$ , logo a função seria identicamente nula (nula para qualquer valor de  $x$ ).

2.  $a^1 = a$  e  $a^0 = 1$ ;

3.  $x < y \implies a^x < a^y$  quando  $a > 1$  e  
 $x < y \implies a^y < a^x$  quando  $0 < a < 1$ ;

4. A função exponencial  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a \neq 1$ , é injetiva. Esta propriedade decorre da sua monotonicidade, explicitada na propriedade anterior. Por exemplo, se  $a > 1$ , então  $x > y \implies a^x > a^y$  e  $x < y \implies a^x < a^y$ , e portanto  $x \neq y \implies a^x \neq a^y$ .

5. A função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = a^x$ , é ilimitada superiormente.

De acordo com o Lema da seção anterior, todo intervalo em  $\mathbb{R}^+$  contém valores  $f(r) = a^r$ . Como visto na seção anterior, se  $a > 1$ , então  $a^x$  cresce sem limites quando  $x > 0$  é muito grande. E se  $0 < a < 1$ , então  $a^x$  cresce sem limites quando  $x < 0$  tem valor absoluto grande;

6. A função exponencial é contínua;

7. A função exponencial  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  é sobrejetiva. Isto é, para todo número real  $b > 0$ , existe algum  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $a^x = b$ .

Portanto, para todo número real positivo  $a$ , diferente de 1, a função exponencial  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  é uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$ , crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$ , com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é,  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ .

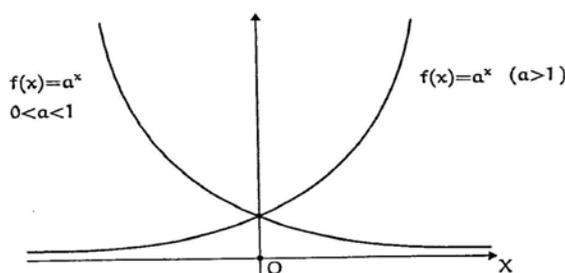
Para auxiliar a construção do gráfico da função exponencial, usamos as seguintes informações:

$$a^0 = 1 \text{ e } a^1 = a$$

se  $a > 1 \Rightarrow f(x)$  é crescente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

se  $0 < a < 1 \Rightarrow f(x)$  é decrescente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

Gráfico 8 – Gráfico da função  $f(x) = a^x$



Fonte – Lima (2014, p. 157)

### 3.3 A Função Logarítmica

De antemão, podemos dizer que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial, por isso deve-se definir o que é função inversa.

Uma função  $g : Y \rightarrow X$  é a inversa de uma função  $f : X \rightarrow Y$  quando se tem  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$ . A função  $g$  é inversa de  $f$  se, e somente se,  $f$  é inversa de  $g$ .

Quando  $g$  é a inversa de  $f$ , tem-se  $g(y) = x$  se, e somente se,  $f(x) = y$ .

Se  $g(f(x)) = x$  para todo  $x \in X$  então a função  $f$  é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

A igualdade  $f(g(y)) = y$ , para todo  $y \in Y$ , implica que  $f$  é sobrejetiva pois, dado  $y \in Y$  arbitrário, tomando  $x = g(y) \in X$ , tem-se  $f(x) = y$ .

Portanto, se a função  $f : X \rightarrow Y$  possui inversa, então  $f$  é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre  $X$  e  $Y$ . Reciprocamente, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma correspondência biunívoca entre  $X$  e  $Y$ , então  $f$  possui uma inversa  $g : Y \rightarrow X$ . Assim, para todo  $y \in Y$  existe algum  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$  e este  $x$  é único, ou seja,  $g(y) = x$ .

Na seção anterior, foi visto que para todo número real positivo  $a \neq 1$ , a função exponencial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$ , é uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$ ,

crecente se  $a > 1$ , decrescente se  $0 < a < 1$ , com a propriedade adicional

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Logo,  $f$  possui uma inversa. A inversa da função exponencial de base  $a$  é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo  $x$  o número real  $\log_a x$ , chamado o logaritmo de  $x$  na base  $a$ . Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a(a^x) = x.$$

Assim,  $\log_a x$  é o expoente ao qual se deve elevar a base  $a$  para se obter o número  $x$ . Ou seja,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Por exemplo:  $\log_5 25 = 2 \iff 5^2 = 25$

Desta definição vem:

1.  $\log_a 1 = 0$ , pois  $a^0 = 1$ , qualquer que seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
2.  $\log_a a = 1$ , pois  $a^1 = a$ , para todo  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
3.  $\log_a a^n = n$ , pois  $a^n = a^n$ , para todo  $a > 0$  e para todo  $n$ .
4.  $a^{\log_a N} = N$ , com  $N > 0$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
5.  $\log_a x = \log_a y \iff x = y$ , com  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Propriedades dos Logaritmos:

1. Logaritmo de um produto

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N), \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

2. Logaritmo de um quociente

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N), \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

3. Logaritmo de uma potência

$$\log_a(M^N) = N \cdot \log_a(M), \text{ para } M > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

4. Mudança de base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ para } N > 0, b > 0, a > 0, b \neq 1 \text{ e } a \neq 1.$$

### 3.4 A Função Exponencial de Base $e$ e a Função Logarítmica de Base $e$

Um caso particular da função exponencial é a função exponencial natural, na qual a base é o número irracional  $e$ , chamado número de Euler, cujo valor aproximado com 10 casas decimais é 2,7182818284. A notação desta função é  $f(x) = e^x$ .

De maneira similar, existe a função logarítmica natural, de base  $e$ , cuja notação é  $f(x) = \log_e x$  ou  $f(x) = \ln(x)$ , que se lê  $f(x)$  é igual ao logaritmo natural de  $x$ .

As funções exponencial natural e logarítmica natural são inversas uma da outra. Portanto,

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{e} \quad \ln(e^x) = x.$$

## Capítulo 4

# FUNDAMENTOS DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Este capítulo apresenta uma visão geral da indústria do petróleo, especialmente a parte da cadeia produtiva que antecede o refino.

### 4.1 Histórico do petróleo

Segundo [Thomas \(2004\)](#), a utilização do petróleo pelo homem remonta a tempos bíblicos, seja para assentar tijolos com o asfalto, calafetar embarcações com o betume, pavimentar estradas, embalsamar os mortos, construir pirâmides ou utilizá-lo para fins bélicos. Sua exploração comercial foi iniciada nos Estados Unidos em 1859, quando o Coronel Drake perfurou um poço de apenas 21 metros de profundidade e produziu  $2 \text{ m}^3/d$  de óleo. Vários eventos, tais como a invenção dos motores a gasolina e a diesel no século XIX e o avanço da petroquímica no século XX, contribuíram para que o petróleo se tornasse cada vez mais importante. O enorme interesse pelos derivados do petróleo fez aumentar a demanda, o que permitiu um rápido avanço da indústria, com o desenvolvimento de novas técnicas de produção. O petróleo se tornou e continua sendo um recurso estratégico muito importante, tendo sido causa de diversos conflitos no mundo, especialmente no Oriente Médio, região detentora de vastas reservas.

[Thomas \(2004\)](#) afirma ainda, que no Brasil a primeira atividade se deu em 1858, com a concessão de direito de extração de mineral betuminoso para fabricação de querosene, na Bahia. O primeiro poço com o objetivo de encontrar petróleo só foi perfurado em 1897. Em 1939 foi perfurado o primeiro poço com sonda rotativa, em Lobato, BA, que encontrou petróleo a uma profundidade de 210 metros, porém este foi considerado antieconômico. Ao final de 1939 aproximadamente 80 poços haviam sido perfurados, porém, o primeiro campo comercial foi descoberto somente em 1941, em Candeias, BA. Um campo é dito comercial quando sua exploração é viável economicamente.

Em 1953, no governo Vargas, foi instituído o monopólio estatal do petróleo com a criação da Petrobras, que deu partida decisiva nas pesquisas do petróleo brasileiro. Grandes descobertas foram feitas pela Petrobras desde então, sendo a da província petrolífera da Bacia de Campos, RJ, na década de 1970, uma das mais importantes. Campos gigantes foram descobertos nas décadas seguintes, também na Bacia de Campos (THOMAS, 2004).

Um novo marco na história do petróleo brasileiro é registrado em 2006 com a descoberta do "Pré-sal", como descrito por Pinto (2016) e Petrobras (2018). Trata-se de uma sequência de camadas de rochas que foram formadas durante a separação dos continentes América do Sul e África há mais de cem milhões de anos. Elas se situam a cerca de 7000 metros de profundidade, em lâminas d'água (profundidade do leito do oceano) superiores a 2000 metros, abaixo de uma camada de sal situada entre 2000 e 3000 metros de profundidade. Os volumes de óleo estimados são gigantescos e a produtividade dos poços altíssima. Condições adversas, tais como a grande profundidade, a longa distância à costa, altas pressões e temperaturas dentro dos poços e a presença de contaminantes no óleo, requerem um alto grau de tecnologia e vultosos investimentos para desenvolver os campos e colocá-los em produção.

A produção de óleo e gás proveniente do pré-sal em março de 2018 foi de 1,745 milhão de barris de óleo equivalente por dia (boe/d), cerca de 54 % da produção nacional, que foi de 3,23 milhões de boe/d. Esta produção é composta por 2,557 milhões de barris de petróleo por dia e 107 milhões de metros cúbicos por dia de gás natural (ANP, 2018a).

A tabela 3 mostra os países que têm produção de petróleo maior do que 1 milhão de barris por dia.

Tabela 3 – Países com maiores produções de petróleo (em milhões de barris por dia)

<b>País</b>	<b>Produção</b>	<b>Data</b>
Rússia	10,556	Mar/18
Estados Unidos	10,467	Abr/18
Arábia Saudita	10,030	Maio/18
Iraque	4,360	Maio/18
Canadá	3,980	Mar/18
Irã	3,806	Maio/18
China	3,758	Mar/18
Emirados Árabes	2,870	Maio/18
Kuwait	2,700	Maio/18
Brasil	2,557	Mar/18
México	1,888	Mar/18
Casaquistão	1,805	Mar/18
Noruega	1,549	Mar/18
Venezuela	1,533	Maio/18
Nigéria	1,516	Maio/18
Angola	1,486	Maio/18
Argélia	1,040	Maio/18

Fonte: [Economics \(2018\)](#)

## 4.2 Geologia do petróleo

As jazidas de petróleo são volumes de óleo e/ou gás que foram aprisionados e acumulados em uma rocha porosa e permeável, chamada rocha-reservatório. O processo de acumulação envolve várias etapas: a geração do petróleo, a sua migração através de outras rochas e o seu aprisionamento na rocha-reservatório por uma rocha impermeável (THOMAS, 2004).

### Geração do Petróleo

Para que ocorra a geração do petróleo é necessário que exista uma rocha com condições adequadas. Esta é chamada de rocha geradora. Na formação das bacias sedimentares, além da deposição de sedimentos, houve também deposição de restos de animais e plantas. Em certos tipos de ambientes, esta matéria orgânica sofreu decomposição, por processos bacterianos e termo-químicos, ativados pelo aumento de pressão e temperatura, e acabaram por se transformar em petróleo, que é constituído basicamente por hidrogênio e carbono e por isso é chamado de hidrocarboneto.

### Migração do Petróleo

Após o processo de geração, pode ocorrer a migração do petróleo para outras regiões. Acredita-se que o petróleo é expulso da rocha geradora talvez pelo microfraturamento já existente na rocha ou devido às altas pressões de compactação existentes. O processo de migração é muito lento, pois o petróleo escoar através dos poros da rocha, que são os espaços vazios entre os grãos (Figura 9).

### Acumulação do Petróleo

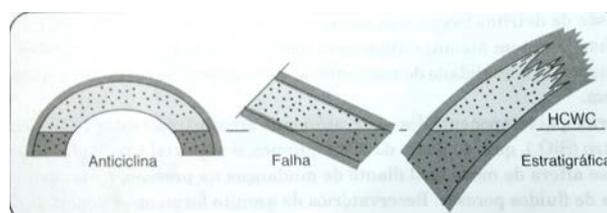
Durante a migração o petróleo encontra uma outra rocha, chamada rocha-reservatório, onde se acumula. Para ocorrer essa acumulação é necessário que o fluxo do petróleo seja interrompido por uma barreira, isto é, uma rocha selante, e que a rocha-reservatório tenha duas características fundamentais: apresentar espaços vazios no seu interior (porosidade) e que estes vazios estejam interconectados (permeabilidade). Os espaços vazios entre os grãos são também chamados de poros. A rocha selante, também chamada de armadilha ou trapa, deve possuir baixa permeabilidade para não deixar o fluido continuar seu caminho. Devido ao fato de que os hidrocarbonetos são mais leves do que a água, eles sempre vão se acumular na parte mais alta da rocha-reservatório. A rocha capeadora, que recobre a rocha permeável, impede a "subida" do óleo.

Segundo [Jahn et al. \(2012\)](#), os principais tipos de trapeamentos são os estruturais e os estratigráficos. São estruturais quando formados por uma deformação da camada de rochas, provocando anticlinais, dobras, domos. São estratigráficos quando outras camadas menos permeáveis selam o reservatório ou há uma redução da permeabilidade da própria camada.

A Figura 7 mostra três dos principais tipos de trapas:

- a) trapas anticlinais: resultado de deformações dúcteis (sem se quebrar) da crosta terrestre;
- b) trapas de falhas: quando as deformações causam quebra da crosta terrestre; a face da falha está em contato com uma rocha selante.
- c) trapas estratigráficas: quando a rocha permeável não tem continuidade lateral. A partir de um certo ponto a rocha é impermeável.

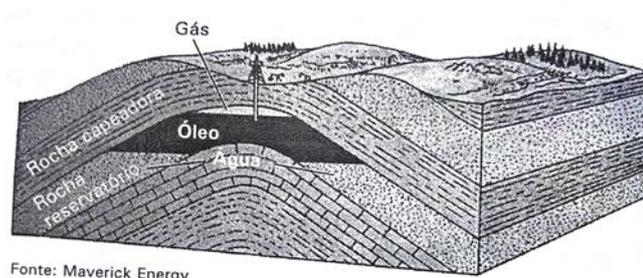
Figura 7 – Principais mecanismos de trapeamento



Fonte – [Jahn et al. \(2012, p. 28\)](#)

A Figura 8 ilustra com mais detalhes uma armadilha do tipo estrutural, a forma mais comum de acumulação de petróleo.

Figura 8 – Armadilha estrutural

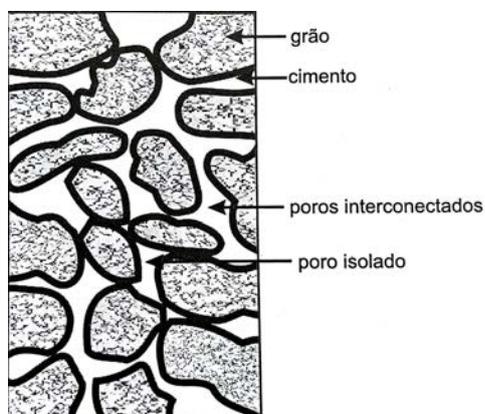


Fonte – Cardoso (2005, p. 18)

#### A rocha-reservatório:

É composta de grãos ligados uns aos outros por um material, chamado cimento (Figura 9). As rochas-reservatório são compostas de sedimentos clásticos ou de carbonatos. As clásticas são compostas de silicato, geralmente arenito. As de carbonatos têm origem em fragmentos de corais e/ou de conchas (JAHN et al., 2012).

Figura 9 – Seção transversal de uma amostra de rocha



Fonte – Rosa, Carvalho e Xavier (2006, p. 93)

A capacidade de armazenamento de fluido das rochas reservatório está relacionada aos espaços vazios entre os grãos (volume poroso). Já a capacidade de fluxo (permeabilidade) está relacionada à quantidade de vazios interconectados.

Define-se porosidade de uma rocha, a relação entre o volume poroso e o volume total da rocha:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t}, \quad (4.1)$$

onde o volume total da rocha é dado pela soma:  $V_t = V_p + V_s$ ,

onde:  $\phi$  é a porosidade;  $V_t$  é o volume total da rocha;  $V_p$  é o volume poroso; e  $V_s$  é o volume de sólidos.

Assim, dizer que a rocha tem porosidade de 30% significa dizer que os espaços vazios ocupam 30% do volume total da rocha. Antes da migração esse espaço vazio era ocupado por água. Com a acumulação, ele passa a ser ocupado também por óleo e/ou gás.

### 4.3 Prospecção do petróleo

Na tentativa de se descobrir uma jazida de petróleo, geofísicos e geólogos se embrenham em longos e dispendiosos estudos e análise de dados, utilizando métodos e técnicas específicos. De acordo com [Thomas \(2004\)](#), os objetivos desse programa de prospecção são fundamentalmente dois:

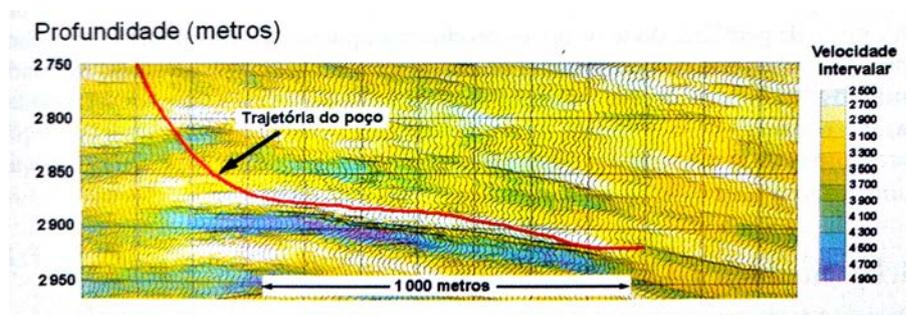
- 1) Localizar dentro de uma bacia sedimentar as situações geológicas que tenham condições para a acumulação de petróleo;
- 2) Verificar qual delas tem mais chance de conter petróleo.

O estudo geológico tem o objetivo de reconstituir as condições de formação e acumulação de hidrocarbonetos em uma determinada área. O geólogo elabora mapas de geologia de superfície a partir de dados obtidos com aerofotogrametria e fotogeologia, infere a geologia de subsuperfície a partir dos mapas de superfície e, se houver, dados de poços. Durante a perfuração de um poço é realizada a coleta de informações que servirão para melhorar a qualidade do estudo geológico, por exemplo, a análise das amostras de calha (fragmentos das rochas perfuradas, trazidos à superfície). Ao final da perfuração são realizadas perfilagens, que são registros obtidos por equipamentos especiais descidos no poço com a finalidade de obter informações detalhadas das características das rochas e dos fluidos encontrados.

No estudo geofísico são adquiridos, processados e interpretados dados também coletados por instrumentos especiais, com o objetivo de obter informações sobre a estrutura e composição das rochas em subsuperfície. Os métodos mais utilizados são os métodos sísmicos, nos quais ondas elásticas são geradas artificialmente, por meio de explosões de cargas de dinamite ou ar comprimido que se propagam pelo interior da Terra, onde são refletidas pelas interfaces das diversas formações rochosas. As reflexões são captadas e registradas por sismógrafos na superfície. Estes dados terão como resultado final imagens das estruturas e camadas geológicas em subsuperfície, com alta definição, sob as mais diversas formas.

A Figura 10 ilustra a aplicação da sísmica como uma poderosa ferramenta para orientação espacial e direcionamento da perfuração de um poço.

Figura 10 – Seção sísmica utilizada para definir a trajetória do poço



Fonte – Thomas (2004, p. 47)

Apesar dos avanços tecnológicos dos métodos geofísicos e geológicos, somente a perfuração de um poço é capaz de revelar se os prognósticos serão ou não confirmados. Os dados obtidos durante a perfuração servirão também para a continuação e aperfeiçoamento dos estudos.

#### 4.4 Perfuração de poços de petróleo

Segundo Cardoso (2005), a perfuração de poços tem diversas finalidades e pode ocorrer em várias fases da exploração e produção de petróleo. Quando o poço é o primeiro a ser perfurado em uma área, ele recebe o nome de poço pioneiro. Quando perfurado para melhorar o conhecimento de uma subsuperfície, ele é chamado de poço estratigráfico; é chamado de poço de extensão, quando para delimitar o tamanho da jazida; o poço de desenvolvimento é aquele perfurado para desenvolver um campo de petróleo; etc.

O fato é que para produzir o petróleo é necessário perfurar um poço que atinja o reservatório e em seguida equipá-lo de forma que o petróleo possa ser elevado, de forma segura e eficiente, até a superfície. O processo de perfuração de um poço de petróleo se dá da seguinte forma, conforme Corrêa (2003) e Thomas (2004).

A perfuração é realizada através de uma sonda, composta por uma estrutura metálica, torre ou mastro, de 30 a 40 metros de altura, e de seus equipamentos auxiliares (Figura 11).

Figura 11 – Tipos de sondas marítimas



Fonte – Thomas (2004, p. 114)

As rochas são perfuradas pela ação da rotação e peso aplicados a uma broca existente na extremidade de uma coluna de perfuração. Esta coluna é constituída basicamente de comandos (tubos de paredes espessas) e tubos de perfuração (tubos de paredes finas).

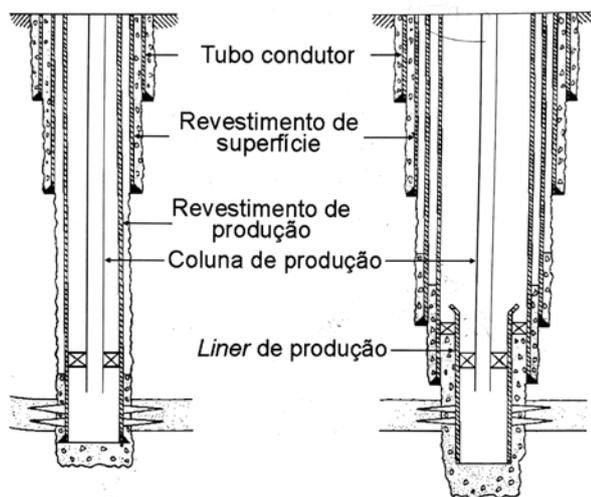
Existem duas maneiras de se fazer a rotação da broca: 1) girando a coluna na superfície; 2) com um motor de fundo, colocado logo acima da broca, acionado pela passagem do fluido de perfuração no seu interior. O fluido de perfuração é injetado para o interior da coluna, aciona o motor, refrigera a broca e retorna à superfície através do espaço anular formado pelas paredes do poço e a coluna, trazendo consigo os fragmentos provenientes do corte de rocha.

A perfuração de um poço envolve várias fases, variando de acordo com as características das camadas de rocha a serem perfuradas e da profundidade final prevista. Geralmente são três ou quatro fases. Na primeira fase, o revestimento é um tubo curto, entre 10 e 50 m de comprimento, chamado tubo condutor, geralmente assentado por cravação ou por jateamento. Nas fases posteriores são executadas as seguintes etapas:

- perfura-se até uma certa profundidade;
- interrompe-se a perfuração e retira-se a coluna de perfuração;
- desce-se uma coluna de revestimento;
- faz-se a cimentação do revestimento, que tem por objetivo isolar as rochas atravessadas, permitindo continuar a operação com segurança.

No início de cada fase é utilizada uma nova broca, com diâmetro inferior ao da anterior, por dentro do revestimento, portanto, os diâmetros vão diminuindo a cada fase, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Esquema do revestimento de poços



Fonte – Thomas (2004, p. 90)

Um exemplo de combinação de diâmetros de brocas e revestimentos comumente utilizada é a seguinte:

Tubo condutor: revestimento de 20";

Fase de superfície; broca de 17 1/2", revestimento de 13 3/8";

Fase intermediária: broca de 12 1/4", revestimento de 9 5/8";

Fase final ou de produção: broca de 8 1/2", revestimento de 7".

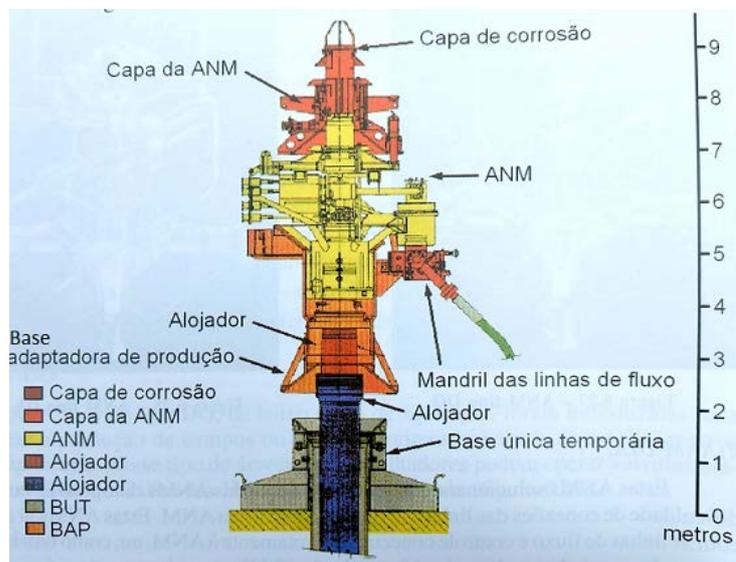
## 4.5 Completação de poços de petróleo

Denomina-se completção o conjunto de operações realizadas para equipar o poço para produzir óleo ou gás, ou injetar fluidos nos reservatórios, de maneira segura e econômica. Ela deve buscar otimizar a vazão de produção, ou de injeção, e minimizar a necessidade de intervenções futuras para a manutenção do poço. Em vista dos altos custos envolvidos, ela deve ser cuidadosamente planejada e executada (THOMAS, 2004).

Nos poços em terra, a cabeça do poço fica na superfície. No mar, em águas rasas, a cabeça pode ficar na superfície, apoiada numa plataforma fixa, que, por sua vez, é apoiada no fundo do mar. Este tipo é chamado de completção seca. Em águas rasas é possível também deixar a cabeça do poço no fundo do mar, na chamada árvore de natal molhada

(ANM). Em águas profundas, a cabeça do poço tem que ficar no fundo do mar, com ANM (Figura 13).

Figura 13 – Árvore de Natal Molhada (ANM)

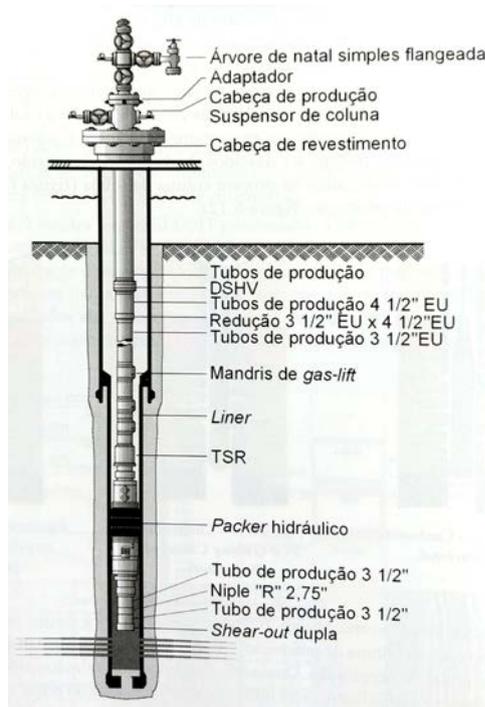


Fonte – Thomas (2004, p. 162)

Para que os fluidos possam entrar no poço e serem produzidos, são feitos furos laterais, ou perfurações, no revestimento, mediante a utilização de cargas explosivas (jatos) disparadas por um equipamento vulgarmente conhecido como "canhão". Por isso essa operação é chamada de canhoneio.

Em seguida, é instalada a coluna de produção (Figura 14), constituída basicamente por tubos metálicos, onde são conectados os demais componentes. É pelo interior desta coluna que os fluidos serão conduzidos à superfície.

Figura 14 – Esquema de uma coluna convencional de produção equipada com sistema de gas-lift



Fonte – Thomas (2004, p. 148)

A vazão de produção de um poço depende de vários fatores, sendo um deles o diâmetro da coluna de produção. Em um exemplo apresentado por Beggs (2003, p. 135), fez-se estimativas das vazões de um poço para três diâmetros diferentes de coluna de produção. Os resultados são mostrados na tabela 4. Pela diferença entre os valores apresentados, vê-se que é fundamental utilizar o diâmetro adequado. De uma maneira geral, até um certo limite, diâmetros maiores proporcionam vazões maiores devido à menor perda de carga por fricção.

Tabela 4 – Vazões de produção (em barris/dia), para vários diâmetros de coluna (em polegadas) em um determinado poço

Diâmetro externo	Diâmetro interno	Vazão
2 3/8	1,995	800
2 7/8	2,441	1260
3 1/2	2,992	1830

Fonte: Beggs (2003, p. 135)

A título de curiosidade, uma coluna de diâmetro 5 1/2 " pesa 17 lbf por pé (30,48cm) de comprimento, o que corresponde a aproximadamente 25 quilogramas-força por metro de comprimento. Ou seja, uma coluna com este diâmetro e com 2000 m de comprimento (poço vertical de 2000 m de profundidade) pesa em torno de 50 toneladas-força.

## 4.6 Avaliação de formações

Segundo [Thomas \(2004, p. 121\)](#), "Avaliação de Formações é o conjunto de atividades e estudos que visam definir, em termos qualitativos e quantitativos, o potencial de uma jazida petrolífera, isto é, a sua capacidade produtiva e a valoração de suas reservas de óleo e gás". Dentre os resultados obtidos estão a identificação de intervalos porosos e permeáveis, determinação da litologia (tipo de rocha), identificação dos fluidos contidos nos reservatórios e estimativa de seus percentuais, determinação da produtividade dos reservatórios, etc.

Os principais tipos de avaliação são as perfilagens, os teste de formação e os registros de pressão.

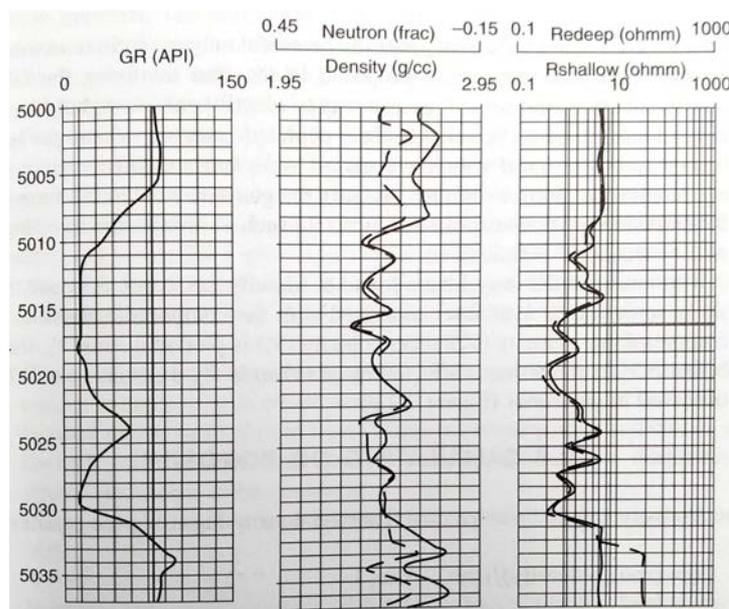
### Perfilagens:

Podem ser a poço aberto ou a poço revestido. Denomina-se poço aberto, a situação em que o poço já foi perfurado mas não foi revestido ainda. Logo, a perfilagem a poço aberto é realizada antes da descida do revestimento no poço. O principal objetivo de uma perfilagem é fornecer um registro contínuo, expedito e confiável das propriedades físicas das rochas atravessadas pelo poço e dos fluidos nelas contidos. A perfilagem, a poço aberto ou não, é realizada através do posicionamento em uma determinada profundidade, ou do deslocamento contínuo ao longo do intervalo que se quer avaliar, de um equipamento dentro do poço. O equipamento pode ser preso a um cabo ou acoplado a uma coluna. Ele obtém e registra dados a respeito do poço, dos fluidos ou da formação rochosa ao longo da profundidade. Ao final, após o processamento dos dados, se obtém uma espécie de gráfico, no qual o eixo vertical representa a profundidade e o eixo horizontal registra o valor do parâmetro a cada profundidade, como mostrado na Figura 15.

Como se vê na figura, as curvas dos perfis podem ser apresentadas lado a lado, em grupos, chamados de trilhas. Na trilha da esquerda está o perfil Raios Gama (GR), na central o Neutrônico e o Densidade, e na trilha da direita o Resistividade Profundo e o Resistividade Raso. Cada perfil pode ter sua própria escala.

Obtém-se ao longo da profundidade, dados que são transformados em informações sobre litologia (tipo de rocha), espessura das camadas, porosidade, prováveis fluidos existentes nos poros e seus percentuais, diâmetro do poço, etc. Sua limitação é a pequena extensão do raio de investigação lateral, ou seja, os dados obtidos se referem a uma região

Figura 15 – Exemplo de um conjunto de perfis obtidos a poço aberto



Fonte – Darling (2005, p. 33)

bem próxima do poço (decímetros ou metros, a depender do perfil). Isso significa dizer que uma imensa área entre os poços não é investigada pelos perfis, sendo necessário extrapolar os dados obtidos em cada poço para construir um modelo do reservatório como um todo.

A maioria dos perfis pode ser corrida a poço aberto ou a poço revestido, havendo neste último uma atenuação dos valores devido à barreira do revestimento e do cimento, maior ou menor a depender do tipo de perfil. Os principais tipos de perfis são, conforme Thomas (2004) e Flores et al. (2003):

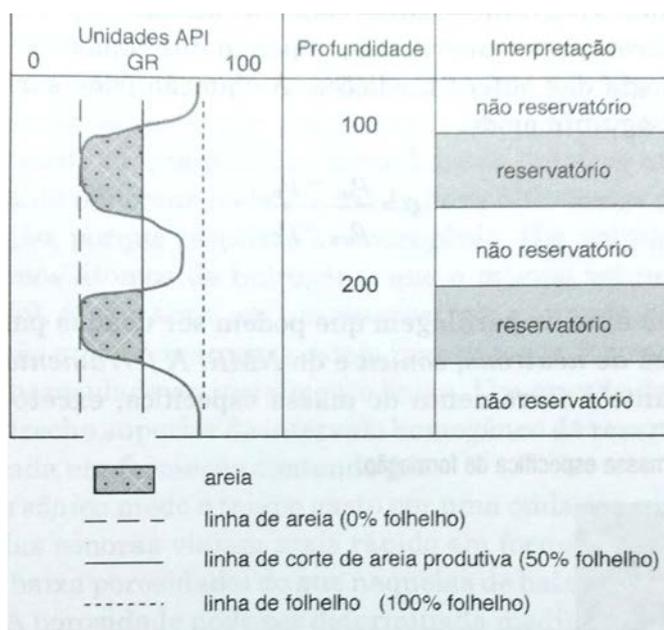
1) Potencial Espontâneo - SP (*Spontaneous Potential*): mede a diferença de potencial entre dois eletrodos, um de referência na superfície e outro móvel dentro do poço. A diferença de potencial na formação é criada a partir de movimentações iônicas entre fluidos de diferentes salinidades. As condições necessárias para ocorrer essa movimentação são: a) o contraste de salinidade entre a água da lama de perfuração que se infiltrou na formação e a água da própria formação e b) a existência de porosidade e permeabilidade na rocha. Portanto, não há deflexão na curva do SP em frente a rochas impermeáveis, como os folhelhos, daí a importância deste perfil para identificar camadas permoporosas. Uma deflexão na curva do SP para a direita indica a presença de água doce e para a esquerda indica água salgada.

2) Caliper: mede o diâmetro interno do poço; trechos com desmoronamento influenciam o resultado dos perfis, assim, a identificação desses trechos permite fazer correções nas leituras dos perfis.

3) Raios Gama - GR: mede a radioatividade natural da rocha, proveniente dos raios gama, emitidos principalmente pelos elementos Potássio (K), Urânio (U) e Tório (Th). Cada tipo de rocha emite quantidade e espectro de radiação gama natural diferente de outro. Folhelhos emitem mais raios gama do que outras rochas sedimentares, uma vez que o potássio radioativo é um componente comum no teor de argila do folhelho e também porque a capacidade de mudança catiônica da argila faz com que ela adsorva urânio e tório, também radioativos. Essa diferença de radioatividade permite que a ferramenta de raio gama diferencie entre folhelho e não folhelho.

É importante identificar os folhelhos, pois estes são rochas impermeáveis e não porosas, portanto não se constituem em reservatórios (Figura 16). Por outro lado, os arenitos tem baixa argilosidade e geralmente são bons reservatórios. Além disso, folhelhos, por serem rochas selantes, desempenham um papel importante no isolamento hidráulico entre camadas, necessário para prevenir produção de fluidos indesejáveis (gás ou água).

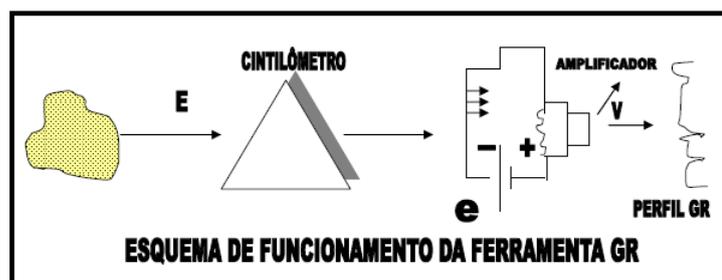
Figura 16 – Interpretação de um registro de Raios Gama



Fonte – Jahn et al. (2012, p. 185)

A perfilagem é realizada baixando pelo poço uma ferramenta que registra a radiação gama enquanto se desloca. Como mostra a Figura 17, o equipamento consiste em um cintilômetro com um cristal capaz de emitir um fóton ao ser atravessado pelo raio gama. O fóton é detectado por um fotomultiplicador, produzindo um impulso elétrico que é registrado e transformado em uma curva.

Figura 17 – Princípio de funcionamento da ferramenta de raios gama



Fonte – Flores et al. (2003, p. 17)

Um fator que afeta a medição da contagem de raios gama é a densidade da rocha. Rocha mais densa, com poros menores, deixa passar menos radiação, por isso, parecerá menos radioativa do que ela realmente é. Por isso devem ser feitas correções baseadas nos valores de densidade/porosidade obtidos com outros perfis.

Durante a vida produtiva do poço, pode ser corrido um novo perfil de raios gama e compará-lo com o perfil original. Apesar da atenuação da radiação devido ao revestimento e ao cimento, qualitativamente poderá se perceber uma variação, pois haverá um aumento na contagem de raios gama nos intervalos onde houve maior movimentação de água. Isso ocorre devido à precipitação de sais radioativos presentes nos fluidos da formação, principalmente na água. O resultado do perfil, portanto, permite identificar zonas produtoras de água, possíveis candidatas a serem isoladas.

#### 4) Raios Gama Espectral

Como afirmam Flores et al. (2003), o perfil de Raios Gama Espectral possibilita medir separadamente a radioatividade de cada um dos três principais elementos produtores de radioatividade, o Potássio (K), o Urânio (U) e o Tório (Th). Em seu decaimento até isótopos estáveis, esses três elementos passam por isótopos intermediários e produzem raios gama com diferentes níveis de energia, o que torna possível identificar a proporção de cada um.

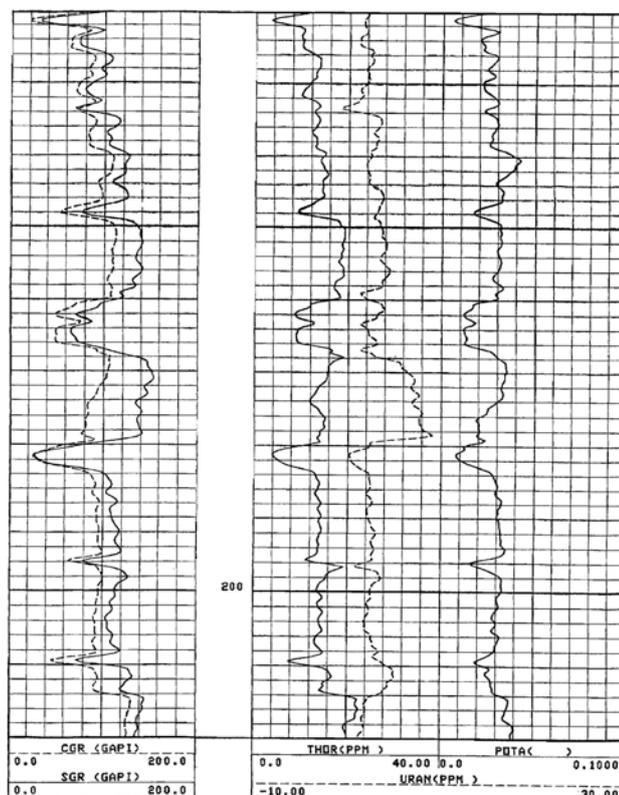
A ferramenta é composta por um cartucho com um detector, que consiste em um cristal de iodeto de sódio (NaI) ativado com tálio (Tl), acoplado a um fotomultiplicador (cintilômetro), a um amplificador e a um analisador de múltiplos canais.

A utilidade dessa distinção está no fato de que o conhecimento da ocorrência desses elementos permite eliminar a radioatividade que não corresponde à argilosidade de folhelhos. Estes elementos estão presentes em determinados ambientes, por exemplo, o

tório é insolúvel em água e está associado a folhelhos e minerais pesados; o Urânio não está necessariamente relacionado a folhelho, seus sais são solúveis em água e em óleo e é encontrado em camadas de fontes orgânicas; o Potássio está associado a folhelhos e pode estar presente em fluidos utilizados pelas sondas durante as operações (contaminação do fluido da formação).

A Figura 18 mostra um exemplo de correção feita a partir da identificação de um intervalo com alto teor de urânio, que, como se sabe, não está associado a argilosidade.

Figura 18 – Exemplo de um perfil Raios Gama Espectral



Fonte – Smolen (1995, p. 34)

Na trilha da esquerda são mostradas duas curvas, onde a linha cheia representa o GR sem correção e a linha tracejada o GR corrigido. Na trilha da direita são mostradas três curvas, na seguinte ordem, da esquerda para a direita: Tório, Urânio e Potássio. Percebe-se que há um intervalo com alto teor de urânio, que provocou uma falsa leitura de argilosidade, exigindo que seja feita a devida correção no perfil de raios gama.

Em outros casos, pode acontecer de se ter uma alta radioatividade de Potássio, o que é indicativo de que houve contaminação da formação por lama de perfuração, logo a radioatividade não está associada a argilosidade. Nestes e em outros casos, é possível eliminar a parcela da radioatividade que não é proveniente da formação rochosa e estimar mais precisamente a argilosidade.

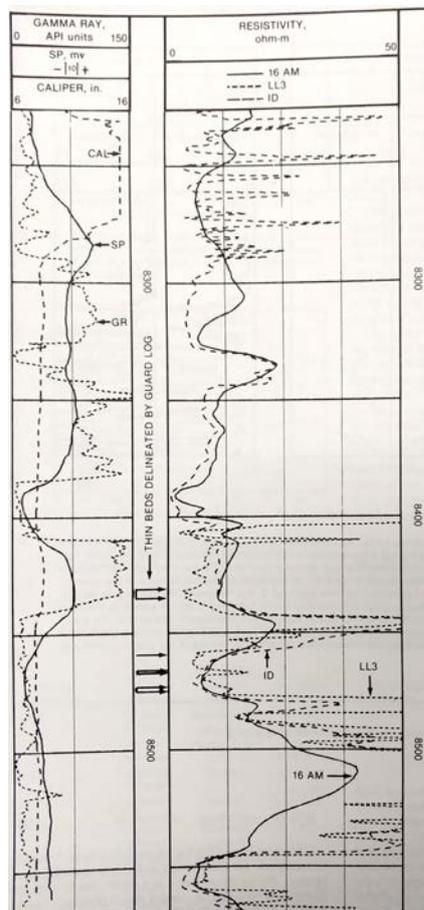
Assim como é feito com o perfil de raios gama, durante a vida produtiva do poço pode ser corrido um perfil de raios gama espectral e compará-lo com um perfil anterior, seja o perfil original de raios gama ou um raios gama espectral anterior, com os mesmos objetivos já descritos anteriormente.

5) Resistividade: mede a resistividade da formação, ou seja, a dificuldade de circulação da corrente elétrica através da rocha e dos fluidos nela contidos. Sabe-se que os hidrocarbonetos são maus condutores de eletricidade, apresentando resistividades altas, e que a água salgada, comum nos reservatórios de petróleo, apresenta baixa resistividade, devido aos ions de  $Na^+$  e  $Cl^-$  dissolvidos. Portanto, uma rocha portadora de óleo apresenta uma resistividade mais elevada do que uma outra, de igual natureza e mesma porosidade, mas saturada por água salgada. Um outro fator que influencia a resistividade é a compactação, densidade e porosidade da rocha. Quanto mais densa, compacta e de menor porosidade for a rocha, maior será sua resistividade. Este tipo de perfil permite, além da identificação da litologia e do tipo de fluido, o cálculo da saturação de água na formação.

Segundo Flores et al. (2003), existe uma grande variedade de ferramentas que medem a resistividade, que podem ser classificadas em dois grupos, os perfis elétricos convencionais e os perfis de indução. Os convencionais medem diretamente a diferença de potencial entre dois eletrodos quando se passa uma corrente elétrica através da formação. Nos de indução uma antena transmissora induz uma corrente elétrica na formação rochosa, que produz um campo magnético, que é captado por uma antena receptora. A condutividade registrada é proporcional ao campo magnético e é transformada em resistividade.

A Figura 19 mostra um conjunto de perfis Raios Gama (GR), Potencial Espontâneo (SP) e Caliper na trilha 1 (da esquerda) e Resistividade na trilha da direita.

Figura 19 – Exemplo de uma suíte de perfis obtidos a poço aberto



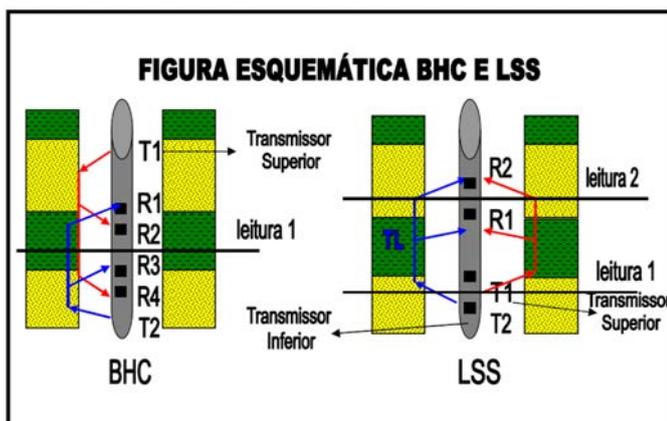
Fonte – Jorden e Campbell (1986, p. 60)

## 6) Perfis de Porosidade

6.1 - Acústico ou Sônico: determina o tempo que a onda sonora necessita para percorrer a distância de um pé (2,54cm) na formação rochosa. A velocidade do som é maior nos sólidos do que nos líquidos, maior nos líquidos do que nos gases. Maior também em rochas mais compactas, mais densas, de menor porosidade, por exemplo, a velocidade é maior em calcários, dolomitas e anidritas do que em arenitos, e maior nestes do que em folhelhos.

A ferramenta emite uma onda sonora que viaja pela formação e é detectada por receptores. É medido o tempo de trânsito DT decorrido entre a emissão da onda e a detecção do sinal, a partir do qual se calcula a velocidade. O resultado deste perfil, combinado com outros tipos de perfis, permite estimar a densidade e a porosidade, identificar os tipos de rocha atravessados e os fluidos nela existentes. A Figura 20 compara esquematicamente as ferramentas BHC e LSS, dois tipos de perfis sônicos.

Figura 20 – Ferramentas BHC e LSS



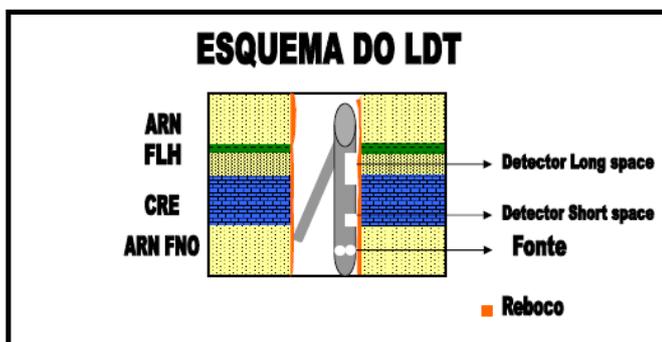
Fonte – Flores et al. (2003, p. 37)

Algumas ferramentas podem apresentar outras características adicionais. O DSI, por exemplo, consegue estimar a razão de Poisson, que é uma propriedade das rochas, utilizada em estudos de Geomecânica.

## 6.2 - Radioativos

6.2.1 - Perfil de densidade (LDT, RHOB): a ferramenta emite raios gama de média energia de uma fonte radioativa (Co ou Cs) colocada em um patim que corre colado à parede do poço, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Esquema da ferramenta do perfil de densidade LDT



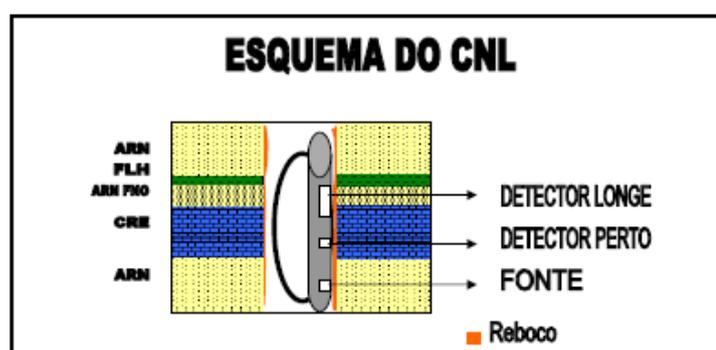
Fonte – Flores et al. (2003, p. 44)

A colisão dos raios gama com os elétrons da formação produz dois tipos de interação: o Efeito Compton, quando os raios gama incidentes colidem com os elétrons da

formação e vão perdendo energia; e o Efeito Fotoelétrico, quando o raio gama incidente apresenta baixo nível de energia, devido ao efeito Compton, e é absorvido pelo átomo durante a colisão. A ferramenta detecta os raios gama defletidos pelos elétrons orbitais dos elementos componentes das rochas, oriundos do Efeito Compton. A quantidade de raios gama detectados é proporcional à densidade da formação. O perfil permite estimar a porosidade, identificar a litologia e as zonas de gás (em conjunto com o perfil neutrônico).

6.2.2 - Perfil Neutrônico: também conhecido como Neutrão (CNL, NPHI): determina a porosidade, com base na quantidade de hidrogênio existente em uma rocha reservatório. A ferramenta emite continuamente nêutrons de alta energia através de uma fonte radioativa (Figura 22).

Figura 22 – Esquema da ferramenta CNL (perfil neutrônico)

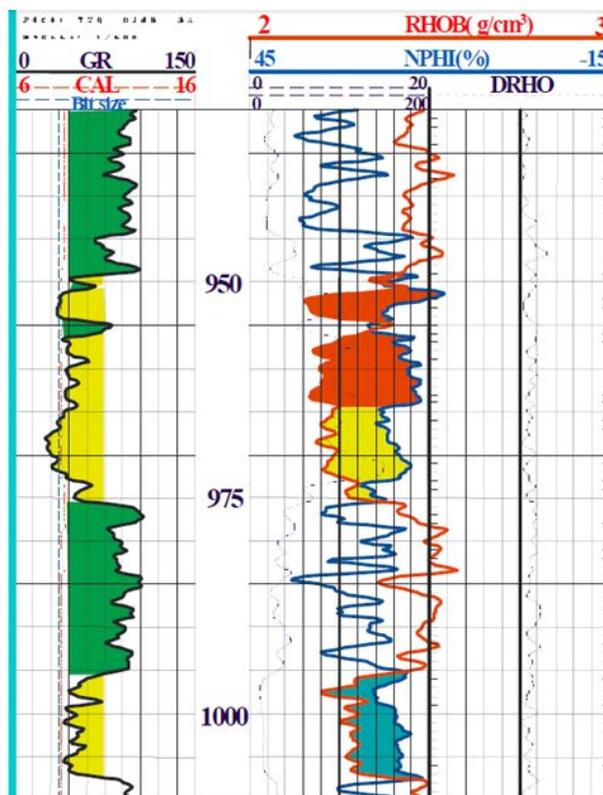


Fonte – Flores et al. (2003, p. 47)

Esses nêutrons se chocam com os núcleos dos átomos da formação e vão perdendo parte de sua energia a cada colisão. A quantidade de energia perdida será proporcional à massa do núcleo com o qual se choca e será maior quando o choque ocorrer com átomo de hidrogênio, pois este possui massa atômica praticamente igual à do nêutron. Assim, a velocidade da perda de energia é proporcional à quantidade de hidrogênio da formação. Os nêutrons perdem energia até chegar ao nível chamado termal, de baixíssima energia, quando então se dispersam sem perder mais energia, até que sejam capturados por núcleos de átomos tais como Cl, H, Si. A ferramenta detecta os nêutrons termais que não foram capturados. A quantidade desses nêutrons termais é inversamente proporcional à concentração de hidrogênio no fluido contido nos poros da rocha. Segundo Smolen (1995), água e óleo têm a mesma concentração de hidrogênio, por isso, se o espaço poroso estiver com óleo ou água, o perfil vai medir a porosidade. Porém, se o fluido for o gás, que tem uma concentração bem mais baixa de hidrogênio, o perfil vai acusar uma alta contagem de nêutrons. Isso permite diferenciar intervalos com gás daqueles com óleo.

A Figura 23 apresenta perfis corridos em um poço entre as profundidades de 930 m e 1010 m. Segundo o autor, estes perfis permitiram determinar a posição do contato gás/óleo:

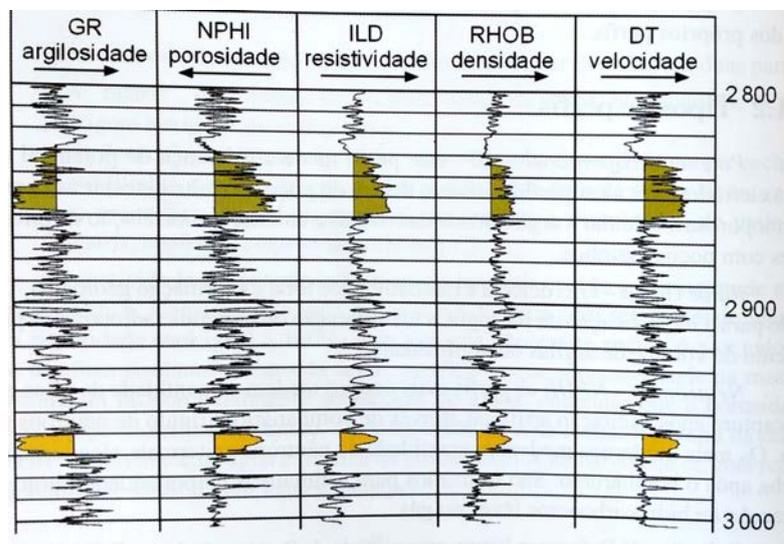
Figura 23 – Perfil composto LDT/CNL/Indução/GR/CAL; identificado contato gás/óleo



Fonte – Flores et al. (2003, p. 54)

A Figura 24, mostra exemplos de perfis corridos em um poço exploratório.

Figura 24 – Perfis a poço aberto: Raios Gama (GR), neutrão NPHI, resistividade ILD, densidade RHOB, sônico DT



Fonte – Thomas (2004, p. 124)

A interpretação dos perfis, segundo Thomas (2004), é de que no perfil de raios gama (GR) é possível distinguir dois corpos de baixa argilosidade, portanto, arenosos e bons candidatos a serem reservatórios. Analisando cada um dos intervalos, tem-se:

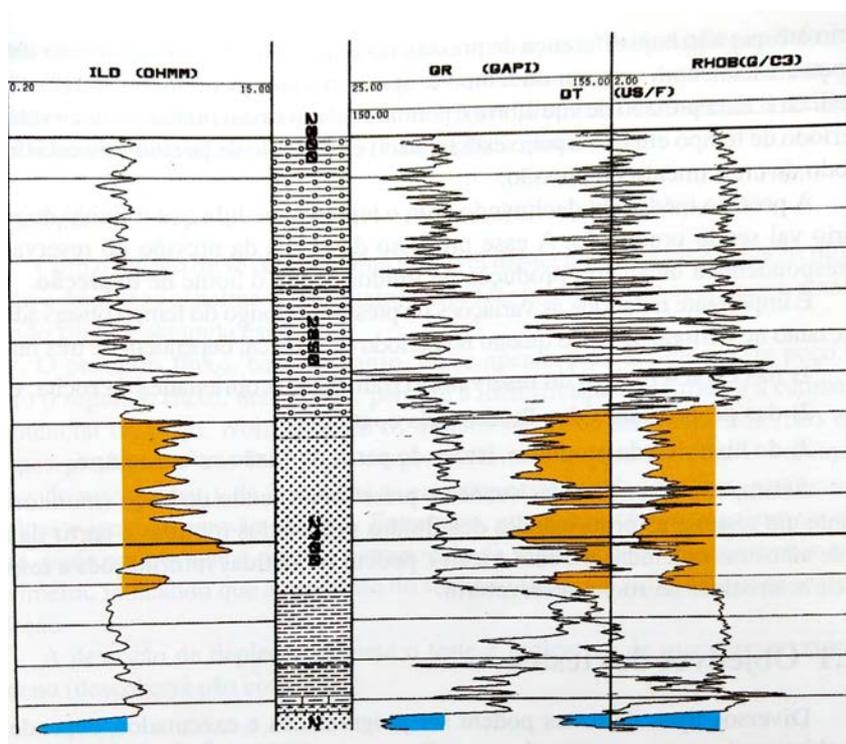
Intervalo 2830/2860m: arenito argiloso no topo (altos valores de raios gama), tornando-se mais limpo (baixos valores de raios gama) para a base. Os perfis NPHI, RHOB e DT mostram que a porosidade é baixa, diminuindo para a base. O perfil de resistividade, ILD, mostra valores influenciados pela porosidade, sendo difícil avaliar qual seria o fluido.

Intervalo 2960/2970m: arenito bastante limpo. A porosidade é baixa, estimada em 10%. O perfil de resistividade mostra valores influenciados pela porosidade, sendo difícil avaliar qual seria o fluido.

Com todas estas informações em mãos, concluiu-se que estes intervalos seriam reservatórios de baixa produtividade, caso sejam portadores de hidrocarbonetos. A decisão adequada seria abandonar o poço por falta de intervalos de interesse para a produção.

A Figura 25 mostra o perfil de um poço no qual um dos reservatórios é portador comercial de óleo.

Figura 25 – À esquerda: resistividade ILD; no meio: GR e sônico DT; à direita: densidade RHOB)



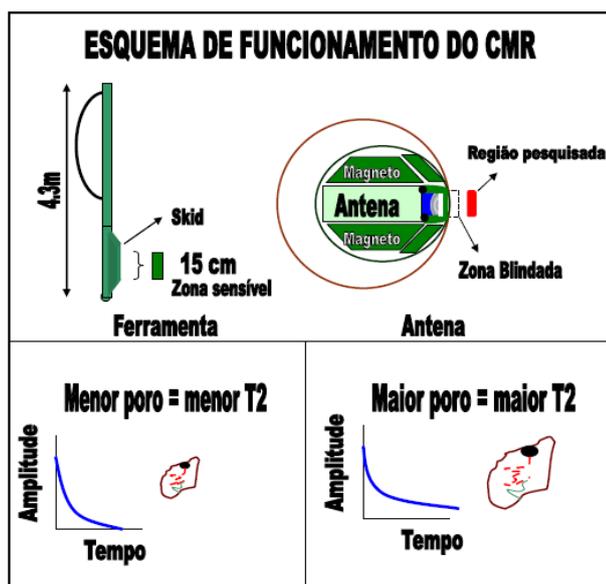
Fonte – Thomas (2004, p. 125)

De acordo com Thomas (2004), os perfis de densidade (RHOB) e sônico (DT) indicam que existem arenitos porosos a partir de 2870 metros de profundidade. Pelo perfil de Raios Gama (GR), o corpo superior (amarelo) é bastante argiloso e o corpo inferior (azul) é limpo. O perfil de resistividade (ILD) mostra que o corpo superior tem resistividade alta, possível indicação da presença de hidrocarbonetos, enquanto que o corpo inferior apresenta resistividade muito baixa, indicando a presença de água salgada. A partir destas indicações dos perfis e de indícios da presença de hidrocarbonetos durante a perfuração, foi realizado um teste de formação no intervalo superior, que confirmou a existência de uma jazida comercial de petróleo.

7 - Ressonância Magnética: Segundo Flores et al. (2003), este perfil é utilizado para obter microporosidade, porosidade efetiva e estimativa de permeabilidade.

Na ferramenta, há magnetos que geram um campo magnético que alinha os prótons de hidrogênio presentes na formação (Figura 26). Entre esses magnetos há uma antena que emite pulsos de radiofrequência que deslocam os prótons 90° em relação à direção imposta pelos magnetos.

Figura 26 – Esquema de uma ferramenta de perfilagem de ressonância magnética



Fonte – Flores et al. (2003, p. 76)

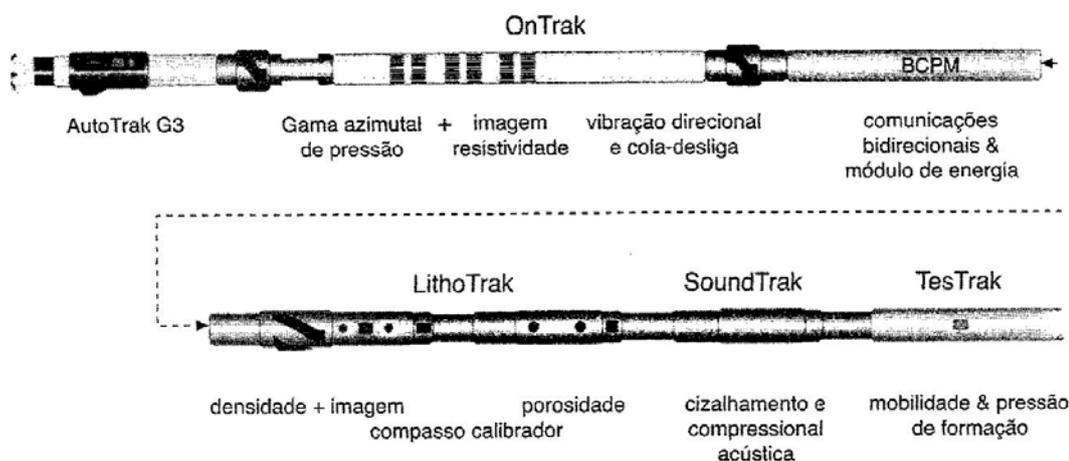
O movimento de precessão, retorno ao alinhamento inicialmente produzido pelos magnetos, gera um sinal que é detectado pela antena ao longo de pulsos de medição. O tempo da razão de decaimento de energia destes sinais é denominado de relaxação transversal ( $T_2$ ) e é função da distribuição de poros na formação e não da litologia. Através da curva de distribuição de  $T_2$  é possível chegar aos parâmetros de reservatório alvos de investigação.

8 - MDW/LWD: segundo Jahn et al. (2012), a medição simultânea à perfuração (*measurement while drilling* - MWD) surgiu na década de 1980 e se restringia à inserção de equipamentos na coluna de perfuração de forma a medir e registrar dados direcionais (inclinação, profundidade medida e profundidade real do poço) e raios gama. Os dados eram recuperados quando se retirava a coluna do poço.

A tecnologia evoluiu e chegou ao estágio em que a maioria das ferramentas convencionais de perfilagens por cabos pode ser substituída por uma equivalente de LWD (*Logging while drilling*). Os dados podem ser transmitidos em tempo real para a superfície ou gravados e recuperados com a retirada da coluna.

A Figura 27 mostra um exemplo de ferramenta desenvolvida por uma das companhias de serviço.

Figura 27 – Esquema de uma das ferramentas de LWD



Fonte – Jahn et al. (2012, p. 174)

Vantagens da perfilagem LDW sobre a perfilagem a cabo:

- a maior vantagem é que grande parte das informações são transmitidas em tempo real à superfície, permitindo identificar mais cedo pontos de interesse, zonas de alta pressão, trechos fora do esperado e assim, rapidamente fazer correções ao projeto de perfuração, se necessário, ao contrário da perfilagem a cabo, que só é realizada ao final da perfuração;
- ao contrário da perfilagem a cabo, a perfilagem LDW pode ser realizada em poços de alta inclinação, cada vez mais utilizados;
- a eliminação ou diminuição do tempo que a perfuração fica parada para se realizar a perfilagem, tempo este em que o poço fica exposto aos fluidos de perfuração, sujeito à ocorrência de dano à formação.

#### 9 - Pulso de Nêutrons de Captura (PNL) e Razão Carbono/Oxigênio (C/O)

9.1 - De acordo com Smolen (1995), o PNL é um dos mais importantes instrumentos para avaliação das formações através do revestimento. Ou seja, o perfil é corrido com o poço revestido, apresentando a vantagem adicional de poder ser realizado com o poço produzindo.

O PNL é usado para determinar saturação de água, porosidade e presença de gás na formação. Estes parâmetros são úteis para localizar intervalos "lavados" (o óleo foi deslocado e substituído por água), identificar contato entre fluidos (gás/óleo, óleo/água), identificar movimento de fluidos para dentro do poço, principalmente os indesejáveis (água ou gás). A perfilagem pode ser feita de tempos em tempos e feita a comparação entre elas,

para que sejam identificadas mudanças e tomadas as providências para correção, se for o caso.

Ainda segundo o autor, a ferramenta não contém fonte química de nêutrons; estes são gerados eletronicamente por pulsos emitidos periodicamente. Porém, o tubo selado onde os nêutrons são gerados contém trítio. A fonte da ferramenta emite um fluxo rápido e denso de nêutrons de alta energia, cerca de 14 milhões de eV. Após a colisão dos nêutrons, os átomos do ambiente emitem raios gama de diferentes níveis de energia em tempos característicos que dependem do seu número atômico. Durante as primeiras dezenas de microssegundos ocorrem colisões inelásticas de alta energia, sendo a quantidade de raios gama emitidos nesta fase importante para a medição da razão carbono/oxigênio. A partir daí e até 1000 microssegundos, os nêutrons perdem energia até o nível dito termal, quando são capturados pelos átomos. Estes átomos, para voltar ao nível inicial de energia, emitem um raio gama, dito de captura, que é medido pela ferramenta, através de dois detectores chamados de *Near* (perto, em inglês) e *Far* (longe, em inglês).

A taxa de captura, chamada de Sigma ( $\Sigma$ ) depende dos materiais presentes na formação (tipo de rocha, tipo de fluido), sendo bastante sensível à concentração de hidrogênio ou cloro. As razões entre as medidas *Near Elástico*, *Near Captura*, *Far Elástico* e *Far Captura* permite determinar indicadores de porosidade, salinidade do fluido, argilosidade, saturação de óleo, saturação de gás e densidade do líquido. (Fonte: apostila Petrobras, sem dados sobre edição, autores, etc).

9.2 - A ferramenta utilizada para o C/O é semelhante à do PNL, porém o pulso de nêutrons é de maior energia. A contagem de raios gama de captura é subtraída da contagem total de raios gama, para que somente os provenientes dos choques inelásticos sejam considerados.

O C/O mede a razão entre as quantidades de Carbono e Oxigênio associados à água e aos hidrocarbonetos. Independente da salinidade, a água tem baixa razão C/O, enquanto nos hidrocarbonetos esta razão é alta. Ao contrário do PNL, este perfil funciona bem em intervalos portadores de água de baixa salinidade, pois independe desta. O valor de C/O considera o fluido da formação, a rocha e o fluido dentro do poço, por isso é fundamental ter informações de perfis ou de outras fontes, sobre esses três elementos. O fato de se saber se a rocha é arenito ou carbonato, se tem baixa porosidade ou alta, se o fluido dentro do poço é óleo ou água (pode-se encher o poço com água, por exemplo), facilita bastante o cálculo de C/O do fluido da formação e a determinação da saturação do fluido da formação. Vários espectros são medidos, por exemplo, Silício (Si), Cálcio (Ca), Carbono (C), Oxigênio (O), Hidrogênio (H), Cloro (Cl) e Ferro (Fe). A razão Si/Ca é um indicador do tipo de rocha, desde que se conheça a porosidade. A razão H/(Si+Ca) é um indicador de porosidade. A porosidade afeta a C/O, pois quanto maior seu valor, mais fluido se tem na formação. Com todas as informações coletadas durante a seção inelástica e a de captura, determina-se a

saturação do fluido (SMOLEN, 1995).

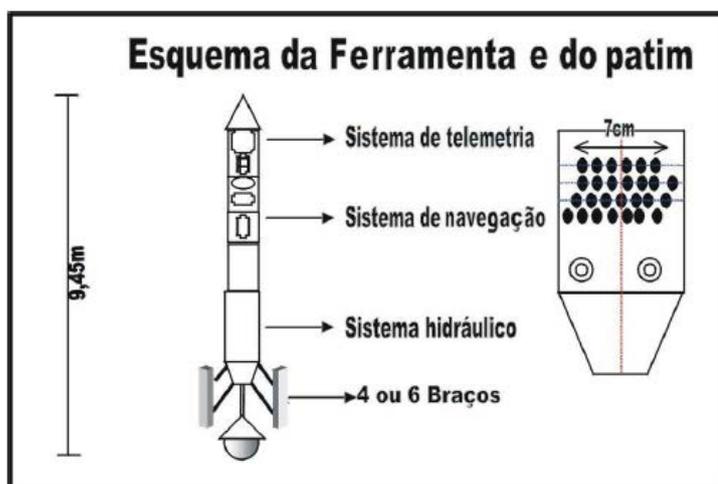
10 - Perfis de mergulho (*Dipmeter*): segundo Flores et al. (2003), o objetivo deste perfil é fornecer o ângulo e o sentido do mergulho das camadas sedimentares atravessadas pelo poço, bem como direção, inclinação e geometria do poço. Estas informações são necessárias para realizar análises estruturais e estratigráficas, tornando possível a identificação de feições tectônicas e sedimentares, bem como se conhecer a trajetória do poço.

Ainda, segundo os autores, a ferramenta faz o registro da microrresistividade através de eletrodos posicionados de forma equidistante ao longo da circunferência do poço, num plano perpendicular a este, em patins que correm encostados à parede do poço. São quatro ou seis patins, onde cada par de patins opostos fornece um registro de *caliper* (diâmetro), tornando possível investigar a ovalização do poço, que pode indicar o regime de tensões horizontais atuantes na área. Medidas de direção e mergulho do poço e o posicionamento espacial da ferramenta são obtidos através de clinômetro e magnetômetro localizados no interior da mesma. A ferramenta corre acoplada com a de Raios Gama, que funciona como indicador litológico e facilita a correlação.

11 - Perfis de imagens (resistivas e acústicas)

11.1 - Perfis de imagens resistivas: Conforme Flores et al. (2003), as ferramentas de imagens resistivas são uma evolução da ferramenta de mergulho e são capazes de fornecer, além dos produtos do dipmeter, imagens das paredes do poço a partir de variações de microrresistividade, com alta resolução vertical. O esquema da ferramenta é mostrado na Figura 28.

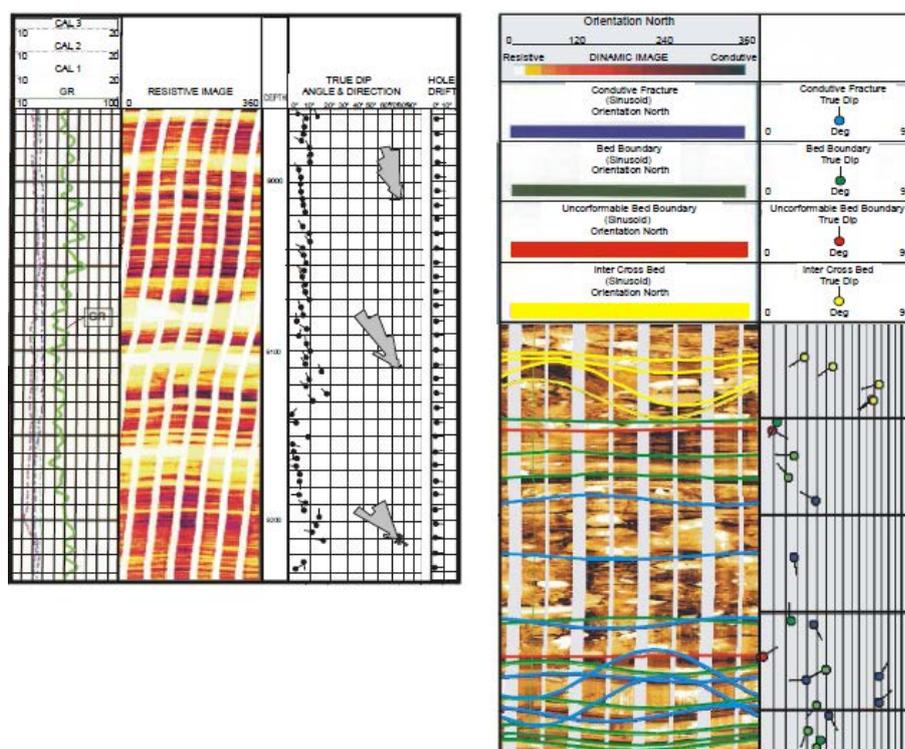
Figura 28 – Esquema de uma ferramenta de perfis de imagens resistivas



Fonte – Flores et al. (2003, p. 80)

As variações de microrresistividade são convertidas para uma escala de cores, onde as mais claras representam valores altos de resistividade e as escuras refletem zonas com menor resistividade. As imagens formam um mapa da resistividade de parte da parede do poço, como mostra a parte esquerda da Figura 29.

Figura 29 – À esquerda: apresentação de um perfil de imagens resistivas de seis patins. À direita: interpretação do perfil em Estações de Trabalho



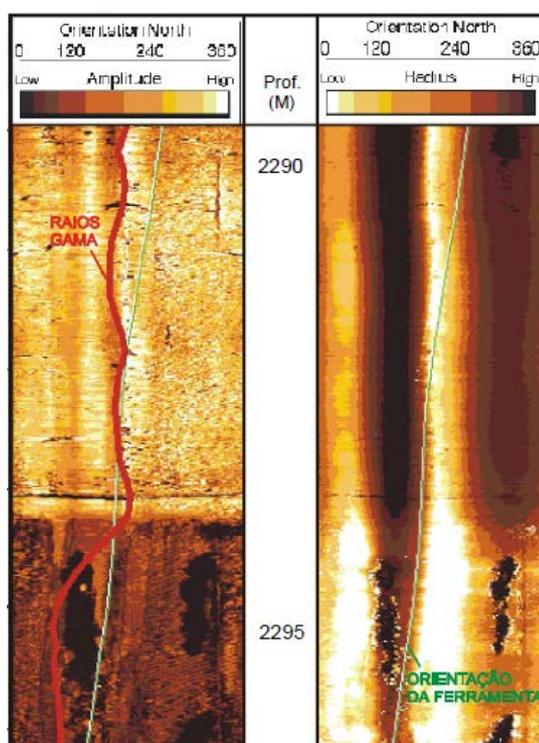
Fonte – Flores et al. (2003, p. 81)

A variação de resistividade pode ser causada por heterogeneidades litológicas, composicionais, texturais e estruturais, que são refletidas nas imagens. É necessário que o ambiente dentro do poço seja eletricamente condutivo, logo, não pode ser realizado em poços com lama à base óleo.

11.2 - Perfis de imagens acústicas: são uma alternativa às ferramentas de imagens resistivas, principalmente em ambientes de lama à base óleo, onde elas não funcionam.

O funcionamento da ferramenta consiste na emissão e recepção, através de um transdutor giratório centralizado, de um pulso ultra-sônico refletido na parede do poço. São registrados a amplitude e o tempo de trânsito deste pulso, que geram dois distintos perfis de imagens, mostrados na Figura 30.

Figura 30 – Perfil de imagem acústica: amplitude à esquerda, *caliper* à direita



Fonte – Flores et al. (2003, p. 82)

A imagem à esquerda é o perfil de amplitude, que indica a atenuação na amplitude sofrida pelo pulso refletido com relação ao pulso emitido. Essa atenuação depende das características da parede do poço, tais como rugosidade, discontinuidades e heterogeneidades. Através desta imagem é possível identificar fraturas e contrastes litológicos.

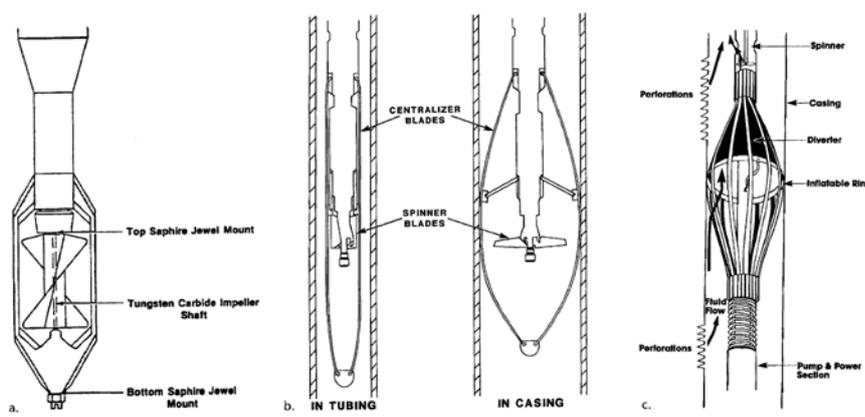
A imagem à direita é o perfil de tempo de trânsito, que, ao medir os diferentes tempos decorridos entre a emissão e recepção do pulso, fornece ao final uma imagem do calibre do poço ou do revestimento.

As principais aplicações deste perfil são a identificação de fraturas abertas, reconhecimento de contrastes litológicos e de limites de camadas, determinação da geometria do poço, inclusive desmoronamentos e deslizamentos, possibilidade de análise dos regimes de tensão, investigação do revestimento (corrosão, furos) e avaliação da qualidade da cimentação.

12 - Perfilagem de produção: É feita através de perfis corridos após o início de produção, visando determinar a efetividade de uma completação ou as condições de produtividade dos intervalos de um poço. O principal perfil é o *Production Log Tool - PLT*, que permite conhecer a parcela de contribuição de cada intervalo aberto do poço na vazão total de produção (ou de injeção).

Segundo Smolen (1995), quase todas as medições de fluxo em poços produtores são feitas com medidores de fluxo equipados com hélices (*spinner type flowmeters*). A Figura 31 mostra três tipos de medidores.

Figura 31 – Tipos de medidores de fluxo



Fonte – Smolen (1995, p. 312), cortesia Schlumberger

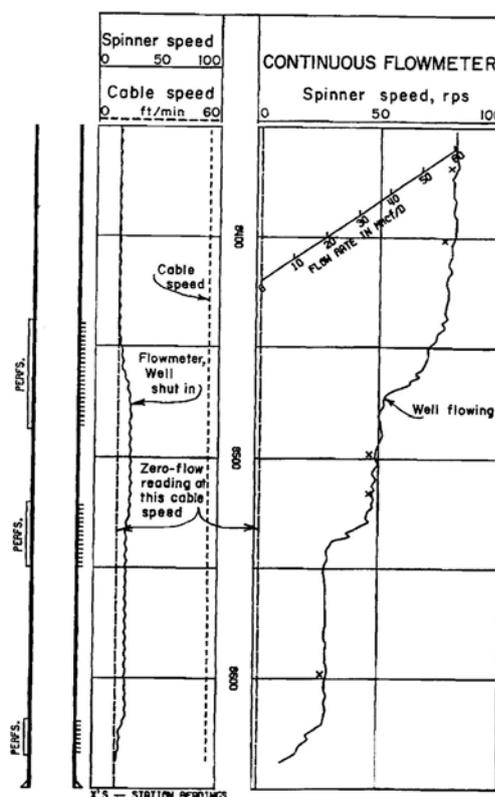
O primeiro tipo é o Medidor de Fluxo Contínuo de pequeno diâmetro e o segundo é o Medidor de Fluxo Contínuo de Seção Plena do Poço. Ambos são realizados deslocando-se a ferramenta, com velocidade constante e conhecida, ao longo dos intervalos de interesse, de cima para baixo e de baixo para cima. O segundo tipo (duas figuras do meio) pode ser utilizado dentro da coluna de produção (*tubing*) ou dentro do revestimento (*casing*) sem coluna. Este tipo, por ocupar toda a seção transversal ao fluxo, faz uma melhor amostragem do fluxo e consegue um resultado mais próximo da realidade.

O terceiro tipo é o Medidor com Desviadores de Fluxo (*Diverting Spinner Flowmeter*). Ele não é contínuo, mas sim posicionado em profundidades previamente determinadas. Há uma gaiola com centralizador motorizado com pétalas de metal acopladas aos braços do centralizador. Na profundidade em que se quer medir a vazão de fluxo, o centralizador é aberto e as pétalas formam um funil invertido que canaliza o fluxo por dentro da ferramenta que contém a hélice.

Em todos os tipos, o fluxo faz girar a hélice, cuja contagem de giros é proporcional à vazão de fluxo que está passando por aquele local. Para maior precisão do resultado, são feitas várias passagens para cima e para baixo, cada passagem com uma velocidade diferente daquela do deslocamento da ferramenta.

A Figura 32 mostra a interpretação das vazões por intervalo obtidas com uma das passagens, onde foram utilizados medidores do tipo fluxo contínuo.

Figura 32 – Interpretação de uma passagem do perfil de fluxo contínuo



Fonte – Smolen (1995, p. 319), cortesia Schlumberger

Testes de formação: Segundo Peres (2006), o teste de formação é um método de avaliação das formações, no qual um poço é completado de forma temporária, permitindo a produção dos fluidos contidos na formação, de forma segura. Segundo o autor, os objetivos de um teste de formação são:

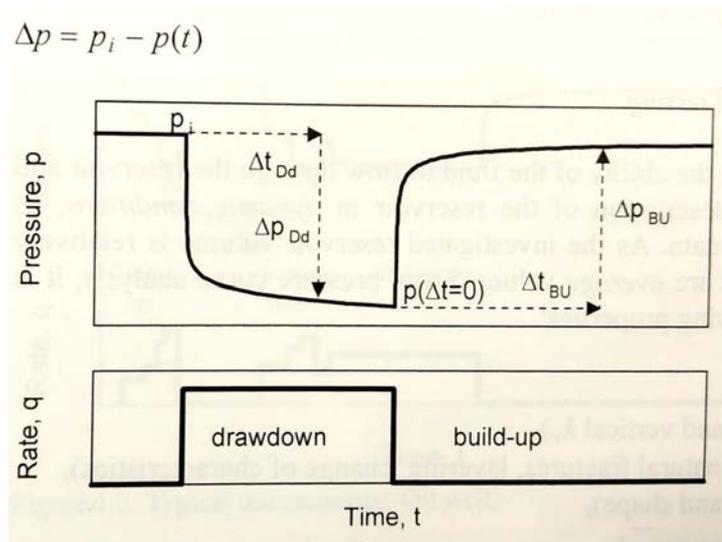
- identificar o fluido contido na formação;
- obter amostras do fluido da formação;
- avaliar a capacidade produtiva de uma formação;
- investigar a existência de dano à formação;
- determinar a extensão do reservatório;
- determinar a pressão inicial ou a pressão média do reservatório.

Peres (2006) afirma que, para fazer um teste de formação é necessário isolar o intervalo a ser testado, descer um registrador de pressão dentro do poço, promover períodos

intercalados de produção (período de fluxo) e sem produção (período de estática) e registrar, de forma contínua, as vazões na superfície e as pressões de fundo.

A Figura 33 apresenta dois gráficos, sendo o de cima o registro da pressão de fundo ao longo do tempo e o de baixo o registro da vazão nesse mesmo período de tempo.

Figura 33 – Comportamento da pressão (*pressure*) e da vazão (*rate*) ao longo de um teste de formação



Fonte – Bourdet (2002, p. 1)

No primeiro período, chamado Primeira Estática, o registro começa com o poço fechado, portanto a vazão é zero e a pressão é a pressão inicial ( $p_i$ ) do reservatório. Depois de algum tempo, abre-se o poço, e tem-se o período chamado Primeiro Fluxo ou *drawdown*, durante o qual tenta-se manter a vazão constante. Com a produção, a pressão apresenta uma queda  $\Delta p_{Dd}$ . Depois de certo tempo, o poço é fechado novamente, sendo este período chamado de Segunda Estática ou *Buildup*. Nele ocorre a subida de pressão, com variação  $\Delta p_{BU}$ , com a tendência a se estabilizar na pressão do reservatório novamente. As variações de pressão ao longo do tempo, seja em fluxo ou em estática, dependem das características do reservatório, das propriedades dos fluidos do reservatório e do histórico de produção (perfil de vazão versus tempo).

Existem vários métodos, desenvolvidos por especialistas, que fazem a interpretação dos registros e permitem obter vários parâmetros do reservatório, tais como permeabilidade, produtividade, existência de dano à formação, pressão média do reservatório, existência de barreiras geológicas nas proximidades, em alguns casos até o tamanho do reservatório, etc.

Um dos resultados mais importantes de um teste de formação é o Índice de Produtividade (IP) do poço. Ele é o melhor indicador para sinalizar se um poço terá ou não potencial para ser um bom produtor. O IP será discutido com mais detalhes na seção Engenharia de Reservatórios.

O teste de formação a poço aberto (TF) é realizado durante a fase de perfuração, antes de se revestir o intervalo. O testes de formação a poço revestido (TFR), como o próprio nome diz, são realizados após revestir o poço, na fase de completação. Já os registros de pressão (RP) consistem na descida de registradores de pressão a cabo por dentro da coluna, para obter pressões com o poço produzindo ou com ele fechado.

## 4.7 Engenharia de reservatórios de petróleo

A referência básica desta seção é [Rosa, Carvalho e Xavier \(2006\)](#). Excepcionalmente, outros autores serão citados, quando for o caso.

Como afirmam [Jahn et al. \(2012\)](#), o sucesso no desenvolvimento de campos de petróleo em grande parte é determinado pelo reservatório: tamanho, complexidade, produtividade e o tipo e quantidade de fluidos que ele contém. As características do reservatório devem estar bem definidas, porém, geralmente a quantidade e o nível de informações disponíveis estão sempre aquém do ideal. Assim, os engenheiros de reservatório constantemente solicitam a coleta de dados que irão subsidiar o plano de desenvolvimento e suas alterações ao longo da vida do campo. Faz parte do plano, a definição do número de poços a serem perfurados e sua localização, a definição de quais intervalos serão colocados em produção, a implantação de métodos de recuperação (por exemplo, a injeção de água ou de gás para repor a pressão do reservatório), a solicitação de perfuração de novos poços, etc. O objetivo do plano é maximizar a recuperação de óleo e gás, de maneira econômica e segura.

É peça fundamental nesse estudo o histórico de produção, ou seja, o registro de pressões, vazões de cada fluido, relação entre essas vazões e os volumes totais que foram produzidos de cada fluido ao longo da vida útil do reservatório. A análise do histórico de produção permite verificar o acerto das decisões tomadas na escolha da maneira de desenvolver o campo e fornece subsídios para a previsão do comportamento futuro do reservatório.

### 4.7.1 Propriedades de rocha e de fluidos

O conhecimento de algumas propriedades básicas da rocha e dos fluidos do reservatório é indispensável para o estudo de um reservatório. Elas determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio poroso, a sua distribuição, a capacidade desses fluidos se moverem e a quantidade de fluidos que pode ser extraída. Dentre essas propriedades, podemos citar:

- 1) Porosidade: já definida na seção Geologia do Petróleo; os valores de porosidade podem chegar a 40%, quando a rocha é um arenito com grãos moderadamente arredondados e de mesmo tamanho, com pouca ou nenhuma cimentação entre os grãos. Porém,

essa condição dificilmente é encontrada e na maioria dos reservatórios este valor se situa em torno de 20%, embora seja comum encontrar reservatórios com 30%.

2) Pressão de saturação ou pressão de bolha: Um dos tipos de reservatório de petróleo é aquele em que todo o hidrocarboneto está em estado líquido, ou seja, óleo. Com a redução da pressão, devido à produção, chegará um momento em que aparecerá uma primeira bolha de gás e cada vez aparecerá mais gás, à medida em que a pressão continue a cair. Chama-se pressão de saturação, aquela que ocorre no momento em que aparece a primeira bolha de gás, nesse processo a temperatura constante. Acima da pressão de saturação só existia óleo, abaixo dela existem óleo e gás.

3) Compressibilidade (ou compressibilidade isotérmica): quando um corpo de volume inicial  $V$  é submetido a uma variação de pressão  $\Delta P$  e sofre uma variação de volume  $\Delta V$ , mantida constante a temperatura, chama-se compressibilidade o quociente entre a variação fracional de volume,  $\Delta V/V$ , e a variação de pressão:

$$C = \frac{\Delta V/V}{\Delta P} \quad (4.2)$$

A compressibilidade depende da pressão e da temperatura. Quanto menor a pressão, maior a compressibilidade. E quanto maior a temperatura, maior a compressibilidade, como afirmam Rosa, Carvalho e Xavier (2006). A compressibilidade de um óleo deve ser preferencialmente obtida de análises em laboratório. Estas análises fornecem valores de compressibilidade para um intervalo de pressões, que vai desde a pressão atmosférica até um valor acima da pressão original do reservatório. Quando não há análises disponíveis, utiliza-se correlações que fornecem o valor da compressibilidade em função da densidade do óleo na pressão de saturação. Quando não especificado, subentende-se que o valor da compressibilidade se refere à pressão de saturação e à temperatura do reservatório.

Tanto Jahn et al. (2012) quanto Rosa, Carvalho e Xavier (2006) observam que a compressibilidade assume valores da seguinte ordem de grandeza:

óleo:  $10 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ ;

gás:  $500 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ ;

água:  $3 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$  e

rocha:  $4 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ .

Pode-se demonstrar algebricamente que a compressibilidade isotérmica de um gás ou uma mistura gasosa que se comporta como gás ideal é igual ao inverso da pressão, ou seja,  $C_g = 1/p$ . Portanto, quando não se dispuser do valor da compressibilidade isotérmica do gás, pode-se usar esta simplificação. A demonstração, de acordo com Rosa, Carvalho e Xavier (2006) é a seguinte:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p},$$

onde  $\rho$  é a massa específica do gás e  $p$  é a pressão.

Substituindo  $\rho = \frac{pM}{RT}$  da equação dos gases ideais, se obtém:

$$c_g = \frac{RT}{pM} \frac{\partial(pM/RT)}{\partial p} = \frac{RT}{pM} \frac{M}{RT} = \frac{1}{p}$$

onde  $R$  é a constante universal dos gases,  $T$  é a temperatura e  $M$  é a massa molecular do gás.

Portanto, para uma compressibilidade do gás em torno de  $500 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ , se este for um gás ideal, deve corresponder uma pressão em torno de  $p = 1/(500 \cdot 10^{-6} \text{ psi}^{-1}) = 2000 \text{ psi}$ , aproximadamente  $141 \text{ kgf/cm}^2$ .

4) Saturação: as saturações de óleo ( $S_o$ ), gás ( $S_g$ ) e água ( $S_w$ ) são os percentuais do volume poroso  $V_p$  ocupados por cada uma destas fases. É claro que soma dos volumes dos fluidos é igual ao volume poroso, ou, dito de outra forma, a soma das saturações é 100%:

$$\text{saturação de óleo: } S_o = V_o/V_p$$

$$\text{saturação de gás: } S_g = V_g/V_p$$

$$\text{saturação de água: } S_w = V_w/V_p$$

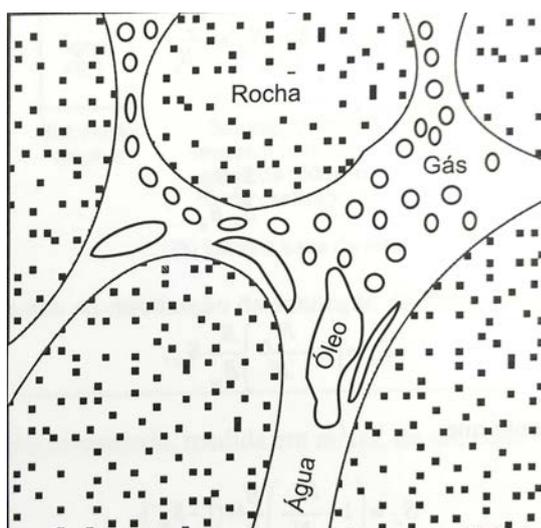
$$V_o + V_g + V_w = V_p$$

$$S_o + S_g + S_w = 100\% = 1.$$

Antes da migração do petróleo, os poros da rocha estavam preenchidos com água. Durante a acumulação, parte da água é deslocada pelo petróleo, porém parte dela fica retida. Assim, todo reservatório quando descoberto contém alguma saturação de água, chamada saturação de água inicial ou conata. Logo, um reservatório de petróleo tem pelo menos duas fases: gás e água ou óleo e água.

Como será visto na subseção Tipos de Reservatórios, um reservatório de óleo apresenta duas fases, óleo e água, quando toda a mistura de hidrocarbonetos se encontra no estado líquido, ou seja, as frações mais leves se encontram dissolvidas nas mais pesadas. O reservatório apresenta três fases, óleo, gás e água, quando parte da mistura se encontra no estado líquido e parte no estado gasoso (Figura 34).

Figura 34 – Volume poroso da rocha-reservatório contendo fluidos: água, óleo e gás



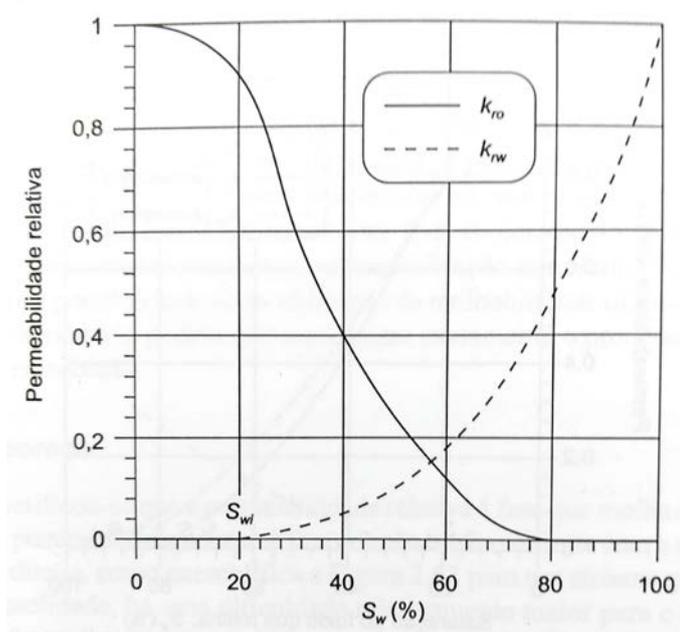
Fonte – Rosa, Carvalho e Xavier (2006, p. 101)

5) Permeabilidade absoluta: permeabilidade é a medida da capacidade de uma rocha permitir o fluxo de fluidos através dela. Seu valor é obtido através de ensaios em laboratório. Quanto maiores e mais conectados forem os poros, maior será a permeabilidade, pois haverá menor resistência ao fluxo. Quando existe apenas um fluido na rocha, esta propriedade recebe o nome de permeabilidade absoluta.

6) Permeabilidade efetiva: dificilmente a rocha-reservatório contém apenas um tipo de fluido. Neste caso, a facilidade com que cada um se move é chamada de permeabilidade efetiva. As permeabilidades efetivas dos fluidos dependem das saturações de cada um deles. As curvas de permeabilidade efetiva são obtidas por ensaios em laboratório.

7) Permeabilidade relativa: é obtida dividindo-se a permeabilidade efetiva do fluido por um valor escolhido como base, geralmente a permeabilidade absoluta. O gráfico 9 mostra um exemplo de curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água em função da saturação de água. No início da vida produtiva de um reservatório, a zona que está em produção tem alta saturação de óleo e baixa saturação de água, logo, conforme mostra o gráfico, a permeabilidade relativa ao óleo é alta e a à água é baixa, favorecendo a produção de óleo e dificultando a produção de água. À medida que o óleo vai sendo produzido, a saturação de óleo cai e a de água aumenta, favorecendo cada vez mais a produção de água.

Gráfico 9 – Curvas de permeabilidade relativa versus saturação de água



Fonte – Rosa, Carvalho e Xavier (2006, p. 153)

8) Índice de Produtividade (IP) do poço: Na indústria do petróleo, especialmente na área de produção, o IP do poço é um parâmetro de referência. Quando se quer saber se um poço novo é "bom", pergunta-se qual é seu IP. O IP depende de vários parâmetros, tais como permeabilidade e espessura da formação, viscosidade do fluido produzido, extensão do reservatório, diâmetro do poço, etc, que são, de certa forma, constantes. Uma vez calculado, pode ser considerado constante enquanto aqueles parâmetros não se modificarem significativamente. O IP é definido por:

$$IP = \frac{q}{P_e - P_w}, P_w \geq P_{sat} \quad (4.3)$$

onde  $q$  é a vazão de produção, medida na superfície durante o teste;  $P_e$  é a pressão estática (ou média) do reservatório, calculada na interpretação do teste;  $P_w$  é a pressão de

fluxo no fundo do poço registrada durante o teste e  $P_{sat}$  é a pressão de saturação do óleo do reservatório. IP é um número positivo, pois tanto  $q$  quanto  $P_e - P_w$  são positivos.

O fluido se desloca a partir de uma região, onde a pressão do reservatório é  $P_e$ , e vai até o poço. Devido às restrições impostas pelo meio poroso, o fluido perde pressão no trajeto e chega no poço com pressão  $P_w$ . A diferença  $P_e - P_w$  é chamada de *drawdown* e representa essa perda de pressão. Para uma determinada vazão fixada, quanto menor a restrição ao fluxo, menor será a queda de pressão e portanto, pela equação 4.3, maior será o IP. Este é o entendimento físico da equação 4.3, ou seja, o IP reflete a facilidade com que o fluido se desloca até o poço.

A equação 4.3 é válida para pressões de fluxo no fundo maiores do que a pressão de saturação. Os demais casos fogem ao escopo deste trabalho. Nesta condição e para um determinado período de tempo, durante o qual a pressão do reservatório é praticamente a mesma, pode-se afirmar que o IP permanece constante (Thomas (2004)).

O IP pode ser utilizado para simular e estimar a vazão de produção para várias condições de fluxo, desde que a pressão de fluxo seja maior do que a pressão de saturação. De fato, conhecidos  $P_e$  e IP a partir do teste, a equação 4.3 pode ser expressa de forma tal que permita calcular a vazão para um determinado valor de  $P_w$ :

$$q = IP \cdot (P_e - P_w), \quad P_w \geq P_{sat} \quad (4.4)$$

Esta equação pode ser escrita também na forma:

$$q = -IP \cdot P_w + (IP \cdot P_e), \quad P_w \geq P_{sat} \quad (4.5)$$

Nota-se que a Equação 4.5 é uma função afim, onde a vazão  $q$  é a variável dependente,  $P_w$  é a variável independente,  $-IP$  é o coeficiente angular e  $IP \cdot P_e$  é o coeficiente linear. Como o coeficiente angular é negativo (pois IP é positivo), quanto menor for a  $P_w$ , maior será a vazão  $q$ . A vazão máxima seria obtida se fosse possível se obter  $P_w = 0$ .

É importante ressaltar que essa vazão calculada é do reservatório para o poço, para uma determinada  $P_w$ . Conceitualmente, o IP nos diz qual é o incremento de vazão (do reservatório para o fundo do poço) quando reduzimos a  $P_w$  em uma unidade. O desafio é obter, na prática, uma  $P_w$  pequena o suficiente para produzir muito do reservatório para o poço, mas grande o suficiente para conseguir fazer a elevação do fluido até a superfície. Isso pode ser feito utilizando-se métodos de elevação mais eficientes (gas lift), diâmetros maiores de colunas de produção e de linhas de produção, operações de estimulação do poço, etc.

**Exemplo 4.1.** (Autoria própria)

Em um teste de formação realizado no poço 7-ABC-25-RJS (poço fictício, porém o nome segue o formato de nomenclatura oficial exigido pela ANP) foram obtidos os seguintes resultados: Pressão estática:  $220 \text{ kgf/cm}^2$ ; Pressão de fluxo no fundo:  $190 \text{ kgf/cm}^2$ ; Vazão de produção:  $1200 \text{ m}^3/\text{d}$ . Ensaios de laboratório indicaram que  $P_{sat} = 180 \text{ kgf/cm}^2$ . Pede-se:

- Calcular o índice de produtividade do poço.
- Será instalado um sistema de elevação por gas lift, que reduzirá a pressão de fluxo no fundo do poço em cerca de  $10 \text{ kgf/cm}^2$ . Qual será o ganho de vazão com essa instalação?
- Construir um gráfico de vazão versus pressão de fluxo no fundo.

Resolução:

a) Como  $P_w \geq P_{sat}$ , pode-se utilizar a Equação 4.3:  $IP = \frac{1200}{220 - 190} = 40 \frac{\text{m}^3/\text{d}}{\text{kgf/cm}^2}$ .

b) Com a redução de  $10 \text{ kgf/cm}^2$ , a  $P_w$  ainda é maior ou igual à  $P_{sat}$ . Pode-se calcular o ganho de vazão de duas maneiras:

1) Como  $IP = 40 \frac{\text{m}^3/\text{d}}{\text{kgf/cm}^2}$ , tem-se um ganho de  $40 \text{ m}^3/\text{d}$  para cada  $1 \text{ kgf/cm}^2$  de redução de  $P_w$ . Como a redução de  $P_w$  é de 10, tem-se um ganho de vazão  $\Delta q = 40 \cdot 10 = 400 \text{ m}^3/\text{d}$ .

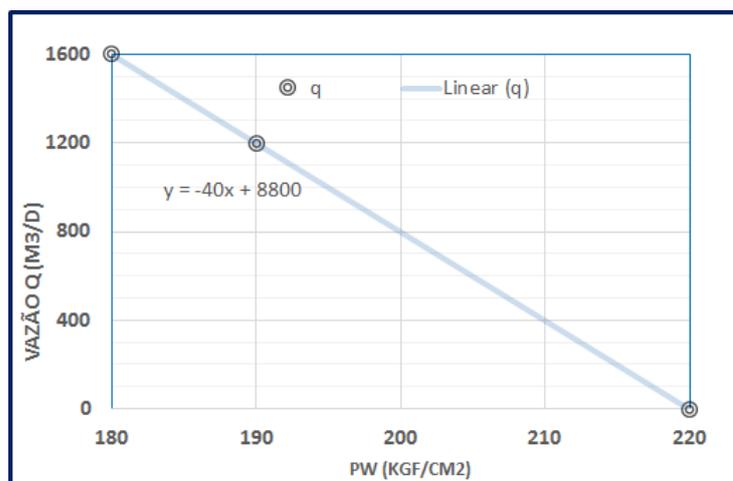
2) A nova pressão de fluxo é:  $P_w = 190 - 10 = 180 \text{ kgf/cm}^2$ .

A partir da equação 4.4, calcula-se a nova vazão:  $q = 40 \cdot (220 - 180) = 1600 \text{ m}^3/\text{d}$ .

O incremento de vazão é de  $\Delta q = 1600 - 1200 = 400 \text{ m}^3/\text{d}$ .

c) O Gráfico 10 apresenta o intervalo em que a equação 4.3 é válida.

Gráfico 10 – Vazão versus Pressão de fluxo no fundo



Fonte – autoria própria

A curva do gráfico é representada por uma reta, de equação  $y = -40x + 8800$ , que corresponde a uma função afim, cujo coeficiente angular é igual a  $-IP = -40$ , e o coeficiente linear é igual a  $IP \cdot P_e = 8800$ . Este resultado está coerente com a equação 4.5.

#### 4.7.2 Fluxo de fluidos em meios porosos

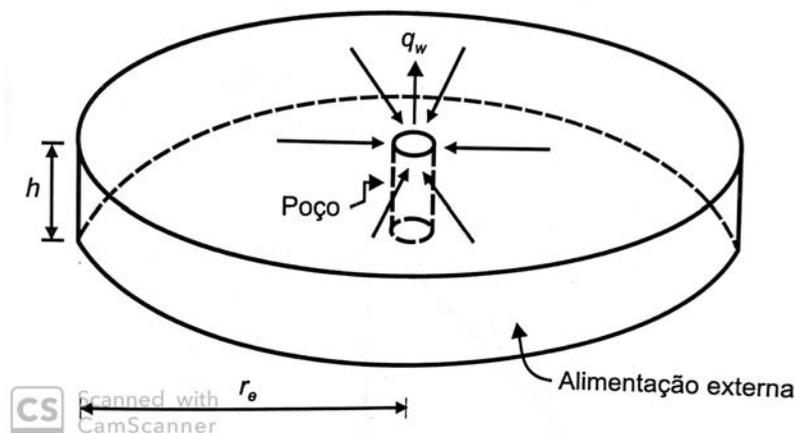
É o ramo da Engenharia de Reservatórios que trata da maneira como os fluidos se movimentam em um meio poroso (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Modelos matemáticos são desenvolvidos a partir de equações básicas do estudo do fluxo em meios porosos, relacionando-as aos aspectos físicos do reservatório que determinam o regime de fluxo. Esses regimes podem ser o permanente, o pseudo-permanente e o transiente.

A título de exemplo, será mostrada a equação que expressa a vazão de fluido que entra no poço, vinda de um reservatório sob regime permanente e com fluxo radial. No regime permanente,

[...] o meio poroso recebe uma alimentação externa contínua e constante, de tal maneira que o fluido produzido através do poço é repostado simultaneamente através da fronteira externa do reservatório. Devido a essa alimentação, a vazão permanece constante no espaço e no tempo e a pressão em cada ponto não varia com o tempo (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006, p. 204).

A Figura 35 mostra esquematicamente um reservatório com fluxo radial permanente:

Figura 35 – Fluxo radial permanente



Fonte – Rosa, Carvalho e Xavier (2006, p. 101)

A equação para o fluxo radial é a seguinte:

$$q = \frac{2\pi kh \cdot (P_e - P_w)}{B\mu \ln(r_e/r_w)}, \quad (4.6)$$

onde  $q$  é a vazão (em  $m^3 STD/d$ , condições de superfície),  $k$  é a permeabilidade da formação (em milidarcy ou md),  $h$  é a espessura da formação (em metros),  $P_e$  é a pressão no limite do reservatório (em  $kgf/cm^2$ ),  $P_w$  é a pressão de fluxo no poço (em  $kgf/cm^2$ ),  $B$  é o fator volume de formação (razão entre o volume do fluido em condições de reservatório e o volume deste mesmo fluido nas condições de superfície),  $\mu$  é a viscosidade do fluido (em centipoise, cp),  $r_e$  é o raio do reservatório (em metros) e  $r_w$  é o raio do poço (em metros).

Comparando-se as equações 4.4 e 4.6, chega-se a uma equação que permite estimar o Índice de Produtividade de um poço (IP), produzindo em regime permanente, com fluxo radial, em função dos parâmetros do reservatório:

$$IP = \frac{2\pi kh}{B\mu \ln(r_e/r_w)}, \quad (4.7)$$

### 4.7.3 Tipos de reservatórios quanto ao estado físico dos fluidos

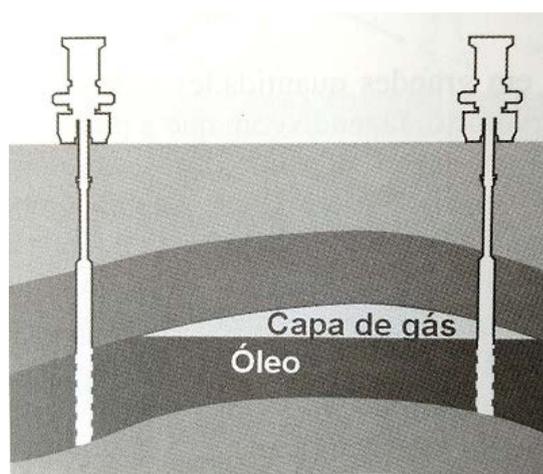
Conforme Rosa, Carvalho e Xavier (2006), o que define o tipo de reservatório é o comportamento da mistura de hidrocarbonetos que ele contém. Este comportamento depende não só da composição da mistura, mas também, das condições de pressão e temperatura a que ela estiver submetida. Como essas condições mudam quando a mistura se desloca do reservatório para a superfície, o estado físico da mistura na superfície pode ser diferente do que ela tinha no reservatório. Existem três tipos de reservatórios, segundo o estado físico da mistura no reservatório:

a) reservatórios de óleo: são aqueles em que a mistura de hidrocarbonetos se encontra em estado líquido nas condições do reservatório. Quando levada para a superfície, onde as pressões e temperaturas são menores, parte da mistura passa para o estado gasoso. Diz-se que o óleo é subsaturado, pois todo o gás no reservatório está dissolvido no óleo. Ao longo do tempo, a pressão no reservatório cai devido à produção, e parte do gás dissolvido no óleo é liberado, formando uma fase gasosa ainda no reservatório (Figura 34).

b) reservatórios de gás: a mistura de hidrocarbonetos se encontra na fase gasosa nas condições do reservatório.

c) reservatórios de óleo e gás: as duas fases estão em equilíbrio no reservatório, ou seja, existe uma parte da mistura que está na fase líquida e uma parte na fase gasosa. A parte gasosa é chamada de gás livre e forma uma camada acima do óleo, chamada capa de gás (Figura 36).

Figura 36 – Reservatório de óleo e gás



Fonte – Thomas (2004, p. 190)

#### 4.7.4 Mecanismos de produção

A pressão dos fluidos contidos na rocha é que fornece a energia necessária para sua produção. Essa energia, chamada de energia natural ou primária, é o resultado de todas as situações e circunstâncias pelas quais a jazida passou até se formar. Ela é necessária para que os fluidos consigam se deslocar através dos canais porosos, que possuem tortuosidades e estrangulamentos que dificultam o fluxo até os poços.

Segundo [Rosa, Carvalho e Xavier \(2006\)](#), a produção de fluidos é devida a dois efeitos principais:

- (1) a decompressão (que causa a expansão dos fluidos contidos no reservatório e a contração do volume poroso) e
- (2) o deslocamento de um fluido por outro fluido (por exemplo, a invasão da zona de óleo pela água de um aquífero).

O conjunto de fatores que fazem desencadear esses efeitos é chamado de mecanismos de produção de reservatórios. Os principais são: mecanismo de gás em solução, mecanismo de capa de gás e mecanismo de influxo de água. Há também o mecanismo de segregação gravitacional, que na verdade é um efeito da gravidade que ajuda no desempenho dos outros mecanismos. Geralmente há um mecanismo dominante no reservatório, mas pode ocorrer a atuação de mais de um sem que haja predominância de um sobre o outro, o que caracteriza um mecanismo combinado.

##### Mecanismo de gás em solução:

Em um reservatório de óleo que não possui grandes massas de água ou de gás natural associados, toda a energia para produção terá que vir da própria zona de óleo.

À medida que o óleo vai sendo produzido, a pressão do reservatório vai se reduzindo. Devido à atuação da compressibilidade, tanto os fluidos quanto os grãos da rocha se expandem. Como o volume total da rocha não se altera, isso só é possível se houver produção de fluidos. Esse é um processo contínuo: a produção de fluidos causa redução de pressão, que provoca expansão dos fluidos e redução dos poros, que por sua vez resulta em mais produção.

Enquanto a pressão estiver acima da pressão de saturação, só haverá líquido no reservatório. Como a compressibilidade do líquido e a da rocha são baixas, há uma rápida queda na pressão com a produção de fluidos. Quando a pressão atinge a pressão de saturação, começa a haver liberação do gás que está em solução. Nesse ponto começa a atuar o mecanismo de gás em solução. Como o gás tem uma compressibilidade muito

mais alta do que o líquido, sua grande expansão desloca o líquido para fora do meio poroso. Quanto mais a pressão cai, mais o gás se expande e mais líquido é deslocado.

Um ponto fraco desse mecanismo é que grandes quantidades de gás começam a ser produzidas muito cedo e levam consigo a energia do reservatório. Isso ocorre devido à formação de uma fase contínua de gás, que tem grande mobilidade e dificulta a movimentação do óleo.

Outra característica desse mecanismo são as baixas recuperações, geralmente entre 10 e 20%. Os poços desses reservatórios necessitam, muito cedo, da instalação de algum equipamento adicional para elevar o óleo do fundo do poço até a superfície.

#### Mecanismo de capa de gás:

Conforme os valores de temperatura e pressão iniciais do reservatório, a mistura de hidrocarbonetos pode se apresentar nas fases líquido e gás simultaneamente. Por ser mais leve, o gás se acumula nas partes mais altas do meio poroso, formando o que se denomina capa de gás, como ilustra a Figura 36. Para que a energia seja preservada, o gás não deve ser produzido, por isso, somente a zona de óleo é colocada em produção.

Devido à produção do óleo, a pressão na zona de óleo se reduz. Essa redução é transmitida à capa de gás, que se expande, penetrando gradativamente na zona de óleo, isto é, o gás da capa vai ocupando espaços antes ocupados pelo óleo. Devido à alta compressibilidade do gás, a sua expansão não provoca grande queda na pressão. Quanto maior é a capa de gás, maior será sua atuação, ou seja, a pressão se manterá em níveis elevados por mais tempo.

A recuperação de óleo por esse mecanismo se situa entre 20% e 30%, desde que observadas técnicas específicas adequadas.

#### Mecanismo de influxo de água:

A atuação deste mecanismo exige a existência de uma grande acumulação de água em contato direto com a o reservatório de petróleo.

Com a redução da pressão do reservatório, causada pela produção, há uma expansão da água do aquífero e uma redução de seu volume poroso. Com essa redução do espaço poroso, não há mais espaço suficiente para conter toda a água, portanto, a água excedente vai invadir a zona de óleo e deslocar o óleo para os poços de produção, além de manter elevada a pressão na zona de óleo.

Devido à baixa compressibilidade da rocha e da água, esse mecanismo só será eficaz se o aquífero for de grandes proporções, por exemplo, o volume da zona de água for mais de 10 vezes maior que o volume da zona de óleo.

O processo é contínuo: a produção de óleo causa uma queda de pressão na zona de óleo, que se transmite para a zona de água, que responde com uma invasão de água na zona de óleo, o que provoca a produção de mais óleo.

O fator de recuperação é de cerca de 30 a 40%, influenciado principalmente pela manutenção da pressão em níveis elevados, o que proporciona vazões de óleo altas e baixa saturação de gás (o que acarreta baixas vazões de gás).

#### 4.7.5 Estimativa de reservas

Produzir um campo de petróleo envolve não só um alto investimento financeiro, assim como o custo de manter o projeto em operação. A receita para pagar tudo isso deve vir da comercialização dos fluidos produzidos. Por isso é tão importante saber a quantidade de fluidos que serão produzidos para se decidir pela implantação ou não do projeto (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Algumas definições se fazem importantes para entender o que é a estimativa de reservas:

Volume original: É a quantidade de óleo ou gás existente no reservatório na época da sua descoberta.

Volume recuperável: É a quantidade de óleo ou gás que se espera produzir de uma acumulação de petróleo.

Fator de recuperação: É a razão entre o volume recuperável e o volume original.

Produção acumulada: É a quantidade de fluido de um reservatório que foi produzida até uma certa data.

Fração recuperada: É a razão entre a produção acumulada e o volume original.

Reserva: É a quantidade de fluido que ainda pode ser produzida de um reservatório a partir de um determinado momento, ou seja, é o volume recuperável menos a produção acumulada.

Reservas provadas são aquelas com razoável certeza de serem recuperadas comercialmente de reservatórios descobertos e com condições econômicas, métodos operacionais e regulamentação governamental definidos.

Conforme ANP (2018b), as reservas provadas de petróleo em 31/12/2017 foram de 12.835 milhões de barris (MMbbl), um aumento de 1% em relação ao ano anterior.

Na mesma data as reservas de gás natural foram de 369.918 milhões de metros cúbicos ( $MMm^3$ ), uma redução de 2% em relação ao ano de 2016.

Depois de iniciada a produção, deve-se refazer periodicamente a estimativa de reservas, utilizando os dados obtidos com a produção, que certamente fornecerão uma estimativa mais correta, ressalta [Thomas \(2004\)](#).

Como a produção decresce com o tempo, haverá um momento em que as receitas provenientes da venda dos fluidos produzidos não será suficiente para cobrir as despesas da operação. Este será o momento certo para abandonar o projeto e precisa ser previsto com antecedência. Por isso a importância da estimativa de reservas, que pode ser calculada de diversas maneiras, de acordo com a quantidade de informações à época do estudo, dentre outros fatores. Os principais métodos utilizados são a analogia, a análise de risco, o método volumétrico e a performance do reservatório.

Nos métodos que utilizam a análise da performance do reservatório, a previsão do comportamento futuro se baseia no comportamento passado. Utiliza o histórico de produção (vazões e pressões) e em alguns casos informações do mecanismo de produção. Os principais métodos neste grupo são a análise de declínio de produção, a utilização da equação de balanço de materiais e a simulação numérica de reservatórios. A escolha de qual deles utilizar depende de fatores, como a quantidade e o tipo de dados de rocha e fluido disponíveis, a disponibilidade de recursos de informática, etc.

A tabela 5 mostra os 15 países com maiores reservas de petróleo em 2016 e 2017:

Tabela 5 – Países com maiores reservas de petróleo (em bilhões de barris)

País	Reserva 2016	Reserva 2017
Venezuela	298,4	300,9
Arábia Saudita	268,3	266,5
Canadá	171,0	169,7
Irã	157,8	158,4
Iraque	144,2	142,5
Kuwait	104,0	101,5
Rússia	103,2	80,0
Emirados Árabes	97,8	97,8
Líbia	48,4	48,4
Nigéria	37,1	37,1
Estados Unidos	36,5	39,2
Casaquistão	30,0	30,0
Qatar	25,2	25,2
China	24,7	25,6
Brasil	15,3	13,0

Fonte: 2016: [UOL \(2018\)](#), 2017: [Worldatlas \(2018\)](#)

**Exemplo 4.2.** (Autoria própria)

Seja um reservatório de óleo com um volume original de  $1\,000\,000\text{ m}^3$  std e volume recuperável estimado em  $300\,000\text{ m}^3$  std. Sua produção acumulada em 31/12/2018 era de  $100\,000\text{ m}^3$  std. Pede-se calcular:

a) o fator de recuperação (FR)

b) a fração recuperada e a reserva, ambos em 31/12/2018

Resolução:

$$\text{a) } FR = \frac{\text{volume recuperável}}{\text{volume original}} = \frac{300\,000}{1\,000\,000} = 0,30 = 30\%.$$

$$\text{b) } \text{Fração Recuperada} = \text{produção acumulada/volume original} = \frac{100\,000}{1\,000\,000} = 0,10 = 10\%.$$

$$\text{Reserva} = \text{Volume recuperável} - \text{Produção acumulada} = 300\,000 - 100\,000 = 200\,000\text{ m}^3 \text{ std.}$$

#### 4.7.6 Métodos de recuperação

São processos que alteram as características do reservatório com o intuito de obter uma produção maior do que aquela que se obteria caso eles não fossem utilizados (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Recuperação primária é aquela que se obtém utilizando apenas a energia natural do reservatório. O que em outros tempos se chamava recuperação secundária e recuperação terciária perdeu essa nomenclatura, sendo os métodos de recuperação classificados hoje como Métodos Convencionais e Métodos Especiais de Recuperação.

Os métodos convencionais são aqueles com tecnologia bem conhecida, com alto grau de confiança nos resultados de sua aplicação. Os objetivos da sua aplicação são o aumento da eficiência de recuperação (maior volume recuperável) e a aceleração da produção. Consiste em deslocar o óleo para fora dos poros da rocha, em um comportamento mecânico, sem interação química ou termodinâmica entre os fluidos ou entre os fluidos e a rocha. São exemplos a injeção de água ou a injeção não miscível de gás. O fator de recuperação médio deste método se situa em torno de 30%, aí incluída a recuperação primária.

Os métodos especiais de recuperação são aqueles onde os processos são mais complexos e cujas tecnologias ainda não estão em um grau satisfatório de desenvolvimento. São empregados onde o processo convencional não é adequado, por exemplo, quando o óleo tem alta viscosidade ou quando as tensões interfaciais entre o fluido injetado e o óleo são elevadas. Existem basicamente três categorias: Métodos Térmicos, Métodos Miscíveis

e Métodos Químicos. A escolha entre um ou outro depende do tipo de problema a ser atacado.

## 4.8 Elevação

Segundo [Thomas \(2004\)](#), quando a pressão do reservatório é elevada, os poços conseguem produzir os fluidos até a superfície livremente, ou seja, utilizando apenas a energia natural, que é a pressão. Nesse caso, os poços são chamados poços surgentes. Quando a pressão cai, a produção diminui e o poço pode até não conseguir produzir. Nesse caso, é necessário utilizar meios artificiais para elevá-los, sendo a elevação chamada de elevação artificial.

Os métodos de elevação artificial mais comuns na indústria do petróleo são:

- gas lift (contínuo ou intermitente): consiste na injeção de gás na coluna de produção a uma determinada profundidade, gaseificando a coluna de fluido, tornando-a mais leve, portanto, exercendo menor pressão no fundo do poço, o que faz aumentar a vazão de produção. O gás é deslocado pelo espaço anular (entre a coluna e o revestimento) e entra na coluna através de uma válvula instalada na coluna para este fim.

- bombeio centrífugo submerso: consiste na instalação de uma bomba centrífuga no fundo do poço, acionada por um motor elétrico também instalado no fundo. A energia elétrica é levada ao fundo por um cabo elétrico. Método caro devido a constantes problemas, principalmente no cabo elétrico, o que exige a intervenção de sonda para a troca.

- bombeio mecânico com hastes: consiste na instalação de uma bomba alternativa (vai e vêm de um pistão dentro da camisa da bomba) no fundo do poço. Um motor na superfície aciona uma unidade de bombeio, que transforma o movimento rotativo do motor em movimento alternativo vertical. Uma coluna de hastes dentro do poço transmite o movimento alternativo para o fundo do poço e aciona a bomba.

Cada método apresenta vantagens e desvantagens. A escolha do método depende de vários fatores, tais como espaço disponível (é impossível uma unidade de bombeio mecânico em uma plataforma), número de poços, diâmetro do revestimento, produção de areia junto com o óleo, razão gás-líquido, razão água-óleo, vazão, profundidade do reservatório (difícil o bombeio mecânico para grandes profundidades), viscosidade dos fluidos, mecanismo de produção do reservatório, disponibilidade de energia, acesso aos poços, distância dos poços à estação ou plataforma de produção, equipamento disponível, pessoal treinado, investimento, custo operacional, segurança, etc.

## Capítulo 5

# APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA EM POÇOS E CAMPOS DE PETRÓLEO

### 5.1 Unidades de pressão utilizadas na indústria do petróleo

Sabe-se que a aceleração da gravidade  $g$  é constante em determinado local. Uma simplificação utilizada na indústria do petróleo é considerá-la, em todos os locais, com o valor de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Assim, se a profundidade (ou diferença de altura)  $h$  for medida em  $m$ , a densidade  $d$  em  $g/cm^3$  (a densidade da água é  $1 \text{ g/cm}^3$ ), as unidades resultantes para o valor da pressão hidrostática devido à coluna de fluido de altura  $h$  serão:

$$p_H = d \cdot h \cdot g = 1 \frac{g}{cm^3} \cdot 1 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 1 \frac{1000 \text{ kg}}{m^3} \cdot 1 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 1000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{m^3} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{m^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 0,1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Portanto, desde que  $h$  esteja em  $m$  e a densidade  $d$  em  $g/cm^3$ , a pressão hidrostática, em  $\text{kgf/cm}^2$ , será dada pela seguinte equação:

$$p_H = 0,1 \cdot d \cdot h \quad (5.1)$$

A equação 5.1 é bastante prática: a pressão hidrostática é um décimo do valor da densidade multiplicado pela profundidade (ou altura). Se a densidade é igual à da água,  $1 \text{ g/cm}^3$ , a pressão é um décimo da profundidade. Equivalentemente, cada 10 m de coluna d'água correspondem a  $1 \text{ kgf/cm}^2$ .

A densidade de um fluido depende da pressão e da temperatura às quais ele está submetido. Para os líquidos, na maioria dos casos, ela pode ser considerada constante. Consequentemente  $0,1 \cdot d$  também é uma constante, assim, a equação 5.1 representa uma função linear, do tipo  $y = ax$ , onde a variável dependente  $y$ , que é a pressão hidrostática, varia linearmente com a variável independente  $x$ , que é a profundidade (Figura 37).

Neste caso, temos que a taxa de variação da equação é  $a = 0,1d$ . Como a taxa de variação em uma função linear representa a inclinação da reta de seu gráfico, nota-se que

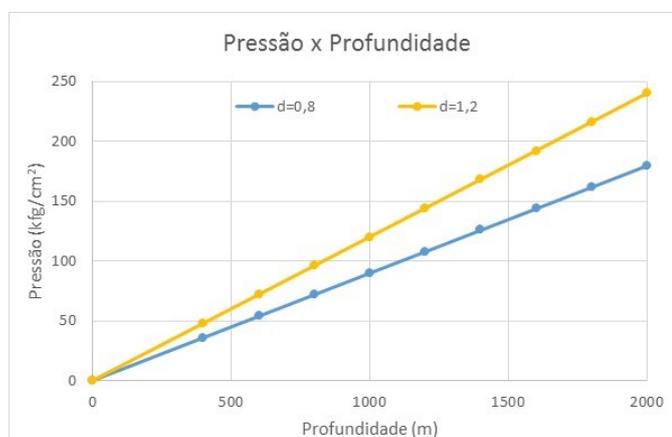
Figura 37 – Função linear

$$\begin{array}{ccccc}
 p_H & = & 0,1 \cdot d \cdot h \\
 \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 y & = & a & x
 \end{array}$$

Fonte – autoria própria

quanto maior a densidade, maior será a inclinação da reta. O gráfico 11 ilustra esse fato para densidades de 0,8 e 1,2  $g/cm^3$ .

Gráfico 11 – Quanto maior a densidade, maior a inclinação da reta



Fonte – autoria própria

A equação 5.1 mostra não só que a pressão hidrostática varia linearmente com a profundidade quando a densidade é constante, mas também, a pressão varia linearmente com a densidade quando a profundidade é constante.

## 5.2 Cálculos envolvendo a pressão no fundo de um poço de petróleo

A seguir, são mostrados dois exemplos de aplicação do cálculo da pressão hidrostática:

### Exemplo 5.1. (Autoria própria)

*Para que os poços de petróleo possam produzir eles são equipados com uma tubulação chamada coluna de produção. Esta coluna é composta de tubos de aço, de aproximadamente 9 m de extensão, que são enroscados um no outro. Imaginemos um poço vertical, equipado com uma coluna de 1000 m de comprimento, preenchida totalmente com*

um fluido de densidade  $d = 1 \text{ g/cm}^3$ . Qual é a pressão hidrostática exercida na extremidade inferior da coluna, devido à coluna de fluido?

Resolução:

Aplicando a equação 5.1, tem-se:

$$p_H = 0,1 \cdot d \cdot h = 0,1 \cdot 1 \cdot 1000 = 100 \text{ kgf/cm}^2.$$

**Exemplo 5.2.** (Autoria própria)

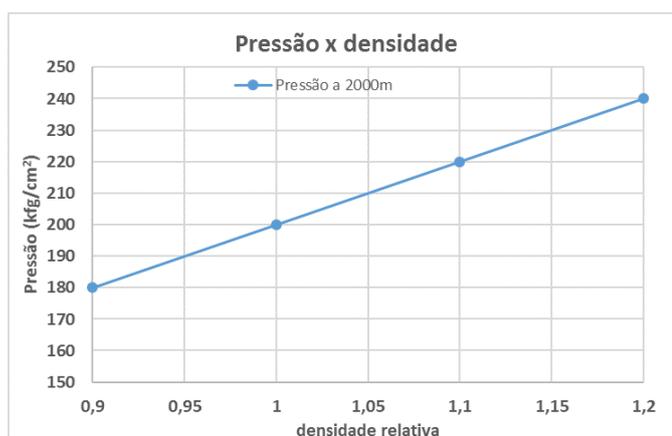
Uma tubulação semelhante à do exemplo 5.1, porém, com 2000 m de extensão, é colocada na posição vertical, preenchida totalmente com um fluido de densidade  $d = 0,9 \text{ g/cm}^3$ . O fluido tem sua densidade média alterada aos poucos, com a adição de produtos químicos, até chegar a  $1,2 \text{ g/cm}^3$ . Construa um gráfico para mostrar como varia a pressão hidrostática na extremidade inferior da coluna, à medida em que se altera a densidade.

Resolução:

Pela equação 5.1,  $p_H = 0,1 * d * h$ . Logo, conhecido  $h = 2000 \text{ m}$ , tem-se que  $p_H = 200 * d$ , que é uma função linear cujo gráfico é uma reta com coeficiente angular igual a 200.

Calculando a pressão para quatro densidades diferentes,  $d = 0,9$ ,  $d = 1,0$ ,  $d = 1,1$  e  $d = 1,2$ , obtém-se respectivamente 180, 200, 220 e 240  $\text{kgf/cm}^2$ . O gráfico 12 ilustra o resultado. Como esperado, observa-se que o comportamento do gráfico é linear e que quanto maior a densidade, maior a pressão à profundidade de 2000m.

Gráfico 12 – A pressão em uma determinada profundidade é proporcional à densidade



Fonte – autoria própria

### 5.3 Pressão e densidade do fluido: evitando acidentes

Esta seção apresenta uma aplicação prática na indústria do petróleo, envolvendo o cálculo da pressão hidrostática a uma determinada profundidade dentro de um poço de petróleo.

Seja um poço vertical e uma coluna de tubos de aço, que é descida dentro do poço por uma sonda, para possibilitar a execução de certas operações no poço. Esta coluna, semelhante àquelas dos exemplos 5.1 e 5.2, permanece o tempo todo preenchida com um fluido e está em comunicação hidráulica com o fluido do reservatório de petróleo (significa que os fluidos de ambos estão em contato, portanto, há comunicação de pressão).

Nestas operações é necessário tomar certos cuidados para evitar acidentes. Um dos maiores riscos durante a operação é a ocorrência de influxo de fluidos da formação para o poço. Se este influxo for controlável, diz-se que o poço está em *kick*; se incontrolável, diz-se em *blowout*. A ocorrência desses fenômenos pode provocar incêndio e/ou explosão, derramamento de óleo na natureza e às vezes causar mortes e destruição (THOMAS, 2004). Dentre as causas comuns da ocorrência de kick são citados o peso de lama insuficiente e/ou o abastecimento incorreto de fluido do poço durante uma manobra na operação.

Um modo de prevenir tais acidentes é trabalhar com fluido de densidade tal que a pressão do fluido na coluna, na profundidade do reservatório, seja ligeiramente maior do que a pressão do reservatório. Quando se deseja aumentar a densidade do fluido, adiciona-se geralmente a baritina,  $BaSO_4$ , que tem densidade  $4,5g/cm^3$ . Quando se quer reduzir a densidade, utiliza-se água (densidade =  $1g/cm^3$ ) ou óleo diesel ( $0,82g/cm^3$ ), conforme o tipo de fluido seja à base de água ou à base de óleo.

A densidade ideal pode ser calculada a partir dos valores de pressão e profundidade do reservatório, utilizando-se a equação 5.1. Os valores de pressão são bastante elevados, de forma que pode-se desprezar a pressão atmosférica na extremidade superior da coluna, portanto, considerar a pressão total igual à pressão hidrostática. Assim, obtém-se a seguinte equação:

$$d = \frac{10 \cdot p}{h} = \frac{10}{h} \cdot p \quad (5.2)$$

Esta é claramente uma função linear. A densidade, que se pretende calcular, varia linearmente com a pressão reinante na profundidade determinada ( $h$  constante). Quanto maior a pressão desejada, maior será a densidade necessária para atingí-la.

**Exemplo 5.3.** (Autoria própria)

Seja um reservatório a 2000m de profundidade e com uma pressão de  $220 kgf/cm^2$ . Qual deve ser a densidade do fluido para o poço ficar em equilíbrio, sem oferecer risco à segurança?

**Resolução:**

Utilizando a equação 5.2, tem-se:

$$d = 10 \cdot p/h = 10 \cdot 220/2000 = 1,1.$$

Portanto, para não oferecer risco à segurança, a densidade do fluido deve ser, no mínimo, de  $1,1 \text{ g/cm}^3$ . O químico responsável irá preparar o fluido para ser usado pela sonda no poço de acordo com este valor calculado.

Este resultado pode ser visto claramente no gráfico 12, na seção anterior.

## 5.4 Otimização da produção por bombeio mecânico

Esta seção apresenta mais uma aplicação da teoria da função linear na indústria do petróleo.

Como visto no exemplo 5.1, um poço vertical de produção de petróleo é equipado com uma tubulação chamada coluna de produção. Esta coluna é composta de tubos de aço, de aproximadamente 9m de extensão, que são enroscados um ao outro, um por um.

Ao ser produzido, o petróleo escoar para cima, dentro da coluna, e tem que chegar à superfície com uma pressão suficiente para passar pela planta de processo. Essa pressão é chamada pressão na cabeça do poço ( $P_{cab}$ ) e normalmente se situa em torno de  $20 \text{ kgf/cm}^2$ .

Os métodos de cálculo de pressão hidrostática vistos nas seções anteriores permitem calcular a pressão no fundo do poço, para o caso em que o fluido esteja em repouso. Estar em repouso significa que não há movimentação de fluido, do reservatório para a coluna (produção) ou vice-versa (injeção). Assim:

Pressão no fundo = Pressão na cabeça + pressão devido à coluna de fluido.

Para que um poço de petróleo seja capaz de produzir, é necessário que a pressão do reservatório de petróleo seja maior do que a pressão no fundo. No início da produção de um campo de petróleo, a pressão original do reservatório cumpre esse requisito, logo, o poço é capaz de produzir. A vazão de produção irá depender de vários fatores, sendo um dos principais a diferença entre as pressões do reservatório e da pressão de fundo do poço, que por sua vez, dependem do Índice de Produtividade (IP) do poço.

Como afirmam Rosa e Carvalho (2002), à medida em que se produz, a retirada de fluido faz com que a pressão no reservatório caia e em consequência a produção diminua. Se nenhuma providência for tomada, em pouco tempo não haverá mais produção. Provavelmente, não mais do que 10% do óleo do reservatório terá sido produzido e certamente o projeto será um fracasso econômico, pois a receita obtida com a venda do óleo não será suficiente para pagar os investimentos e os custos de produção.

Surge, então, a necessidade de se fazer algo para que a produção se mantenha em níveis desejáveis (econômicos, estratégicos, políticos, etc). Uma das alternativas é a utilização de métodos de elevação artificial. A maioria dos poços em produção no mundo está em campos terrestres e, neste caso, o método mais utilizado é o bombeio mecânico com hastes (Figura 38).

Figura 38 – Sistema de Bombeio Mecânico com Hastes



Fonte – Thomas (2004, p. 246)

Como explicam Oliveira e Duarte (2016) e Thomas (2004), o bombeio mecânico utiliza uma unidade de bombeio na superfície, que transforma em movimento alternativo o movimento circular de um motor, na velocidade desejada. Este movimento alternativo, para cima e para baixo, é transmitido a uma coluna de hastes, que vai movimentar uma bomba alternativa instalada no fundo do poço para elevar os fluidos produzidos pelo reservatório até a superfície.

Várias ferramentas são utilizadas para análise e avaliação das condições de bombeio. Entre elas estão as cartas dinamométricas e os registros sonolog. Segundo Carvalho (2014), as cartas dinamométricas consistem na medição e registro gráfico das cargas que atuam na unidade de bombeio e na haste polida durante um ciclo completo de bombeio (descida e subida da coluna de hastes) e servem para identificar falhas ou desajustes no sistema. O sonolog é um registro da altura do nível de fluido dentro do poço.

Se o nível estiver muito baixo, próximo da bomba, significa que a vazão está muito alta e que o reservatório não consegue repor adequadamente o fluido no interior da bomba. Isso gera desperdício de energia e desgaste do sistema, aumentando os custos de produção. Por outro lado, se o nível estiver muito alto, significa que a bomba não está bombeando o suficiente, conseqüentemente o poço não está produzindo tudo o que pode produzir. Essa produção menor ocasiona perda de receita, ou seja, redução de receita e de lucro.

A coluna do poço é montada rosqueando-se tubos uns aos outros, havendo uma luva em cada união entre tubos. O equipamento chamado sonolog emite um ruído forte na

entrada do poço na superfície, que se propaga poço abaixo. Este ruído é refletido por cada uma das luvas e de volta à superfície é captado pelo equipamento. Também é captado o som do impacto da onda sonora na superfície do líquido, diferente daquele das luvas. O registro das reflexões nos permite ver quantas luvas existem entre a superfície e o topo da coluna de líquido, possibilitando estimar a profundidade  $H$ , pois conhece-se o número de luvas e a distância entre elas. A diferença entre  $H$  e a profundidade da bomba é chamada de submersão da bomba. A estimativa de  $H$  e da submersão indicará se é necessário fazer ajustes nas condições de bombeio para que seja otimizada a produção. O cálculo da profundidade é bastante simples, dado pela equação

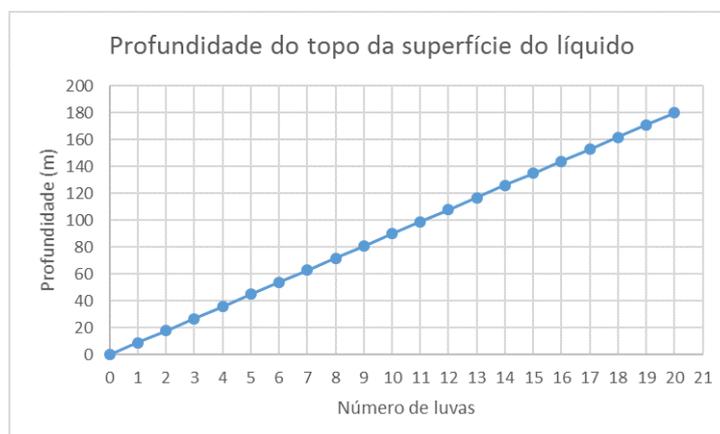
$$H = n \cdot d \quad (5.3)$$

onde  $n$  = número de luvas detectado e  $d$  = distância padrão entre luvas, aproximadamente 9 m. Logo,

$$H = 9 \cdot n$$

A relação entre o número de luvas e a profundidade do topo da superfície do líquido na coluna do poço é uma função linear, como mostra o gráfico 13, cujo coeficiente angular é igual a 9.

Gráfico 13 – Nível de líquido no poço



Fonte – Autoria própria

Conclui-se que a aplicação do conceito de função linear para controlar os parâmetros de bombeio mecânico de um poço de petróleo permite otimizar sua produção.

## 5.5 Previsão de produção de petróleo utilizando curvas de declínio de produção

A estimativa da produção futura de um campo de petróleo permite a realização de análises de viabilidade econômica do projeto, seja antes do desenvolvimento do campo ou quando da implantação de um novo projeto em um campo já desenvolvido (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006).

Os engenheiros e demais profissionais que atuam na área de Engenharia de Petróleo utilizam informações sobre as propriedades e características das rochas e dos fluidos contidos nas formações portadoras de petróleo, bem como sobre o seu comportamento passado (histórico de produção), para inferir o comportamento futuro desse reservatório (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006). Os modelos gerados a partir desses estudos permitem estimar o potencial de produção do reservatório e aplicar métodos que possam maximizar os ganhos a serem obtidos na exploração de campos petrolíferos.

Segundo Thomas (2004), dentre os métodos disponíveis para a elaboração de uma curva de produção, podemos destacar dois:

a) Simulação Numérica: Consiste na montagem de um modelo numérico do reservatório, que exige uma quantidade enorme de informações, nem sempre disponíveis, tais como propriedades das rochas, dos fluidos e vários outros parâmetros do reservatório. Exige a aquisição de softwares sofisticados e caros, leva tempo para ser montado e requer pessoal com alta qualificação. O modelo pode ser aprimorado com o tempo, através da inclusão de informações adquiridas ao longo da vida produtiva do campo ou reservatório. Permite fazer simulação de alternativas de projetos, como a perfuração de novos poços, e compará-las, com o objetivo de escolher a melhor opção.

b) Análise de curvas de declínio de produção: A análise de curvas de declínio é um método simplificado e bastante usado na previsão de produção de poços isolados ou de reservatórios de óleo (petróleo). É rápido e fácil de ser montado. Para o ajuste do modelo, é necessário que o reservatório já tenha um histórico de produção. Quanto mais longo o histórico, mais confiável será o modelo. Nesta seção será mostrado este segundo método.

### 5.5.1 Análise de curvas de declínio de produção

O principal parâmetro neste método é a taxa de declínio da produção, ou seja, a queda relativa da vazão por período de tempo, assim definida (ROSA; CARVALHO; XAVIER, 2006):

$$a = -\frac{\Delta q/q}{\Delta t} \quad (5.4)$$

onde

a: taxa de declínio (em 1/ano)

t: o tempo (em anos)

$\Delta t$ : intervalo de tempo

q: a vazão de produção (em  $m^3/d$ )

$\Delta q$ : variação de vazão no intervalo de tempo  $\Delta t$

A Equação 5.4 pode ser expressa de outra forma, ressaltando a queda de vazão,  $\Delta q$ , em um intervalo  $\Delta t$ :

$$\Delta q = -aq\Delta t \quad (5.5)$$

As unidades *1/ano* para a taxa de declínio e *ano* para o tempo são usuais, mas não são obrigatórias. O que importa é que uma seja o inverso da outra, ou seja, se a taxa está em *1/ano*, o tempo deve estar em *ano*; se a taxa está em *1/mês*, o tempo deve estar em *mês* e assim por diante.

A taxa de declínio tem sinal positivo, uma vez que a vazão é decrescente com o tempo e, portanto,  $\Delta q$  tem sinal negativo.

O valor da taxa de declínio não é medido, mas sim, calculado no ajuste do modelo, e corresponde à variação relativa instantânea de vazão por tempo. Instantânea significa que é aquela que ocorre em intervalos de tempo,  $\Delta t$ , muito pequenos.

A tabela 6 apresenta, como exemplos, três reservatórios diferentes, com os valores de suas vazões de produção, em  $m^3/d$ , de ano em ano, a partir do primeiro dia de produção de cada um deles.

Tabela 6 – Vazão de produção observada em três reservatórios diferentes

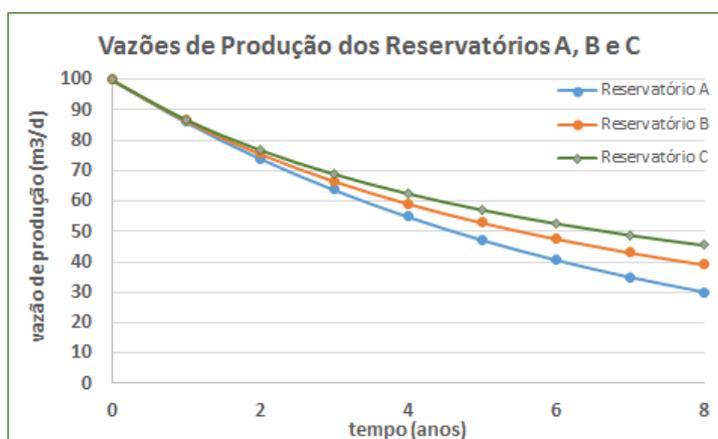
	Reserv A			Reserv B			Reserv C		
t	q	$\Delta q$	$(\Delta q)/q$	q	$\Delta q$	$(\Delta q)/q$	q	$\Delta q$	$(\Delta q)/q$
0	100			100			100		
1	86,1	13,9	0,139	86,5	13,5	0,135	87,0	13,04	0,130
2	74,1	12,0	0,139	75,6	10,9	0,126	76,9	10,0	0,115
3	63,8	10,3	0,139	66,6	9,0	0,119	69,0	7,9	0,103

Fonte: Autoria própria

Entende-se como tempo zero a data de início de produção, logo, a vazão para  $t=0$  é a vazão inicial, a vazão para  $t=1$  é a vazão no primeiro dia do segundo ano de produção e assim por diante. Apresenta também a queda da vazão em relação ao ano anterior,  $\Delta q$ , e a queda relativa no ano,  $(\Delta q)/q$ . Nota-se que no reservatório A a taxa  $(\Delta q)/q$  é constante, enquanto nos reservatórios B e C essas taxas são decrescentes.

No gráfico 14 pode-se ver e comparar o comportamento das três curvas de produção da tabela 6.

Gráfico 14 – Vazão de produção observada em três reservatórios diferentes



Fonte – Autoria própria

Observações empíricas mostraram que, na prática, a taxa de declínio de produção obedece à seguinte relação:

$$a = a_i \left( \frac{q}{q_i} \right)^n, \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (5.6)$$

onde  $a_i$  é a taxa de declínio inicial,  $q_i$  a vazão inicial,  $n$  uma constante,  $q$  é a vazão em um determinado momento e  $a$  é a taxa de declínio naquele momento.

Uma vez que apenas  $q_i$  é conhecida, deve-se determinar,  $a_i$  e  $n$ , para que seja conhecido o declínio de produção do poço ou reservatório.

Os declínios de produção são classificados em três tipos, segundo o valor de  $n$ :

- declínio exponencial, quando  $n = 0$ ;
- declínio harmônico, quando  $n = 1$ ;
- declínio hiperbólico, quando  $0 < n < 1$ .

Nesta seção é mostrado apenas o declínio exponencial. Os declínios harmônico e hiperbólico são abordados nos Apêndices B e C, respectivamente.

### 5.5.2 Declínio Exponencial

Neste tipo de declínio tem-se  $n=0$ , então, substituindo  $n$  na equação 5.6, obtém-se:

$$a = a_i \left(\frac{q}{q_i}\right)^n = a_i \left(\frac{q}{q_i}\right)^0 = a_i, \text{ logo,}$$

$$a = a_i \tag{5.7}$$

Portanto, no declínio exponencial a taxa de declínio é constante ao longo do tempo.

Este é um caso bastante desfavorável, pois a taxa de declínio permanece constante, igual à inicial, ao contrário dos outros tipos de declínio, que têm taxas decrescentes, como será visto no Apêndice B. Reservatórios com esse tipo de declínio geralmente apresentam baixos percentuais de recuperação final, que é a razão entre o volume produzido acumulado até o final da vida do reservatório e o volume inicial de petróleo do reservatório.

Substituindo  $a = a_i$  na equação 5.4:

$$a_i = -\frac{\Delta q/q}{\Delta t}, \tag{5.8}$$

Para resolver esta equação, é necessário utilizar "técnicas de integração", que é assunto da Matemática do Ensino Superior, por isso, só será mostrado no Apêndice A. Neste capítulo será apresentado apenas o resultado, na forma da Equação 5.9, que exprime a vazão como uma função exponencial do tempo e da taxa de declínio, com expoente negativo:

$$q = q_i e^{(-a_i t)} \tag{5.9}$$

Ajuste de histórico e determinação de  $a_i$ :

Na equação 5.9,  $a_i$  faz parte do argumento de uma função exponencial (expoente de  $e$ ), o que dificulta sua determinação. Em casos como este, emprega-se o processo de linearização, já descrito anteriormente. Primeiramente, aplica-se o logaritmo a ambos os lados da igualdade:

$\ln q = \ln (q_i e^{(-a_i t)})$ . Em seguida, aplica-se a propriedade do logaritmo do produto:

$$\ln q = \ln q_i + \ln (e^{(-a_i t)})$$

Sabendo-se que a função exponencial e a função logarítmica são inversas uma da outra, aplica-se a propriedade  $\ln e^x = x$ , obtendo:

$$\ln q = \ln q_i - a_i t \tag{5.10}$$

Uma vez que  $\ln(q_i)$  e  $a_i$  são constantes, a equação 5.10 representa uma **função afim**.

A variável independente é  $t$  e a variável dependente é  $\ln(q)$ . A taxa de variação é igual a  $-a_i$  e o coeficiente linear  $\ln(q_i)$ . Portanto, no declínio exponencial um gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$  resulta em uma linha reta com esses parâmetros. Nota-se que a taxa de variação é negativa, coerente com o fato de que  $\ln(q)$  é decrescente ao longo do tempo.

O cálculo do coeficiente angular de uma reta (taxa de variação da função) é feito através da equação 2.1. São necessários dois pontos da reta; um já é conhecido:  $(t = 0, \ln(q_i))$ . O outro é um ponto qualquer  $(t, \ln(q))$  da reta  $\ln(q)$  versus  $t$  ajustada aos dados. Logo:

$$-a_i = \frac{\ln(q) - \ln(q_i)}{t - 0}, \text{ que depois de rearrumada resulta na equação:}$$

$$a_i = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{q_i}{q}\right) \quad (5.11)$$

Previsão de comportamento:

A vazão  $q$  em qualquer tempo  $t$  pode ser calculada através da equação 5.9, utilizando o valor de  $a_i$ , determinado com o ajuste de histórico.

Para calcular o volume acumulado de óleo produzido ( $N_p$ ), também é necessário utilizar o conceito de "integral", por isso, só será mostrado no Apêndice A. Neste capítulo será mostrado apenas o resultado, na forma da Equação 5.12:

$$N_p = 365 \left( \frac{q_i - q}{a_i} \right), \quad (5.12)$$

sendo  $q$  a vazão no instante para o qual se deseja calcular a produção acumulada de óleo. A introdução do fator 365 na equação é para uniformizar as unidades, já que a vazão é dada em  $m^3/d$  e  $a_i$  é dado em  $ano^{-1}$ .

**Exemplo 5.4.** *Rosa e Carvalho (2002, p. 259)*

*Um campo de petróleo apresenta histórico de vazões de produção como mostrado na Tabela 7.*

Tabela 7 – Dados de produção do Exemplo 5.4

Data (ano)	$q$ ( $m^3 std/d$ )
01.01.2008	3600
01.01.2009	3455
01.01.2010	3335
01.01.2010	3190
01.01.2012	3090

Fonte: Rosa e Carvalho (2002, p. 259), adaptado

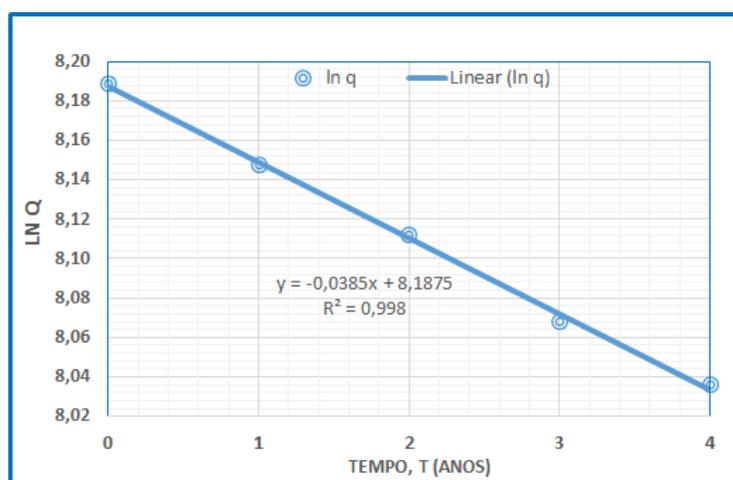
*Pede-se:*

- a) Verificar se o declínio do campo em estudo é do tipo exponencial.
- b) Determinar a taxa de declínio inicial  $a_i$ .
- c) Estimar a vazão de produção em 01.07.2018.

Solução:

a) Com os dados da tabela 7 constrói-se o gráfico 15,  $\ln q$  x  $t$ (ano).

Gráfico 15 – Declínio Exponencial - Valores de  $\ln(q)$  versus  $t$  - exemplo 5.4



Fonte – Rosa e Carvalho (2002, p. 262), adaptado

Nota-se que a curva do gráfico é praticamente uma linha reta, pois a reta ajustada tem coeficiente de correlação  $R^2$  bem próximo de 1, portanto, conclui-se que o declínio do campo é exponencial.

b) O gráfico, efetuado pelo programa Excel, já mostra a equação da reta ajustada aos pontos por regressão linear. Nela pode-se ver que o coeficiente angular é -0,0385, portanto a taxa de declínio é 0,0385/ano.

No caso em que o programa não esteja disponível, pode-se construir o gráfico, ajustar uma reta manualmente aos pontos e calcular a taxa de variação da seguinte forma: toma-se dois pontos da reta ajustada aos dados, por exemplo os pontos extremos da reta, ou seja, nos tempos  $t=0$  e  $t=4$ . Calcula-se o coeficiente angular, que é igual à taxa de declínio:

$$a_i = \frac{\ln q_4 - \ln q_0}{t_4 - t_0} = \frac{\ln q_4 - \ln q_0}{4}$$

c) A data de 01/07/2018 corresponde a  $t=10,5$  anos, pois a produção se iniciou em 01/01/2008. A vazão de produção nesta data pode ser estimada através da equação 5.9:

$$q = q_i e^{(-a_i t)} = 3600 e^{(-0,0385 \cdot 10,5)} = 2400 \text{ m}^3 \text{ std/d.}$$

Alternativamente, podemos calcular a vazão pela equação obtida da regressão linear:  $y = -0,0385x + 8,1875$ , onde  $y = \ln q$  e  $x = \text{tempo}$ .

$$\ln(q) = -0,0385t + 8,1875 \quad \text{ou} \quad q = \exp(-0,0385t + 8,1875) = 2400 \text{ m}^3\text{std}/d.$$

A Figura 39 apresenta os parâmetros e as fórmulas básicas para fazer os cálculos relativos ao declínio exponencial, harmônico e hiperbólico.

Figura 39 – Parâmetros e fórmulas dos declínios

	Exponencial	Harmônico	Hiperbólico
n	0	1	$0 < n < 1$
a	$a = a_i$	$a = a_i \frac{q}{q_i}$	$a = a_i \left(\frac{q}{q_i}\right)^n$
$a_i$	$a_i = -\frac{1}{q} \frac{dq}{dt}$	$a_i \frac{q}{q_i} = -\frac{1}{q} \frac{dq}{dt}$	$a_i \left(\frac{q}{q_i}\right)^n = -\frac{1}{q} \frac{dq}{dt}$
q	$q = q_i e^{-a_i t}$	$q = \frac{q_i}{(1+a_i t)}$	$q = \frac{q_i}{(1+n a_i t)^{1/n}}$
Forma de função afim	$\ln(q) = \ln(q_i) - a_i t$	$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_i} + \frac{a_i}{q_i} t$	$\left(\frac{q}{q_i}\right)^n = 1 + n a_i t$
Gráfico	$\ln(q) \times t$	$\frac{1}{q} \times t$	$\left(\frac{q}{q_i}\right)^n \times t$
Np (vol. acumulado)	$Np = 365 \frac{q_i - q}{a_i}$	$Np = 365 \frac{q_i}{a_i} \ln \frac{q_i}{q}$	$Np = 365 \frac{q_i}{a_i} \left(\frac{1}{n-1}\right) [(1+n a_i t)^{\frac{n-1}{n}} - 1]$

Fonte – autoria própria

Nesta seção foi mostrado como fazer uma previsão de produção utilizando a Análise de Curvas de Declínio. Apesar de ser um método simplificado, pois não exige informações sobre as propriedades das rochas, dos fluidos e de outras características do reservatório nem a aquisição de softwares sofisticados e caros, ele dá bons resultados, desde que se tenha um histórico de produção.

## Capítulo 6

# PROPOSTA DE ATIVIDADES

Como diz [Bassanezi \(2002, p. 18\)](#), "o objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato, extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato, onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem". Os parâmetros ou argumentos do sistema considerados essenciais são selecionados e formalizados por meio de um sistema artificial, chamado de modelo, que representa de alguma forma o objeto estudado.

Ainda segundo o autor, a modelagem matemática é a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Em geral, os fenômenos representados são complexos, sendo assim, torna-se necessário fazer simplificações de tal modo que o problema seja tratável e, ao mesmo tempo, mantenha sua relevância.

Neste capítulo, será apresentada uma proposta de três atividades que poderão ser aplicadas pelos professores em suas salas de aula. Nelas são colocadas situações que ocorrem na Engenharia de Petróleo, que podem ser modeladas matematicamente e resolvidas utilizando conceitos aprendidos no Ensino Médio.

Para cada atividade são colocados o objetivo, o público alvo, os pré-requisitos, a estimativa de tempo necessário, a sugestão da sequência a ser seguida pelo professor e a atividade em si, com a resolução. As folhas de atividades, a serem distribuídas aos alunos, estão no Apêndice D.

### 6.1 Atividade 1

Objetivo: desenvolver habilidades e competências no estudo de funções, especialmente a função afim, como preconiza o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro ([RIO DE JANEIRO, 2012](#)). A atividade proporciona, também, um conhecimento básico sobre o desempenho de produção de um poço de petróleo em relação a alguns parâmetros.

Público alvo: alunos do 1º e 2º bimestres do 1º ano do Ensino Médio.

Pré-requisito: conhecimentos básicos de função afim

Tempo necessário: uma ou duas aulas de 50 minutos

Sequência:

Etapa 1: O professor divide a turma em duplas e explica aos alunos que nesta atividade eles aplicarão seus conhecimentos de função afim, para resolver um problema do dia-a-dia de um engenheiro de petróleo. Estabelece um diálogo com os alunos sobre o assunto petróleo, indagando, por exemplo, se tem alguém na família que trabalha na área de petróleo; indagando o que eles sabem sobre petróleo, etc. Se achar necessário, o professor pode fazer uma breve recapitulação do que é uma função afim.

Etapa 2: O professor distribui a cada aluno uma folha de atividades, contendo a sequência a ser executada, e solicita que cada dupla as leia. Após a leitura, o professor solicita que os alunos resolvam as questões propostas.

Etapa 3: Enquanto os alunos resolvem as questões, o professor exerce o papel de mediador, incentivando e ajudando, na medida em que eles apresentem dúvidas.

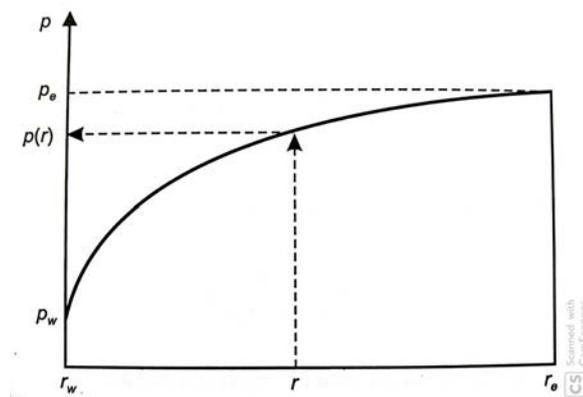
Etapa 4: Após a resolução de todas as tarefas, o professor inicia um debate sobre as respostas obtidas, as dificuldades encontradas e qualquer outra observação que queiram fazer.

A seguir, a atividade 1 em si e as soluções.

Um poço de petróleo só produz se a pressão do fluido no seu interior for inferior à pressão do fluido nas suas vizinhanças. O volume de fluido que entra no poço por unidade de tempo é chamado de vazão, que é normalmente expressa em metros cúbicos por dia ( $m^3/d$ ).

A Figura 40 mostra como a pressão do reservatório varia à medida em que se afasta do poço, quando este está produzindo.

Figura 40 – Distribuição da pressão, do poço ao limite do reservatório



Fonte – Rosa, Carvalho e Xavier (2006, p. 205)

Este é um gráfico  $p \times r$ , onde  $p$  é a pressão em um determinado ponto do reservatório e  $r$  é a distância deste ponto ao centro do poço. Portanto, a escala do eixo horizontal começa em  $r=r_w$ , onde  $r_w$  é o raio do poço, e termina em  $r=r_e$ , onde  $r_e$  é o limite do reservatório. A pressão na parede do poço é chamada  $p_w$  e a pressão no limite do reservatório  $p_e$ .

Um teste de formação é uma operação feita em um poço de petróleo, na qual se consegue medir a vazão de produção na superfície (plataforma, por exemplo) e obter a pressão estática do reservatório ( $p_e$ ) e a pressão no fundo do poço ( $p_w$ ) durante o teste. O Índice de Produtividade (IP) do poço é definido como a razão entre a vazão de produção e a diferença entre as pressões  $p_e$  e  $p_w$  e é expresso pela equação

$$IP = \frac{q}{p_e - p_w}.$$

O IP do poço é um parâmetro que pode ser considerado constante.

Usando as informações acima, responda:

- 1) Escreva a equação que fornece a vazão em função de IP,  $p_e$  e  $p_w$ .

Resposta:  $q = IP \cdot (p_e - p_w)$

- 2) Sabe-se que uma função afim é da forma  $y = ax + b$ . Nesta equação, a variável dependente é ..... A variável independente é ..... O parâmetro  $a$  é chamado ..... E o parâmetro  $b$  é chamado .....

Respostas:  $y$ ;  $x$ ; taxa de variação da função ou coeficiente angular da reta; coeficiente linear da reta

3) Considerando-se que o IP e a  $p_e$  são constantes, coloque a expressão encontrada no item 1 na forma de uma função afim.

Resposta: Se  $q = IP \cdot (p_e - p_w)$ , então  $q = -IP \cdot p_w + IP \cdot p_e$

Nesta equação, a variável independente é: ..... A variável dependente é: ..... A taxa de variação ou coeficiente angular é: .....

Respostas:  $p_w$ ;  $q$ ;  $-IP$

4) Durante um teste realizado em um poço, a vazão de produção medida foi equivalente a  $1200 \text{ m}^3/d$ ; a pressão estática do reservatório ( $p_e$ ) foi de  $220 \text{ kgf/cm}^2$  e a pressão de fluxo no fundo do poço ( $p_w$ ) foi de  $190 \text{ kgf/cm}^2$ . Calcule o IP do poço.

Resposta:  $IP = \frac{q}{p_e - p_w} = \frac{1200}{220 - 190} = \frac{1200}{30} = 40 \text{ m}^3/d$

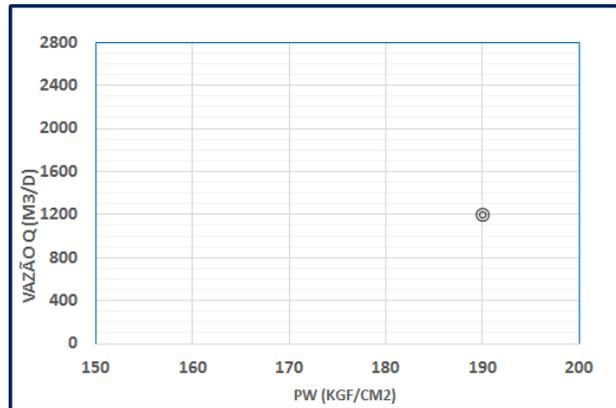
5) Construa o gráfico  $q$  versus  $p_w$ , para  $p_w$  variando entre 150 e 200  $\text{kgf/cm}^2$ . Antes de construir o gráfico, preencha a tabela abaixo. O par ordenado ( $p_w = 190, q = 1200$ ), que corresponde ao teste de formação, já foi preenchido na tabela e colocado no gráfico.

Tabela 8 – Tabela auxiliar para construção do gráfico de  $q$  versus  $p_w$

$p_w$	$p_e - p_w$	$q = IP \cdot (p_e - p_w)$
150		
160		
170		
180		
190	30	1200
200		

Fonte: autoria própria

Gráfico 16 –  $q$  versus  $p_w$  atividade 1 questão 5



Fonte – autoria própria

Solução: Como  $q = IP \cdot (p_e - p_w)$ ,  $IP = 40$ ,  $p_e = 220$ , então  $q = 40 \cdot (220 - p_w)$ . Para cada  $p_w$ , calcula-se  $p_e - p_w$  e depois  $q$ , preenchendo a tabela. Com os dados da tabela,

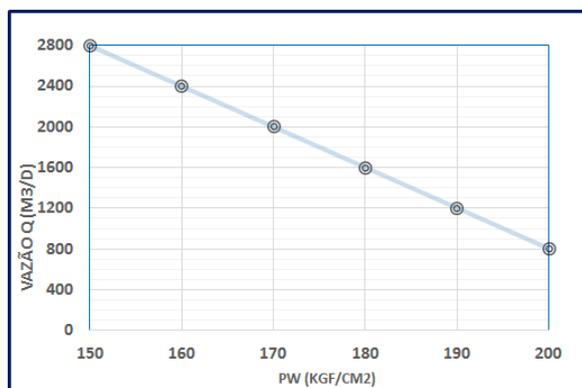
Tabela 9 – Tabela auxiliar preenchida

$p_w$	$p_e - p_w$	$q = IP \cdot (p_e - p_w)$
150	70	2800
160	60	2400
170	50	2000
180	40	1600
190	30	1200
200	20	800

Fonte: autoria própria

constrói-se o gráfico:

Gráfico 17 – Solução atividade 1 questão 5



Fonte – autoria própria

## 6.2 Atividade 2

Objetivo: desenvolver habilidades e competências no estudo de funções, como preconiza o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro. A atividade permite ao aluno conhecer a maneira como se distribui a pressão dentro de um poço de petróleo ao longo da profundidade. Permite, também, exercitar a conversão de unidades e a multiplicação e divisão de potências de 10.

Público alvo: alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Pré-requisito: conhecimentos básicos de função afim

Tempo necessário: uma aula de 50 minutos

Sequência:

Etapa 1: O professor divide a turma em duplas e explica aos alunos que nesta atividade eles aplicarão seus conhecimentos de função afim para resolver um problema do dia-a-dia de um engenheiro de petróleo. Em seguida, distribui a cada aluno uma folha de atividades, contendo a sequência a ser executada, e chama a atenção para a figura esquemática do poço de petróleo, que mostra em detalhe os equipamentos que compõem a coluna de produção do poço, também conhecida como coluna de completção. O professor pode perguntar, por exemplo, se alguém tinha ideia de que o poço de petróleo era equipado desta maneira.

Etapa 2: O professor distribui a cada aluno uma folha de atividades, contendo a sequência a ser executada, e solicita que cada dupla as leia. Após a leitura, o professor solicita que os alunos resolvam as questões propostas.

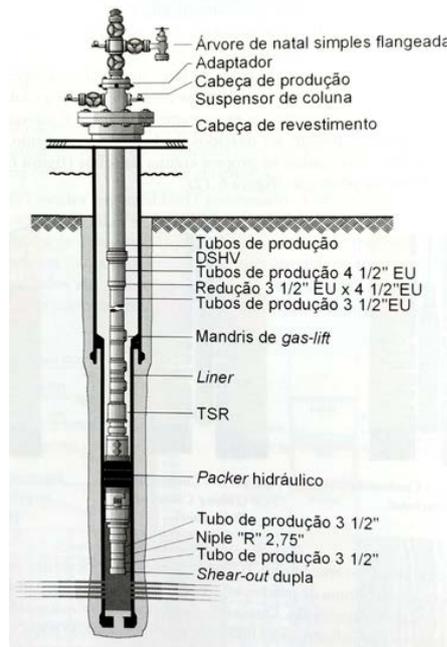
Etapa 2: Enquanto os alunos resolvem as questões, o professor exerce o papel de mediador, incentivando e ajudando, na medida em que eles apresentem dúvidas.

Etapa 3: Após a resolução de todas as tarefas, o professor inicia um debate sobre as respostas obtidas, as dificuldades encontradas e qualquer outra observação que queiram fazer.

A seguir, a atividade 2 em si e as soluções.

A figura abaixo mostra um esquema simplificado de um poço de petróleo. São mostrados alguns dos elementos que compõem a coluna de produção do poço, que é vertical.

Figura 41 – Esquema de um poço de petróleo



Fonte – Thomas (2004, p. 148)

Mesmo quando o poço não está produzindo, a coluna está sempre preenchida com fluido. Suponha que esta seja a situação, ou seja, o poço está fechado, preenchido com um fluido de densidade  $1 \text{ g/cm}^3$ .

Sabe-se, da Física, que, se o fluido está em repouso, a diferença de pressão entre dois pontos A e B, situados em profundidades diferentes, sendo B abaixo de A, é dado pela expressão

$$p_B - p_A = d \cdot h \cdot g$$

onde  $p_B$  é a pressão no ponto B,  $p_A$  é a pressão no ponto A,  $d$  é a densidade do fluido,  $h$  é a diferença de profundidade,  $g$  é a constante gravitacional.

Pede-se:

- a) Reescreva a equação acima, expressando  $p_B$  em função de  $p_A$ ,  $d$ ,  $h$  e  $g$ .

Resposta:  $p_B = p_A + d \cdot h \cdot g$

- b) Considerando-se que  $d$  e  $g$  são constantes, que tipo de função essa equação representa? Qual é a variável independente? Qual é a taxa de variação da função?

Resposta: Função afim. A variável independente é  $h$ . A taxa de variação é  $d \cdot g$

- c) Transforme a unidade de medida da densidade, de  $g/cm^3$  para  $kg/m^3$

$$\text{Resposta: } 1 \frac{g}{cm^3} = \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{1kg}{1000g} \cdot \left(\frac{100cm}{m}\right)^3 = \frac{100^3}{1000} \cdot \frac{kg}{m^3} = \frac{(10^2)^3}{10^3} \cdot \frac{kg}{m^3} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

- d) Se a pressão no topo da coluna é de  $3 \cdot 10^6 N/m^2$ , qual é o valor da pressão a uma profundidade 1000 m abaixo? Use  $g = 10 m/s^2$ ,  $h$  em metros,  $d$  em  $kg/m^3$ . Com estas unidades, a pressão será dada em  $N/m^2$ .

Solução: chamando de  $p_B$  a pressão a 1000 m abaixo e utilizando a fórmula

$$p_B = p_A + d \cdot h \cdot g, \text{ onde } p_A = 3 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}, d = 1000 \frac{kg}{m^3}, h = 1000m \text{ e } g = 10m/s^2, \text{ tem-se:}$$

$$p_B = 3 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 1000m \cdot 10m/s^2 = 3 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} + 10 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m/s^2}{m^2} = 13 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$$

$p_B = 1,3 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$  é o valor da pressão a uma profundidade 1000 m abaixo do topo da coluna.

- e) Qual deveria ser a densidade do fluido para que a pressão a 1000 m de profundidade fosse igual a  $1,5 \cdot 10^7 N/m^2$ ?

$$\text{Solução: } p_B = p_A + d \cdot h \cdot g, \text{ logo, } d \cdot h \cdot g = p_B - p_A, \text{ de onde } d = \frac{p_B - p_A}{h \cdot g}.$$

$$\text{Substituindo os valores: } d = \frac{1,5 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^6}{1000 \cdot 10} = \frac{(15 - 3) \cdot 10^6}{10^4} = 1200 \frac{kg}{m^3}.$$

Logo, a densidade deve ser de  $1200 \frac{kg}{m^3}$ , para que a pressão a 1000 m de profundidade seja  $1,5 \cdot 10^7 N/m^2$ .

### 6.3 Atividade 3

Objetivo: desenvolver habilidades e competências no estudo das funções afim, exponencial e logarítmica, como preconiza o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2012). A atividade proporciona, também, um conhecimento básico sobre o comportamento esperado da produção de um poço ou campo de petróleo e sobre um dos métodos utilizados na indústria do petróleo para se fazer uma previsão de produção.

Público alvo: alunos do 1º bimestre do 2º ano do Ensino Médio.

Pré-requisito: conhecimentos básicos de função afim, propriedades de exponenciais e logaritmos.

Tempo necessário: uma ou duas aulas de 50 minutos

Material necessário: uma calculadora científica

Sequência:

Etapa 1: O professor divide a turma em duplas e explica aos alunos que nesta atividade eles aplicarão seus conhecimentos de função afim e de operações com exponen-

ciais e logaritmos, para resolver um problema do dia-a-dia de um engenheiro de petróleo. Estabelece um diálogo com os alunos sobre o assunto petróleo, indagando, por exemplo, se tem alguém na família que trabalha na área de petróleo; indagando o que eles sabem sobre petróleo, etc. Se achar necessário, o professor pode fazer uma breve recapitulação do que é uma função afim e das principais propriedades das operações com exponenciais e logaritmos.

Etapa 2: O professor distribui a cada aluno uma folha de atividades, contendo a sequência a ser executada. O professor lê as instruções para execução da atividade e solicita que os alunos resolvam as questões propostas.

Etapa 3: Enquanto os alunos resolvem as questões, o professor exerce o papel de mediador, incentivando e ajudando, na medida em que eles apresentem dúvidas.

Etapa 4: Após a resolução de todas as tarefas, o professor inicia um debate sobre as respostas obtidas, as dificuldades encontradas e qualquer outra observação que queiram fazer.

A seguir, a atividade 3 em si e as soluções.

Em um campo de petróleo, à medida que o óleo vai sendo produzido, a pressão do reservatório, vai se reduzindo. Com a pressão mais baixa, os poços não conseguem produzir a mesma vazão de antes, portanto, a produção vai caindo ao longo do tempo. Um dos métodos utilizados para determinar como essa queda acontece é a Análise de Declínio de Produção: baseado no histórico de produção passado, constrói-se um modelo matemático deste comportamento, o qual servirá também para prever a produção futura. Por exemplo, o comportamento pode ser de um declínio exponencial; neste caso a vazão em um tempo  $t$  qualquer é dada pela equação:

$$q = q_0 \cdot e^{-a_0 \cdot t}$$

onde  $q_0$  é a vazão inicial,  $a_0$  é a taxa de declínio,  $t$  é o tempo e  $e$  é a constante de Euler (da função exponencial).

No declínio exponencial, uma taxa de declínio de 0,12/ano significa que a vazão depois de um ano será igual a  $e^{-0,12} = 0,8869$  vezes a vazão inicial. Ou seja, se a vazão em janeiro/2019 foi de  $1000 \text{ m}^3/\text{d}$ , em janeiro/2020 será de  $1000 \cdot 0,8869 = 886,9 \text{ m}^3/\text{d}$ .

Agora, responda:

a) Do estudo de função exponencial e função logarítmica, sabe-se que estas duas funções são inversas uma da outra, ou seja,  $e^{\ln(x)} = x$  e  $\ln(e^x) = x$ , onde  $\ln(x)$  é o logaritmo natural, de base  $e$ . Com base nisso, mostre que no declínio exponencial  $\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t$ .

Solução: No declínio exponencial, temos que  $q = q_0 \cdot e^{-a_0 \cdot t}$ . Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\ln(q) = \ln(q_0 \cdot e^{-a_0 \cdot t}) = \ln(q_0) + \ln(e^{-a_0 \cdot t}).$$

Aplicando a propriedade  $\ln(e^x) = x$  ao segundo termo do lado direito da equação, tem-se:

$$\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t.$$

b) Um campo de petróleo apresenta um histórico de vazões de produção conforme a tabela abaixo.

Tabela 10 – Dados de produção do campo

<i>tempo (ano)</i>	<i>q (m<sup>3</sup>std/d)</i>	<i>ln(q)</i>
0	3600	
1	3455	
2	3335	
3	3190	
4	3090	

Fonte: Rosa, A.J., Carvalho, R. de S.; Xavier, J.A.; Engenharia de Reservatórios de Petróleo; Editora Interciência; Rio de Janeiro, 2006, p. 506, adaptado.

Calcule o valor de  $\ln(q)$  e preencha a terceira coluna da tabela.

Solução: usando uma calculadora científica, calculam-se os valores dos logaritmos de  $q$ , preenchendo a tabela.

Tabela 11 – Tabela solução da atividade 3b

<i>tempo (ano)</i>	<i>q (m<sup>3</sup>std/d)</i>	<i>ln(q)</i>
0	3600	8,19
1	3455	8,15
2	3335	8,11
3	3190	8,07
4	3090	8,04

c) Se for construído um gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$ , que tipo de curva você espera encontrar: uma reta, uma parábola ou uma exponencial? Por quê?

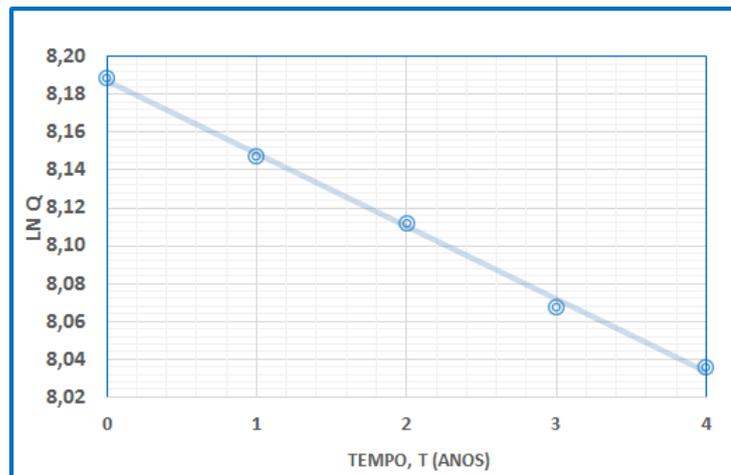
Solução: A equação que relaciona  $\ln(q)$  e  $t$  é  $\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t$ . Esta é a forma de uma função afim, onde a variável independente é  $t$ , a variável dependente é  $\ln(q)$ , a taxa

de variação é  $-a_0$  e o coeficiente linear é  $\ln(q_0)$ . Logo, a curva esperada é uma reta. Sua declividade é negativa, pois a taxa de variação,  $-a_0$ , é negativa, já que  $a_0$  é positivo.

d) Construa o gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$

Solução: a partir dos dados da Tabela 11, constrói-se o Gráfico 18.

Gráfico 18 –  $\ln(q)$  versus  $t$



Fonte – autoria própria

e) Você diria que o declínio é exponencial? Por quê?

Solução: Sim. Porque a curva do gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$  se aproxima a uma linha reta, o que está coerente com a equação do declínio exponencial,  $\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t$ .

d) Qual é o valor da taxa de declínio,  $a_0$ ?

Como visto anteriormente, a taxa de variação da função  $\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t$  é  $-a_0$ . Calcula-se, então, a taxa de variação, que nada mais é que a razão entre a variação de  $\ln(q)$  e a variação de  $t$  entre dois pontos da reta. Toma-se, então, dois pontos quaisquer da reta,  $P_1$  e  $P_2$ , de preferência o mais longe possível um do outro. Sejam então  $P_1 = (t=0, \ln q = 8,189)$  e  $P_2 = (t=4, \ln q = 8,036)$ . Assim,

$$-a_0 = \frac{8,036 - 8,189}{4 - 0} = -0,03819. \text{ Logo, a taxa de declínio é de } 0,03819/\text{ano}.$$

## Capítulo 7

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho confirmou as expectativas do pesquisador em relação à sua experiência profissional e à pesquisa bibliográfica, revelando a grande aplicabilidade da Matemática do Ensino Médio na Engenharia de Petróleo. Observa-se que os conteúdos mais utilizados são as funções afim, incluindo o caso particular da função linear, seguidas pelas exponencial e logarítmica. Através da apresentação de exemplos, foi possível mostrar que essas funções são bastante utilizadas pelos profissionais daquela área na solução de seus problemas. Alguns destes, que aparentemente teriam uma solução "difícil", são resolvidos com a simples aplicação de um conceito de função linear, por exemplo, cujo conhecimento se espera de qualquer aluno do Ensino Médio. Isso demonstra que a Matemática do Ensino Médio é de suma importância para um aluno que queira seguir a carreira de Engenharia ou de alguma outra na área de Ciências Exatas.

Tanto as atividades propostas, como o trabalho como um todo, podem servir de referência para os professores, ou como fonte de pesquisa e apoio para o preparo de atividades a serem realizadas em sala de aula do Ensino Médio. É uma ferramenta que pode ser utilizada para motivar os alunos, mostrando-lhes exemplos da aplicabilidade da Matemática.

A sugestão para trabalhos futuros seria:

- a) aplicar as atividades propostas e analisar seus resultados na aprendizagem e na motivação dos alunos e relatá-los;
- b) criar novas atividades;
- c) estender as atividades de forma a contemplar outros conteúdos, por exemplo, percentagem e função quadrática;
- d) analisar a possibilidade das atividades serem executadas com a utilização de softwares, por exemplo, o Geogebra.

## Referências

- ANP. *Pré-sal já responde por 54% da produção brasileira de petróleo e gás - Portal da Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP)*. 2018. Disponível em: <<http://www.anp.gov.br/noticias/anp-e-p/4454-pre-sal-ja-responde-por-54-da-producao-brasileira-de-petroleo-e-gas>>. Acesso em: 05/06/2018 às 16:00. Citado na página 56.
- ANP. *Reservas nacionais de petróleo e gás natural - Portal da Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP)* -. 2018. Disponível em: <<http://www.anp.gov.br/dados-estatisticos/reservas-nacionais-de-petroleo-e-gas-natural>>. Acesso em: 09/07/2018 às 17:00. Citado na página 99.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002. Citado na página 117.
- BEGGS, H. D. *Production Optimization using Nodal Analysis*. 3. ed. Tulsa, Oklahoma, EUA: OGCi and Petroskills Publications, 2003. Citado na página 65.
- BOURDET, D. *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. Paris: in Handbook of Petroleum Exploration and Production: Elsevier, 2002. Citado na página 86.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental*. Brasília, DF, 1998. Citado na página 20.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>>. Acesso em: 05/05/2019. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- CARDOSO, L. C. *Petróleo: do poço ao posto*. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 30, 59 e 61.
- CARVALHO, L. G. d. *Obtenção de cartas dinâmométricas de fundo através de dados de sensores de subsuperfície*. Monografia (Curso de Engenharia de Petróleo) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Citado na página 108.
- CORRÊA, O. L. S. *Petróleo: Noções sobre exploração, perfuração, produção e microbiologia*. Rio de Janeiro: Interciência, 2003. Citado na página 61.
- CUNHA, C. P. A importância da matemática no cotidiano. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, v. 01, n. 4, p. 641–650, 2017. ISSN:2448-0959. Citado na página 19.

- DANTE, L. R. *Matemática, contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2001. Citado na página 41.
- DARLING, T. *Well Logging and Formation Evaluation*. Oxford, UK: Gulf Professional Publishing, 2005. Citado na página 67.
- ECONOMICS, T. *Crude Oil Production*. 2018. Disponível em: <<https://tradingeconomics.com/country-list/crude-oil-production>>. Acesso em: 10/07/2018 às 15:30. Citado na página 57.
- EDTI, E. *O que é regressão linear, entenda aqui!* 2015. Disponível em: <<https://www.escolaedti.com.br/o-que-e-regressao-linear-entenda-aqui/>>. Acesso em: 27/10/2018 às 14:40. Citado na página 44.
- FLORES, A. C. C. et al. *Perfilagem: Conceitos e Aplicações*. Salvador: PETROBRAS/UN-BA/ATEX/AAG, 2003. Citado 10 vezes nas páginas 67, 69, 71, 73, 74, 75, 78, 81, 82 e 83.
- HAUS. *Metal mais leve do mundo pesa 100 vezes menos do que o isopor*. 2016. Disponível em: <<https://www.gazetadopovo.com.br/haus/tecnologia/metal-mais-leve-do-mundo-promete-revolucionar-construcao/>>. Acesso em: 21/05/2018 às 17:00. Citado na página 30.
- JAHN, F. et al. *Introdução à Exploração e Produção de Hidrocarbonetos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. Tradução de Luciano Cruz. Citado 7 vezes nas páginas 58, 59, 68, 78, 79, 87 e 88.
- JORDEN, J. R.; CAMPBELL, F. L. *Well Logging II - Electric and Acoustic Logging*. New York: Society of Petroleum Engineers, 1986. Citado na página 72.
- LEITE, C. A. F.; COSTA, E. V. *Pré vestibular social: Física, módulo 2*. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 33.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado 8 vezes nas páginas 36, 37, 39, 42, 43, 49, 50 e 52.
- LYNCH, P. *Boeing desenvolve o metal mais leve do mundo (Boeing Develops World's Lightest Metal) - Trad. Souza, E*. 2016. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/799332/boeing-desenvolve-o-metal-mais-leve-do-mundo>>. Acesso em: 21/05/2018 às 14:00. Citado na página 30.
- MAN, M. *Experiments with magnets and conductors*. 2018. Disponível em: <<http://www.coolmagnetman.com/magconda.htm>>. Acesso em: 19/05/2018 às 14:00. Citado na página 30.
- MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Física - Volume Único*. São Paulo: Scipione, 2003. Citado 10 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34 e 35.
- NASCIMENTO, I. A. d. S. *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - Centro de Ciências Exatas e Tecnologias - Escola de Matemática - PROFMAT, Rio de Janeiro, 2016. Citado na página 19.

OLIVEIRA, A. M. L. d.; DUARTE, L. J. N. Análise do desempenho de unidades de bombeio mecânico. In: *XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Química (COBEQ) - XVI Encontro Brasileiro sobre o Ensino de Engenharia Química (ENBEQ)*. Fortaleza - CE: [s.n.], 2016. Citado na página 108.

OLIVEIRA, F. E. M. d. *SPSS Básico para análise de dados*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007. Citado na página 44.

PERES, A. M. *Fundamentos de Análise de Testes de Pressão em Poços Petrolíferos*. Macaé - RJ: LENEP/UENF, 2006. Citado na página 85.

PETROBRAS. *Entenda como foi formado o pré-sal*. 2018. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br/pt/nossas-atividades/areas-de-atuacao/exploracao-e-producao-de-petroleo-e-gas/pre-sal/>>. Acesso em: 04/06/2018 às 15:30. Citado na página 56.

PINTO, H. Q. *A descoberta do Pré-Sal e as Mudanças do Marco Regulatório na Indústria Brasileira do Petróleo*. 2016. Enciclopédia da Energia. Disponível em: <<[https://www.encyclopedie-energie.org/wp-content/uploads/2018/09/art097\\_PintoJunior-Helder\\_Descoberta-Pre-Sal-Mudan%C3%A7as-Marco-Regulatorio-Industria-Brasileira-Petroleo.pdf](https://www.encyclopedie-energie.org/wp-content/uploads/2018/09/art097_PintoJunior-Helder_Descoberta-Pre-Sal-Mudan%C3%A7as-Marco-Regulatorio-Industria-Brasileira-Petroleo.pdf)>>. Acesso em: 04/06/2018 às 18:00. Citado na página 56.

RAMALHO JÚNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. d. T. *Os fundamentos da Física. Mecânica*. São Paulo: Moderna, 2001. v. 1. Citado 8 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32 e 34.

RIO DE JANEIRO. *Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro*. 2012. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2012.2/esp00001/arquivos/seerj.pdf>>. Acesso em: 05/06/2019 às 18:00. Citado 2 vezes nas páginas 117 e 124.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. d. S. *Previsão de comportamento de Reservatórios de Petróleo*. [S.l.]: Interciência, 2002. v. 1. Citado 8 vezes nas páginas 107, 114, 115, 137, 138, 141, 142 e 143.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. A. D. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Citado 14 vezes nas páginas 59, 87, 88, 90, 91, 94, 95, 96, 97, 99, 101, 110, 111 e 119.

SAINT'PIERRE, T. D. *Densidade*. 2018. Disponível em: <[http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/Sala%20de%20Leitura/conteudos/SL\\_densidade.pdf](http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/Sala%20de%20Leitura/conteudos/SL_densidade.pdf)>. Acesso em: 18/05/2018 às 19:00. Citado na página 28.

SANTOS, W. d. S. *Proposta de abordagem dos conceitos básicos de matemática financeira no ensino básico*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática -Profmat - Universidade Estadual de Santa Cruz., Ilhéus, 2017. Citado na página 19.

SMOLEN, J. J. *Cased Hole and Production Log Evaluation*. Tulsa, EUA: PennWell Books, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 70, 74, 79, 81, 84 e 85.

SOUZA, M. J. A. *Informática educativa na educação matemática: Estudo de geometria no ambiente do software cabri-géomètre*. Dissertação de Pós Graduação em Educação Brasileira - Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2001. Citado na página 19.

SOUZA, R. P. d. *A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia-a-dia*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Profmat - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2016. Citado na página 19.

TEIXEIRA, M. M. *Princípio de funcionamento das balanças*. 2018. Disponível em: <<https://alunosonline.uol.com.br/fisica/principio-funcionamento-das-balanças.html>>. Acesso em: 19/05/2018 às 14:30. Citado na página 28.

THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência Petrobras, 2004. Citado 21 vezes nas páginas 55, 56, 57, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 76, 77, 92, 96, 100, 102, 106, 108, 110 e 123.

UFMG. *Tratamento Matemático de dados: linearização de gráficos*. 2018. Disponível em: <[http://lilith.fisica.ufmg.br/~lab1/roteiros/Linearizacao\\_de\\_Graficos.pdf](http://lilith.fisica.ufmg.br/~lab1/roteiros/Linearizacao_de_Graficos.pdf)>. Acesso em: 05/10/2018 às 18:00. Citado na página 47.

UFPR, U. F. d. P. *A atmosfera*. 2018. Disponível em: <<http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap1/cap1-2.html>>. Acesso em: 21/08/2018 às 14:30. Citado na página 33.

UOL. *Os 15 países com as maiores reservas de petróleo*. 2018. Disponível em: <<https://www.bol.uol.com.br/listas/os-15-paises-com-as-maiores-reservas-de-petroleo.htm>>. Acesso em: 10/07/2018 às 15:00. Citado na página 100.

VERGARA, S. C. *Projetos e relatórios de pesquisa em administração*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2007. Citado na página 22.

WORLDATLAS. *The Worlds Largest Oil Reserves By Country*. 2018. Disponível em: <<https://www.worldatlas.com/articles/the-world-s-largest-oil-reserves-by-country.html>>. Acesso em: 10/07/2018. Citado na página 100.

---

# Apêndices

# APÊNDICE A

## MAIS SOBRE O DECLÍNIO EXPONENCIAL

Este apêndice tem o objetivo de complementar o capítulo PREVISÃO DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO UTILIZANDO CURVAS DE DECLÍNIO DE PRODUÇÃO.

Cálculo da vazão de produção:

Como visto antes, a taxa de declínio utilizada nos modelos é a variação relativa instantânea de vazão por tempo, ou seja, aquela que ocorre para intervalos de tempo muito pequenos (infinitesimais), quando  $\Delta t$  tende a zero. A notação utilizada para um  $\Delta t$  muito pequeno é  $dt$  e a variação de vazão neste intervalo  $dt$  é  $dq$ . Assim, para  $\Delta t$  pequenos, a Equação 5.4 se transforma em:

$$a_i = \frac{-1}{q} \frac{dq}{dt} \quad (\text{A.1})$$

Para resolver esta equação, separa-se as variáveis ( $q$  de um lado,  $t$  de outro) e aplica-se a integral a ambos os lados da igualdade:

$$\int_{q=q_i}^{q=q} \frac{dq}{q} = - \int_{t=0}^{t=t} a_i dt, \quad (\text{A.2})$$

o que resulta na equação A.3, que exprime a vazão como uma função exponencial do tempo, com expoente negativo:

$$q = q_i e^{(-a_i t)} \quad (\text{A.3})$$

Cálculo do volume produzido acumulado ( $N_p$ ):

A vazão  $q$  em qualquer tempo  $t$  pode ser calculada através da equação 5.9, utilizando o valor de  $a_i$ , determinado com o ajuste de histórico.

O volume acumulado de óleo produzido ( $N_p$ ) até um instante qualquer no tempo pode ser estimado calculando-se a integral da equação da vazão em função do tempo:

$$N_p = \int_0^t 365q dt = \int_{t=0}^{t=t} 365 q_i e^{(-a_i t)} dt, \quad (\text{A.4})$$

cuja resolução é:

$$N_p = 365 \left( \frac{q_i - q}{a_i} \right), \quad (\text{A.5})$$

sendo  $q$  a vazão no instante para o qual se deseja calcular a produção acumulada de óleo. A introdução do fator 365 na equação é para uniformizar as unidades, já que a vazão é dada em  $m^3/d$  e  $a_i$  é dado em  $ano^{-1}$ .

## APÊNDICE B

### DECLÍNIO HARMÔNICO

Neste tipo de declínio tem-se  $n=1$ . Substituindo esse valor na equação 5.6, a taxa de declínio simplifica-se para:

$$a = a_i \left( \frac{q}{q_i} \right) \quad (\text{B.1})$$

Como  $a_i$  e  $q_i$  são constantes e a vazão  $q$  é decrescente com o tempo, a taxa de declínio também é decrescente. Este é um tipo de declínio bastante favorável e que dificilmente ocorre na prática.

Combinando-se as equações B.1 e A.1:

$$\frac{-1}{q} \frac{dq}{dt} = a_i \left( \frac{q}{q_i} \right). \quad (\text{B.2})$$

Separando-se as variáveis e calculando a integral em ambos os lados da igualdade, obtém-se a equação que permite calcular a vazão a qualquer tempo  $t$ , desde que seja conhecida a taxa de declínio inicial  $a_i$ :

$$q = \frac{q_i}{1 + a_i t} \quad (\text{B.3})$$

Ajuste de histórico e determinação de  $a_i$ :

A equação B.3 pode ser escrita também na forma:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_i} + \frac{a_i}{q_i} t. \quad (\text{B.4})$$

Percebe-se que esta equação reflete uma **função afim**, pois  $\frac{a_i}{q_i}$  é constante, assim como  $\frac{1}{q_i}$ . A variável independente é  $t$  e a variável dependente é  $\frac{1}{q}$ .

Um gráfico de  $\frac{1}{q}$  em função de  $t$  resulta em uma linha reta com taxa de variação  $\frac{1}{q_i}$  e coeficiente angular  $\frac{a_i}{q_i}$ . Feito o gráfico, determina-se a taxa de variação  $\frac{a_i}{q_i}$ , que, multiplicado pela vazão inicial, resulta na taxa de declínio inicial  $a_i$ :

$$a_i = \left( \frac{a_i}{q_i} \right) q_i. \quad (\text{B.5})$$

Previsão de comportamento:

A vazão em qualquer tempo pode ser calculada através da equação B.3, bastando para isso determinar o valor de  $a_i$  com o ajuste de histórico.

O volume acumulado de óleo produzido até um instante qualquer no tempo pode ser estimado integrando-se a equação da vazão:

$$N_p = \int_0^t 365 q dt = \int_{t=0}^{t=t} 365 \frac{q_i}{1 + a_i t} dt, \quad (\text{B.6})$$

cuja solução é:

$$N_p = 365 \left( \frac{q_i}{a_i} \right) \ln (1 + a_i t), \quad (\text{B.7})$$

que é equivalente a:

$$N_p = 365 \left( \frac{q_i}{a_i} \right) \ln \left[ \frac{q_i}{q} \right], \quad (\text{B.8})$$

sendo  $q$  a vazão no instante para o qual se deseja calcular a produção acumulada de óleo.

**Exemplo B.1.** *Rosa e Carvalho (2002, p. 259)*

*Um poço de petróleo apresenta o histórico de vazões de produção mostrado na Tabela 12.*

Tabela 12 – Dados de produção do Exemplo B.1

<i>Data (ano)</i>	<i>q (m<sup>3</sup>std/d)</i>
0	100,0
1	77,0
2	62,5
3	52,5
4	45,5
5	40,0

Fonte: *Rosa e Carvalho (2002, p. 261)*

*Pedem-se:*

- a) *Verificar se o declínio do poço é do tipo harmônico.*
- b) *Determinar a taxa de declínio inicial  $a_i$ .*
- c) *Estimar o tempo de abandono, contado a partir do início da produção, levando em conta que vazões inferiores a 2 m<sup>3</sup>std/d são antieconômicas no campo onde o poço se encontra.*

Solução:

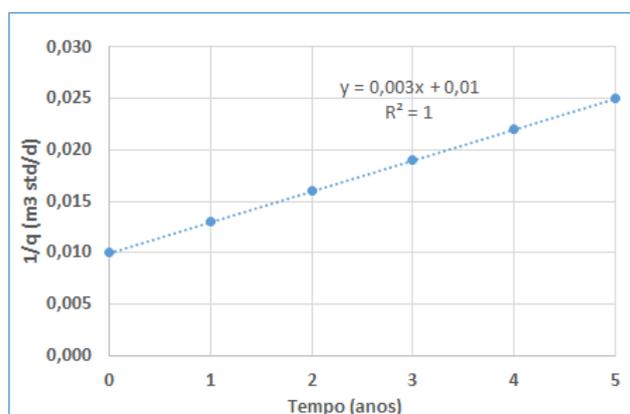
a) Como visto anteriormente, um declínio é harmônico se o gráfico de  $1/q$  em função de  $t$  resultar em uma linha reta. Com os dados da tabela 12 calcula-se os valores de  $1/q$ , construindo a tabela 13.

Tabela 13 – Valores de  $1/q$  do Exemplo B.1

Data (ano)	$q$ ( $m^3$ std/d)	$1/q$ ( $m^3$ std/d) $^{-1}$
0	100,0	0,0100
1	77,0	0,0129
2	62,5	0,0160
3	52,5	0,0190
4	45,5	0,0217
5	40,0	0,0250

Fonte: Rosa e Carvalho (2002, p. 261)

Com os dados da tabela 13, constrói-se o gráfico 19,  $1/q$  x  $t$ (ano).

Gráfico 19 – Declínio Harmônico - Valores de  $1/q$  x  $t$  - exemplo B.1

Fonte – Rosa e Carvalho (2002, p. 262), adaptado

Verifica-se que os pontos do gráfico formam uma reta, fato confirmado pelo coeficiente de correlação do ajuste linear ser  $R^2 = 1$ . Conclui-se que o declínio do poço é harmônico.

b) A inclinação da reta do gráfico é de 0,003/ano. Este valor pode ser tomado diretamente da equação da reta ajustada por regressão linear ou calculado tomando-se dois pontos quaisquer da reta. Portanto,  $\frac{a_i}{q_i} = 0,003$ . Multiplicando esse valor por  $q_i$ , obtemos  $a_i$ .

$$a_i = \frac{a_i}{q_i} q_i = 0,003 \cdot 100 = 0,30/\text{ano}.$$

c) A vazão de abandono,  $q_{ab}$ , é de  $2 \text{ m}^3 \text{std}/\text{d}$ . Fazendo  $q=2$  na equação B.3, obtém-se:

$$2 = \frac{100}{1 + 0,30 t_{ab}}, \text{ da qual se obtém } t_{ab} = 163 \text{ anos.}$$

Este longo tempo de produção até o abandono estimado, de 163 anos, está longe de ser encontrado na realidade. Conforme comentado anteriormente, o declínio harmônico é muito otimista, e provavelmente não ocorre durante toda a vida produtiva do poço, reservatório ou campo de petróleo.

## APÊNDICE C

# DECLÍNIO HIPERBÓLICO

Este tipo de declínio ocorre quando  $0 < n < 1$ , ou seja,  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ . Igualando-se as equações A.1 e 5.6, resulta em:

$$\frac{-1}{q} \frac{dq}{dt} = a_i \left(\frac{q}{q_i}\right)^n, \quad 0 < n < 1 \quad (\text{C.1})$$

Separando as variáveis  $q$  e  $t$  e calculando a integral em ambos os lados,  $t$  variando entre  $t=0$  e  $t=t$  e  $q$  variando entre  $q_i$  e  $q$ , obtém-se:

$$q = \frac{q_i}{(1 + n \cdot a_i \cdot t)^{(1/n)}}, \quad 0 < n < 1. \quad (\text{C.2})$$

Ajuste de histórico e determinação de  $a_i$ :

Para a determinação de  $n$  e de  $a_i$ , eleva-se todos os termos da equação C.2 à potência  $n$ . Após o rearranjo dos termos obtém-se uma nova forma:

$$\left(\frac{q_i}{q}\right)^n = 1 + n \cdot a_i \cdot t \quad (\text{C.3})$$

Esta equação representa uma **função afim**, onde a variável independente é  $t$  e a variável dependente é  $(q_i/q)^n$ . A taxa de variação é  $n \cdot a_i$  e o coeficiente linear é igual a 1.

Como construir o gráfico de  $(q_i/q)^n$  versus  $1 + n \cdot a_i \cdot t$  se não conhecemos  $n$  e nem  $a_i$ ? A solução consiste em, a partir dos dados do histórico de produção, construir gráficos de  $(q_i/q)^n$  versus  $t$  para vários valores de  $n$ . Aquele que resultar em uma linha reta vai revelar o  $n$  correto para que este seja um declínio hiperbólico. Esta reta vai fornecer, também, a taxa de variação  $n \cdot a_i$ . Dividindo esse valor por  $n$  obtém-se o valor de  $a_i$ . Ou seja,

$$a_i = \frac{(n \cdot a_i)}{n} \quad (\text{C.4})$$

Previsão de comportamento:

Uma vez obtidos  $n$  e  $a_i$ , pode-se calcular a vazão de produção  $q$  em qualquer tempo  $t$ , através da equação C.2, e gerar uma curva de previsão de produção. Da mesma forma, é

possível estimar a data em que ocorrerá uma determinada vazão. Pode-se, por exemplo, estimar a data de abandono do poço ou reservatório, desde que se conheça a vazão de abandono, que é determinada por critérios econômicos.

O volume acumulado de óleo produzido,  $N_p$ , até um determinado tempo  $t$ , pode ser estimado integrando-se a equação da vazão:

$$N_p = \int_0^t q dt \quad (\text{C.5})$$

Substituindo a expressão de  $q$  da equação C.2 na integral acima e uniformizando as unidades, obtém-se:

$$N_p = 365 \int_0^t \frac{q_i}{(1 + n * a_i * t)^{(1/n)}} dt \quad (\text{C.6})$$

Resolvendo-se a integral acima, obtém-se o volume produzido acumulado, em  $m^3$ , até o instante em que a vazão atinja um valor  $q$  qualquer:

$$N_p = 365 \frac{q_i}{a_i} \left( \frac{1}{1-n} \right) \left[ \left( 1 - \frac{q}{q_i} \right)^{1-n} \right] \quad (\text{C.7})$$

Caso se queira estimar o volume produzido acumulado até uma data qualquer, calcula-se a vazão naquela data, utilizando-se a equação C.2 e aplica-se a equação C.7.

Uma alternativa é combinar as equações C.2 e C.7, obtendo-se a seguinte equação, que permite calcular o volume acumulado sem calcular a vazão final:

$$N_p = 365 \frac{q_i}{a_i} \left( \frac{1}{n-1} \right) \left[ (1 + na_i t)^{1-\frac{1}{n}} - 1 \right] \quad (\text{C.8})$$

**Exemplo C.1.** *Rosa e Carvalho (2002, p. 256-257) Um poço de petróleo apresenta o histórico de produção mostrado na Tabela 14.*

Tabela 14 – Dados de produção do Exemplo C.1

$t$ (ano)	$q$ ( $m^3 std/d$ )
0	100
1	77,0
2	61,0
3	49,5
4	41,0
5	34,5

Fonte: Rosa e Carvalho (2002, p. 256)

Considerando que o declínio de produção é hiperbólico e que a vazão de abandono é  $5 m^3 std/d$ , determinar:

a) O valor de  $n$

- b) O valor de  $a_i$
- c) O tempo de abandono
- d) A produção acumulada até o abandono.

### Solução:

a) Deve-se averiguar para que valor de  $n$  se obtém uma linha reta no gráfico de  $(q_i/q)^n$  versus  $t$ . Arbitrando inicialmente os valores de  $n=1/3$  e  $n=2/3$ , calcula-se os valores de  $(q_i/q)^n$ , os quais são mostrados na tabela 15.

O gráfico 20 apresenta as curvas para os valores de  $n=1/3$  e  $n=2/3$  (curvas inferior e superior, respectivamente). Observa-se que ambas as curvas apresentam concavidade, porém, com sentidos opostos, indicando que a solução para o valor de  $n$  deve estar entre aqueles dois valores.

Admitindo-se agora  $n=1/2$ , calculam-se os valores da coluna 6 da tabela 15, que colocados no gráfico 20 resultam em uma linha praticamente reta. Portanto, o poço apresenta um declínio hiperbólico com  $n$  aproximadamente igual a  $1/2$ .

Pode ser um pouco difícil "enxergar" quando a curva é exatamente uma reta, portanto, sugere-se utilizar um programa de regressão linear para fazer o ajuste. Deve-se fazer um ajuste polinomial de segundo grau, variando  $n$  até se atingir um coeficiente nulo para o termo  $x^2$ .

Tabela 15 – Valores de  $(q_i/q)^n$  do Exemplo C.1

			$(q_i/q)^n$	$(q_i/q)^n$	$(q_i/q)^n$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
t(ano)	q (m <sup>3</sup> std/d)	qi/q	n=1/3	n=2/3	n=1/2
0	100,0	1,000	1,000	1,000	1,000
1	77,0	1,299	1,091	1,190	1,140
2	61,0	1,636	1,179	1,390	1,280
3	49,5	2,020	1,264	1,598	1,421
4	41,0	2,439	1,346	1,812	1,562
5	34,5	2,899	1,426	2,033	1,703

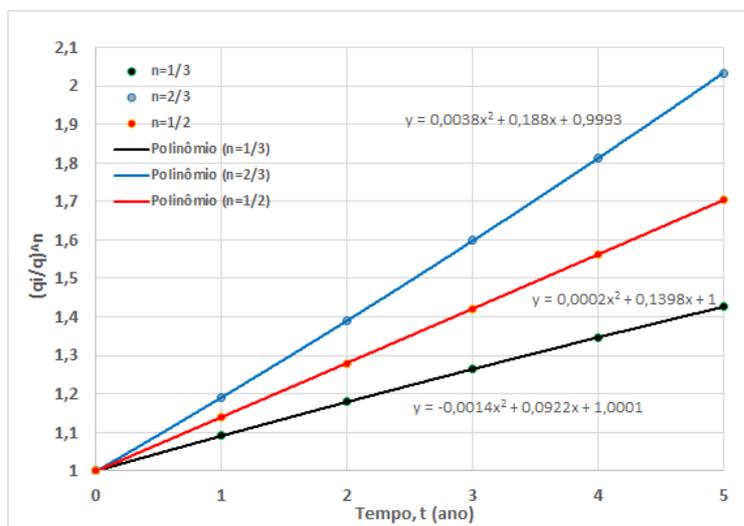
Fonte: Rosa e Carvalho (2002, p. 256), adaptado

b) A inclinação da reta, para  $n=1/2$  no gráfico 20, é de aproximadamente  $n a_i = 0,14/\text{ano}$ . Dividindo-se por  $n$ , obtém-se o valor do declínio inicial:

$$a_i = \frac{(n a_i)}{n} = \frac{0,14}{1/2} = 0,28/\text{ano}$$

c) Substituindo-se o valor da vazão de abandono de  $5 \text{ m}^3 \text{ std/d}$  na equação C.2, o tempo  $t$  calculado é o tempo de abandono:

Gráfico 20 – Declínio Hiperbólico - Valores de  $(q_i/q)^n$  versus t - Exemplo C.1



Fonte – Rosa e Carvalho (2002, p. 257), adaptado

$$q_{ab} = \frac{q_i}{(1 + n a_i t_{ab})^{(1/n)}} \Rightarrow 5 = \frac{100}{(1 + \frac{1}{2} 0,28 t_{ab})^2}$$

de onde se obtém:  $t_{ab} = 24,8$  anos.

d) Com a equação C.8 calcula-se a produção acumulada:

$$N_p = 365 \frac{100}{0,28} \left(\frac{1}{1/2-1}\right) \left[ \left(1 + \frac{0,28}{2} \cdot 24,8\right)^{1-\frac{1}{1/2}} - 1 \right]$$

$$N_p = 202.417 m^3 std.$$

## **APÊNDICE D**

### **FOLHAS DE ATIVIDADES**

ESCOLA:  
TURMA:  
ALUNOS:

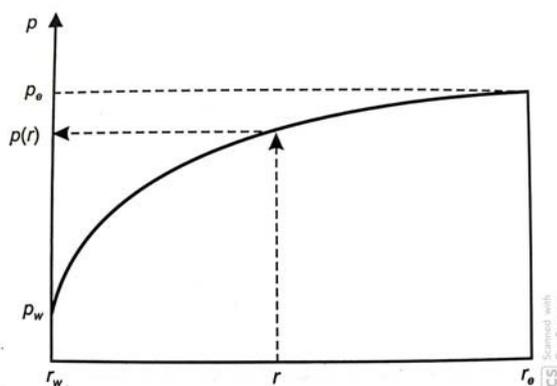
DATA: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### ATIVIDADE 1

Um poço de petróleo só produz se a pressão do fluido no seu interior for inferior à pressão do fluido nas suas vizinhanças. O volume de fluido que entra no poço por unidade de tempo é chamado de vazão, que é normalmente expressa em metros cúbicos por dia ( $m^3/d$ ).

A figura abaixo mostra como a pressão do reservatório varia à medida em que se afasta do poço, quando este está produzindo. Este é um gráfico  $p \times r$ , onde  $p$  é a pressão em um determinado ponto do reservatório e  $r$  é a distância deste ponto ao centro do poço. Portanto, a escala do eixo horizontal começa em  $r=r_w$ , onde  $r_w$  é o raio do poço, e termina em  $r=r_e$ , onde  $r_e$  é o limite do reservatório. A pressão na parede do poço é chamada  $p_w$  e a pressão no limite do reservatório é chamada  $p_e$ .

Figura 1 – Distribuição da pressão, do poço ao limite do reservatório



Fonte – Rosa, A.J., Carvalho, R. de S.; Xavier, J.A.; Engenharia de Reservatórios de Petróleo; Editora Interciência; Rio de Janeiro, 2006, p. 205

Um teste de formação é uma operação feita em um poço de petróleo, na qual se consegue medir a vazão de produção na superfície (plataforma, por exemplo) e obter a pressão estática do reservatório ( $p_e$ ) e a pressão no fundo do poço  $p_w$  durante o teste. O Índice de Produtividade (IP) do poço é definido como a razão entre a vazão de produção e a diferença entre as pressões  $p_e$  e  $p_w$  e é expresso pela equação

$$IP = \frac{q}{p_e - p_w}$$

O IP do poço é um parâmetro que pode ser considerado constante.

Usando as informações acima, responda:

1) Escreva a equação que fornece a vazão em função de IP,  $p_e$  e  $p_w$ .

$q =$

2) Sabe-se que uma função afim é da forma  $y = ax + b$ . Nesta equação, a variável dependente é ..... A variável independente é ..... O parâmetro  $a$  é chamado ..... E o parâmetro  $b$  é chamado .....

3) Considerando-se que o IP e a  $p_e$  são constantes, coloque a expressão encontrada no item 1 na forma de uma função afim.

$q =$

Nesta equação, a variável independente é: ..... A variável dependente é: .....

A taxa de variação ou coeficiente angular é: .....

4) Durante um teste realizado em um poço, a vazão de produção medida foi equivalente a  $1200 \text{ m}^3/\text{d}$ ; a pressão estática do reservatório ( $p_e$ ) foi de  $220 \text{ kgf/cm}^2$  e a pressão de fluxo no fundo do poço ( $p_w$ ) foi de  $190 \text{ kgf/cm}^2$ . Calcule o IP do poço.

IP =

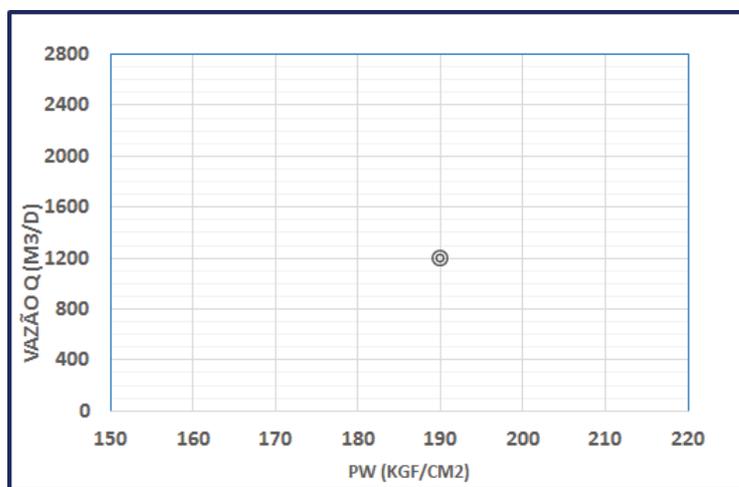
5) Construa o gráfico  $q$  versus  $p_w$ , para  $p_w$  variando entre 150 e 200  $\text{kgf/cm}^2$ . Antes disso, preencha a tabela abaixo. O par ordenado ( $p_w = 190$ ,  $q = 1200$ ), que corresponde ao teste de formação, já foi preenchido na tabela e colocado no gráfico.

Tabela 1 – Tabela auxiliar para construção do gráfico de  $q$  versus  $p_w$

$p_w$	$p_e - p_w$	$q = IP \cdot (p_e - p_w)$
150		
160		
170		
180		
190	30	1200
200		

Fonte: autoria própria

Gráfico  $q$  versus  $p_w$



Fonte – autoria própria

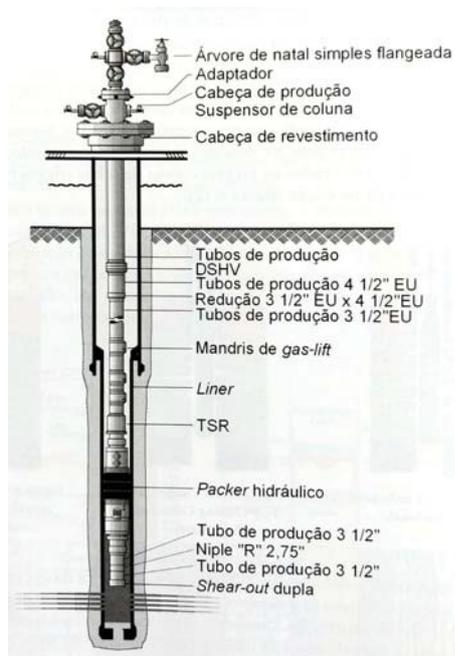
ESCOLA:  
TURMA:  
ALUNOS:

DATA: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

## ATIVIDADE 2

A figura abaixo mostra um esquema simplificado de um poço de petróleo. São mostrados alguns dos elementos que compõem a coluna de produção do poço, que é vertical.

Figura 1 – Esquema de um poço de petróleo



Fonte – Thomas, E.J.; Fundamentos de Engenharia de Petróleo.  
2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência/Petrobras, 2004, p. 148

Mesmo quando o poço não está produzindo, a coluna está sempre preenchida com fluido. Suponha que esta seja a situação, ou seja, o poço está fechado, preenchido com um determinado fluido. Sabe-se, da Física, que, se o fluido está em repouso, a diferença de pressão entre dois pontos A e B, situados em profundidades diferentes, sendo B abaixo de A, é dado pela expressão

$$p_B - p_A = d \cdot h \cdot g$$

onde  $p_B$  é a pressão no ponto B,  $p_A$  é a pressão no ponto A,  $d$  é a densidade do fluido,  $h$  é a diferença de profundidade,  $g$  é a constante gravitacional.

Agora, responda as questões abaixo:

- a) Reescreva a equação acima, expressando  $p_B$  em função de  $p_A$ ,  $d$ ,  $h$  e  $g$ .
- b) Considerando-se que  $d$  e  $g$  são constantes, que tipo de função essa equação representa? Qual é a variável independente? Qual é a taxa de variação da função?
- c) Suponha que a densidade do fluido seja  $1 \text{ g/cm}^3$ . Transforme as unidades de medida para  $\text{kg/m}^3$ .
- d) Se a pressão no topo da coluna é de  $3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , qual é o valor da pressão a uma profundidade 1000 m abaixo? Use  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $h$  em metros,  $d$  em  $\text{kg/m}^3$ . Com estas unidades, a pressão será dada em  $\text{N/m}^2$ .
- e) Qual deve ser a densidade do fluido para que a pressão a 1000 m de profundidade seja igual a  $1,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ ?

ESCOLA:  
TURMA:  
ALUNOS:

DATA: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

## ATIVIDADE 3

Em um campo de petróleo, à medida que o óleo vai sendo produzido, a pressão do reservatório, vai se reduzindo. Com a pressão mais baixa, os poços não conseguem produzir a mesma vazão de antes, portanto, a produção vai caindo ao longo do tempo. Um dos métodos utilizados para determinar como essa queda acontece é a Análise de Declínio de Produção: baseado no histórico de produção passado, constrói-se um modelo matemático deste comportamento, o qual servirá também para prever a produção futura. Por exemplo, o comportamento pode ser exponencial, neste caso a vazão em um tempo  $t$  qualquer é dada pela equação:

$$q = q_0 \cdot e^{-a_0 \cdot t}$$

onde  $q_0$  é a vazão inicial,  $a_0$  é a taxa de declínio,  $t$  é o tempo e  $e$  é a constante de Euler (da função exponencial).

Uma taxa de declínio de 0,12/ano indica que a vazão depois de um ano será igual a  $e^{-0,12}$ , que equivale a 0,8869, vezes a vazão inicial. Ou seja, se a vazão em janeiro/2019 foi de  $1000 \text{ m}^3/\text{d}$ , em janeiro/2020 será de  $1000 \cdot 0,8869 = 886,9 \text{ m}^3/\text{d}$ .

Agora, responda:

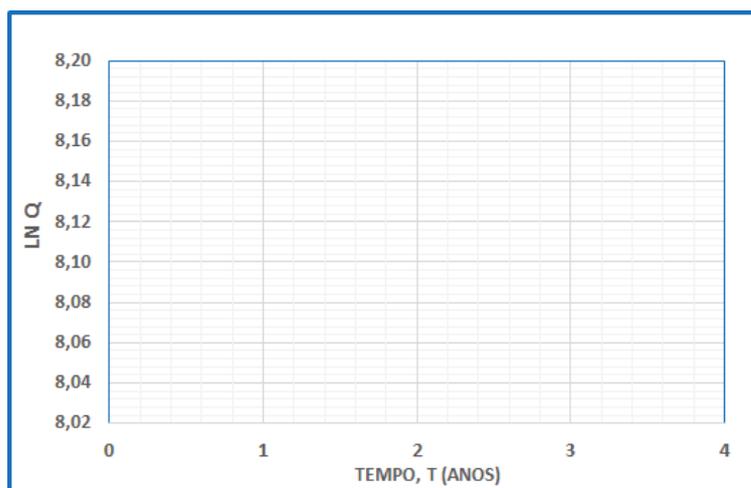
- a) Do estudo de função exponencial e função logarítmica, sabe-se que estas duas funções são inversas uma da outra, ou seja,  $e^{\ln(x)} = x$  e  $\ln(e^x) = x$ , onde  $\ln(x)$  é o logaritmo natural, de base  $e$ . Com base nisso, mostre que, no declínio exponencial,  $\ln(q) = \ln(q_0) - a_0 \cdot t$ .
- b) Um campo de petróleo apresenta um histórico de vazões de produção conforme a tabela abaixo. Calcule o valor de  $\ln(q)$  e preencha a terceira coluna da tabela.

Tabela 1 – Dados de produção do campo

tempo (ano)	$q$ ( $\text{m}^3\text{std}/\text{d}$ )	$\ln(q)$
0	3600	
1	3455	
2	3335	
3	3190	
4	3090	

c) Se for construído um gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$ , que tipo de curva você espera encontrar: uma reta, uma parábola ou uma exponencial? Por quê?

d) Construa o gráfico de  $\ln(q)$  versus  $t$



Fonte – autoria própria

e) Você diria que o declínio é exponencial? Por quê?

f) Qual é o valor da taxa de declínio,  $a_0$ ?