CARLA VALÉRIA DIONIZIO DE SOUZA

GEOMETRIA ESPACIAL SOB A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

ABRIL DE 2019

CARLA VALÉRIA DIONIZIO DE SOUZA

GEOMETRIA ESPACIAL SOB A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Elba O. Bravo Asenjo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
ABRIL DE 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

S729 Souza, Carla Valéria Dionizio de.

GEOMETRIA ESPACIAL SOB A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Carla Valéria Dionizio de Souza. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

168 f. : il.
Inclui bibliografia.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.
Orientadora: Elba Orocia Bravo Asenjo.

1. Resolução de Problemas. 2. Geometria Espacial. 3. Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

CARLA VALÉRIA DIONIZIO DE SOUZA

GEOMETRIA ESPACIAL SOB A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 17 de Abril de 2019.

Prof. Ausberto Silvério Castro Vera
D.Sc. - UENF

Prof. Marcus Vinícius da Silva Sales
D.Sc. - UFF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Elba O. Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, ao meu marido Welington, à minha mãe Maria Elena e aos meus filhos.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus pelo dom da vida e por me sustentar durante todos os momentos.

Ao meu marido, faço um agradecimento especial, por sua ajuda, compreensão, companheirismo, amor e dedicação durante toda a minha caminhada.

Agradeço aos meus filhos que são os meus companheiros e foram compreensivos, sempre me dando apoio.

Agradeço a minha mãe que sempre me apoiou, incentivou, orou por mim e esteve ao meu lado.

Agradeço às diretoras do Colégio Estadual Chequer Jorge, Vânia Lúcia Pieruccetti Souza e Fabiana França, pela confiança e por permitirem que a pesquisa fosse realizada.

A minha orientadora, Professora Elba Orocia Bravo Asenjo, por sua dedicação, competência e paciência.

A todos os professores do PROFMAT-UENF por compartilharem seus conhecimentos.

Ao Professor Oscar Alfredo Paz La Torre, coordenador do curso, por sua paciência e comprometimento.

A todos os meus colegas de classe pelos momentos que passamos juntos, em especial a Bruna, o Thiago e o Victor, pela amizade, pelos sorrisos que compartilhamos durante as viagens e por terem me incentivado.

Ao PROFMAT, por possibilitar esses anos de aprendizagem.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

E a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho fosse concluído, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Considerando a importância da Geometria Espacial no Ensino Médio, esta pesquisa objetiva abordar o ensino, a aprendizagem e a avaliação de conteúdos de Geometria Espacial em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, da modalidade Regular, por meio de uma metodologia diferente da tradicional, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, a resolução de problemas é vista como um veículo para a introdução de novos conceitos e conhecimentos de Matemática. Para alcançar os objetivos da pesquisa, problemas geradores foram selecionados e aplicados pela pesquisadora, nos meses de setembro e outubro de 2017, em uma escola pública do município de Itaperuna/RJ. Durante a aplicação dessa metodologia, dados foram coletados através de observações diretas, diário de campo e atividades realizadas pelos alunos e recolhidas pela pesquisadora, analisados e constatou-se que houve um aumento da motivação, tanto da professora como dos alunos. Os alunos demonstraram autonomia, protagonismo, desenvolveram estratégias de enfrentamento, planejaram etapas para solucionar os problemas, usaram seus próprios erros para buscar novas alternativas, organizaram dados, comunicaram com seus pares, respeitando suas diferenças e tempos de aprendizagem, desenvolvendo habilidades de comunicação e argumentação, favorecendo a aprendizagem de novos conceitos de Geometria Espacial.

Palavras-chaves: Geometria Espacial; Resolução de Problemas; Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

Abstract

Considering the importance of Space Geometry in High School, this research aims to approach the teaching, learning and assessment of Spatial Geometry contents in a High School second grade class, of the regular modality, through a methodology different from the traditional methodology of teaching-learning- assessment of mathematics focusing problem-solving. In this methodology, problem-solving is seen as a vehicle for the introduction of new concepts and knowledge of mathematics. In order to reach the research objectives, generative problems were selected and applied by the researcher in the months of September and October 2017, in a public school in the County of Itaperuna / RJ. During the application of this methodology, data were collected through direct observations, field diary and activities carried out by the students and collected by the researcher, analyzed and it was verified that there was an increase in the motivation, both of the teacher and the students. Students demonstrated autonomy, protagonism, developed coping strategies, planned stages to solve problems, used their own mistakes to find new alternatives, organized data, communicated to their peers, respecting their differences and learning rhythms, developing communication and argumentation skills, favoring the learning of new concepts of Spatial Geometry.

Key-words: Spatial Geometry; Problem-solving; Teaching-Learning-Assessment Methodology.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FIES	Financiamento Estudantil
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos PCNEM
PROUNI	Programa Universidade para Todos
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
SISU	Sistema de Seleção Unificada

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Considerando sua prática docente, a pesquisadora que atua há 13 anos como professora de Matemática no Ensino Médio na rede pública do Estado do Rio de Janeiro, realizou pesquisas e observou a relevância do estudo de Geometria Espacial no Ensino Médio, sendo esta considerada neste contexto como a área da matemática que se encarrega de estudar as figuras no espaço que possuem três dimensões. Esse tem sido um tema abordado na proposta da BNCC para o Ensino Médio, Brasil (2018), que estabelece conhecimentos, competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes durante a Educação Básica. Entre as habilidades que os alunos devem desenvolver encontra-se: resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, bem como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

O tema também é abordado no ENEM, o Exame Nacional do Ensino Médio, (INEP, 2018), que tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica, dando ao aluno a oportunidade de participar de programas governamentais de financiamento ou apoio ao estudante da educação superior: Prouni, Sisu e Fies. Os resultados do ENEM também possibilitam a oportunidade de acesso a universidades que usam o seu resultado como critério de seleção para o ingresso no ensino superior, também permitem a autoavaliação e inserção no mercado de trabalho. Entre as habilidades abordadas no ENEM estão:

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Existem outros trabalhos que abordam o tema Geometria Espacial; entre eles, destacam-se alguns trabalhos, como o de Silva (2006), que desenvolveu uma atividade *WebQuest*, onde os alunos fazem pesquisas na internet, em fontes autênticas, obtendo informações que serão consolidadas em conhecimentos; Alves (2007), que faz uso do *software* Calques 3D para que os alunos possam observar e compreender o espaço tridimensional; Dantas (2018), que trabalha a Geometria Espacial com a Realidade Aumentada (RA), com a finalidade de facilitar a visualização dos elementos em Geometria Espacial e Fizzon (2018), que propõe o uso de jogos pedagógicos, envolvendo atividades lúdicas para enriquecer o conteúdo de Geometria Espacial.

Visto a importância do estudo de Geometria Espacial na Educação Básica a pesquisadora fundamenta a questão investigativa deste trabalho da seguinte forma: “A construção de novos conceitos de Geometria Espacial se daria de forma eficiente se fosse ensinada usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?”

Esta pesquisa tem como objetivo geral criar um projeto para trabalhar Geometria Espacial usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas. Para atingir o objetivo geral deste trabalho, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

- Diferenciar exercício e problema.
- Verificar como os Parâmetros Curriculares Nacionais abordam a resolução de problemas.
- Compreender os passos de se resolver um problema.
- Selecionar problemas geradores de novos conceitos geométricos.
- Utilizar uma metodologia diferente da tradicional para trabalhar Geometria Espacial.
- Verificar se a metodologia utilizada promove a aprendizagem de novos conceitos.

Para o desenvolvimento deste trabalho a estruturação dos capítulos é feita da seguinte maneira:

O capítulo 1 apresenta o trabalho, oferecendo uma visão panorâmica da pesquisa. Nele, estão contidos o objetivo geral e os específicos, o problema da pesquisa e outros trabalhos que abordam o mesmo tema.

No capítulo 2 são apresentadas as fundamentações teóricas da Resolução de Problemas, trazendo a distinção entre exercício e problema, considerando como a resolução de problemas é abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos PCN+, descrevendo os passos necessários para se resolver um problema segundo Polya (2006) e explicando como a resolução de problemas pode ser um veículo para a introdução de novos conceitos de Matemática, sendo vista como uma metodologia denominada "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas".

O capítulo 3 trata sobre a Metodologia de pesquisa de Romberg e as contribuições feitas a ela pelo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, coordenado pela Profa. e Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. O Fluxograma de Romberg-Onuchic contendo as 11 atividades a serem realizadas pelo pesquisador é apresentado. Ainda neste capítulo, é feita a abordagem da pesquisa dentro da Metodologia de Romberg-Onuchic, fazendo-se a descrição do fenômeno de interesse, a pergunta da pesquisa e as estratégias e procedimentos necessários para respondê-la.

O capítulo 4 apresenta o perfil da escola onde o projeto foi aplicado, os dados obtidos a partir da observação realizada pela pesquisadora em sala de aula durante a aplicação dos problemas geradores, como também a formalização dos conceitos que foram construídos.

No capítulo 5 estão as considerações finais, as conclusões, as dificuldades encontradas e sugestões para trabalhos futuros.

Em seguida, encontram-se as referências bibliográficas, os apêndices contendo a autorização assinada pela diretora, o termo de compromisso, todos os problemas selecionados pela pesquisadora, a prova bimestral e as planificações dos sólidos geométricos.

Capítulo 2

Resolução de Problemas

Este capítulo aborda a resolução de problemas em diferentes aspectos e contextos, como nos PCNEM e nos PCN+. Nele se discute a diferença entre exercício e problema, assim como os passos para se resolver um problema segundo Polya (2006). Este capítulo ainda analisa a resolução de problemas como uma ferramenta capaz de tornar a matemática mais próxima da realidade do aluno, sendo usada como uma metodologia: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2.1 Passos para se resolver um problema

Para a solução de um problema, é necessário a sua compreensão, estabelecer um plano, executá-lo, e fazer uma análise que nos leve a determinar se alcançamos ou não a meta. Essa sequência que acabamos de descrever é a proposta de Polya (2006). Este descreve os passos necessários para se resolver um problema:

Quadro 1 – Passos para resolução de Problemas

Compreensão do Problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

Estabelecendo um plano

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato?

Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método?

Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo?

É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Execução do plano

Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Retrospecto

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte – (POLYA, 2006)

Pode ser que um aluno encontre a solução de um problema sem passar por essas quatro etapas. Mas pode ser também, que ao pular uma das etapas, o aluno se perca fazendo cálculos ou traçado desenhos desnecessários, não compreendendo o problema ou não elaborando um plano adequado. O aluno ainda pode encontrar uma solução equivocada e permanecer no erro se não fizer uma reflexão e verificar a solução completa. Ou seja, seguir as etapas sugeridas por Polya (2006) é de extrema importância para a solução de um problema.

2.1.1 Compreensão do problema

Seria contraditório tentar solucionar um problema sem compreendê-lo. O primeiro passo para solucionar um problema é compreendendo-o, selecionando os seus dados, perguntando-se qual a incógnita, qual a condicionante, traçando as figuras e desenhos relacionados ao problema, como afirma, L. R. Dante:

> Antes de começarmos a resolver o problema, precisamos compreendê-lo. Para isso, devemos responder a questões como: O que se pede no problema? O que se procura no problema? O que se quer resolver no problema? Quais são os dados e as condições do problema? O que está dito no problema e que podemos usar? É possível fazer uma figura da situação? É possível estimar ou "chutar" a resposta? (DANTE, 2000, p.23)

Para compreender o problema, faz-se necessário que o aluno demonstre interesse. Problemas bem selecionados podem ajudar a despertar esse interesse. Os problemas não devem ser muito fáceis nem muito difíceis, para que não desmotivem os alunos; mas devem apresentar algum grau de dificuldade, atendendo a realidade dos alunos.

Nessa fase da solução do problema, o professor assume um papel importante de mediador do conhecimento. Ele deve assumir uma postura de auxiliar de seus alunos. Segundo Polya (2006, p.1), "Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes."

2.1.2 Estabelecimento de um plano

Para estabelecer um plano, o aluno deve buscar problemas correlatos que já foram resolvidos anteriormente e perguntar-se: É possível utilizá-lo? Problemas auxiliares também devem ser considerados. É importante, também, fazer-se perguntas, como: Qual a incógnita? Qual a condicionante? Já utilizei todos os dados do problema? É possível reformular o problema? Existe uma conexão entre os dados e a incógnita?; conforme aponta L. R. Dante:

> Nesta etapa, elaboramos um plano de ação para resolver o problema, fazendo a conexão entre os dados do problema e o que ele pede. Muitas vezes, chegamos a uma sentença matemática, isto é, a uma linguagem matemática partindo da linguagem usual. Algumas perguntas que podem se

> feitas nesta fase são: Você já resolveu um problema como este antes? Você se lembra de um problema semelhante que pode ajuda-lo a resolver este? É possível colocar as informações numa tabela e depois fazer um gráfico ou diagrama? É possível resolver o problema por partes? É possível traçar um ou vários caminhos em busca da solução? Enfim, é preciso elaborar o plano para resolver o problema. (DANTE, 2000, p.24)

2.1.3 Execução do plano

Executar o plano é bem mais fácil do que planejá-lo, concebê-lo. Nesta etapa, o mais importante é exercer a paciência. Assim, o afirma Polya (2006):

> Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo.(POLYA, 2006, p.11)

2.1.4 Retrospecto

Após encontrar a solução do problema, é importante fazer um retrospecto de todas as fases, verificando se algum erro foi cometido, conforme indica L. R. Dante:

> Nesta etapa, analisamos a solução obtida e fazemos a verificação do resultado. O retrospecto, repassando todo o problema, faz com que o aluno reveja como pensou inicialmente, como encaminhou uma estratégia de solução, como efetuou os cálculos, enfim, todo o caminho trilhado para obter a solução. Esse processo cuidadoso é um excelente exercício de aprendizagem e serve também para detectar e corrigir possíveis enganos.(DANTE, 2000, p.28)

Também se faz necessário reexaminar o resultado final, se ele é possível, se existem outros caminhos para se chegar ao mesmo resultado ou se é possível aplicar o mesmo resultado, ou método, em outros problemas. Lembrando que um problema sempre pode ser explorado, mesmo após ter sido solucionado e a sua compreensão do problema pode ser aperfeiçoada. Novamente Polya (2006), nos orienta sobre a necessidade de fazer verificações:

> A esta altura, o estudante cumpriu seu plano. Ele escreveu a resolução, verificando cada passo. Assim, tem boas razões para crer que resolveu corretamente o seu problema. Apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações. Em particular, se houver algum processo rápido e intuitivo para verificar, que o resultado, quer o argumento, ele não deverá ser desprezado. É possível verificar os resultado? É possível verificar o argumento? (POLYA, 2006, p.12)

2.2 Resolução de problemas e os PCNEM

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (1998), tem a função de nortear a Educação no Ensino Médio, para que ela se torne mais contextualizada, desenvolvendo alunos com pensamento crítico, propondo uma explicação das habilidades básicas e das competências específicas a serem desenvolvidas. Também orientam os professores, buscando novas abordagens e metodologias. Os PCNEM destacam a importância da resolução de problemas no ensino de Matemática no Ensino Médio ao enumerar os objetivos desta. Entre eles, estão:

• Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo.

• Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

Na resolução de problemas, os alunos são levados a questionar, indagar, investigar, refletir, fazer operações mentais, tomar iniciativas, desenvolvendo, assim, sua autonomia, protagonismo, valores e atitudes fundamentais para que o aluno aprenda a aprender, como afirmam os PCNEM:

> Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas ideias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.(BRASIL, 1998, p.45)

Entre as competências e habilidades propostas pelos PCNEM a serem desenvolvidas em Matemática no Ensino Médio, estão:

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Todas essas competências e habilidades são contempladas na resolução de problemas, onde o aluno pode compreender enunciados, demonstrando interesse em resolvê-lo, selecionando informações, adotando notação apropriada, traçando figuras, desenvolvendo uma postura de investigação, prevendo resultados, selecionando as melhores estratégias e traçando um plano para solucionar o problema. À medida que o aluno consegue executar o plano traçado e encontrar a solução, ele poderá interpretar e criticar os resultados, perguntando-se se o resultado é possível e se existem outros caminhos, relacionando-o com outros possíveis problemas. Durante a resolução de problemas, os alunos ainda podem discutir ideias com seus pares, produzindo argumentos, conforme é orientado nos PCNEM:

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e. finamente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e argumentação (BRASIL, 1998, p.52).

2.3 Resolução de problemas e os PCN+

As orientações encontradas nos PCN+ se dirigem à escola de ensino médio em sua totalidade: aos professores, diretores, coordenadores, responsáveis pela formação continuada dos professores e responsáveis pela rede de ensino. Sua pretensão é complementar aos parâmetros curriculares do Ensino Médio, mas não de forma normativa. Nos PCN+ encontram-se as competências que devem ser trabalhadas no Ensino Médio , articulando-as aos conteúdos. No entanto, tão importante quanto os conteúdos e competências, é a forma como as competências almejadas irão se desenvolver, como nos orientam os PCN+:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.(BRASIL, 2002, p.129)

Outro aspecto importante alcançado através da resolução de problemas é o respeito às diferenças, ao tempo de aprendizagem de cada aluno, lembrando que ninguém aprende no mesmo ritmo, assim como nos sugerem os PCN+:

> A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos.(BRASIL, 2002, p.129)

Ao resolverem os problemas propostos, os alunos trabalham em grupo, o que favorece o diálogo e a troca de informações fortalecendo competências relacionadas á representação e comunicação, um aspecto muito importante e que deve ser enfatizado. A comunicação é uma competência valiosa que deve ser estimulada em matemática, segundo os PCN+:

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver (BRASIL, 2002, p.129).

2.4 Diferença entre exercício e problema

Dante (2000) diz ser necessário fazer distinção entre exercício e problema. Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar habilidades algorítmicas, como apontam Soares e Pinto (2001):

> Quando se propõe aplicar a resolução de problemas no ensino da matemática, refere-se a problemas não rotineiros e algorítmicos, onde o aluno muitas vezes pergunta “a conta é de mais ou de menos?”. Problemas rotineiros não avaliam, por si só, atitudes, procedimentos e a forma como os alunos administram seus conhecimentos. (SOARES; PINTO, 2001, p.4)

Um problema é concebido como tal a partir do momento em que não usamos estratégias prontas e automáticas, previamente aprendidas e que nos permitam resolvê-lo de forma rápida e direta, como são os problemas tradicionais que aparecem no final dos capítulos dos livros cujas soluções servem para reforçar e fixar os enunciados e podem ser resolvidos de forma básica de acordo com exemplos anteriores apresentados pelo professor, como sugerem Echeverría e Pozo (1998):

> [...] uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-lo de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.16)

Se para solucionar uma situação são necessários procedimentos, estratégias e habilidades rotineiras, automatizadas como consequência de uma prática contínua que nos levam a uma solução imediata, essa situação pode ser classificada como exercício, visto que um problema pode ser reconhecido como uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido em que o aluno não fará uso imediato de técnicas praticadas anteriormente, como apontam Echeverría e Pozo (1998):

> Dito de outra forma, um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício.(ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.16)

Ambos, a solução de problemas e a solução de exercícios, são importantes. O segundo permite que os alunos revisem e fixem fatos e conceitos básicos. Mas eles não devem ser confundidos, visto que a solução de problemas exige reflexão. Segundo Echeverría e Pozo (1998, p.17) “Quando a prática nos proporcionar a solução direta e eficaz para a solução de um problema, escolar ou pessoal, acabaremos aplicando essa solução rotineiramente, e a tarefa servirá, simplesmente, para exercitar habilidades já adquiridas.”.

Não é simples diferenciar a solução de problemas e a solução de exercício, visto que não depende somente da escolha da situação pelo professor, mas também dos conhecimentos prévios dos alunos, como também dos objetivos estabelecidos. É importante que o professor faça, em sala de aula, a distinção entre solução de problemas e solução de exercícios para que os alunos compreendam que o primeiro exigirá uma atitude ativa e mais do que o simples exercício repetitivo. Para Polya (2006), o ensino da Matemática não deve estar limitado apenas à resolução de exercícios rotineiros:

> No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém.(POLYA, 2006, p.142)

2.5 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A metodologia mais usada em nossas salas de aula ainda é aquela em que os alunos são receptores e o papel do professor é transmitir o conhecimento. Nesta corrente, existe um padrão no ensino de Matemática: primeiro, o professor expõe a definição, depois ele dá exemplos e, por fim, seleciona exercícios de “fixação”. Os exemplos ensinados pelo professor servem como padrão para que os alunos possam resolver os exercícios selecionados pelo professor, que muitas vezes, são repetitivos, como apontam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica ensino com transmissão de conhecimento, e aprendizagem com mera recepção de conteúdos. Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na “verbalização” do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações. (BRASIL, 2008, p.80)

A metodologia de ensino–aprendizagem–avaliação através de resolução de problemas propõe um caminho inverso. Nela, a construção dos conceitos é a última etapa do processo de aprendizagem.

Segundo Onuchic (1999, p.199), “Até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica.”

Mas será que tudo continua a mesma coisa? Será possível utilizar a resolução de problemas como uma ferramenta para um ensino-aprendizagem de melhor qualidade?

Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar Resolução de problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. Essa terceira abordagem é a que nos interessa, onde a resolução de problemas é o primeiro passo para que ocorra a aprendizagem, como aponta Onuchic (1999):

> Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. [...]embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas matemáticos possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequências. (ONUCHIC, 1999, p.207)

A resolução de problemas passa a ser pensada com o uma metodologia, como um veículo para introduzir novos conceitos de Matemática. O problema é um elemento disparador do processo de aprendizagem, segundo Onuchic (1999):

> [...] não pretendemos tirar a ênfase dada à resolução de problema, mas sentir que o papel da resolução de problemas no currículo passaria de uma atividade limitada para engajar os alunos, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído.
>
> É importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.(ONUCHIC, 1999, p.208)

Ao usar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através de resolução de problemas, não descartamos o que era bom nas outras metodologias, como a repetição, os exercícios de fixação, a resolução de problemas, compreensão, o uso da linguagem matemática, e até mesmo, a aula expositiva, como no ensino tradicional. Nessa metodologia, colocamos o foco nos problemas como ponto de partida para a construção dos novos conceitos. Trata-se de uma postura pedagógica, como afirma Onuchic (1999):

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades matemática não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica , de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p.215)

Falava-se de Ensino de Matemática através da Resolução de problemas, em seguida, de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas e, atualmente, fala-se em Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Para Huanca (2006), isso se deve ao fato de que ensino, aprendizagem e avaliação caminham juntos. Um não se faz sem o outro e que Ensino-Aprendizagem-Avaliação é um ser maior do que ensino, aprendizagem e avaliação. É uma tríade: o professor é responsável pelo ensino a fim de promover a aprendizagem do aluno; ambos se apoiam para que a construção do conhecimento aconteça, sendo o professor um guia e o aluno o protagonista. A avaliação melhora as ações de ambos.

A seguir, o Quadro 2 segundo Huanca (2014, p.97), com algumas razões que nos levaram a essas mudanças.

Quadro 2 – Por que Ensino-Aprendizagem-Avaliação?

Três processos distintos	**Ensino** Responsabilidade é do professor que visa a aprendizagem do aluno.	**Aprendizagem** Os alunos devem aprender com compreensão. Responsabilidade é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as ideias que tem com as novas ideias que se quer construir.	**Avaliação** A avaliação apoia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho.
Um processo duplo	**Ensino-Aprendizagem** É um ser maior. É maior que o ensino. É maior que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como construtores desse conhecimento.		
Um processo triplo	**Ensino-Aprendizagem-Avaliação** É um ser ainda maior. É maior que o ensino, que a aprendizagem, que a avaliação, tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e aumentar sua aprendizagem.		

Fonte – (HUANCA, 2014, p.97)

A avaliação, sendo uma etapa importante para que a aprendizagem aconteça, passa a ser pensada como um processo que acontece enquanto se resolve os problemas em sala de aula. Allevato e Onuchic (2014) sugerem que o ensino, a aprendizagem e a avaliação ocorram simultaneamente, durante a resolução de problemas:

> Embora ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática se constituem em elementos distintos, que não ocorrem necessariamente ao mesmo tempo ou como decorrência um do outro, o que se considera ideal é que o ensino e aprendizagem se realizem, sim, integrados nas situações de sala de aula; com esse sentido é que, não raro, se emprega a expressão ensino-aprendizagem. Ocorre que, mais recentemente, também o conceito de avaliação começou a ser repensado e, a partir da compreensão da necessidade de adotar princípios de avaliação contínua e formativa, ela passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos.
>
> [...] Por essa razão e assumindo como foco de nossos trabalhos, estudos e pesquisas a concepção de trabalhar Matemática através da resolução

> de problemas, passamos a empregar a expressão ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica que integra a avaliação às atividades de sala de aula e que entendemos como uma metodologia, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.(ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.42-43):

Ao utilizar a resolução de problemas como o ponto de partida para a construção de novos conceitos ainda não estudados pelos alunos, Onuchic (1999, p.216-217) elaborou um roteiro contendo a seguinte proposta básica:

- **Formar grupos** – entregar uma atividade

Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objeto vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimentos que muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos.

- **O papel do professor**

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

- **Resultados na lousa**

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

- **Plenária**

Chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembleia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

- **Análise dos resultados**

Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho a frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

- **Consenso**

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

- **Formalização**

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias do assunto.

Allevato e Onuchic (2014) dizem que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas tem sido o foco de pesquisa e dos trabalhos desenvolvidos pelos membros do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, na UNESP – Rio Claro/SP:

> Considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, tal Metodologia tem mostrado que a resolução de problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula de Matemática, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador do decurso dessas atividades. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.48-49).

Capítulo 3

Referencial Teórico da Metodologia de Pesquisa

Este capítulo trata sobre a Metodologia de Pesquisa de Romberg (2007) e as contribuições feitas a ela pelo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, coordenado pela Profa. e Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, sendo apresentado o fluxograma denominado Romberg-Onuchic, que contém 11 atividades a serem seguidas pelo pesquisador Onuchic e Noguti (2014). Este capítulo ainda descreve como a pesquisadora conduziu a pesquisa segundo o fluxograma de Romberg-Onuchic.

3.1 A Metodologia de Pesquisa de Romberg

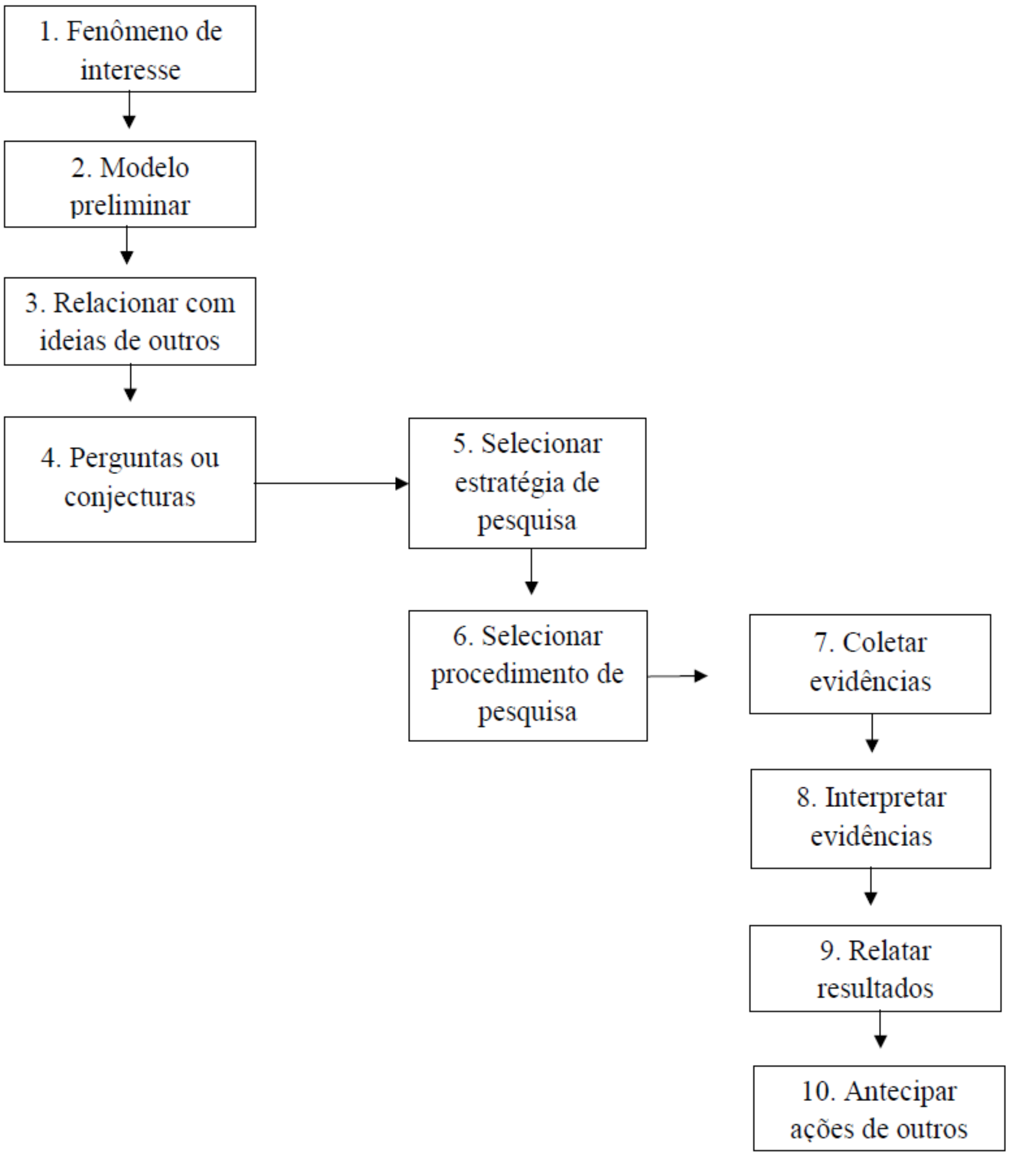
Segundo Romberg (2007), problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de matemática tem despertado o interesse de estudiosos. Tais problemas estão sendo discutidos e constituem-se em um espaço para investigação e pesquisa. A pesquisa, por sua vez, pode ser considerada uma arte, pois não pode ser vista como uma ação mecânica, todavia, como em todas as artes, há um consenso sobre procedimentos a serem seguidos para que o trabalho seja considerado aceitável. Sendo considerada uma arte, quais são as atividades essenciais de uma pesquisa? Romberg (2007) descreve as 10 atividades que considera essenciais e que devem direcionar o trabalho do pesquisador, apontando como a pesquisa deve ser vista:

> [...] fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As **atividades envolvidas** em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Dado que fazer pesquisa é uma arte, quais as suas atividades essenciais?(ROMBERG, 2007, p.4) (grifo nosso)

A seguir, o esboço com as 10 atividades descritas em Romberg (2007, p.5).

O conjunto destas atividades será chamado de Metodologia de Pesquisa de Romberg, como também o fez o GTERP (HUANCA, 2006, p.49). As atividades estão distribuídas em três blocos e todas relacionadas entre si.

Figura 1 – Esboço de atividades de Romberg



Fonte: (ROMBERG, 2007, p.5)

- **1º Bloco de Romberg**

  Identificar o fenômeno de interesse – toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real. Na educação matemática, a pesquisa envolve professores e alunos, como se dá a aprendizagem, como os professores ensinam, como professores e alunos se relacionam, como os alunos interagem com a matemática, entre outras relações.

Construir um modelo preliminar - fazer um modelo preliminar abordando as variáveis do fenômeno de interesse pode ajudar como um ponto de partida e como uma orientação para a pesquisa, como afirma Romberg (2007):

> Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois ilustra em um modelo. [...] Formular um modelo preliminar usualmente ajuda porque fazer assim envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. De fato, o modelo é uma simplificação, desde que alguns aspectos da realidade serão significativos e outros irrelevantes. (ROMBERG, 2007, p.6)

Relacionar o fenômeno e o modelo as ideias de outros – é importante examinar as ideias de outros pesquisadores sobre o fenômeno e relacioná-los com as suas, de modo a esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto.

Levantar questões específicas ou fazer uma conjectura baseada na razão – este é um passo-chave para a pesquisa, afinal, perguntas potenciais inevitavelmente aparecem ao se examinar um fenômeno.

John Platt(1964) citado por Romberg (2007), argumentou que a escolha da questão que deve ser examinada é crucial, e segundo Romberg (2007):

> Melhor do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores usualmente fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições fundamentadas) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações com o esboçado no modelo. (ROMBERG, 2007, p.8)

- **2º Bloco de Romberg**

  Selecionar uma estratégia de pesquisa geral para coletar evidência – a decisão sobre que métodos utilizar depende das questões que se seleciona, da visão do mundo na qual as questões estão situadas, do modelo preliminar e da conjectura.

  Selecionar procedimentos específicos – dependendo das questões levantadas, procedimentos específicos devem ser escolhidos. Deve-se tomar cuidado ao selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões. Nesse passo, as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada.

- **3º Bloco de Romberg**

  Coletar informação – a coleta de dados pode ser feita sem rodeios desde que se tenha decidido coletar certa informação para construir um argumento, considerando as perguntas que foram feitas.

Interpretar a informação coletada – nesta etapa os dados coletados são analisados e interpretados. Ao agrupar e realizar testes estatísticos atribuindo-os números, os métodos são chamados quantitativos. Quando os números não são utilizados, os métodos de análise são chamados qualitativos. É importante observar que é coletada mais informação do que a necessária para responder a questão, sendo parte dela relevante, parte irrelevante e parte não compreensível e que encontrar informação importante dentre todas as disponíveis é uma arte.

Transmitir resultados para outros – esta etapa consiste em buscar comentários e críticas de outros membros de uma comunidade de pesquisa científica após terminada a investigação.

Antecipar ação de outros - A partir de dados coletados através de uma investigação, membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem às ideias uns dos outros, sugerindo novos passos, modificações, elaborações e assim por diante, como aponta Romberg (2007):

> Dados os resultados de uma particular investigação, cada investigador está interessado no que acontecerá depois e deveria antecipar ações posteriores. Membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem às ideias uns dos outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos e assim por diante. Os pesquisadores tentam situar cada estudo em uma cadeia de investigações. Coisas que vieram antes e coisas que vem após qualquer particular estudo são importantes. (ROMBERG, 2007, p.9)

3.2 Contribuições feitas a Metodologia de Pesquisa de Romberg pelo GTERP.

Após alguns anos de pesquisa, observando e fazendo uso do Modelo Metodológico de Romberg, os membros do GTERP perceberam que podiam alterar alguns de seus passos a fim de estabelecer um modelo mais completo, como afirmam Onuchic e Noguti (2014):

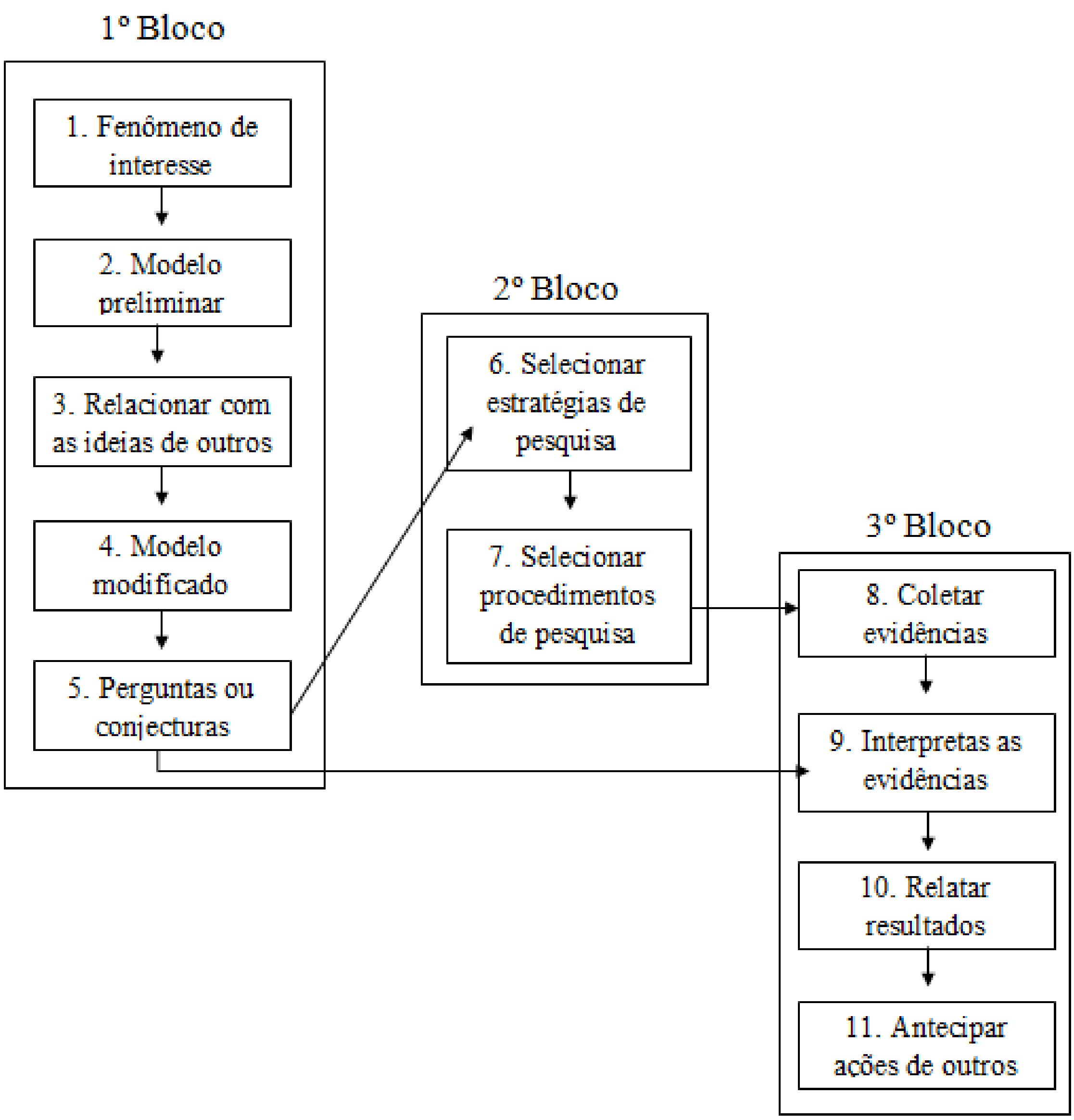
> No trabalho realizado pelo pesquisador, muitas vezes se torna importante estabelecer um plano de ação e, também, estratégias e procedimentos que o levem à solução do problema inicialmente proposto. Diante dessas necessidades, durante alguns anos de pesquisa, observação e uso do Modelo Metolológico de Romberg, os membros do GTERP, que utilizaram e utilizam esse modelo para compor as suas dissertações e teses, perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e os objetivos do grupo. Sendo assim, fez-se necessário que o novo modo de trabalho, em pesquisas científicas desenvolvidas pelo GTERP, fosse apresentado à comunidade científica, com as contribuições que foram sendo somadas ao Modelo de Romberg nesse tempo. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.57)

Um novo fluxograma , com as contribuições dos membros do GTERP, foi apresentado em Onuchic e Noguti (2014). Os membros do grupo julgaram apropriado nominá-lo por Romberg-Onuchic, uma conjunção do sobrenome do autor do fluxograma inicial, Romberg, com o sobrenome da professora coordenadora do grupo, Onuchic.

O fluxograma de Romberg-Onuchic, Figura 2, apresenta uma nova atividade e também modificações nas definições de cada uma das atividades. A seguir, as atividades são, de forma sucinta, descritas de acordo com Onuchic e Noguti (2014).

3.2.1 Fluxograma de Romberg-Onuchic

Figura 2 – Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.59)

- **1º Bloco de Romberg-Onuchic**

  Fenômeno de interesse – algo que está nos incomodando. Inicia-se a elaboração do projeto de pesquisa.

  Modelo preliminar - poderá sofrer alterações à medida que a pesquisa avança, funcionando como um guia para o pesquisador.

  Relacionar com ideias dos outros – o pesquisador apresenta as contribuições de outros pesquisadores que ele julga importante, sem, no entanto, discutir tais ideias. Neste momento, o pesquisador "ouve" os outros sem se manifestar, através de "recortes" de outros autores.

  Modelo modificado – é mais abrangente do que o inicialmente proposto. O modelo modificado possui mais informações que ajudará a formular a pergunta da pesquisa.

  Pergunta da pesquisa ou a Conjectura levantada – após relacionar seu fenômeno de interesse e as ideias de outros, a Pergunta da Pesquisa é elaborada.

- **2º Bloco de Romberg-Onuchic**

  Neste passo, o pesquisador estará buscando **Estratégias e Procedimentos de pesquisa**.

  Quando se pensa o que fazer, trata-se de estratégia. E quando coloca-se esse pensamento em prática, fala-se de Procedimentos. Além da Estratégia e do Procedimento Geral, estratégias auxiliares $(E_1, E_2, E_3, ..., E_n)$ e procedimentos auxiliares relacionados $(P_1, P_2, P_3, ..., P_n)$ foram criados a fim de englobar um maior número de variáveis que se apresentam no Modelo Modificado.

- **3º Bloco de Romberg-Onuchic**

  Coletar evidências e informações – a partir das estratégias e procedimentos planejados no bloco anterior, que poderá ser em sala de aula ou a partir da análise de um material importante.

  Interpretar evidências coletadas – momento em que as informações produzidas serão analisadas, observando as mais relevantes.

  Relatar resultados obtidos – considerando o caminhar de sua pesquisa, seja suas referências teóricas e aplicações. Tal relato pode ser um artigo, dissertação ou tese.

  Finalmente, **antecipar ações de outros**, informando sobre a investigação terminada a outros membros de uma comunidade científica, buscando seus comentários, críticas e sugerindo trabalhos futuros sobre seu objeto de pesquisa.

3.3 A pesquisa dentro da Metodologia de Romberg-Onuchic

A pesquisadora conduziu a pesquisa segundo a Metodologia de Romberg-Onuchic, relatando o seu Fenômeno de Interesse, o Modelo Preliminar e o Modelo Modificado, assim como as Estratégias e Procedimentos que foram selecionados por ela para responder à pergunta da pesquisa.

Esta pesquisa é classificada, com relação a abordagem, como qualitativa, pois a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas, não necessitando do uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente é natural, onde é feita a coleta das informações que serão analisadas de forma indutiva, conforme Silva e Menezes (2005). Quanto à natureza, pode ser classificada como aplicada, visto que "objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos", de Prodanov e Freitas (2013).

Esta pesquisa ainda pode ser classificada, de acordo com os procedimentos, como bibliográfica e como uma pesquisa de campo. Bibliográfica, visto que foi elaborada a partir de material já publicado, como livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, dissertações, teses, internet, com o objetivo de atualizar o pesquisador sobre todo o material já produzido sobre o assunto da pesquisa. Pesquisa de campo, visto que foi realizada a observação de fatos e fenômenos ocorridos espontaneamente (em sala de aula), seus dados foram coletados e registrados, sendo considerados relevantes a serem analisados, de acordo com Prodanov e Freitas (2013).

3.3.1 Identificando o Fenômeno de Interesse

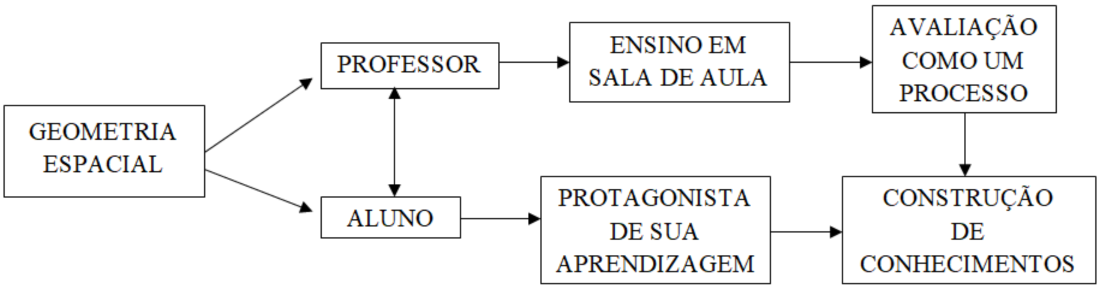
Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (2002), abordam o tema Geometria e medidas, que estão presentes nas formas naturais e construídas. A Geometria é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços da vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

Portanto, o fenômeno de interesse dessa pesquisa é "**A construção de conhecimentos de Geometria Espacial.**"

3.3.2 O modelo Preliminar

O modelo preliminar (Figura 3) dá uma ideia de como conduzir o trabalho ao longo da pesquisa. Ele pode e deve ser modificado, visto que é sucinto.

Figura 3 – Modelo Preliminar



Fonte: Elaboração Própria

3.3.3 Relacionar com ideias de outros

A partir do modelo preliminar Figura 3, fez-se necessário fazer uma revisão teórica sobre o fenômeno de interesse para auxiliar a pesquisadora a fundamentar sua pesquisa.

3.3.3.1 O estudo de Geometria e os PCNEM

De acordo com Brasil (1998), a organização curricular da Base Nacional Comum do Ensino Médio deve se dar por áreas. Entre elas, está a área: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.

Uma das habilidades e competências que essa área tem por objetivo é permitir ao educando identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.

3.3.3.2 O estudo de Geometria e os PCN+

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (2002), dizem que a Geometria é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária. No ensino médio, ela deve tratar das formas planas, tridimensionais, suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

Os PCN+ (Brasil (2002)) propõem 4 unidades temáticas para o desenvolvimento da Geometria: geometrias plana, espacial, métrica e analítica.

A unidade temática - Geometria Espacial, aborda os seguintes conteúdos e habilidades: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos e ainda:

> • Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.

> • Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
>
> • Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
>
> • Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados. (BRASIL, 2002, p.125)

3.3.3.3 O Estudo de Geometria e as Orientações curriculares para o Ensino Médio

De acordo com Brasil (2008) o estudo de Geometria deve possibilitar que os alunos resolvam problemas práticos do cotidiano. Nesta etapa, a representação de diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundada e sistematizada.

O trabalho com comprimentos, áreas e volumes deve priorizar o processo que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação, como afirmam as Orientações curriculares para o Ensino Médio:

> No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. As expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies do cilindro e do cone podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações. (BRASIL, 2008, p.76)

3.3.3.4 O estudo de Geometria em livros didáticos

Ainda relacionando o tema com ideias de outros pesquisadores, julgou-se importante analisar os livros adotados pela escola.

- Livro A – DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. e ALMEIDA, de N. – Matemática: ciências e aplicações, volume 2, Editora Saraiva, São Paulo, 2013.
- Livro B – DANTE, L.R. – Matemática: contexto e aplicações, volumes 2 e 3, Editora Ática, São Paulo, 2016.
- Livro C – BALESTRI, R. – Matemática: interação e tecnologia, volume 3, Editora Leiza, São Paulo, 2016.

O livro A inicia o estudo de Geometria Espacial falando um pouco de história. Cita as civilizações mais antigas – egípcia e babilônica. Também fala sobre a Grécia, Tales de Mileto, Pitágoras e, por fim, Euclides. No início de cada capítulo, o livro traz aplicações contextualizadas, como por exemplo, a Geometria dos fractais; a Matemática e as chuvas etc. O livro é rico em exercícios e problemas.

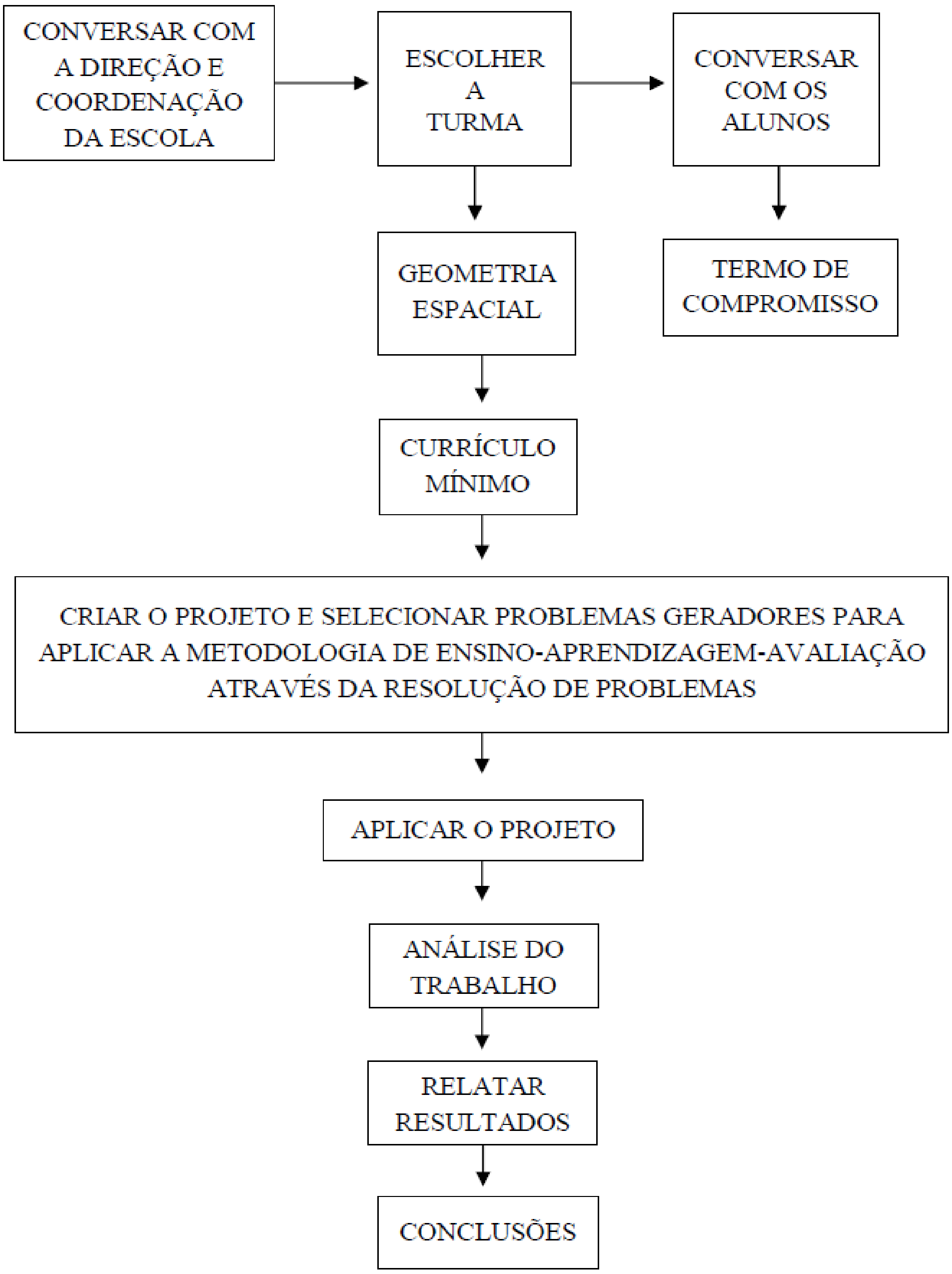
O livro B divide o conteúdo de Geometria Espacial para o ensino médio entre os volumes 2 e 3. O estudo dos corpos redondos encontra-se no volume 3 e o restante, no volume 2. O autor enfatiza os passos de resolução de problemas sugeridos por Polya (2006) e apresenta situações contextualizadas, assim como problemas para resolução individual, em duplas e em equipes. No final de cada assunto, o livro aborda questões do Enem e de vestibulares.

O livro C, assim como o livro A, inicia o estudo de Geometria Espacial contando um pouco da história da Geometria. No início de cada capítulo, o autor procura fazer relação entre o conteúdo e situações reais. No final, o autor propõe uma revisão dos conteúdos através de perguntas que devem ser respondidas pelo aluno e apresenta um esquema que relaciona as ideias matemáticas estudadas.

3.3.4 Modelo Modificado

Visto que o modelo preliminar não foi suficiente para abranger todas as variáveis-chave que poderiam ser consideradas após "ouvir os outros", um novo modelo foi elaborado (Figura 4).

Figura 4 – Modelo Modificado



Fonte:Elaboração Própria

3.3.5 Estabelecendo uma pergunta ou conjectura

A pergunta da pesquisa é considerada após a realização das atividades anteriores. O pesquisador relaciona o **Fenômeno de Interesse**, o **Modelo Modificado** e as **Ideias de Outros** e, assim, elabora a **Pergunta da Pesquisa** que neste caso, é:

A construção de novos conceitos de Geometria Espacial se daria de forma eficiente se fosse ensinada usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

3.3.6 Estratégias e Procedimentos

Uma Estratégia Geral é elaborada para responder a pergunta da pesquisa. Neste caso, a Estratégia Geral (E_G) é: Criar um projeto para trabalhar Geometria Espacial usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Para ajudar a responder à pergunta da pesquisa e conseguir atender à estratégia geral, estratégias auxiliares foram selecionas.

E_1: Conversar com a direção e coordenação da escola sobre o trabalho a ser desenvolvido.

E_2: Escolher a turma e o período que poderia ser trabalhado o conteúdo de Geometria Espacial.

E_3: Conversar com a turma selecionada.

E_4: Apresentar o Termo de Compromisso entre professor e aluno.

E_5: Utilizar uma metodologia diferente da tradicional para trabalhar Geometria Espacial.

Relacionados às estratégias, estão os procedimentos.

P_1: Reunião com a direção e coordenação da escola.

Uma reunião com a diretora e coordenadora da escola foi realizada. A escola onde a pesquisa seria realizada era a Escola Estadual Chequer Jorge, de Itaperuna, RJ. Ambas, a diretora e a coordenadora, se mostraram receptivas ao projeto que seria desenvolvido. A diretora assinou uma autorização (Apêndice A) permitindo que o projeto fosse realizado na escola, durante as aulas de matemática.

P_2: A turma 2001, do segundo ano do ensino médio foi a selecionada. No Estado do Rio de Janeiro, a seleção do conteúdo é realizada de acordo com um currículo mínimo proposto pela SEEDUC. No caso, o conteúdo de Geometria Espacial é trabalhado no segundo ano. O conteúdo encontra-se distribuído nos quatro bimestres. Para facilitar a pesquisa e a realização do projeto, todo o conteúdo de Geometria Espacial proposto no currículo mínimo para o segundo ano foi trabalhado no 3º bimestre, nos meses de agosto e setembro de 2017. O projeto foi aplicado durante 8 semanas.

P_3: Uma roda de conversar com os alunos foi realizada. Todas as dúvidas sobre a metodologia que seria aplicada foram esclarecidas.

P_4: Um Termo de Compromisso (Apêndice B) entre professor e alunos foi criado para orientar a disciplina em sala de aula. Os alunos concordaram com a proposta. Cada aluno recebeu e assinou um termo de compromisso, assim como o professor. Após assinado, o documento ficou de posse do professor.

P_5: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Como já foi abordada no Capítulo 2, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é diferente da metodologia presente na maioria das salas de aula. Nela, a resolução de problemas é apresentada como um veículo para a aprendizagem. Problemas são selecionados, chamados de problemas geradores. Estes problemas não são escolhidos ao acaso. Eles são selecionados pelo professor ou até mesmo sugeridos pelo aluno de acordo com os conceitos que se deseja construir.

A partir da resolução de problemas, novos conceitos são construídos. A formalização dos conceitos é a última etapa do processo.

Diretamente relacionada à Estratégia Geral está o Procedimento Geral (P_G).

P_G: Criação do projeto: Geometria Espacial para a Vida.

Azevedo (2002) propõe alguns aspectos que devem ser levados em consideração ao se propor um projeto de trabalho para a sala de aula: a escolha do tema, os objetivos do projeto, a escolha da metodologia adotada e a elaboração de um roteiro de atividades.

Para uma melhor organização do projeto, os aspectos propostos por Azevedo (2002) foram seguidos.

3.3.6.1 Tema do projeto – Geometria Espacial para a Vida

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002, p.123):

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Por se tratar de um assunto importante para o ensino médio, o projeto proposto aborda o tema Geometria Espacial relacionando-o com situações da realidade. O conteúdo foi distribuído em 4 unidades.

- **Unidade 1: Introdução à Geometria Espacial**

  1.1 Conceitos primitivos da geometria espacial

  1.2. Os diferentes poliedros ou corpos redondos e suas planificações

  1.3. Relação de Euler 1.4. Poliedros regulares

- **Unidade 2: Prismas e Cilindros**

  2.1. Definição de prismas e de cilindros

  2.2. Áreas lateral e total de prismas e cilindros

  2.3. Volume de prismas e cilindros

- **Unidade 3: Pirâmides e Cones**

  3.1. Definição de pirâmides e cones

  3.2. Áreas lateral e total de pirâmides e cones

  3.3. Volume de pirâmides e cones

- **Unidade 4: Esferas**

  4.1. Definição de superfície esférica e de esfera

  4.2. Área da superfície esférica e volume de uma esfera

3.3.6.2 Objetivos do Projeto

O projeto sob o tema Geometria Espacial para a Vida tem como objetivo despertar o interesse do aluno para a construção de conhecimentos de Geometria Espacial, reconhecendo que as formas geométricas planas e espaciais estão presentes no dia a dia, nas construções, na natureza e em objetos do cotidiano, sendo o seu estudo importante para ser e estar no mundo.

Para alcançar o objetivo deste projeto, os seguintes objetivos específicos foram considerados:

- Compreender que a Geometria Espacial se conecta com outras áreas do conhecimento;

- Resolver problemas práticos do cotidiano;

- Provocar no aluno o valor pelo processo de criação do saber;

- Motivar o aluno a trabalhar em grupo, levando-o a aprender com as capacidades e habilidades uns dos outros;
- Formalizar novos conceitos e conteúdos de Geometria Espacial a partir da resolução de problemas.

3.3.6.3 A Metodologia do Projeto

Foi escolhida a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com o propósito de apresentar uma maneira diferente de trabalhar Matemática em sala de aula. Ao utilizar essa metodologia, recursos como atividades lúdicas, tecnológicas, a história da matemática, jogos e até mesmo a forma tradicional de ensino podem ser usados.

3.3.6.4 O roteiro de atividades

O roteiro de atividades encontra-se no Apêndice C e a aplicação do projeto está descrita no Capítulo 4.

Capítulo 4

Aspectos metodológicos e desenvolvimento do projeto

Este capítulo apresenta o perfil da Escola onde o projeto foi aplicado, descrevendo como se deu o desenvolvimento do projeto e como ocorreu a sua aplicação.

Durante a aplicação do projeto, alguns problemas trabalhados em sala de aula são descritos de forma detalhada, momento em que ocorreu a construção de novos conceitos e novos conteúdos de Geometria Espacial, sendo utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Outros problemas, embora tenham sidos selecionados pela pesquisadora e estejam contidos no Apêndice C, foram trabalhados como problemas de fixação de conteúdos e não são descritos neste capítulo.

O projeto foi aplicado numa turma de 2º ano, a turma 2001, do Ensino Médio Regular do Colégio Estadual Chequer Jorge, Itaperuna – RJ. A turma possuía um total de 30 alunos matriculados, número que se manteve até o final. Para melhor colher as informações, os alunos foram divididos em grupos com 4 alunos cada e, quando não possível, com 3 alunos. Dessa maneira, formaram-se 6 grupos de 4 alunos e 2 grupos de 3 alunos, que se mantiveram sempre os mesmos até o final do projeto.

Vale destacar que cada unidade foi trabalhada em duas semanas, num total de 10 horas/aula cada unidade. Durante todo o desenvolvimento do projeto foi seguido o roteiro sugerido por Onuchic (1999).

4.1 Perfil da Escola onde o Projeto foi aplicado

De acordo com o Projeto Político Pedagógico da Escola de 2019 (PPP (2019)), o Colégio Estadual Chequer Jorge (Figura 5) é uma escola pública, localizada na zona urbana, vinculada a Diretoria Regional Noroeste Fluminense, Secretaria de Estado de Educação do

Rio de Janeiro. A escola está inscrita no censo escolar sob o número 33001456. A maioria dos alunos do colégio é oriunda de escolas públicas municipais da cidade, moradores do entorno e bairros adjacentes. Os alunos da escola possuem nível sócio econômico médio/baixo, com famílias aparentemente estruturadas, que participam de reuniões e eventos quando convocados.

O Colégio Estadual Chequer Jorge funciona em tempo integral e se preocupa em manter o espaço escolar atrativo para o aluno, oferecendo aulas diferenciadas e integradas, procurando atender os anseios dos educandos. Ao todo, a escola possui 411 alunos matriculados, sendo 249 no Ensino Médio e 162 na Educação de Jovens e Adultos – Ensino Fundamental. As modalidades de Ensino oferecidas pelo colégio são:

- Ensino Médio Regular (Diurno/noturno)
- Ensino Médio Técnico em Administração com ênfase em Empreendedorismo (Integral)
- EJA (Educação para Jovens e Adultos Fundamental e Ensino Médio)

Figura 5 – Colégio Estadual Chequer Jorge

Fonte: Elaboração própria

4.2 1ª semana (aulas 1-5) – Introdução à Geometria Espacial – parte I

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano;
- Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos; entendendo os postulados, a determinação de um plano, assim como algumas propriedades;
- Compreender a distância entre dois pontos como a menor distância entre eles;
- Entender o conceito de dimensão e desenvolver algumas noções básicas relacionadas à noção de tridimensionalidade.

Na semana anterior ao início do projeto, foi conversado com os alunos sobre o trabalho que seria desenvolvido. Os alunos foram esclarecidos sobre os conteúdos que seriam trabalhados e também como seria a metodologia utilizada, que diferente da tradicional em que os alunos trabalham individualmente, nesta, os alunos trabalhariam em grupos e sempre a partir de problemas e situações propostas pelo professor. Conversou-se sobre o termo de compromisso (Apêndice A) que conteria os direitos e deveres da pesquisadora e dos alunos e que todos deveriam assinar. Os alunos se mostraram dispostos a colaborar e se mostraram acolhedores.

No termo de compromisso, deixou-se claro que cada aluno seria avaliado nos itens: assiduidade, atividades, trabalho em grupo, participação nas diversas atividades e a prova requerida por lei e pela instituição. Professora e alunos concordaram com o termo de compromisso e o assinaram.

4.2.1 Problema 1

Já na primeira semana, na primeira aula, a pesquisadora distribuiu aos grupos o problema 1 do projeto. Com esse problema, a intenção era revisar a noção de ponto, reta e plano e também posição relativa entre retas. Trata-se de um assunto simples, mas que precisava ser discutido, visto que é a introdução à Geometria Espacial e são conceitos que serão abordados durante todo o estudo. Portanto, o problema 1 é simples, apenas para introdução. Mas, novos conceitos também foram construídos, como colinearidade e coplanaridade, que os alunos demonstraram desconhecer.

Figura 6 – Problema 1

1) Suponha que você quer fazer uma visita à Biblioteca Nacional no Rio de Janeiro. Para conhecer melhor as cercanias, você acessou o *Google Maps*, digitou "Biblioteca Nacional" e clicou em Ok. O site apresentou um mapa com 3 endereços, todos no centro do Rio: o da Fundação Biblioteca Nacional, marcado com A no mapa; o da Biblioteca Nacional, marcado como B, no mapa e o do escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional, marcado como C no mapa.

Ao longo do percurso, você aproveitou o trajeto para responder como verdadeiro ou falso algumas dúvidas de um amigo, sempre considerando as ruas e avenidas como retas e os endereços como pontos.

a) O ponto A (Fundação Biblioteca Nacional) pertence à Av. Rio Branco)

b) O ponto C (escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional) não pertence à Av. Graça Aranha.

c) O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à Av. Almirante Barroso.

d) O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à rua Debret.

e) O Museu Nacional de Belas Artes (logo acima do ponto A) pertence à Avenida Rio Branco.

f) Os 3 endereços da Biblioteca Nacional (pontos A, B e C) são colineares.

g) A estação do metrô Uruguaiana (representada pela letra M) não pertence à rua Uruguaiana.

h) As estações do metrô Carioca e Cinelândia, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

i) As estações do metrô Carioca, Cinelândia e Uruguaiana, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

Ainda observando o mapa da região do centro do Rio de Janeiro. Só que, desta vez, as perguntas dizem respeito à posição das ruas. Note que as ruas e avenidas continuam representando retas e os endereços representando os pontos. Analise as afirmações como sendo verdadeiras ou falsas.

j) A Av. Almirante Barroso é perpendicular a Av. Rio Branco.

k) A Rua Debret e a Rua México são concorrentes.

l) A Av. Graça Aranha, a rua México e a Av. Rio Branco são paralelas.

m) A rua São José e a Av. Nilo Peçanha não são concorrentes.

n) A rua do Carmo é perpendicular à rua da Assembleia.

Fonte: (EJA, 2013a, p.57)

O problema compara as ruas com retas, os endereços com pontos e o mapa com um plano.

Ao localizar os endereços, os alunos tiveram dúvidas quanto aos itens c e d. Eles questionaram se a Biblioteca Nacional, representada pelo ponto B, poderia estar em duas ruas ao mesmo tempo, o que gerou uma boa discussão, chegando-se a conclusão de que sim, a Biblioteca poderia estar em duas ruas ao mesmo tempo caso ela estivesse na esquina, ou seja, se as ruas se intersectassem em um ponto. Com essa ilustração, foi recordada a definição de retas concorrentes.

Os alunos observaram no mapa quais ruas eram paralelas ou concorrentes. Também observaram endereços que pertenciam à mesma rua, ou seja, eram colineares. Aproveitando a situação, explicou-se para os alunos quando pontos são considerados coplanares. Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa.

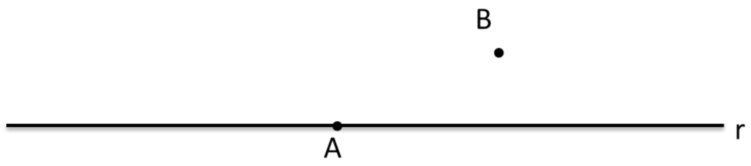
4.2.1.1 Geometria de posição no plano

Observe a Figura 7:

O ponto A pertence à reta r;

O ponto B não pertence à reta r.

Figura 7 – Relação entre um ponto e uma reta



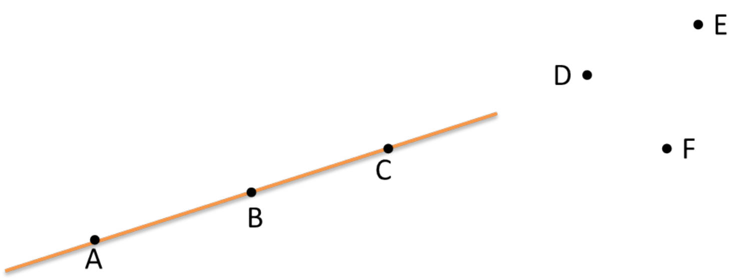
Fonte: Elaboração própria

Observe a Figura 8:

Os pontos A, B e C são colineares (existe uma reta que passa pelos três pontos);

Os pontos D, E e F não são colineares (não existe reta que passa pelos três simultaneamente),

Figura 8 – Relação entre pontos



Fonte: Elaboração própria

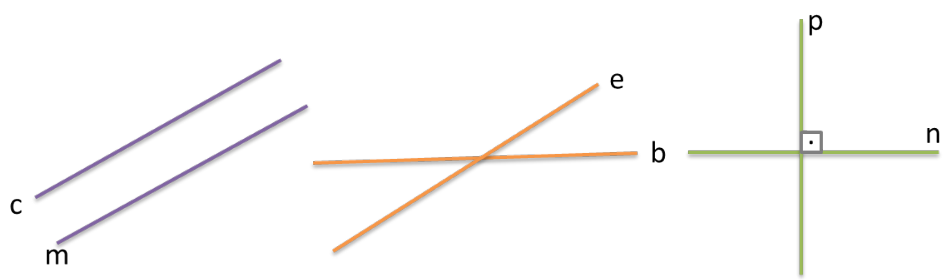
Observe Figura 9:

As retas c e m são paralelas;

As retas b e e são concorrentes oblíquas;

As retas p e n são concorrentes e perpendiculares.

Figura 9 – Relação entre duas retas distintas de um plano

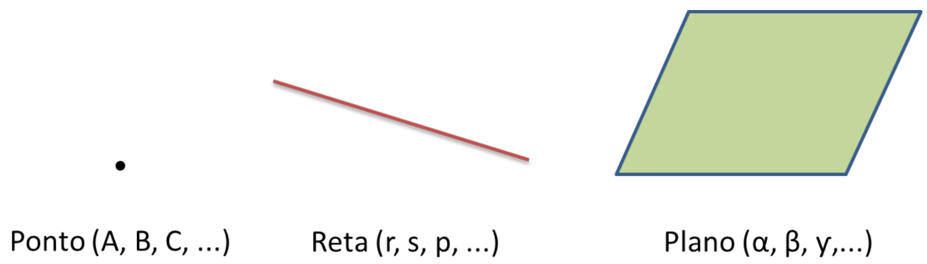


Fonte: Elaboração própria

O estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, apoiado essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos.

Observe como as figuras serão representadas:

Figura 10 – Ponto, reta e plano



Fonte: Elaboração própria

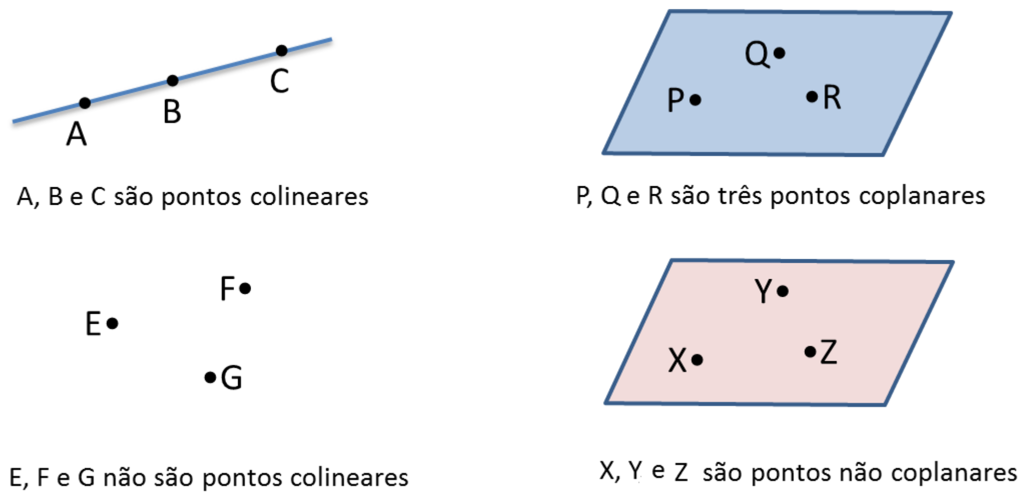
4.2.1.2 Posições relativas de pontos no espaço

Dados dois pontos ou mais no espaço:

• Eles são ou não pontos colineares (existe ou não uma reta que passa por todos eles);

• Ele são ou não pontos coplanares (existe ou não um plano que passa por todos eles)

Figura 11 – Posições relativas de pontos no espaço



Fonte: Elaboração própria

Distribui-se para os grupos a planificação de um paralelepípedo, para que os alunos pudessem resolver o problema 2 e em seguida montá-lo.

4.2.2 Problema 2

Figura 12 – Problema 2

2) Escolham um dos retângulos da planificação, nomeando os vértices como A, B, C e D sobre este retângulo e considere a aresta AB. Marquem dois pontos, E e F entre A e B. Identifiquem se A, B, E e F são colineares ou alinhados.

Observemos pontos A, B, C e D. Eles são coplanares? Ainda respondam as seguintes perguntas:

a) Numa reta, bem como fora dela, existem quantos pontos?

b) Por dois pontos distintos, passam quantas retas?

c) Num plano, bem como fora dele, existem quantos pontos?

d) Por três pontos distintos passam quantos planos?

Após responderem às perguntas, montem o paralelepípedo.

Fonte: (EJA, 2013b, p. 54-55)

Com o problema 2, recordou-se os conceitos de vértice, aresta e face de um poliedro, revisão importante para o estudo da relação de Euler, a ser vista na próxima semana. Os conceitos de coplanaridade e colinearidade foram reforçados.

Após os alunos responderem às questões propostas, foi feita a formalização dos conteúdos na lousa.

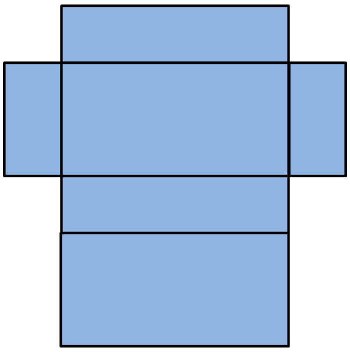
4.2.2.1 Postulados da Geometria Espacial

Propriedades essenciais relacionando as noções de ponto, reta, plano e espaço, e que podem ser usadas como postulados da Geometria Espacial.

- Numa reta e fora dela existem infinitos pontos.
- Num plano e fora dele existem infinitos pontos.
- Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- Três pontos não colineares determinam um único plano.
- Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.
- Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Então, os alunos montaram o paralelepípedo e foi aberta uma discussão sobre um objeto ser tridimensional, ou seja, com comprimento, largura e profundidade.

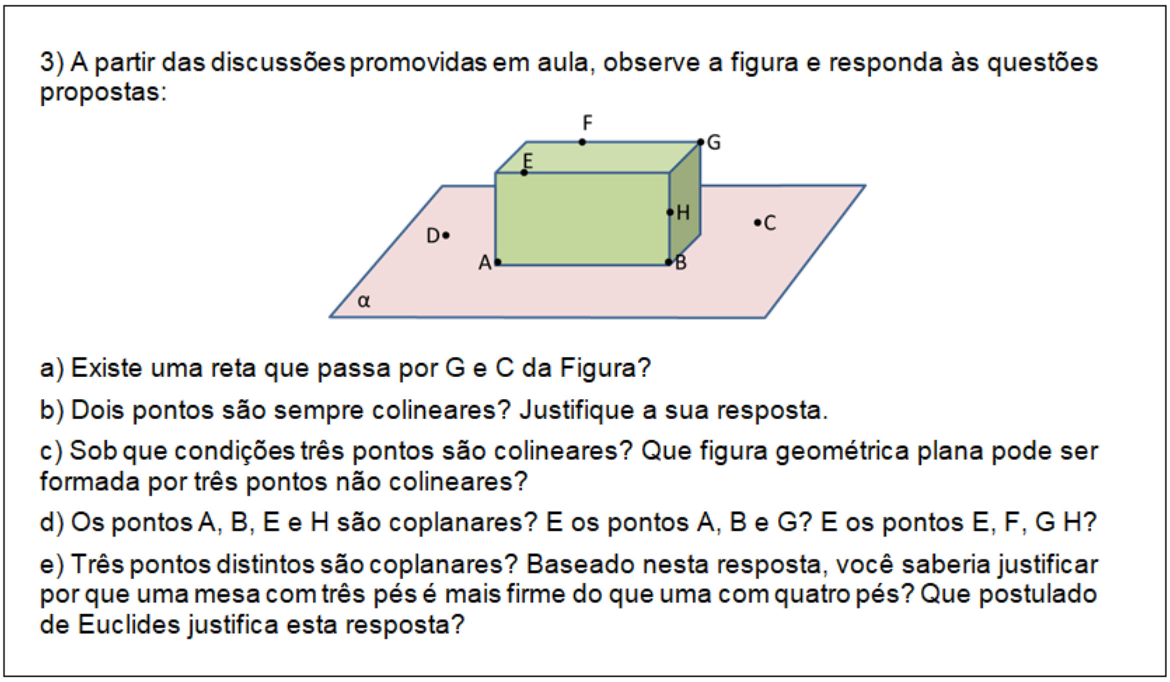
Figura 13 – Planificação do paralelepípedo



Fonte: Elaboração Própria

4.2.3 Problema 3

Figura 14 – Problema 3



3) A partir das discussões promovidas em aula, observe a figura e responda às questões propostas:

a) Existe uma reta que passa por G e C da Figura?

b) Dois pontos são sempre colineares? Justifique a sua resposta.

c) Sob que condições três pontos são colineares? Que figura geométrica plana pode ser formada por três pontos não colineares?

d) Os pontos A, B, E e H são coplanares? E os pontos A, B e G? E os pontos E, F, G H?

e) Três pontos distintos são coplanares? Baseado nesta resposta, você saberia justificar por que uma mesa com três pés é mais firme do que uma com quatro pés? Que postulado de Euclides justifica esta resposta?

Fonte: (EJA, 2013b, p. 56-57)

Esse problema gerou uma discussão interessante em torno do item e. Por que uma mesa de três pés não balança? E a resposta se encontra no seguinte postulado: “Três pontos não colineares determinam um plano”.

O fato da mesa de quatro pés balançar, deve-se ao fato de que os quatro pontos de apoio dessa mesa podem determinar quatro planos distintos, ou seja, um número maior de pernas gera um número maior de planos, já que para determinar um plano são necessários apenas três pontos não colineares. Ou seja, quanto maior o número de pernas em uma mesa, maior terá de ser a precisão na construção da mesma.

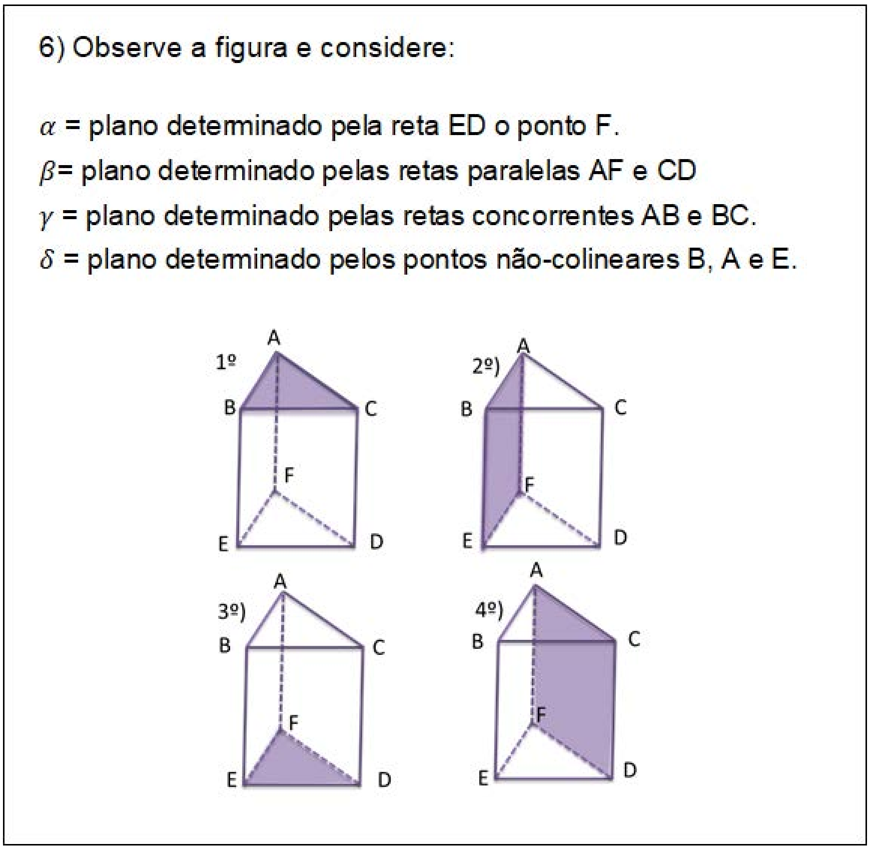
Os alunos acharam essa questão interessante por se tratar de uma situação cotidiana. Foi feita a formalização do conteúdo na lousa.

4.2.3.1 Determinação de um plano por três pontos

Três pontos não colineares são sempre coplanares e sobre eles passa um único plano. Diz-se então que três pontos não colineares A, B e C determinam um plano α (A, B e C).

4.2.4 Problema 6

Figura 15 – Problema 6


6) Observe a figura e considere:

α = plano determinado pela reta ED o ponto F.
β= plano determinado pelas retas paralelas AF e CD
γ = plano determinado pelas retas concorrentes AB e BC.
δ = plano determinado pelos pontos não-colineares B, A e E.

Fonte: (DANTE, 2009, p.346)

Distribuiu-se para os grupos o problema 6. Os alunos leram e logo encontraram alguma dificuldade, por se tratar de um conhecimento novo a ser construído. Mas com o auxílio da pesquisadora, logo entenderam como um plano pode ser determinado e fizeram a associação correta. Depois, a pesquisadora fez a formalização do conteúdo na lousa.

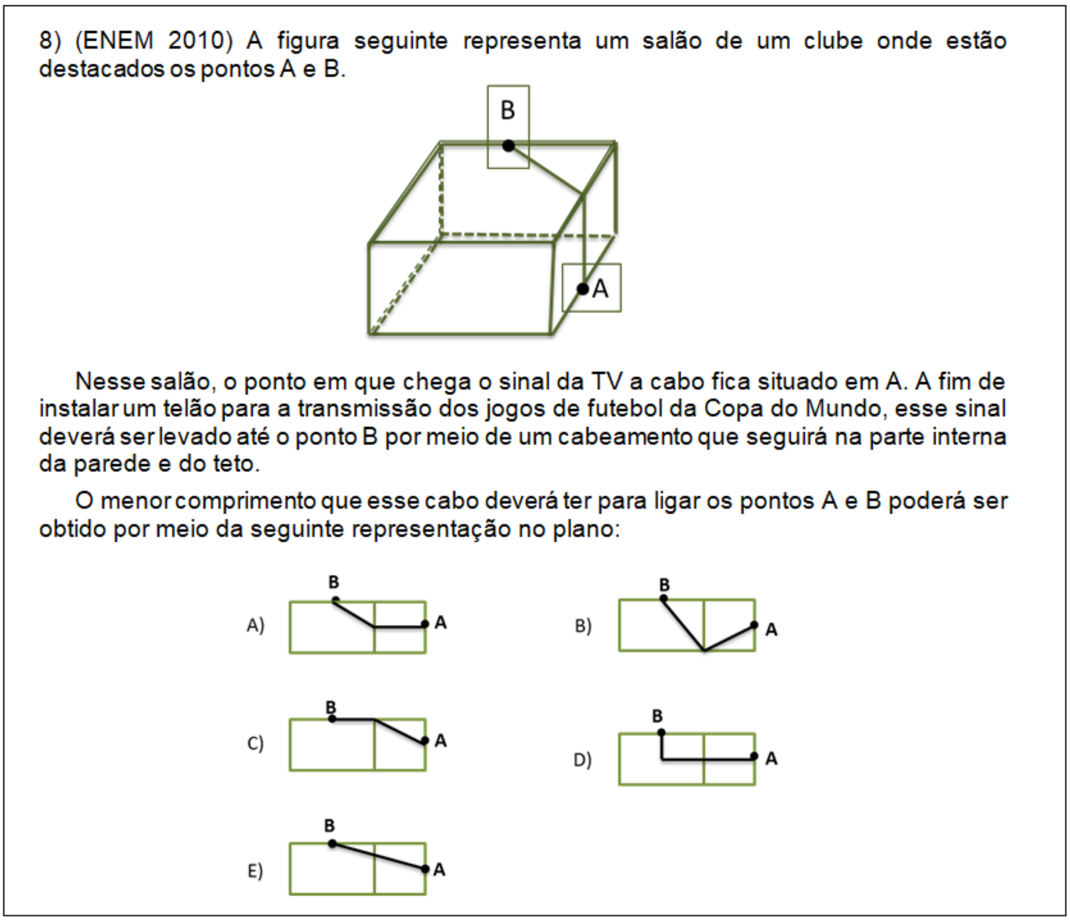
4.2.4.1 Determinação de um plano

Um plano fica determinado:

- Por meio de três pontos não colineares.
- Por meio de uma reta e um ponto fora dela.
- Por meio de duas retas concorrentes.
- Por meio de duas retas paralelas e distintas.

4.2.5 Problema 8

Figura 16 – Problema 8



8) (ENEM 2010) A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.

Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

Fonte: (ENEM, 2010)

Embora esse problema pareça simples, os alunos apresentaram dúvidas. Os grupos ficaram divididos entre as respostas A, B e C.

Explicou-se para os alunos qual é a menor distância entre dois pontos. Os alunos chegaram a conclusão de que o menor caminho está representado no item E. No caso acima, o segmento AB é o caminho procurado. Foi feita a formalização na lousa.

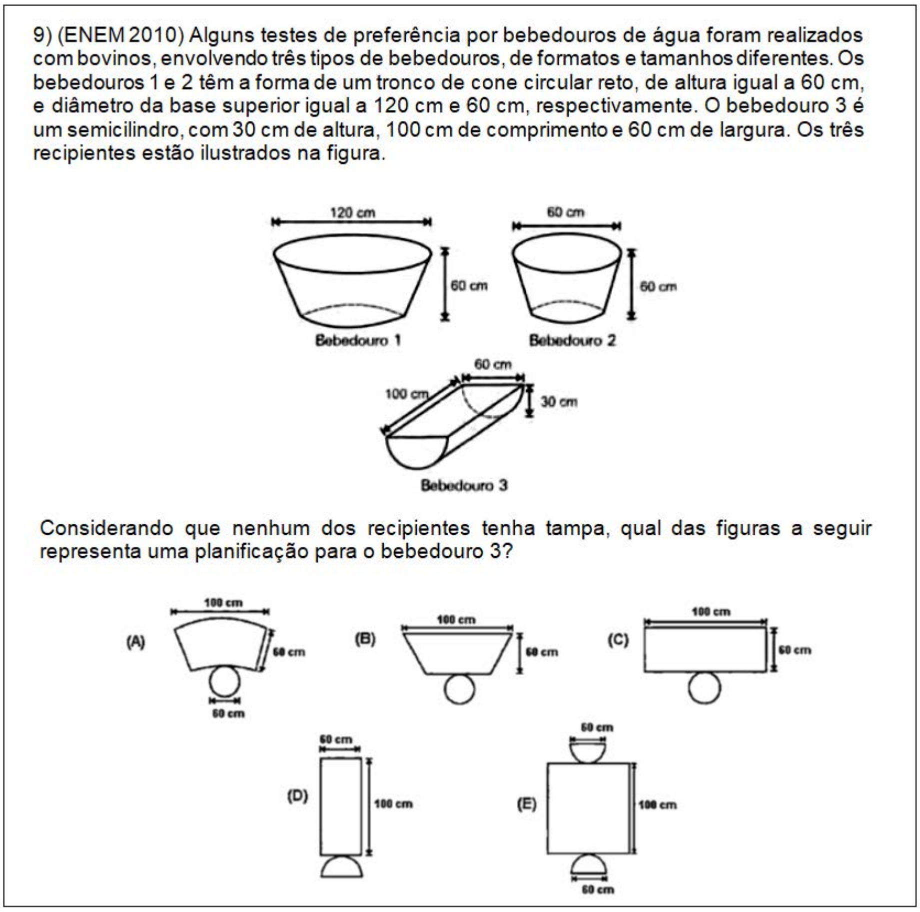
4.2.5.1 Distância entre dois pontos

O menor comprimento a ser percorrido entre dois pontos distintos quaisquer é exatamente a distância entre eles definida pelo segmento de reta que os une.

4.2.6 Problema 9

O problema tem a finalidade de inserir uma discussão sobre o conceito de dimensão e desenvolver algumas noções básicas relacionadas à noção de tridimensionalidade e planificação de sólidos geométricos.

Figura 17 – Problema 9


9) (ENEM 2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

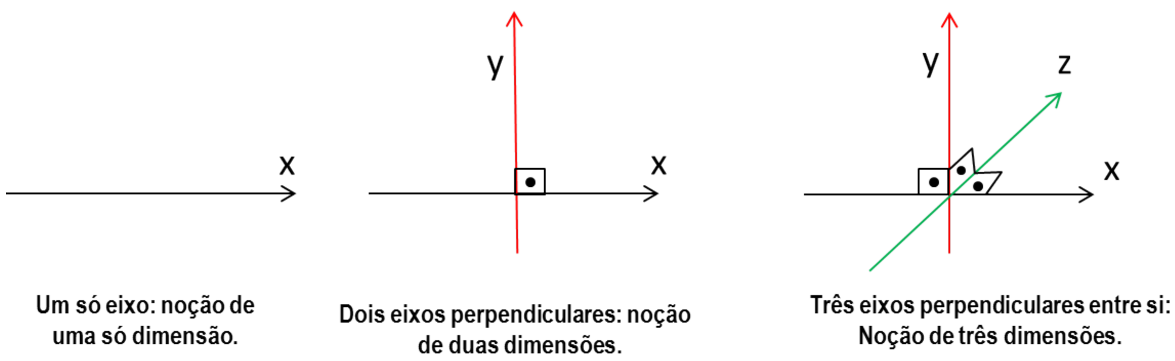
Fonte: (ENEM, 2010)

Os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade na solução desse problema. Todos fizeram sem ajuda, compreenderam que a maioria dos objetos conhecidos tem três dimensões, por exemplo, comprimento, altura e largura e que um objeto cuja forma tem três dimensões é chamado de tridimensional. Foi feita a seguinte formalização na lousa.

4.2.6.1 Pensando as dimensões

Fazendo uso dos eixos coordenados, tem-se a noção de uma só dimensão com apenas um eixo. Para que se tenha noção de um plano em duas dimensões, basta colocar outro eixo perpendicular ao primeiro. Já para o espaço em três dimensões é suficiente colocar um terceiro eixo, perpendicular aos dois primeiros.

Figura 18 – Eixos coordenados



Fonte: Elaboração própria

No final da aula, pediu-se aos alunos para que providenciassem para a próxima semana objetos domésticos ou de sucata.

4.3 2ª semana (aulas 6-10) – Introdução à Geometria Espacial – parte II

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Compreender a projeção ortogonal de um ponto, reta, segmento de reta e de uma figura sobre um plano.
- Identificar poliedros e não poliedros, identificando os diferentes tipos e relacionando-os com suas planificações.
- Identificar os elementos de um poliedro;
- Reconhecer os poliedros de Platão;
- Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler);

- Avaliar o desempenho dos alunos ao longo da resolução dos problemas.

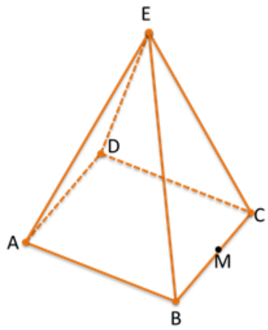
Como o livro didático adotado pela escola para essa turma aborda o conteúdo: “projeção ortogonal” e por se tratar um assunto também explorado nas avaliações do ENEM, os problemas 10 e 11 foram selecionados como problemas geradores de conceitos como projeção ortogonal de um ponto, uma reta, um segmento de reta e de uma figura plana sobre um plano. Também a projeção de outros objetos.

4.3.1 Problema 10

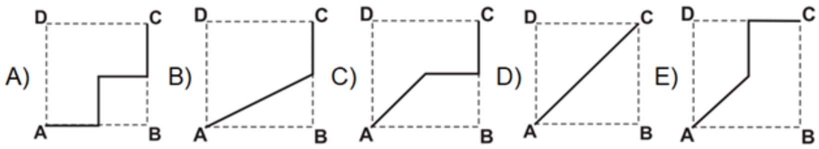
Figura 19 – Problema 10

10) (ENEM 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.



O desenho que Bruno deve fazer é:

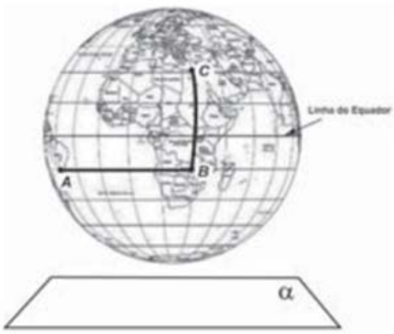


Fonte: (ENEM, 2012)

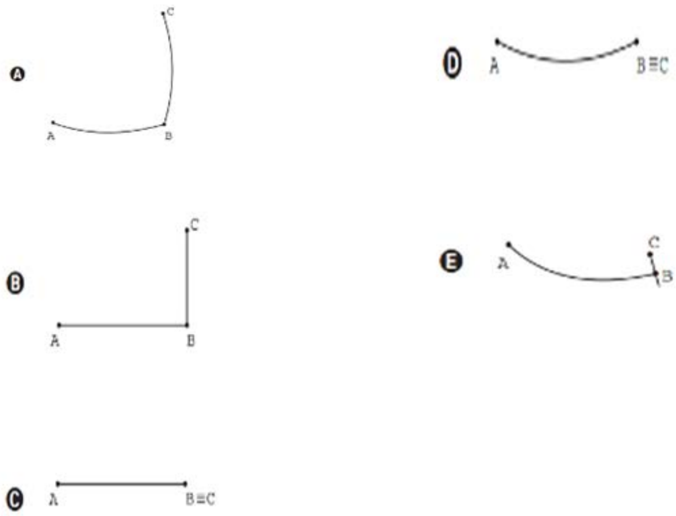
Os alunos sentiram bastante dificuldade para solucionar esse problema. Apenas um grupo conseguiu resolver sem nenhuma ajuda. Todos os outros grupos necessitaram de explicação. Optou-se por resolvê-lo na lousa juntamente com os alunos. O tetraedro foi desenhado na lousa e o caminho descrito por João foi percorrido ao mesmo tempo que a sua projeção foi desenhada. Os alunos conseguiram visualizar melhor e chegaram a solução correta, no caso, a letra C.

Figura 20 – Problema 11

11) (Enem-2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por:



Fonte: (ENEM, 2016)

4.3.2 Problema 11

Nenhum grupo conseguiu resolver esse problema sem a ajuda da pesquisadora. Os grupos ficaram divididos entre os itens A, B ou C. A maioria dos grupos achou que a resposta correta era o item A.

Para que os alunos pudessem visualizar a projeção, foi necessário lançar mão de uma esfera. A escola possui sólidos geométricos de acrílico. Esses sólidos foram utilizados durante essa semana para que os alunos pudessem completar a tabela do problema 12. De posse desses sólidos, pode-se utilizar a esfera para representar o globo terrestre e traçar com caneta de quadro branco os pontos A, B e C e também o caminho sugerido no problema para sair do ponto A e chegar ao ponto C.

Explicou-se para os alunos que a projeção ortogonal de um objeto seria como a sua sombra no horário de meio dia. Para ilustrar a situação, uma lanterna de celular foi utilizada. Com os diferentes sólidos geométricos, as sombras foram observadas na mesa ao serem iluminados de cima para baixo pela lanterna, como se fosse o sol no horário de meio dia.

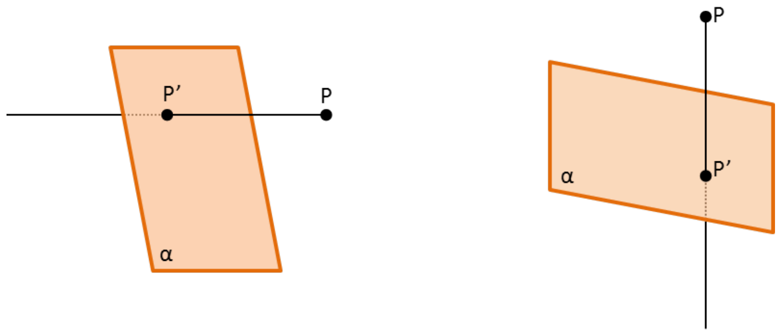
Os alunos conseguiram entender e resolveram a questão. Foi feita a formalização do conteúdo na lousa.

4.3.2.1 Projeção ortogonal

• De um ponto sobre um plano

Traçamos a reta perpendicular ao plano α pelo ponto P e encontramos P'. O ponto P' é chamado projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α.

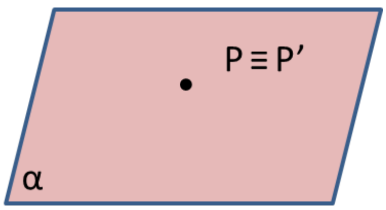
Figura 21 – Projeção de um ponto sobre um plano



Fonte: Elaboração própria

Observação: Quando P $\in \alpha$, os pontos P e P' coincidem (P $\equiv$ P')

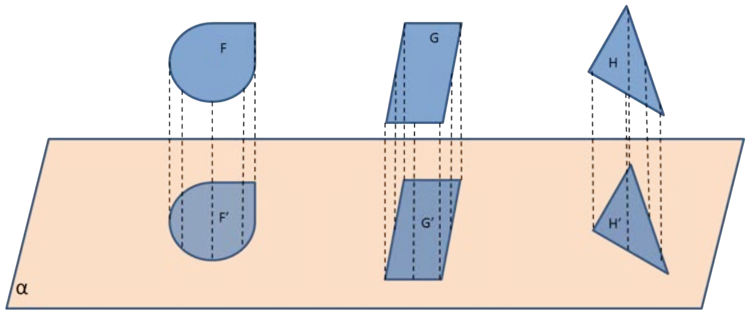
Figura 22 – Ponto que pertence ao plano



Fonte: Elaboração própria

• De uma figura plana qualquer sobre um plano

Figura 23 – Projeção de uma figura plana qualquer sobre um plano



Fonte: Elaboração própria

As figuras F', G' e H' são as projeções ortogonais das figuras F, G e H, respectivamente, sobre o plano α. Elas são formadas pelas projeções ortogonais de todos os pontos das figuras F, G e H sobre α.

4.3.3 Problema 12

Para preencher a tabela sugerida nesse problema, os alunos foram previamente avisados que levassem objetos domésticos ou de sucatas. Com esse problema, a pesquisadora tinha por objetivo trabalhar conceitos como: poliedros e corpos redondos, poliedros convexos e não convexos, relação de Euler.

Figura 24 – Problema 12

Reconhecendo sólidos geométricos em objetos do cotidiano

Manuseiem os materiais e observem suas características. Dividam o material em dois grupos: poliedros e não poliedros. Em seguida, separem os poliedros em convexos e não convexos.

Agora, realizem as questões propostas.

a) Quais dos objetos analisados representam poliedros?

b) Quais dos objetos que foram classificados como poliedros são convexos e quais são não convexos?

c) Com somente os objetos que foram classificados como poliedros convexos, preencham a seguinte tabela.

Objeto	Nº de vértices (V)	Nº de faces (F)	Nº arestas (A)	V + F - A

d) Você consegue observar alguma relação entre os números de vértices, faces e arestas dos objetos selecionados no item c?

Fonte: (EJA, 2013b, p.62-63)

O desenvolvimento desse problema foi muito bom e os alunos se mostraram bem interessados.

Os alunos levaram objetos do cotidiano com formas variadas, como mostra a Figura 25. A escola também possui sólidos geométricos de acrílico. Primeiramente, foi proposto aos alunos a separação dos materiais em poliedros e não poliedros. Depois os poliedros foram classificados em convexos e não convexos, para que no final da atividade, os alunos pudessem experimentar a validade da relação de Euler.

Os materiais foram divididos entre os grupos, como pode ser observado na Figura 26. Os alunos observaram as características dos objetos, contaram quantos vértices, faces e arestas cada um deles possuía e preencheram a tabela. Eles perceberam que a resposta da última coluna sempre era igual a 2. Com isso, eles chegaram à relação de Euler de uma forma fácil e concreta, bem diferente de quando já se dá para o aluno a fórmula pronta. Eles observaram que a relação se repetia em todos os poliedros convexos, como relatado por uma aluna na Figura 27.

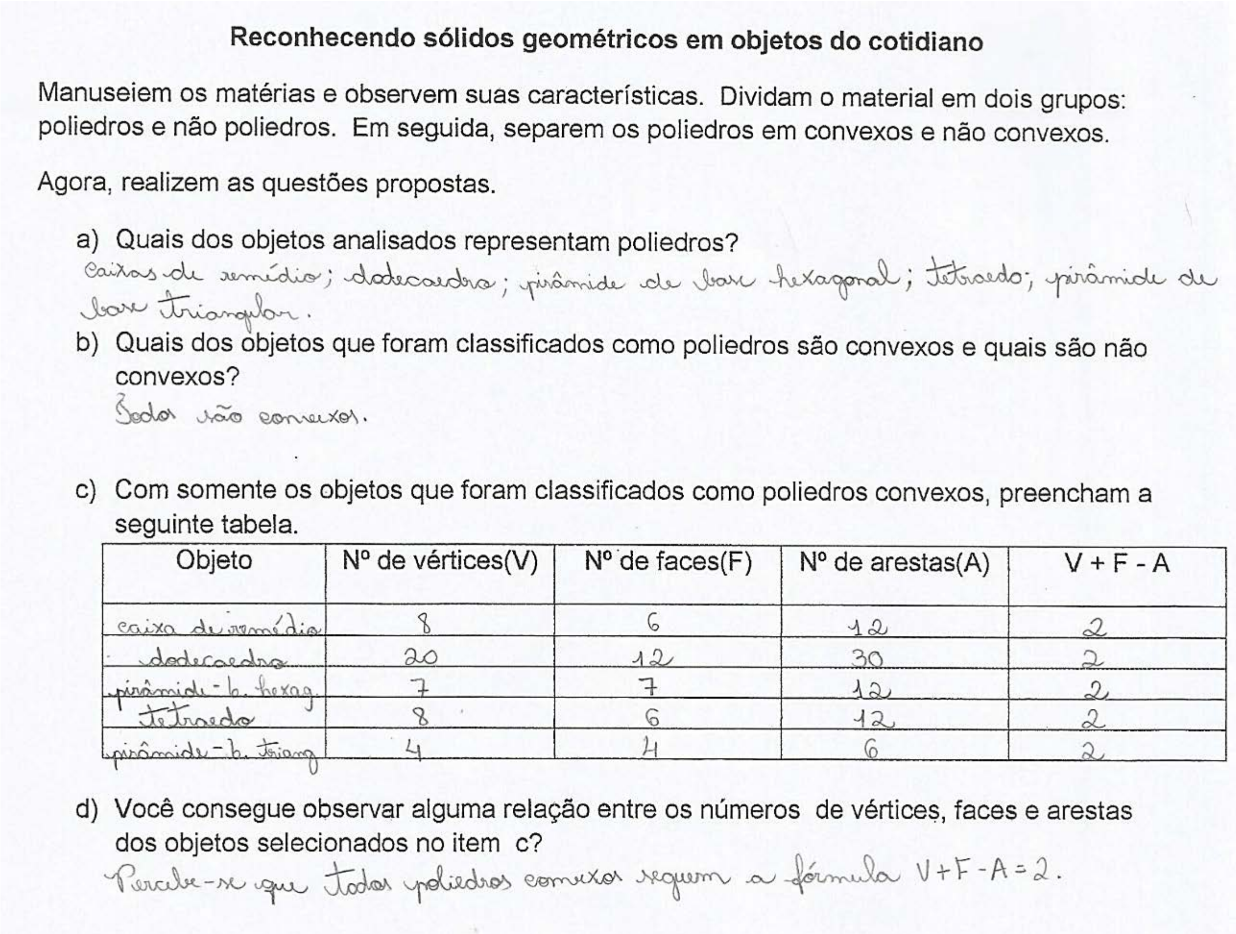
Figura 25 – Objetos levados pelos alunos para resolver o problema 12.

Fonte: Elaboração própria

Figura 26 – Um dos grupos fazendo o problema 12.

Fonte:Elaboração própria

Figura 27 – Resposta de uma aluna à questão 12.



Reconhecendo sólidos geométricos em objetos do cotidiano

Manuseiem os matérias e observem suas características. Dividam o material em dois grupos: poliedros e não poliedros. Em seguida, separem os poliedros em convexos e não convexos.

Agora, realizem as questões propostas.

a) Quais dos objetos analisados representam poliedros?
Caixas de remédio; dodecaedro; pirâmide de base hexagonal; tetraedo; pirâmide de base triangular.

b) Quais dos objetos que foram classificados como poliedros são convexos e quais são não convexos?
Todos são convexos.

c) Com somente os objetos que foram classificados como poliedros convexos, preencham a seguinte tabela.

Objeto	Nº de vértices(V)	Nº de faces(F)	Nº de arestas(A)	V + F - A
caixa de remédio	8	6	12	2
dodecaedro	20	12	30	2
pirâmide - b. hexag.	7	7	12	2
tetraedo	8	6	12	2
pirâmide - b. triang.	4	4	6	2

d) Você consegue observar alguma relação entre os números de vértices, faces e arestas dos objetos selecionados no item c?
Percebe-se que todos poliedros convexos seguem a fórmula V+F-A=2.

Fonte: Elaboração própria

Por fim, foi feita a formalização na lousa.

4.3.3.1 Poliedros

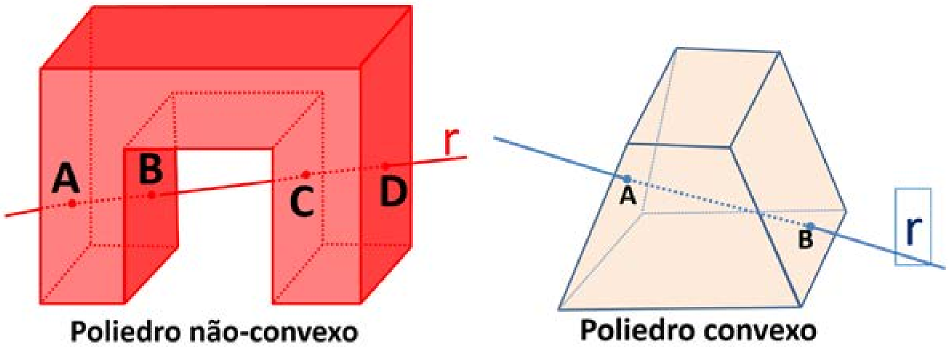
Cada poliedro é formado pela união de um número finito de polígonos chamados faces e a região do espaço limitada por eles. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um outro único polígono. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de um polígono comum a exatamente duas faces é chamado aresta do poliedro. E cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

4.3.3.2 Poliedro convexo e poliedro não convexo

Pode-se dizer que um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, como mostra a Figura 28

Figura 28 – Poliedros



Fonte: Elaboração própria

4.3.3.3 Relação de Euler

Se um poliedro possui V vértices, A arestas e F faces, então: **V + F = A + 2.**

4.3.4 Problema 18

Figura 29 – Problema 18

Montando sólidos de Platão

De posse das planificações dos Sólidos de Platão, recortem-nas. Agora montem os sólidos geométricos, observando as suas características.

Fonte: Elaboração Própria

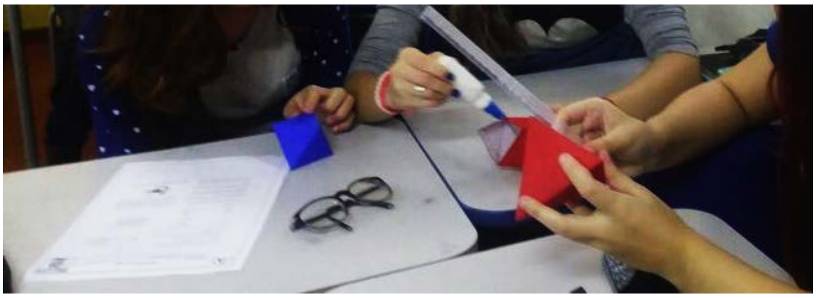
Por se tratar de um assunto que não desperta o interesse dos alunos, a pesquisadora optou por trabalhar com a construção dos Sólidos de Platão. Foi distribuído para cada grupo a planificação de três sólidos de Platão para que pudessem recortar e montar em cartolinas coloridas.

Os grupos mostraram interesse pela atividade e participaram ativamente (Figura 30 e Figura 31). Enquanto eles recortavam e montavam os sólidos, a pesquisadora pediu que fossem observando suas características. Após todos os grupos terem montados seus sólidos (Figura 32), eles trocaram os sólidos entre eles para que todos pudessem observar.

Figura 30 – Aluna recortando Sólido de Platão para ser construído.

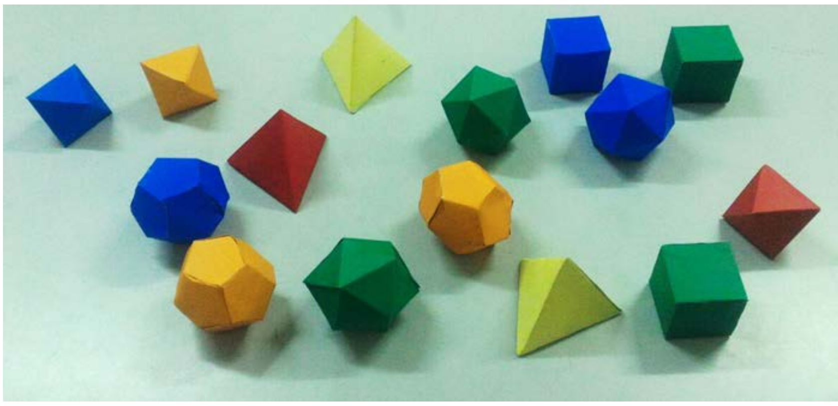
Fonte: Elaboração própria

Figura 31 – Grupo montando Sólidos de Platão.



Fonte: Elaboração própria

Figura 32 – Sólidos de Platão construídos pelos alunos.



Fonte: Elaboração própria

Depois da observação, foi feita a fez a formalização na lousa.

4.3.4.1 Poliedros de Platão

Um poliedro é denominado poliedro de Platão se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:

- Todas as faces têm o mesmo número de arestas.
- Em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.
- Vale a relação de Euler: V + F = A + 2.

Dessa forma, todos os poliedros regulares convexos são poliedros de Platão.

E, da mesma maneira que é possível demonstrar que só existem cinco poliedros regulares convexos, pode-se demonstrar que só existem cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

4.4 3ª semana (aulas 11-15) – Cilindros

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Planificar o cilindro.
- Identificar as formas geométricas que constituem o cilindro.
- Calcular a área das formas geométricas planas que constituem o cilindro.
- Definir a área lateral e total do cilindro.
- Calcular o volume do cilindro.
- Avaliar a proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos.
- Analisar informações envolvendo conhecimentos geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Nessa semana começou-se o estudo dos sólidos geométricos, suas áreas e volumes. Acompanhou-se a ordem de conteúdos sugerida pelo currículo mínimo do Estado do Rio de Janeiro, iniciando com o estudo do cilindro.

Antes, foi feita uma revisão sobre a área do retângulo e do círculo e também sobre o comprimento da circunferência. Assuntos relevantes para o estudo da área e volume do cilindro.

4.4.1 Problema 19

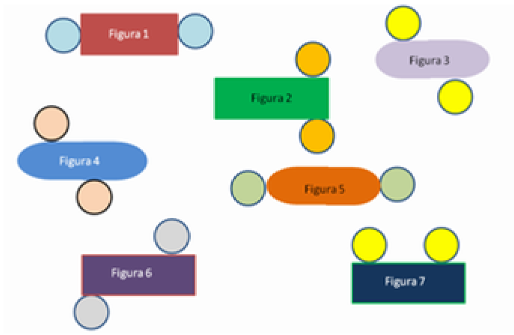
Figura 33 – Problema 19

De posse do cilindro fornecido pelo professor, observem-no e faça o que se pede.

1- Faça um esboço do cilindro.

2- Escreva as características do cilindro.

3- Entre os moldes a seguir, quais podem ser usados para se construir um cilindro?



a) Resposta:

b) Por que você escolheu esse molde?

4- Façam um esboço dos moldes que representam a planificação de um cilindro.

5- Observando os moldes que deram certo para a construção do cilindro, podemos observar que:

a) A superfície lateral é formada por um polígono chamado de ______________________

b) As bases do cilindro são formadas por ____

6- Estando com o cilindro fornecido pelo professor, já construído, colem barbante no perímetro (contorno) do círculo que forma a base e também na superfície lateral de modo a destacar a altura do cilindro.

7- Recortem o cilindro do lado do barbante de forma a planificá-lo.

8- Agora observem o retângulo da planificação.

a) Qual a medida do seu comprimento?

b) Qual a medida de sua altura?

9- Logo, como é possível calcular a área lateral desse cilindro?

10- Observem novamente a planificação do cilindro. Qual figura forma as suas bases?

11- Ao planificarmos o cilindro, obtivemos um retângulo e dois círculos. Logo, o que você faria para calcular a área total do cilindro?

Fonte: (MENDES, 2011)

O problema 19 foi bastante interessante. Todos participaram de forma ativa. Embora o problema pareça simples, os alunos apresentaram dificuldades em responder às suas perguntas.

Para responder ao item 2, de posse dos cilindros já confeccionados, como mostra a Figura 34, foram feitas as seguintes perguntas para auxiliar os alunos:

- O cilindro é uma figura plana ou um sólido geométrico?
- Ele é um poliedro ou um corpo redondo?
- Quantas bases ele possui? Os alunos foram registrando suas respostas.

O item 3 chamou a atenção, pois parecia muito simples, mas nenhum grupo conseguiu identificar os dois moldes corretos. Alguns identificaram a figura 1 como sendo a correta, outros a figura 3 e 6, mas nenhum chegou à conclusão de que os moldes corretos eram as figuras 2 e 6. Foi uma surpresa, pois pensava-se que os alunos não teriam dificuldades em identificá-los.

Então, sugeriu-se que os grupos fizessem primeiro o item 6 e 7, para depois responderem ao item 3.

Os alunos colaram barbante no contorno dos círculos que formam as bases do cilindro e também no contorno da base do retângulo que é a superfície lateral do cilindro, como pode ser observado na Figura 35. Também identificaram a altura do cilindro. Depois eles recortaram (Figura 36) e planificaram o cilindro (Figura 37). Visualizando sua planificação, eles puderam responder ao item 3 com clareza, observaram que suas bases são formadas por dois círculos e que sua superfície lateral é um retângulo. E ainda concluíram que o comprimento do retângulo que forma a superfície lateral do cilindro é, na verdade, o comprimento da circunferência que contorna o círculo da base. Também concluíram que a altura do retângulo é a altura do próprio cilindro.

Com todas essas informações, os alunos chegaram à fórmula da área lateral de um cilindro, à fórmula da área da base, e por fim, à sua área total. As conclusões foram registradas (Figura 38 e Figura 39).

Foi feita a formalização do conteúdo na lousa:

4.4.1.1 Área total do cilindro

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot R^2$$

Em que, R é o raio da circunferência e h é a altura do cilindro.

Figura 34 – Cilindros confeccionados pela pesquisadora.

Fonte: Elaboração própria

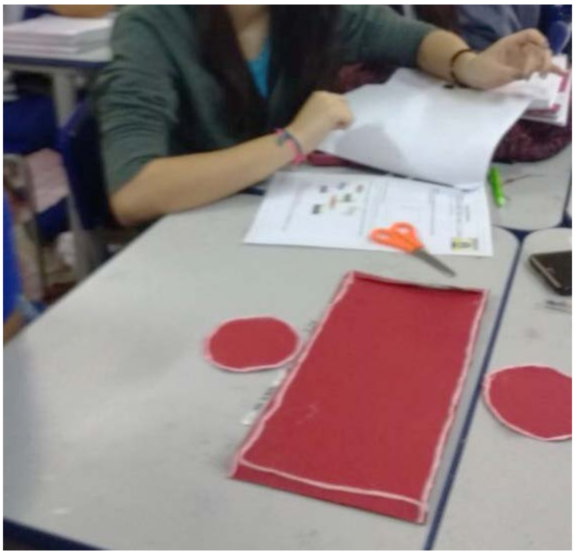
Figura 35 – Grupo colando barbante no contorno do círculo da base do cilindro.

Fonte: Elaboração própria

Figura 36 – Aluno recortando um dos cilindros.

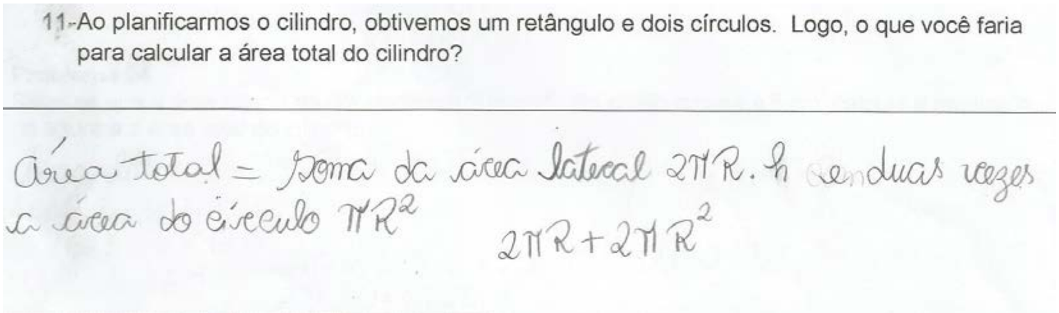
Fonte: Elaboração própria

Figura 37 – Planificação do cilindro confeccionado por um dos grupos.



Fonte: Elaboração própria

Figura 38 – Conclusão do grupo 1.



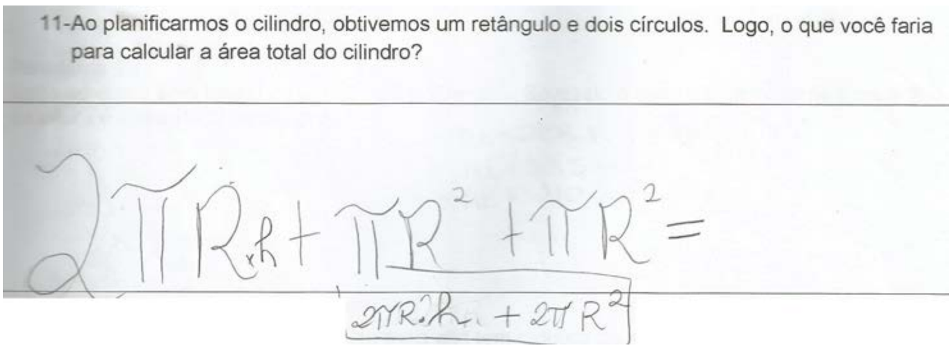
11-Ao planificarmos o cilindro, obtivemos um retângulo e dois círculos. Logo, o que você faria para calcular a área total do cilindro?

área total = soma da área lateral $2\pi R.h$ e duas vezes a área do círculo πR^2

$2\pi R + 2\pi R^2$

Fonte: Elaboração própria

Figura 39 – Conclusão do grupo 2.



11-Ao planificarmos o cilindro, obtivemos um retângulo e dois círculos. Logo, o que você faria para calcular a área total do cilindro?

$2\pi R_{\cdot}h + \pi R^2 + \pi R^2 =$

$\boxed{2\pi R.h + 2\pi R^2}$

Fonte: Elaboração própria

4.4.2 Problema 26

Figura 40 – Problema 26

26) (ENEM 2001) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

a) 20 ml. b) 24 ml. c) 100 ml. d) 120 ml. e) 600 ml.

Fonte: (ENEM, 2011)

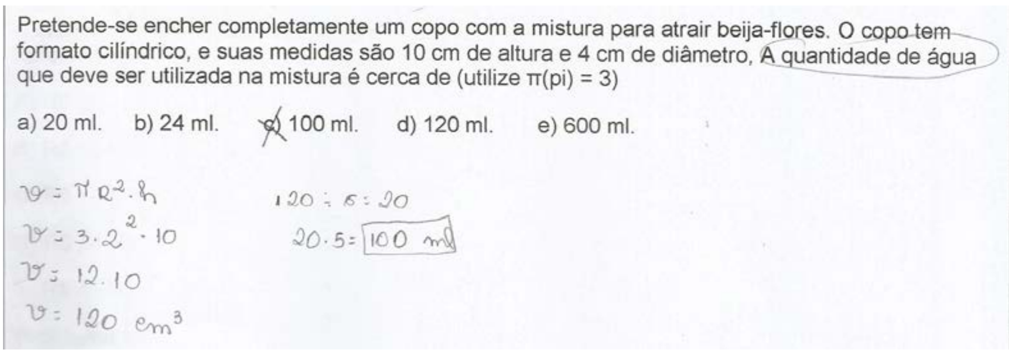
Com o problema 26, construiu-se o conceito de volume do cilindro. Discutiu-se a diferença entre área total e volume, pois muitos confundem essas definições na hora da interpretação do problema. Explicou-se que o volume está relacionado com a capacidade. Os grupos foram orientados na realização desse problema e depois foi feita a formalização do conteúdo na lousa. Os alunos não apresentaram dificuldades na resolução deste problema, registrado por um dos grupos na Figura 41.

4.4.2.1 Volume do cilindro

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Em que, r é o raio do círculo da base e h é a altura do cilindro.

Figura 41 – Resposta de um dos grupos referente ao problema 26


Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize π(pi) = 3)

a) 20 ml. b) 24 ml. c) 100 ml. d) 120 ml. e) 600 ml.

$v = \pi R^2 . h$
$v = 3 . 2^2 . 10$
$v = 12 . 10$
$v = 120 \ cm^3$

$120 \div 6 = 20$
$20 . 5 = \boxed{100 \ ml}$

Fonte: Elaboração própria

4.4.3 Problema 32

Figura 42 – Problema 32

Embalagens metálicas, custos de produção e a matemática.

Na indústria de alimentos existem diversos tipos de embalagens para acondicionar os produtos e preservar as suas características por mais tempo. Entre elas, existem as latas metálicas e cilíndricas.

A superfície interna das latas metálicas é revestida com um verniz especial que evita o contato direto do alimento com o metal.

A matéria-prima para a fabricação de latas metálicas são as folhas de flandres (enroladas em grandes bobinas). As folhas de flandres podem ser de ferro ou aço, laminadas e normalmente revestidas com estanho.

Imagine que uma empresa, com o objetivo de reduzir custos, estuda as possibilidades de produzir outras embalagens cilíndricas e metálicas, que acondicionem a mesma quantidade de leite em pó, porem com custo de produção inferior ao custo de produção das atuais embalagens. Uma dessas embalagens tem as seguintes dimensões: altura igual a 11 cm e diâmetro igual a 10 cm.

Vamos resolver o problema levantado pela empresa, seguindo os seguintes passos: (Use $\pi = 3,14$)

- Calcule o volume da embalagem atual.
- Calcule a área total de sua superfície.
- Estabeleça uma relação entre o diâmetro (d) e a altura (h).

A partir de agora, fica facilitada a tarefa de conhecer as dimensões (d e h) de outros cilindros que satisfaçam a relação encontrada no item anterior.

d (cm)	h (cm)	A_t (cm^2)
10	11	502,40
8		
5		
15		
12		

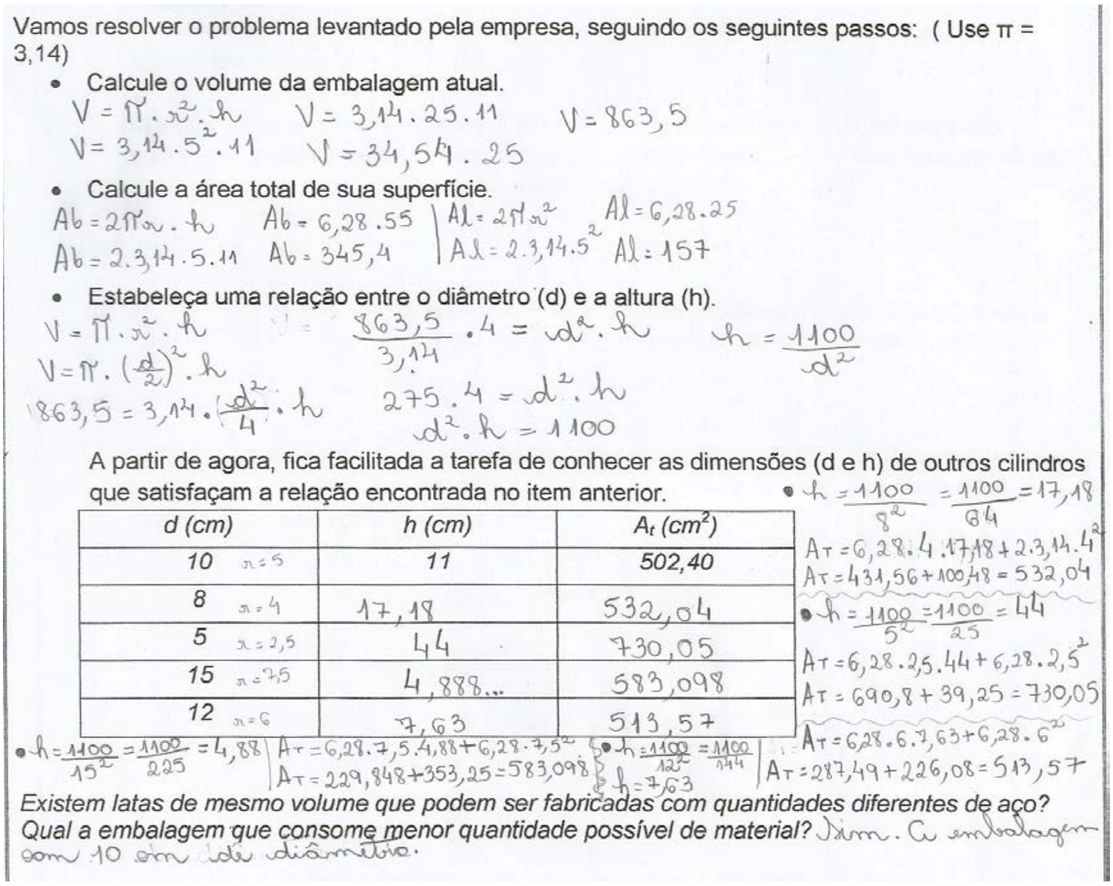
Existem latas de mesmo volume que podem ser fabricadas com quantidades diferentes de aço?

Qual a embalagem que consome menor quantidade possível de material, entre as que tem dimensões acima?

Fonte: (IEZZI et al., 2013)

No primeiro momento, os alunos ficaram assustados com o problema 32 e começaram a pensar em formas de resolvê-lo. Com o auxílio da pesquisadora, os alunos chegaram à conclusão de que qualquer outra embalagem deveria possuir o mesmo volume da atual, isto é, o volume deveria se manter fixo no valor de 863,50 cm^3. As discussões foram conduzidas no grupo, para que estes conseguissem resolver o problema e completar a tabela. O grupo 3 fez todas as etapas do problema de maneira correta, como pode ser evidenciado na Figura 43.

Figura 43 – Resposta do grupo 3 ao problema 32.



Vamos resolver o problema levantado pela empresa, seguindo os seguintes passos: (Use π = 3,14)

- Calcule o volume da embalagem atual.

$V = \pi . r^2 . h$ $\quad V = 3,14 . 25 . 11$ $\quad V = 863,5$

$V = 3,14 . 5^2 . 11$ $\quad V = 34,54 . 25$

- Calcule a área total de sua superfície.

$Ab = 2\pi r . h$ $\quad Ab = 6,28 . 55$ | $Al = 2\pi r^2$ $\quad Al = 6,28 . 25$

$Ab = 2 . 3,14 . 5 . 11$ $\quad Ab = 345,4$ | $Al = 2 . 3,14 . 5^2$ $\quad Al = 157$

- Estabeleça uma relação entre o diâmetro (d) e a altura (h).

$V = \pi . r^2 . h$ $\quad \frac{863,5}{3,14} . 4 = d^2 . h$ $\quad h = \frac{1100}{d^2}$

$V = \pi . \left(\frac{d}{2}\right)^2 . h$

$863,5 = 3,14 . \frac{d^2}{4} . h$ $\quad 275 . 4 = d^2 . h$

$d^2 . h = 1100$

A partir de agora, fica facilitada a tarefa de conhecer as dimensões (d e h) de outros cilindros que satisfaçam a relação encontrada no item anterior.

d (cm)	h (cm)	A_t (cm^2)
10 $r = 5$	11	502,40
8 $r = 4$	17,18	532,04
5 $r = 2,5$	44	730,05
15 $r = 7,5$	4,888...	583,098
12 $r = 6$	7,63	513,57

- $h = \frac{1100}{8^2} = \frac{1100}{64} = 17,18$

$A_T = 6,28 . 4 . 17,18 + 2 . 3,14 . 4^2$

$A_T = 431,56 + 100,48 = 532,04$

- $h = \frac{1100}{5^2} = \frac{1100}{25} = 44$

$A_T = 6,28 . 2,5 . 44 + 6,28 . 2,5^2$

$A_T = 690,8 + 39,25 = 730,05$

$A_T = 6,28 . 6 . 7,63 + 6,28 . 6^2$

$A_T = 287,49 + 226,08 = 513,57$

- $h = \frac{1100}{15^2} = \frac{1100}{225} = 4,88$ | $A_T = 6,28 . 7,5 . 4,88 + 6,28 . 7,5^2$ | $A_T = 229,848 + 353,25 = 583,098$

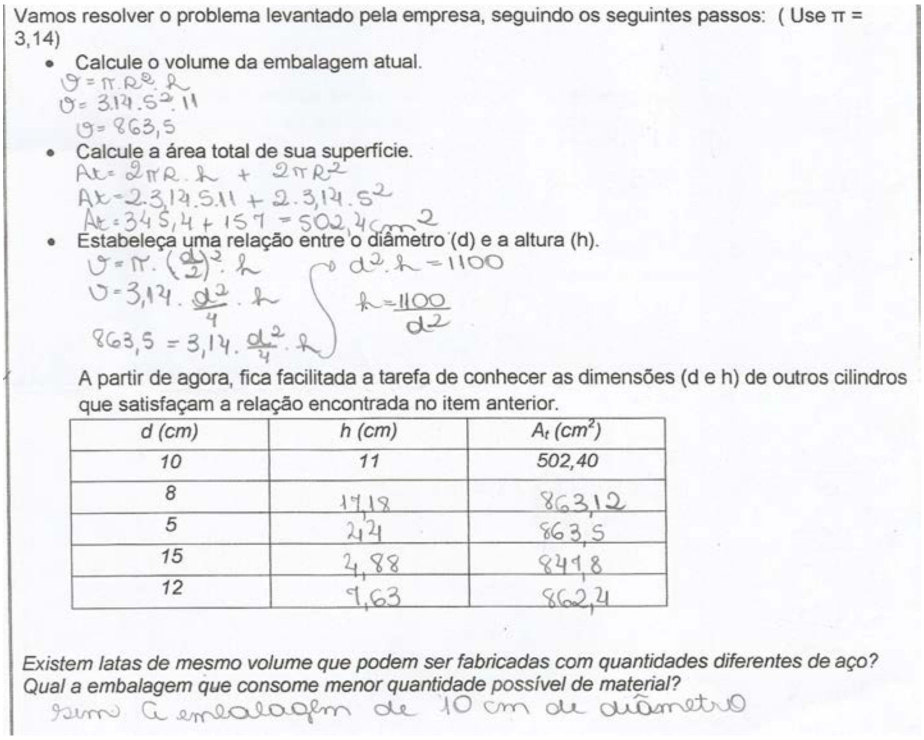
- $h = \frac{1100}{12^2} = \frac{1100}{144}$ $\quad h = 7,63$

Existem latas de mesmo volume que podem ser fabricadas com quantidades diferentes de aço? Qual a embalagem que consome menor quantidade possível de material? Sim. A embalagem com 10 cm de diâmetro.

Fonte: Elaboração própria

O grupo 2 fez parte do problema de forma correta, mas preencheu a tabela de maneira errada, pois ao invés de calcular a área total da embalagem, calculou o volume, mostrando que os alunos confundem os dois conceitos, como pode ser observado na Figura 44.

Figura 44 – Resposta do grupo 2 ao problema 32.



Vamos resolver o problema levantado pela empresa, seguindo os seguintes passos: (Use π = 3,14)

- Calcule o volume da embalagem atual.

  $\vartheta = \pi . R^2 . h$
  $\vartheta = 3,14 . 5^2 . 11$
  $\vartheta = 863,5$

- Calcule a área total de sua superfície.

  $At = 2\pi R . h + 2\pi R^2$
  $At = 2.3,14.5.11 + 2.3,14.5^2$
  $At = 345,4 + 157 = 502,4 cm^2$

- Estabeleça uma relação entre o diâmetro (d) e a altura (h).

  $\vartheta = \pi . \left(\frac{d}{2}\right)^2 . h$
  $\vartheta = 3,14 . \frac{d^2}{4} . h$
  $863,5 = 3,14 . \frac{d^2}{4} . h$

  $d^2 . h = 1100$
  $h = \frac{1100}{d^2}$

A partir de agora, fica facilitada a tarefa de conhecer as dimensões (d e h) de outros cilindros que satisfaçam a relação encontrada no item anterior.

d (cm)	*h (cm)*	A_t *(cm²)*
10	11	502,40
8	17,18	863,12
5	44	863,5
15	4,88	847,8
12	7,63	862,4

Existem latas de mesmo volume que podem ser fabricadas com quantidades diferentes de aço? Qual a embalagem que consome menor quantidade possível de material?

Sim a embalagem de 10 cm de diâmetro

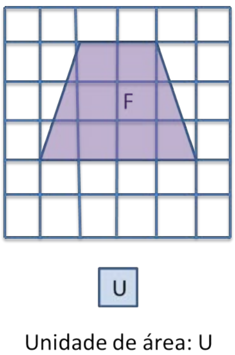
Fonte: Elaboração própria

Foi feita, mais uma vez, a distinção entre volume e área, de acordo com (DANTE, 2016), e fez a seguinte formalização na lousa:

4.4.3.1 Ideia intuitiva de área

Suponha que se deseja medir a região do plano indicada por F na Figura 45. Para isso, precisa-se comparar F com uma unidade de área que será chamada de U. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área U. Esse número assim obtido é a área de F.

Figura 45 – Unidade de área



Fonte: Elaboração própria

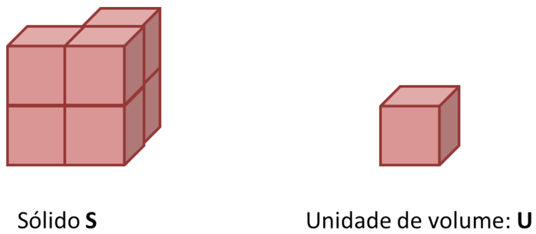
Então, a área da região plana F é de $9\ U$, ou seja:

Área de $F = 9\ U$

4.4.3.2 Ideia intuitiva de volume

Suponha que se deseja medir a quantidade de espaço ocupado por um sólido S. Para isso precisa-se comparar S com uma unidade de volume U. O resultado dessa comparação (como mostra a Figura 46) é um número que exprime quantas vezes o sólido S contém a unidade de volume U. Esse número é a medida do volume de S, que costumamos dizer, simplesmente, volume de S.

Figura 46 – Volume de S



Fonte: Elaboração própria

Por exemplo, o volume do sólido S acima é de 7 unidades de volume: $7\ U$, ou seja:

volume de S = 7 U

4.5 4ª semana (aulas 16-20) – Prismas

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Identificar e diferenciar prismas e seus elementos.
- Calcular a área lateral e total de um prisma.
- Calcular o volume de um prisma.

No início dessa semana, os conceitos de áreas de figuras planas (retângulos, triângulos, hexágono regular, trapézios) foram revisados, por se tratarem de assuntos importantes para o estudo dos prismas.

4.5.1 Problema 33

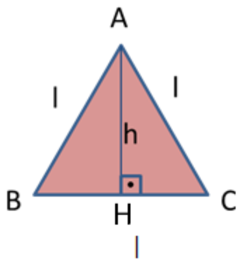
Figura 47 – Problema 33

Revisando áreas

1. Desenhe um triângulo qualquer.
2. Qual a relação entre a área do retângulo e a área do triângulo?

____

3. Podemos afirmar então que a área do triângulo é a __________ da área do retângulo.
4. Observe agora o triângulo equilátero.



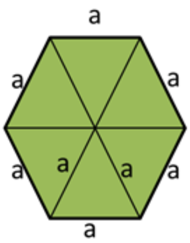
a) Que tipo especial é o triângulo AHC e ABH?

b) Obtenha a altura do triangulo ABC.

c) Substitua a altura que você encontrou no item anterior na fórmula encontrada para área do triângulo:

A área do triângulo equilátero será dada pela fórmula: ______________________

5. Área do hexágono regular



a) O hexágono regular é formado por 6 triângulos do tipo:

b) Sendo a o lado do hexágono regular, a sua área será dada pela fórmula: ____________

6. Área do trapézio:

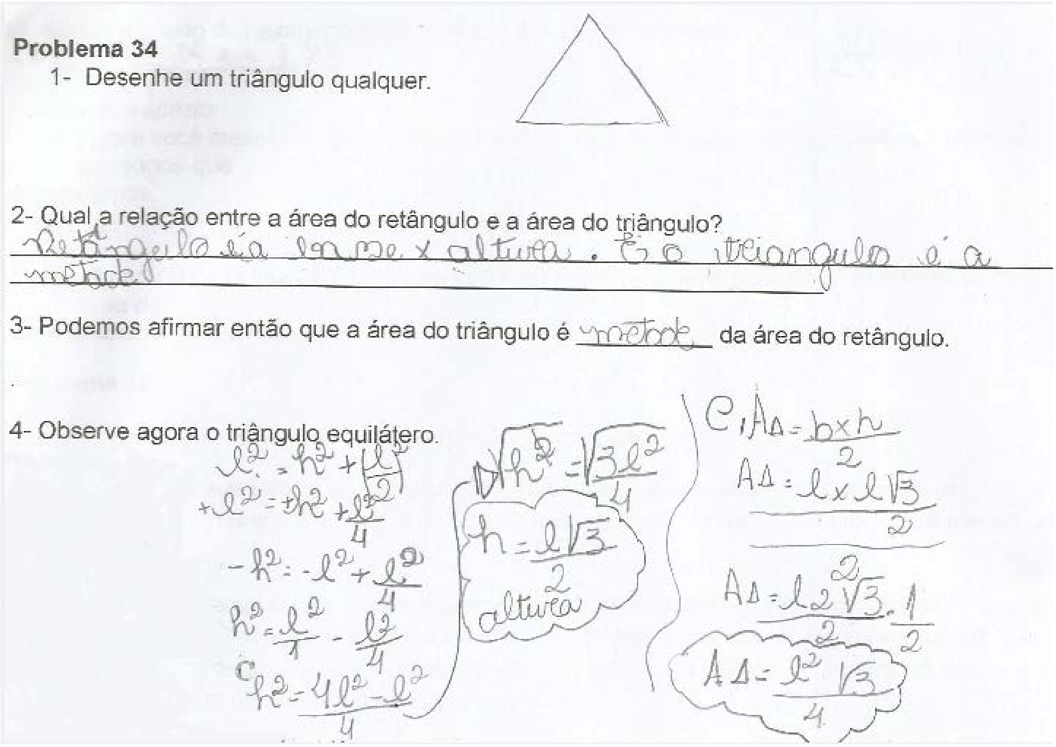
a) Agora você mesmo vai construir um trapézio. Não se esqueça de relacioná-lo a um dos polígonos que já estudamos.

b) A partir da sua intuição e dos seus conhecimentos matemáticos, escreva a fórmula da área de um trapézio.

Fonte: Elaboração própria

Ao seguir o roteiro sugerido no problema 33, os próprios alunos foram concluindo as fórmulas da área de um triângulo qualquer, do triângulo equilátero, do hexágono regular e do trapézio, como registrado na Figura 48 e Figura 49 .

Figura 48 – Resposta de um grupo aos itens 1, 2, 3 e 4 do problema 33


Problema 34

1- Desenhe um triângulo qualquer.

2- Qual a relação entre a área do retângulo e a área do triângulo?
Retângulo é a base x altura. E o triângulo é a metade

3- Podemos afirmar então que a área do triângulo é metade da área do retângulo.

4- Observe agora o triângulo equilátero.

$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$+\ell^2 = +h^2 + \frac{\ell^2}{4}$

$-h^2 = -\ell^2 + \frac{\ell^2}{4}$

$h^2 = \frac{\ell^2}{1} - \frac{\ell^2}{4}$

$h^2 = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4}$

$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ altura

$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$

$A_\Delta = \frac{\ell \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$

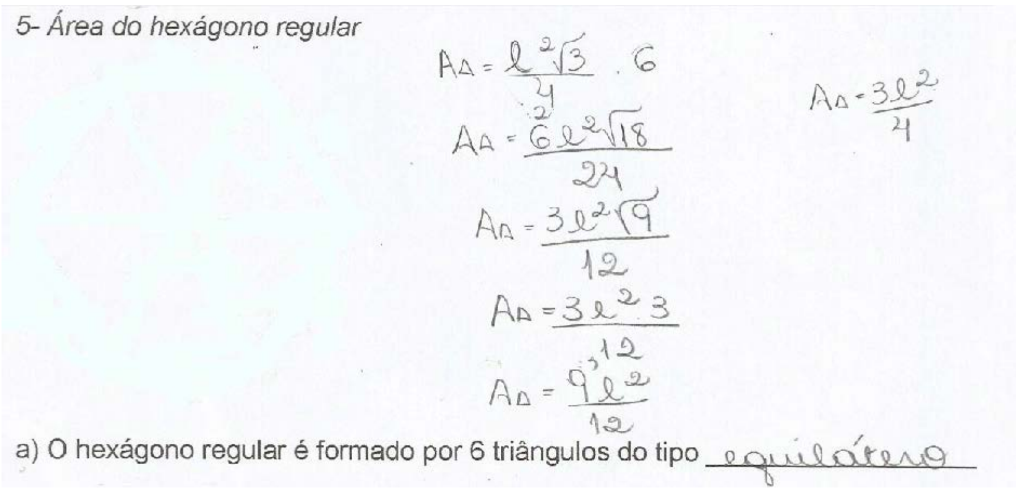
$A_\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$A_\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Fonte: Elaboração própria

O grupo 3, ao responder o item 5 do problema 33, começou bem, mas se perdeu durante as simplificações o que levou a uma fórmula incorreta.

Figura 49 – Resposta do grupo 3 ao item 5 do problema 33


5- Área do hexágono regular

$A_\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6$

$A_\Delta = \frac{6\ell^2\sqrt{18}}{24}$

$A_\Delta = \frac{3\ell^2\sqrt{9}}{12}$

$A_\Delta = \frac{3\ell^2 3}{12}$

$A_\Delta = \frac{9\ell^2}{12}$

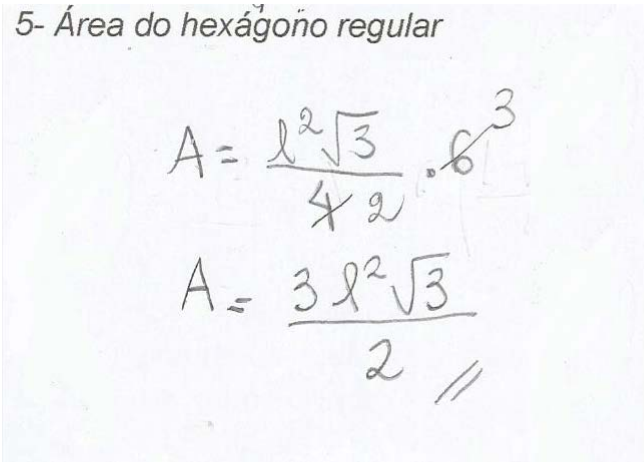
$A_\Delta = \frac{3\ell^2}{4}$

a) O hexágono regular é formado por 6 triângulos do tipo equilátero

Fonte: Elaboração própria

Os outros grupos responderam de maneira correta ao item 5 do problema 33.

Figura 50 – Resposta do grupo 1 ao item 5 do problema 33



Fonte: Elaboração própria

Foram feitas as formalizações de acordo com Dante (2016)

4.5.1.1 Áreas: medidas de superfície

- Área do quadrado – a área de um quadrado Q cujo lado mede l é dada por:

  $$\text{Área de Q} = l^2$$

- Área de um retângulo – considerando um retângulo R de base b e altura h, em que b e h são números reais, a área desse retângulo mede:

  $$\text{Área do retângulo} = b \cdot h$$

- Área do triângulo – a área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura correspondente.

- Área de um triângulo equilátero – no triângulo equilátero, todos os lados são congruentes. Logo, a área de um triângulo equilátero de lado l mede:

  $$\text{Área do triângulo equilátero} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

- Área de um trapézio – a área de um trapézio em que a base maior mede B e a base menor mede b é dada por:

  $$\text{Área do trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- Área de um hexágono regular – o hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Tem-se que a área do hexágono regular é dada por:

$$\text{Área do hexágono regular} = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

4.5.2 Problema 35

Com o problema 35, pretendia-se iniciar os conceitos de área e volume do prisma.

Figura 51 – Problema 35

A construção de uma piscina!!!

Vamos supor que sua família irá construir uma piscina na casa nova para onde estão se mudando. Suas dimensões serão: 2 metros de profundidade, 4 metros de largura e 6 metros de comprimento.

Para realizar essa empreitada, você vai precisar de duas importantes informações: a primeira é a quantidade de material necessária para a realização da obra. Como por exemplo, quantos metros quadrados de azulejo serão necessários para ladrilhar a piscina. A segunda é a quantidade de água necessária para encher a piscina.

Vamos descobrir essas duas informações!!

Todos da família adoraram a ideia de construir uma piscina, mas você ficou pensando se não seria muito melhor construir uma piscina diferente, com borda circular. Suas dimensões seriam: o raio medindo 2,75m e sua profundidade, 2m. Como no caso anterior, você quis descobrir a quantidade de azulejo para revestir a piscina e a quantidade de água necessária para enchê-la (volume). Vamos descobrir essas duas informações!!!

Levando em consideração a quantidade de azulejo necessário para revestir a piscina e o volume de cada um dos modelos, qual dos modelos você acha mais vantajoso escolher: a piscina em forma de prisma com base retangular ou de cilindro?

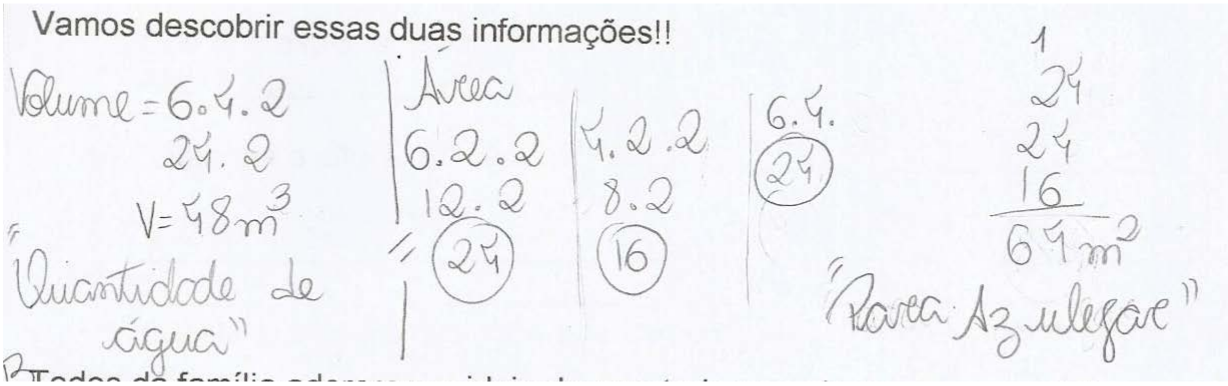
Fonte: (EJA, 2013a) - Adaptado

Perguntou-se aos alunos se a primeira piscina se tratava ou não de um poliedro e qual seria esse poliedro. Os alunos concluíram que se tratava de um poliedro, o paralelepípedo. Foi sugerido aos alunos que imaginassem a mesma piscina, mas agora com bases diferentes: bases triangulares, hexagonais etc. Perguntou-se quais as características dessas piscinas. Os alunos perceberam, com o auxílio da pesquisadora, que todas as piscinas possuíam uma dupla de faces paralelas e opostas unidas por faces retangulares. Explicou-se aos alunos que esses poliedros são chamados de prismas, e que suas laterais são paralelogramos e que o retângulo é um caso especial de paralelogramo.

Conversou-se com os alunos sobre as duas informações que o problema pediu que fosse calculado. A primeira informação, a quantidade de azulejo necessária para construir a piscina, os próprios alunos entenderam que se tratava de área e que era necessário calcular a área de cada face da piscina, lembrando que a piscina é aberta, não possui base na parte de cima. Os alunos usaram os conhecimentos de área que já possuíam e resolveram sem dificuldades essa primeira situação.

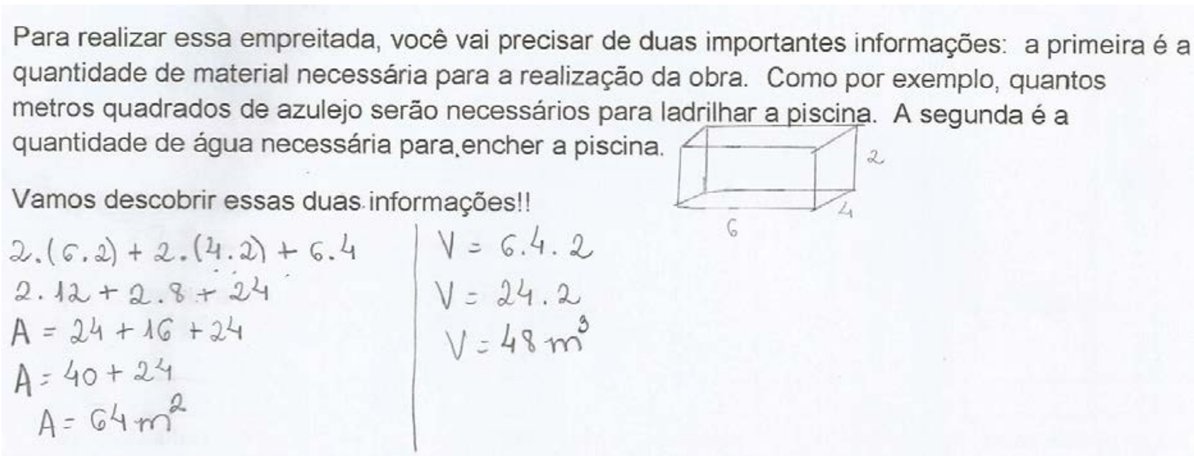
A segunda informação, a quantidade de água necessária para encher a piscina, com o auxílio da pesquisadora, os alunos compreenderam que se tratava de volume, ou seja, o espaço ocupado pela piscina. Explicou-se para os alunos que bastava calcular a área da base e multiplicar pela altura da piscina. Os grupos não apresentaram dificuldades para resolver essas situações-problema, como pode ser observado na Figura 52 e na Figura 53.

Figura 52 – Resposta do grupo 1 à primeira parte do problema 35



Fonte: Elaboração própria

Figura 53 – Resposta do grupo 3 à primeira parte do problema 35



Fonte: Elaboração própria

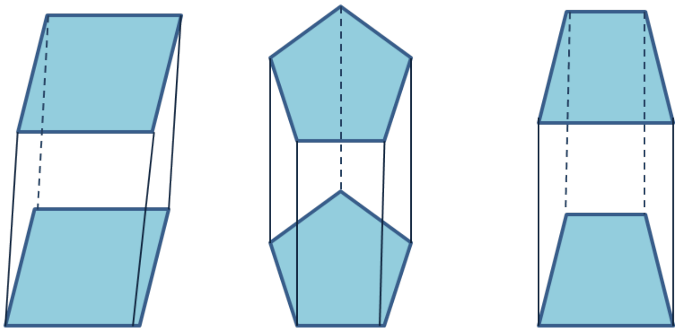
Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa segundo Dante (2016).

4.5.2.1 Prismas

Entre os poliedros mais conhecidos, destacam-se os prismas. Veja alguns exemplos e algumas de suas características.

A característica que se destaca (Figura 54) é a dupla de face paralelas e opostas (faces horizontais das imagens) unidas por faces retangulares.

Figura 54 – Prismas

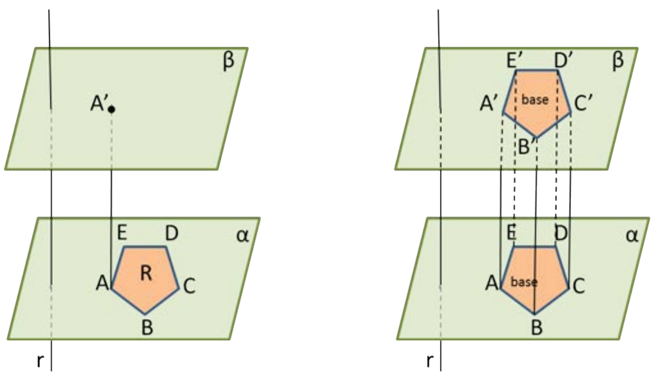


Fonte: Elaboração própria

4.5.2.2 Construção e definição do prisma

Considere um polígono, por exemplo $ABCDE$, contido em um plano α. Escolha um ponto A' qualquer, não pertencente a α. Por A' trace o plano β paralelo a α. Pelos demais pontos, B, C, D, E, trace retas paralelas a AA' que cortam β nos pontos B', C', D', E'. Essas retas são paralelas entre si.

Figura 55 – Construção e definição de prisma



Fonte: Elaboração própria

Tome dos segmentos de reta consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. O quadrilátero $AA'BB'$ é plano, pois seus lados AA' e BB' são paralelos. Isso acarreta que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero $AA'BB'$ é um paralelogramo. Os paralelogramos assim determinados, juntamente com os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, determinam um poliedro chamado prisma, de bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$.

A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos de reta nos quais cada extremidade está em uma das bases.

As arestas AA', BB', CC', DD' e EE' são chamadas arestas laterais. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

Arestas laterais consecutivas determinam paralelogramos e são chamadas faces laterais do prisma.

As bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são congruentes. A altura do prisma é a distância entre as bases.

4.5.2.3 Área da superfície de um prisma

Em todo prisma, consideramos:

- **Superfície lateral**: é formada pelas faces laterais;
- **Área lateral (A_l)**: é a área da superfície lateral;
- **Superfície total**: é formada pelas faces laterais e pelas bases;
- **Área total (A_t)**: é a área da superfície total.

4.5.2.4 Princípio de Cavalieri

Imagine três pilhas com o mesmo número de moedas, arrumadas de formas diferentes, como indicam a Figura 56:

Figura 56 – Princípio de Cavalieri

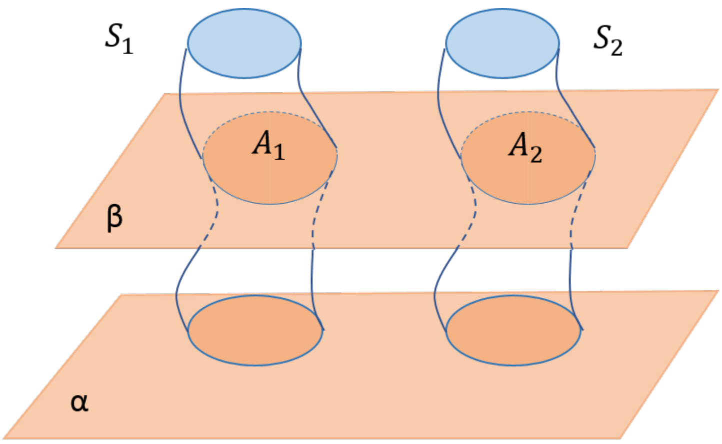
Fonte: Elaboração própria

Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma área (uma moeda); note também que as três pilhas têm volumes iguais (só mudam as formas).

Essa situação serve para ilustrar o princípio de Cavalieri, que veremos em seguida.

Considerem os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Considerem também o plano β, paralelo a α, que ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2.

Figura 57 – Sólidos S_1 e S_2



Fonte: Elaboração própria

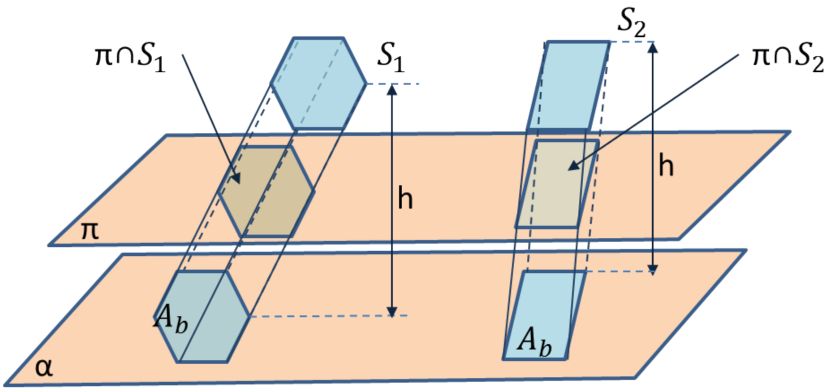
Nessas condições, se para todo plano β temos A_1 = A_2, então:

Volume S_1 = Volume S_2.

4.5.2.5 Volume do prisma

Para calcular o volume de um prisma qualquer, será aplicado o princípio de Cavalieri e será utilizado o paralelepípedo retângulo como auxílio.

Figura 58 – Prisma qualquer e o paralelepípedo retângulo.



Fonte: Elaboração própria

Considerando-se um prisma S_1, cuja área da base é A_b e a altura é h, e também um paralelepípedo S_2, cuja área da base é A_b e altura h. O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a A_b, e no paralelepípedo retângulo S_2 determina a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a A_b.

Como área $(\pi \cap S_1)$ = A_b e área $(\pi \cap S_2)$ = A_b, para qualquer plano horizontal π temos:

Área ($\pi \cap S_1$) = Área ($\pi \cap S_2$)

Pelo princípio de Cavalieri, conclui-se que:

Volume do prisma = Volume do paralelepípedo retângulo

Como o volume do paralelepípedo é obtido multiplicando a área da base pela altura, tem-se:

Volume do prisma = área da base · altura

V = $A_b \cdot h$

4.6 5ª semana (aulas 21-25) – Pirâmides

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

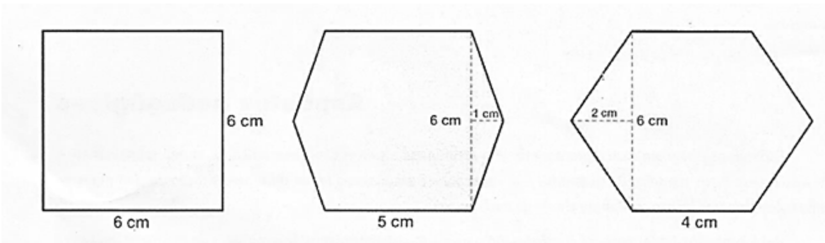
- Identificar e diferenciar pirâmides e seus elementos.
- Calcular a área lateral e total de uma pirâmide
- Calcular o volume de uma pirâmide.

4.6.1 Problema 42

Figura 59 – Problema 42

Volume de pirâmides

Observemos polígonos abaixo. Embora sejam diferentes, eles possuem a mesma área. Escolha um dos modelos como base para a construção de uma pirâmide.



Reproduzam no papelão o molde da base da pirâmide. Perfurem o papelão no centro da base e nele fixem o canudo ortogonal à base com fita adesiva.

Agora vocês farão a planificação da pirâmide, marcando em uma folha de papel A4 os pontos que correspondem aos seus vértices. Por fim, liguem todos os pontos marcados na folha e desenhe uma aba para facilitar a montagem. Colem pedaços de papelão nas faces para dar firmeza ao modelo.

Etapa concluída!! Agora preencham a pirâmide com grãos de arroz e despeje no copo descartável. Comparemos níveis dos copos com os outros grupos. O que vocês notaram em relação ao volume das pirâmides construídas?

Fonte: (EJA, 2013a) - Adaptado

Com o problema 42 pretendia-se definir e diferenciar pirâmides e seus elementos e construir o conceito de volume da pirâmide.

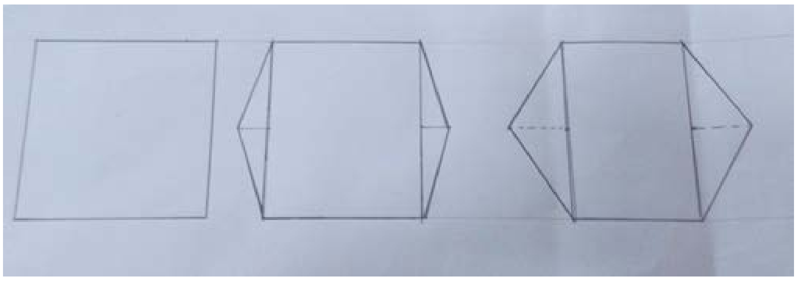
Os grupos foram orientados para que escolhessem modelos diferentes de base para a construção da planificação das pirâmides. Cada grupo escolheu e confeccionou sua base de pirâmide (Figura 60). Cortaram a base em papel cartão (por ser mais fácil de manipular) e não em papelão como sugeriu o problema. Com a base pronta, fixaram o canudo ortogonal à base com cola quente (Figura 61). Os alunos fizeram a planificação da pirâmide, marcando no papel cartão os pontos que correspondem aos vértices (Figura 62). Por fim, eles ligaram todos os pontos marcados na folha e desenharam uma aba para facilitar a montagem (Figura 63).

Explicou-se aos alunos que o canudo fixado à base se tratava da altura da pirâmide e que os segmentos que ligaram os pontos eram as arestas da pirâmide. Os triângulos formados são as faces laterais. Ainda pediu-se aos alunos que traçassem a altura dos triângulos que formam a pirâmide e explicou que que esse segmento é chamado de apótema, que, segundo Iezzi et al. (2013) é a altura de uma face lateral, relativa à aresta da base.

Os alunos recortaram a planificação e montaram as pirâmides, como pode ser observado na Figura 64. Depois cada grupo encheu sua pirâmide com arroz, despejaram em copos descartáveis e compararam seus resultados com os dos outros grupos. Os alunos puderam observar que o volume das pirâmides, mesmo com bases diferentes, porém com mesma área, eram iguais.

Aproveitou-se o problema para comparar o volume da pirâmide de base quadrada ao volume de um prisma de mesma base e altura. Os alunos perceberam que o volume do prisma é três vezes do volume da pirâmide, ou seja, volume da pirâmide é um terço o volume do prisma. Dessa maneira, os alunos concluíram a fórmula do volume da pirâmide.

Figura 60 – Bases desenhadas pelos alunos



Fonte: Elaboração própria

Figura 61 – Esqueleto para fazer as planificações

Fonte: Elaboração própria

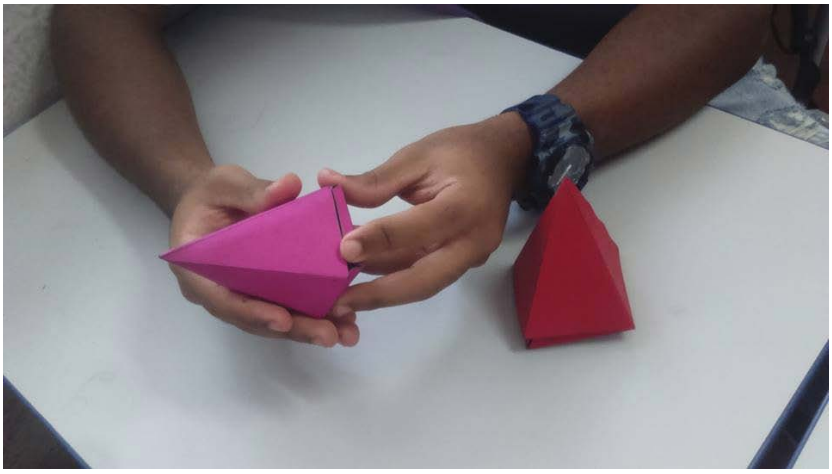
Figura 62 – Grupo 4 marcando os pontos que seriam os vértices das pirâmides.

Fonte: Elaboração própria

Figura 63 – Grupo 4 fazendo a planificação da pirâmide.

Fonte:Elaboração própria

Figura 64 – Pirâmides confeccionadas pelo grupo 5.



Fonte: Elaboração própria

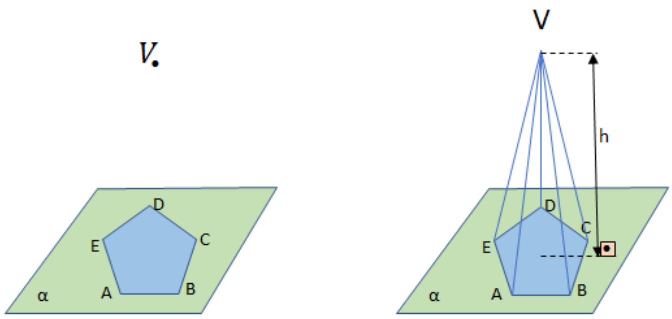
Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa de acordo com Dante (2016).

4.6.1.1 Construção e definição de pirâmide

Considere um polígono, por exemplo $ABCDE$, contido em um plano α e um ponto V exterior ao plano do polígono.

Traçando os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$. Cada dois vértices consecutivos de $ABDE$ determinam com V um triângulo. Esses triângulos, junto com o polígono $ABCDE$, determinam um poliedro chamado **pirâmide** de base $ABCDE$ e vértice V.

Figura 65 – Pirâmide



Fonte: Elaboração própria

A região do espaço ocupada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice V aos pontos do polígono (base).

A distância do vértice ao plano da base, que indicamos por h, é chamada **altura** da pirâmide.

Os seguimentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são chamados **arestas laterais**, e os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE e VEA são chamados **faces laterais** da pirâmide.

4.6.1.2 Volume da pirâmide

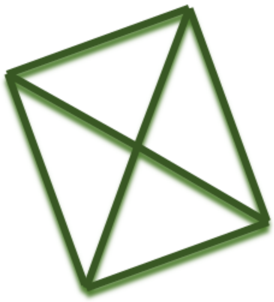
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Onde, A_b = área da base e h = altura da pirâmide

4.6.2 Problema 43

Figura 66 – Problema 43

Matheus está construindo e chegou a hora de fazer o telhado de sua casa. A área que receberá o telhado é retangular e tem dimensões 7m por 9m. Ele optou por fazer um telhado com quatro águas, como na figura abaixo.



a) Sabendo que a estrutura do telhado forma uma pirâmide de base retangular e altura igual a 1,6 metros, quantos metros quadrados de telha serão necessários para fazer o telhado?

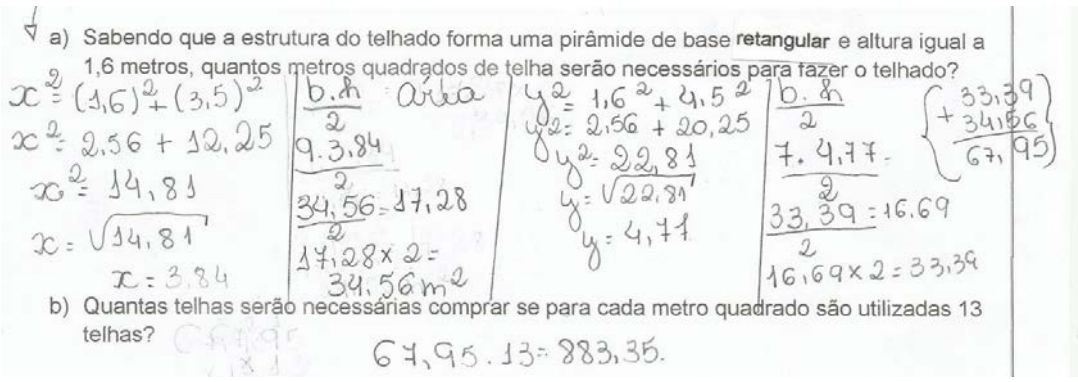
b) Quantas telhas serão necessárias comprar se para cada metro quadrado são utilizadas 13 telhas?

c) Sabendo que o preço de cada telha escolhida por Mateus custa R$ 1,60, quanto ele gastará para comprar as telhas?

Fonte: Elaboração própria

A partir de uma situação contextualizada, iniciou-se o conceito de área da superfície da pirâmide. No início, os alunos apresentaram uma pequena dificuldade para diferenciar a altura e a apótema da pirâmide. Outra dificuldade apresentada foi na hora de aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a altura dos triângulos, mas com a orientação da pesquisadora, todos os alunos conseguiram resolver o problema sem maiores dificuldades. Seguem abaixo duas maneiras diferentes de abordar o problema (Figura 67 e Figura 68).

Figura 67 – Resposta do grupo 1 aos itens a e b do problema 34.



a) Sabendo que a estrutura do telhado forma uma pirâmide de base retangular e altura igual a 1,6 metros, quantos metros quadrados de telha serão necessários para fazer o telhado?

$x^2 = (1,6)^2 + (3,5)^2$
$x^2 = 2,56 + 12,25$
$x^2 = 14,81$
$x = \sqrt{14,81}$
$x = 3,84$

$\frac{b.h}{2}$ Área
$\frac{9.3,84}{2}$
$\frac{34,56}{2} = 17,28$
$17,28 \times 2 = 34,56 m^2$

$y^2 = 1,6^2 + 4,5^2$
$y^2 = 2,56 + 20,25$
$y^2 = 22,81$
$y = \sqrt{22,81}$
$y = 4,77$

$\frac{b.h}{2}$
$\frac{7.4,77}{2}$
$\frac{33,39}{2} = 16,69$
$16,69 \times 2 = 33,39$

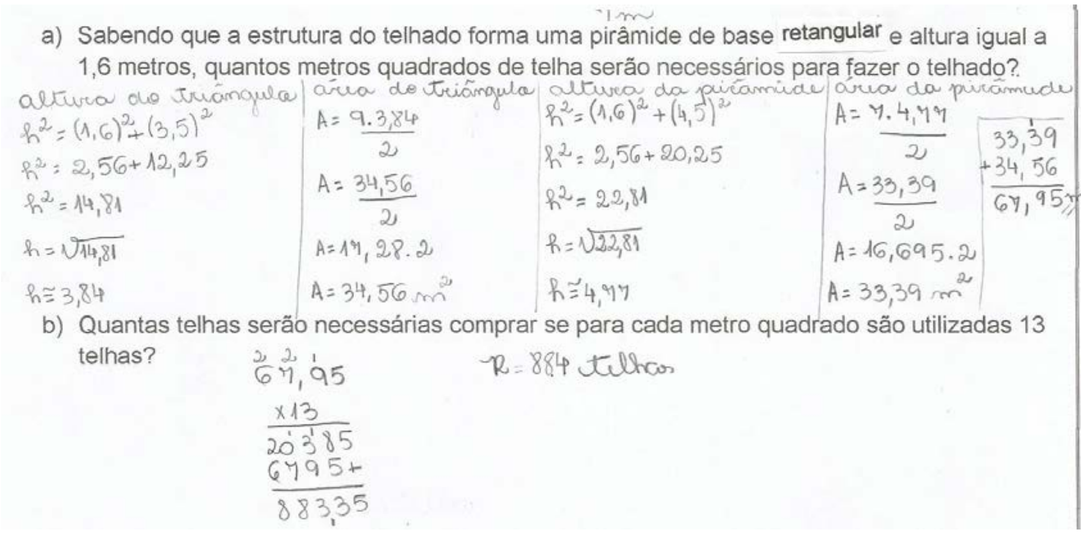
$33,39 + 34,56 = 67,95$

b) Quantas telhas serão necessárias comprar se para cada metro quadrado são utilizadas 13 telhas?

$67,95 . 13 = 883,35.$

Fonte: Elaboração própria

Figura 68 – Resposta do grupo 3 aos itens a e b do problema 34.



a) Sabendo que a estrutura do telhado forma uma pirâmide de base retangular e altura igual a 1,6 metros, quantos metros quadrados de telha serão necessários para fazer o telhado?

altura do triângulo
$h^2 = (1,6)^2 + (3,5)^2$
$h^2 = 2,56 + 12,25$
$h^2 = 14,81$
$h = \sqrt{14,81}$
$h \cong 3,84$

área do triângulo
$A = \frac{9 \cdot 3,84}{2}$
$A = \frac{34,56}{2}$
$A = 17,28 \cdot 2$
$A = 34,56\ m^2$

altura da pirâmide
$h^2 = (1,6)^2 + (4,5)^2$
$h^2 = 2,56 + 20,25$
$h^2 = 22,81$
$h = \sqrt{22,81}$
$h \cong 4,77$

área da pirâmide
$A = \frac{7 \cdot 4,77}{2}$
$A = \frac{33,39}{2}$
$A = 16,695 \cdot 2$
$A = 33,39\ m^2$

$33,39 + 34,56 = 67,95\ m^2$

b) Quantas telhas serão necessárias comprar se para cada metro quadrado são utilizadas 13 telhas?

$67,95 \times 13$: 20385 + 6795 = 88335

R = 884 telhas

Fonte: Elaboração própria

Observando a resposta do grupo 3, pode-se notar que os alunos confundiram os conceitos de altura da pirâmide com a altura do triângulo que é a face lateral. Esse erro pareceu bastante comum entre os alunos. A partir dessa situação, os conceitos foram enfatizados, visto que já haviam sido estudados anteriormente, fazendo diferença entre eles.

Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa, segundo Dante (2016).

4.6.2.1 Área da superfície da pirâmide

Do mesmo modo que foi visto nos prismas, nas pirâmides também têm-se:

- **Superfície lateral**: é formada pelas faces laterais (triângulos);
- **Área lateral**: é a área da superfície lateral;
- **Superfície total**: é formada pelas faces laterais e pela base;
- **Área total**: é a área da superfície total

4.7 6ª semana (aulas 26-30) – Cones

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Identificar os principais elementos de um cone.
- Calcular a área e o volume de um cone.

4.7.1 Problema 45

Figura 69 – Problema 45

Comparando o cone com o cilindro

De posse da planificação de um cilindro e um cone de mesmo raio da base e mesma altura, recortem-nos e montem-nos. Observem que uma das bases do cilindro e a base do cone não devem ser coladas, para que vocês possam encher e esvaziar os sólidos com grãos de arroz.

a) Qual deles tem maior volume?

b) Quantas vezes o cone “cabe” no cilindro?

c) Estabeleçam uma relação entre o volume do cilindro e do cone.

d) Realce com caneta as linhas importantes do cone, como sua geratriz e seu raio.

Fonte: (EJA, 2013b, p.156) - Adaptado

Os alunos já sabiam como calcular o volume do cilindro. Com esse problema, tinha-se a intensão de concluir com os alunos, de uma maneira intuitiva, a fórmula do volume do cone a partir do volume do cilindro. Os grupos receberam a planificação de um cone e de um cilindro de mesma área da base e de mesma altura. Com os sólidos montados, de acordo com o registro na Figura 70, chamou-se a atenção dos alunos para os elementos do cone: sua base, altura, vértice e geratriz. Em seguida, fizeram a comparação entre o volume do cone e do cilindro utilizando grãos de arroz, como pode ser observado na Figura 71 e Figura 72. Dessa maneira, os alunos puderam concluir que o volume do cone equivale a um terço do volume do cilindro, ambos de mesma área da base e mesma altura (Figura 73).

Figura 70 – Aluna confeccionando o cone.

Fonte: Elaboração própria

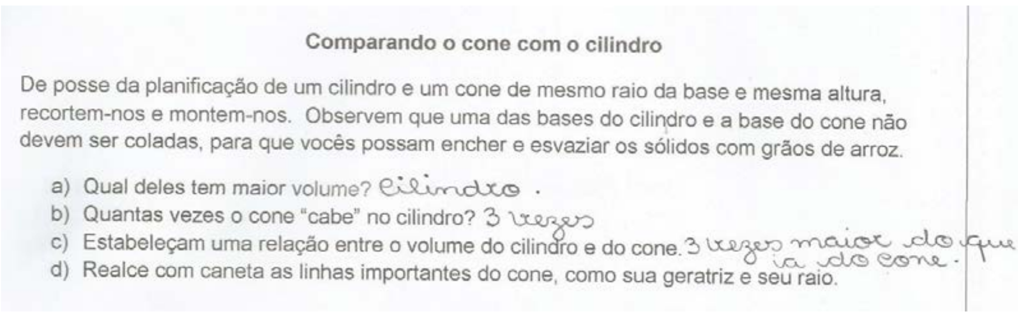
Figura 71 – Aluna comparando o volume do cone com o do cilindro.

Fonte: Elaboração própria

Figura 72 – Aluna comparando o volume do cone com o do cilindro.

Fonte: Elaboração própria

Figura 73 – Resposta do grupo 5 ao problema 45.



Comparando o cone com o cilindro

De posse da planificação de um cilindro e um cone de mesmo raio da base e mesma altura, recortem-nos e montem-nos. Observem que uma das bases do cilindro e a base do cone não devem ser coladas, para que vocês possam encher e esvaziar os sólidos com grãos de arroz.

a) Qual deles tem maior volume? cilindro .
b) Quantas vezes o cone "cabe" no cilindro? 3 vezes
c) Estabeleçam uma relação entre o volume do cilindro e do cone. 3 vezes maior do que a do cone.
d) Realce com caneta as linhas importantes do cone, como sua geratriz e seu raio.

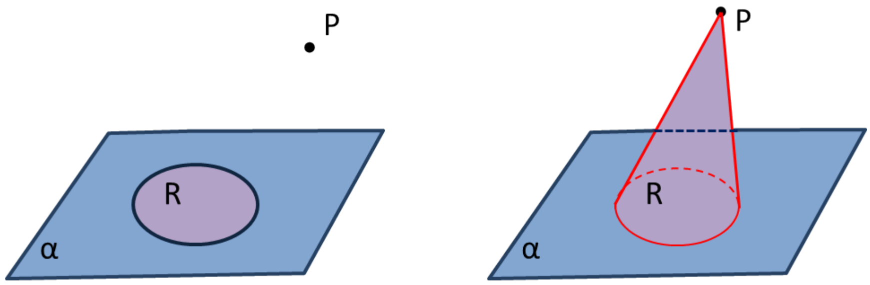
Fonte: Elaboração própria

Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa, de acordo com Dante (2016).

4.7.1.1 Elementos de um cone

Considerando um plano α, um círculo R nesse plano e um ponto P não pertencente a α. A reunião de todos os segmentos de reta que ligam cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado **cone circular**.

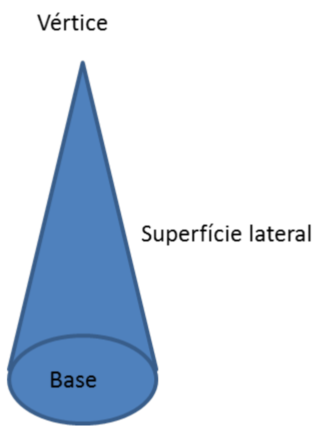
Figura 74 – Elementos de um cone



Fonte: Elaboração própria

A superfície do cone é formada por uma parte plana, o círculo, que é a sua base, e uma parte não plana, "curva", "arredondada", que é a sua superfície lateral

Figura 75 – Base e superfície lateral do cone

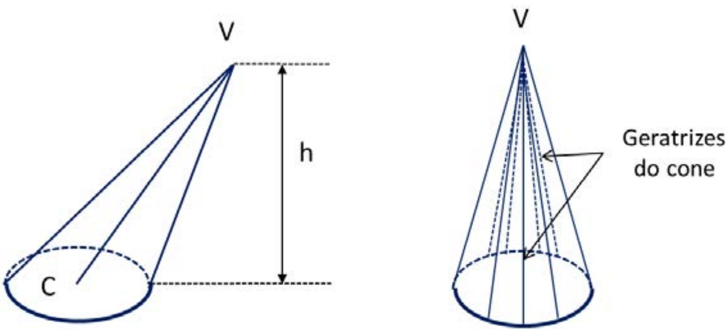


Fonte: Elaboração própria

A altura h do cone é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice ao plano da base.

No cone reto, cada segmento de reta que liga o vértice a um ponto da circunferência da base é chamado geratriz do cone.

Figura 76 – Geratrizes do cone



Fonte: Elaboração própria

4.7.1.2 Volume do cone

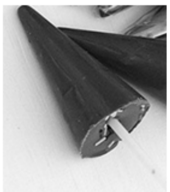
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$$

Onde, R é o raio da base e h a altura do cone.

4.7.2 Problema 47

Figura 77 – Problema 47

Um empresário deseja fazer um doce de chocolate no formato cilíndrico, com diferentes recheios e embrulhado num papel colorido com cores vibrantes para que possa atrair seus fregueses.



Como em todo plano de ação, ele precisa planejar os custos de produção. Para isso, é necessário saber a quantidade de papel que será empregada para embalar cada unidade do doce e também a quantidade de chocolate utilizada na fabricação de cada um.

Em termos matemáticos, o empresário precisa conhecer a área do cone para saber o gasto para embalar cada unidade de doce. Também precisa conhecer o volume do cone, para saber a quantidade de chocolate necessária para fabricar cada doce.

As dimensões do doce escolhido pelo empresário são: 7 cm de altura e 2 cm de raio da base.

a) Sabendo que o papel deve cobrir tanto a base do cone quanto a sua superfície lateral, vamos ajudar esse empresário a calcular quantos metros quadrados de papel serão necessários para embrulhar cada doce.

b) E a quantidade de chocolate, em litros, para fabricar cada doce.

Fonte: (EJA, 2013a) - Adaptado

Com esse problema, pretendia-se construir com os alunos o conceito de área superficial de um cone reto. Os alunos tiveram dificuldades no começo com a interpretação do problema, mas com a ajuda da pesquisadora eles conseguiram compreender que se tratava da área superficial do cone. Como já tinham visto na atividade anterior a planificação do cone reto, sabiam que sua base era um círculo. Logo, conseguiram resolver e encontrar a área da base. Mas na hora de calcular a área lateral, não sabiam como fazer. Optou-se por fazer uma demonstração intuitiva na lousa, da seguinte maneira:

- Desenhou uma pirâmide de base quadrada, de aresta da base valendo a, aresta lateral igual a A_l e apótema igual a A_p. A pesquisadora recordou com os alunos que a área da superfície lateral dessa pirâmide era igual a :

$$\frac{4a \cdot A_p}{2}$$

- Em seguida, desenhou uma pirâmide com o dobro de arestas da base, ou seja, com 8 arestas. A pesquisadora chamou a atenção dos alunos para que observassem que a área da superfície lateral passou a ser:

$$\frac{8a \cdot A_p}{2}$$

- A pesquisadora desenhou novamente uma pirâmide, mas agora com o dobro de arestas da base do que a pirâmide anterior. E a área passou a ser:

$$\frac{16a \cdot A_p}{2}$$

- A pesquisadora chamou a atenção dos alunos para o seguinte: à medida que se aumenta o número de arestas da base da pirâmide, a base se aproxima de um círculo.

- À medida que o número de arestas da base tende a infinito, a aresta lateral e o apótema se aproximam até se fundirem e darem origem a geratriz.

- Comparando a área lateral da pirâmide (A) e do cone (A_c), tem-se:

$$A = \frac{P_b \cdot A_p}{2}$$

Onde P_b é o perímetro da base e A_p o apótema.

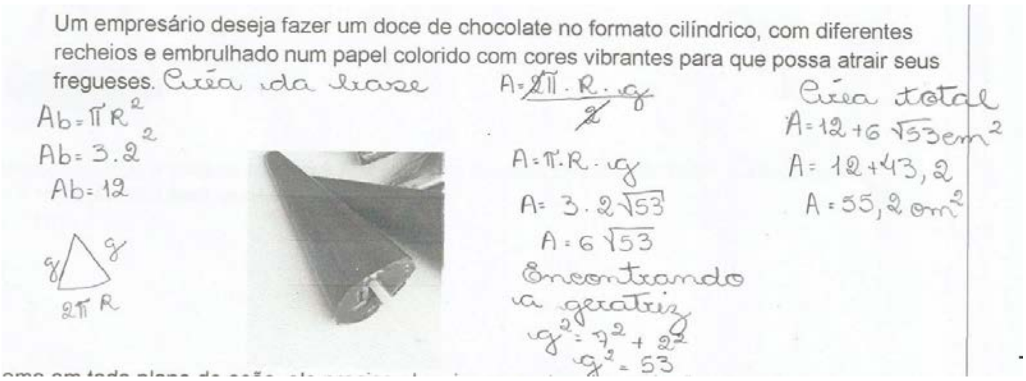
$$A_c = \frac{2\pi R \cdot g}{2} = \pi R g$$

onde R é o raio da base e g a geratriz.

- Ou seja, no lugar do perímetro da base (da pirâmide), tem-se o comprimento da circunferência (no cone). E no lugar do apótema (da pirâmide), tem-se a geratriz (no cone).

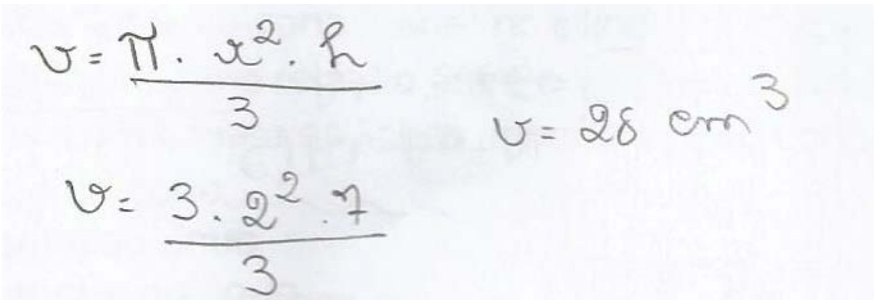
Após a explicação, os alunos conseguiram resolver o problema 47. Veja o registro na Figura 78 e na Figura 79.

Figura 78 – Resposta do grupo 4 ao problema 47, item a.



Fonte: Elaboração própria

Figura 79 – Resposta do grupo 4 ao problema 47, item b.



Fonte: Elaboração própria

Foi feita a formalização dos conteúdos na lousa, de acordo com Dante (2016).

4.7.2.1 Área da superfície de um cone reto

A superfície total do cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a superfície da base (um círculo), isto é, $A_T = A_l + A_b$

$$A_l = \pi R g \qquad A_b = \pi R^2 \qquad A_T = \pi R(g + R)$$

4.8 7ª semana (aulas 31-35) - Esfera - parte I

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivos:

- Conceituar esfera.
- Reconhecer os elementos de uma esfera.
- Calcular a área da superfície esférica.

4.8.1 Problema 51

Figura 80 – Problema 51

Diferenciando superfície esférica e esfera

Com essa atividade você poderá identificar a diferença entre superfície esférica e esfera a partir das noções de superfície e sólido de revolução.

Com o compasso, trace um arco de circunferência de modo que você possa marcar uma semicircunferência e o diâmetro na folha de papel e a depois recortar como molde para um semicírculo. Depois obtenha a semicircunferência fazendo o contorno com o arame.

Após ter confeccionado os moldes, usem dois lápis como eixo, colando-os sobre o diâmetro do semicírculo e fixando o arame no caso da semicircunferência. Agora, girem a semicircunferência e o semicírculo em torno do eixo e tirem suas conclusões.

Classifiquem os seguintes objetos esféricos a seguir como esfera ou casca esférica, discutindo com os colegas as suas escolhas.

a) Laranja
b) Bolinha de tênis de mesa
c) Planeta Terra
d) Bolinha de gude
e) Bola de boliche
f) Lua
g) Bola de enfeite de Natal
h) Limão
i) Bola de basquete
j) Bola de sinuca
k) Bolha de sabão
l) Bola de canhão antiga
m) Bexiga em formato esférico
n) Bola de tênis de campo
o) Bola de pilates
p) Bola do lançamento de pelota (atletismo)
q) Bola de beisebol
r) Bola do lançamento de martelo (atletismo)
s) Bola de golfe

Fonte: (EJA, 2013a) - Adaptado

Com o problema 51 tinha-se como objetivo construir os conceitos de superfície esférica e esfera, diferenciando-os. Aproveitou-se a oportunidade para apresentar para os alunos os elementos da esfera. Os alunos não apresentaram dificuldades com esse problema e consideraram-no simples. Sua solução está registrada Figura 81.

Figura 81 – Resposta de um dos grupos ao problema 51.

Classifiquem os seguintes objetos esféricos a seguir como esfera ou casca esférica, discutindo com os colegas as suas escolhas.

a) Laranja esfera
b) Bolinha de tênis de mesa - esfera
c) Planeta Terra - esfera
d) Bolinha de gude - esfera
e) Bola de boliche - esfera
f) Lua - esfera
g) Bola de enfeite de Natal - superfície esférica
h) Limão - esfera
i) Bola de basquete - superfície esférica
j) Bola de sinuca - esfera
k) Bolha de sabão - superfície esférica
l) Bola de canhão antiga - esfera
m) Bexiga em formato esférico - superfície esférica
n) Bola de tênis de campo - esfera
o) Bola de pilates - superfície esférica
p) Bola do lançamento de pelota (atletismo) - esfera
q) Bola de beisebol - superfície esférica
r) Bola do lançamento de martelo (atletismo) - esfera
s) Bola de golfe - esfera

Fonte: Elaboração própria

4.8.2 Problema 52

Figura 82 – Problema 52

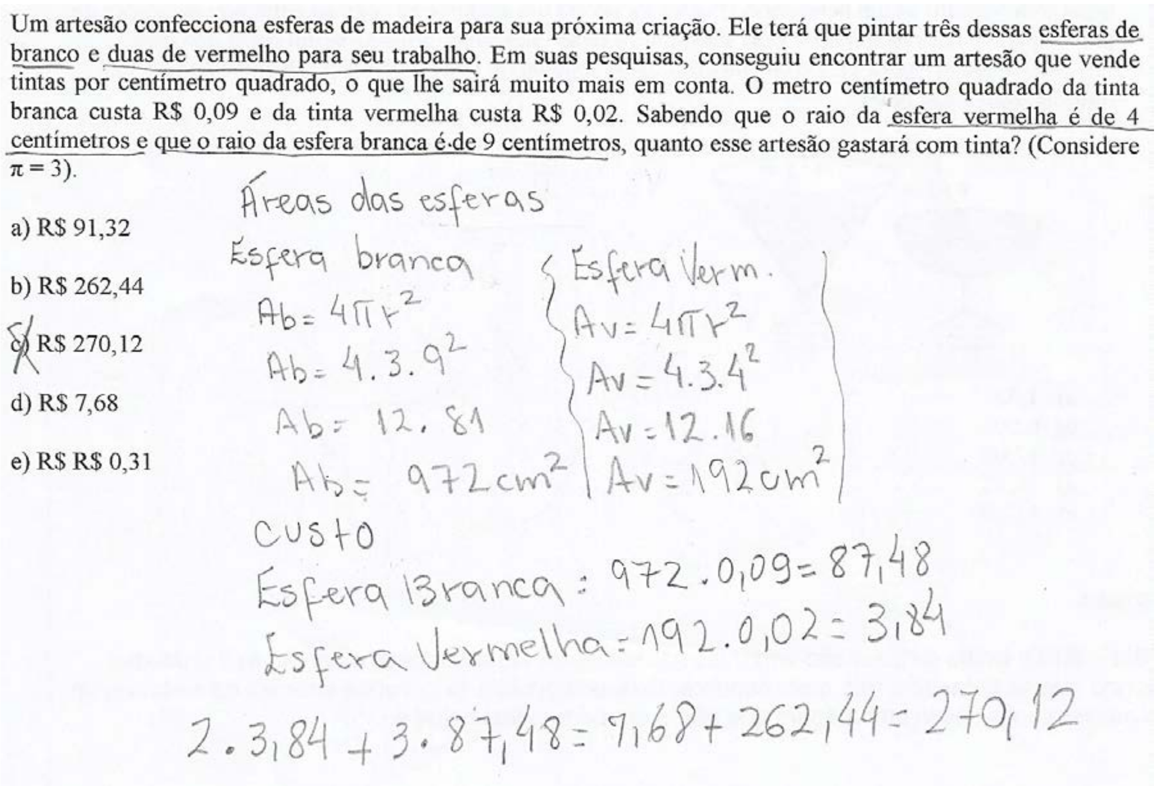
Um artesão confecciona esferas de madeira para sua próxima criação. Ele terá que pintar três dessas esferas de branco e duas de vermelho para seu trabalho. Em suas pesquisas, conseguiu encontrar um artesão que vende tintas por centímetro quadrado, o que lhe sairá muito mais em conta. O centímetro quadrado da tinta branca custa R$ 0,09 e da tinta vermelha custa R$ 0,02. Sabendo que o raio da esfera vermelha é de 4 centímetros e que o raio da esfera branca é de 9 centímetros, quanto esse artesão gastará com tinta? (Considere $\pi = 3$).

a) R$ 91,32
b) R$ 262,44
c) R$ 270,12
d) R$ 7,68
e) R$ 0,31

Fonte: Silva (2018)

Com o problema 52, trabalhou-se com os alunos o conceito de área da superfície esférica, visto que a diferença entre esfera e superfície esférica já havia sido trabalhada. Os alunos compreenderam que a solução do problema era encontrar a área da superfície esférica, sendo duas esferas de raio igual a 4 centímetros e três esferas de raio igual a 9 centímetros. Depois, deveriam encontrar o valor que o artesão iria gastar para pintar as esferas, sendo que elas possuíam cores e valores diferentes. Explicou-se para os alunos que a área da superfície esférica pode ser calculada por meio da expressão: $A = 4\pi R^2$. Os alunos não apresentaram dificuldades para resolver o problema, como registrado na Figura 83.

Figura 83 – Resposta de um dos grupos ao problema 52.



Um artesão confecciona esferas de madeira para sua próxima criação. Ele terá que pintar três dessas esferas de branco e duas de vermelho para seu trabalho. Em suas pesquisas, conseguiu encontrar um artesão que vende tintas por centímetro quadrado, o que lhe sairá muito mais em conta. O metro centímetro quadrado da tinta branca custa R$ 0,09 e da tinta vermelha custa R$ 0,02. Sabendo que o raio da esfera vermelha é de 4 centímetros e que o raio da esfera branca é de 9 centímetros, quanto esse artesão gastará com tinta? (Considere $\pi = 3$).

a) R$ 91,32

b) R$ 262,44

c) R$ 270,12

d) R$ 7,68

e) R$ R$ 0,31

Áreas das esferas

Esfera branca

$Ab = 4\pi r^2$

$Ab = 4.3.9^2$

$Ab = 12.81$

$Ab = 972 cm^2$

Esfera Verm.

$Av = 4\pi r^2$

$Av = 4.3.4^2$

$Av = 12.16$

$Av = 192 cm^2$

Custo

Esfera Branca: $972 . 0{,}09 = 87{,}48$

Esfera Vermelha: $192 . 0{,}02 = 3{,}84$

$2 . 3{,}84 + 3 . 87{,}48 = 7{,}68 + 262{,}44 = 270{,}12$

Fonte: Elaboração própria

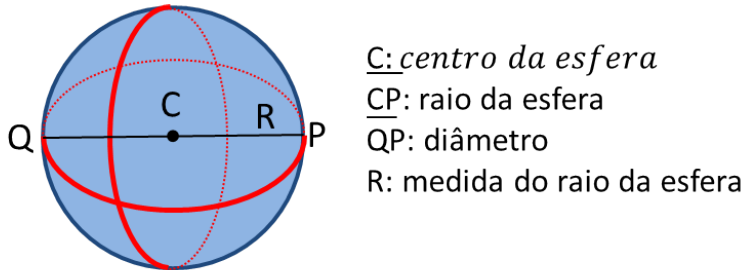
Foi feita a formalização na lousa segundo Dante (2016).

4.8.2.1 A esfera

Considerando-se um ponto C e um número real positivo R qualquer.

A esfera de centro C e raio de medida R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R do ponto C.

Figura 84 – Esfera



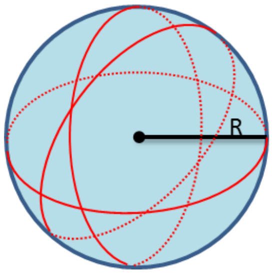
Fonte: Elaboração própria

A “casquinha” ou a fronteira da esfera chama-se **superfície esférica**.

4.8.2.2 Área da superfície esférica

Na figura abaixo estão desenhados três círculos máximos.

Figura 85 – Superfície esférica



Fonte: Elaboração própria

A área da superfície esférica é dada pelo quádruplo da área de um dos círculos máximos, ou seja:

$$A = 4\pi R^2$$

4.9 8ª semana (aulas 31-35) – Esfera – parte II

As atividades propostas para essa semana tinham como objetivo:

- Calcular o volume da esfera.

4.9.1 Problema 54

Figura 86 – Problema 54

Comparando o volume do cone, do cilindro e da semiesfera

Nesta atividade vocês terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio.

De posse dos moldes que servirão de apoio para modelar o cone, o cilindro e a esfera, cole-os sobre o papel-cartão, corte-os e monte-os encaixando as duas partes de cada sólido usando os cortes centrais.

Com massinha de modelar, construa os sólidos. Agora, com os sólidos prontos, vamos fazer a comparação dos volumes, seguindo as instruções abaixo:

a) Marque, no recipiente, o nível de água.

b) Mergulhe o cone no recipiente e marque novamente o nível de água.

c) Retire o cone e coloque água novamente até o nível inicial.

d) Mergulhe a semiesfera e marque novamente o nível de água.

e) Retire a semiesfera e volte a colocar água até o nível anterior.

f) Mergulhe o cilindro marcando novamente o nível de água.

A partir dessa experiência, podemos concluir sobre a relação entre o volume do cone, da semiesfera e do cilindro que:

a) O volume do cilindro é ______________________________ o volume do cone, ou seja, o volume do cone é ______________________________ o volume do cilindro.

b) O volume da semiesfera é ________________________ o volume do cone, ou seja, o volume da semiesfera corresponde a _______________________do volume do cilindro.

c) Qual a expressão para calcular o volume do cilindro? ______________________________

d) No cilindro usado no experimento, temos que $h = r$, ou seja, a medida da altura do cilindro é igual a medida do seu raio da base. Neste caso, qual será a expressão para o cálculo do volume de um cone de mesma altura e mesmo raio da vase desse cilindro?

e) Qual a expressão para o cálculo do volume de uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro?

f) Logo, a expressão para o cálculo do volume da esfera será:

Fonte: (EJA, 2013a) - Adaptado

Levaram-se os moldes prontos para confecção do cilindro, da semiesfera e do cone e distribuiu um modelo de cada para os grupos. A partir dos moldes, os alunos começaram a modelar, como está registrado na Figura 90, os sólidos geométricos (cilindro, semiesfera e cone), todos de mesma altura e raios da base com a mesma medida da altura. Os moldes confeccionados pela pesquisadora possuíam raios da base e altura medindo 2 cm (Figura 89).

Com os sólidos prontos (Figura 91 e Figura 92), os alunos encheram o recipiente (Figura 88) de água até 50 ml e mergulharam o cone. O nível de água subiu para 60 ml, ou seja, o cone possuía um volume de 10 ml.

Novamente, os alunos verificaram o nível de água do recipiente, que era de 50 ml. Mergulharam a semiesfera. O nível da água subiu para 70 ml, ou seja, o volume da semiesfera era de 20 ml.

Por último, os alunos verificaram o nível de água do recipiente, que era de 50 ml e mergulharam o cilindro. O nível de água subiu para 80 ml, ou seja, o volume do cilindro era de 30 ml.

Os alunos fizeram todos os registros na folha de atividade (Figura 87 e Figura 93). Com essa experiência, eles concluíram de forma empírica a fórmula do volume da esfera. Os resultados foram colocados na lousa, da seguinte maneira:

VOLUME DO CILINDRO (30 ml) = VOLUME DO CONE (10 ml) + VOLUME DA SEMIESFERA (20 ml)

Volume do cilindro = $\pi \cdot R^2 \cdot h$

Volume do cone = $\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$

Volume da semiesfera = ?

Sendo R o raio da base e h a atura do cilindro. Como os moldes possuem raio da base igual à altura, tem-se:

Volume do cilindro = $\pi \cdot R^3$

Volume do cone = $\dfrac{\pi \cdot R^3}{3}$

Volume da semiesfera =?

Substituindo as fórmulas na conclusão dos alunos e chamando o volume da semiesfera de V_S, obtém-se:

$$\pi \cdot R^3 = \frac{\pi \cdot R^3}{3} + V_S$$

$$V_S = \pi \cdot R^3 - \frac{\pi \cdot R^3}{3}$$

$$V_S = \frac{3\pi \cdot R^3 - \pi \cdot R^3}{3}$$

$$V_S = \frac{2\pi \cdot R^3}{3}$$

Logo, o volume da esfera (V_E) = duas vezes o volume da semiesfera (V_S).

$$V_E = 2 \cdot V_S$$

$$V_E = 2 \cdot \frac{2\pi \cdot R^3}{3}$$

$$V_E = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

Figura 87 – Registros dos resultados do problema 54 feito por um dos grupos.

Comparando o volume do cone, do cilindro e da semiesfera

Nesta atividade vocês terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio.

De posse dos moldes que servirão de apoio para modelar o cone, o cilindro e a esfera, cole-os sobre o papel-cartão, corte-os e monte-os encaixando as duas partes de cada sólido usando os cortes centrais.

Com massinha de modelar, construa os sólidos. Agora, com os sólidos prontos, vamos fazer a comparação dos volumes, seguindo as instruções abaixo:

a) Marque, no recipiente o nível de água.
b) Mergulhe o cone no recipiente e marque novamente o nível de água.
c) Retire o cone e coloque água novamente até o nível inicial.
d) Mergulhe a semiesfera e marque novamente o nível de água.
e) Retire a semiesfera e volte a colocar água até o nível anterior.
f) Mergulhe o cilindro marcando novamente o nível de água.

A partir dessa experiência, podemos concluir sobre a relação entre o volume do cone, da semiesfera e do cilindro que:

a) O volume do cilindro é __3 x__ o volume do cone, ou seja, o volume do cone é __$\frac{1}{3}$__ o volume do cilindro.

b) O volume da semiesfera é __2 x__ o volume do cone, ou seja, o volume da semiesfera corresponde a __$\frac{2}{3}$__ do volume do cilindro.

c) Qual a expressão para calcular o volume do cilindro?

$$\boxed{V = \pi R^2 . h \rightarrow V = \pi R^3}$$

d) No cilindro usado no experimento, temos que **h=r**, ou seja, a medida da altura do cilindro é igual a medida do seu raio da base. Neste caso, qual será a expressão para o cálculo do volume de um cone de mesma altura e mesmo raio da vase desse cilindro?

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2 . h}{3}} \rightarrow \quad V = \frac{\pi R^2 . R}{3} = V = \frac{\pi R^3}{3}$$

e) Qual a expressão para o cálculo do volume de uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro ?

$$\pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = V_S \qquad \boxed{V_S = \frac{2}{3} \pi R^3} \qquad V_S = \frac{3\pi R^3 - \pi R^2}{3} \qquad V_S = \frac{2}{3} \pi R^2$$

f) Logo, a expressão para o cálculo do volume da esfera será:

$$V_E = 2 . \frac{2}{3} \pi R^3 \qquad \boxed{V_E = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

Fonte: Elaboração própria

Figura 88 – Recipiente usado para medir os níveis de água (problema 54).

Fonte: Elaboração própria

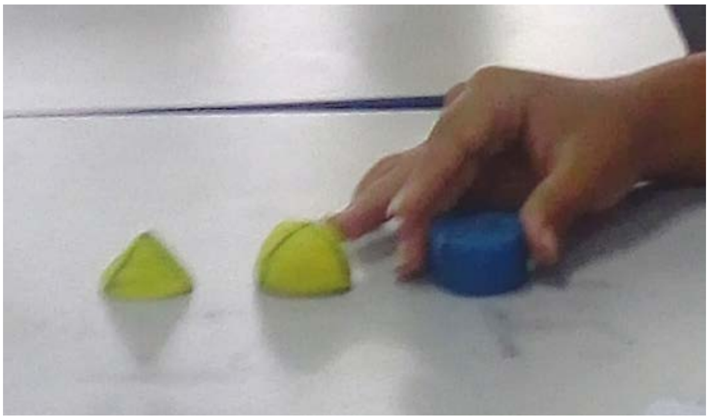
Figura 89 – Moldes para confecção do cilindro, semiesfera e cone (problema 54).

Fonte: Elaboração própria

Figura 90 – Grupo 1 modelando os corpos redondos (problema 54).

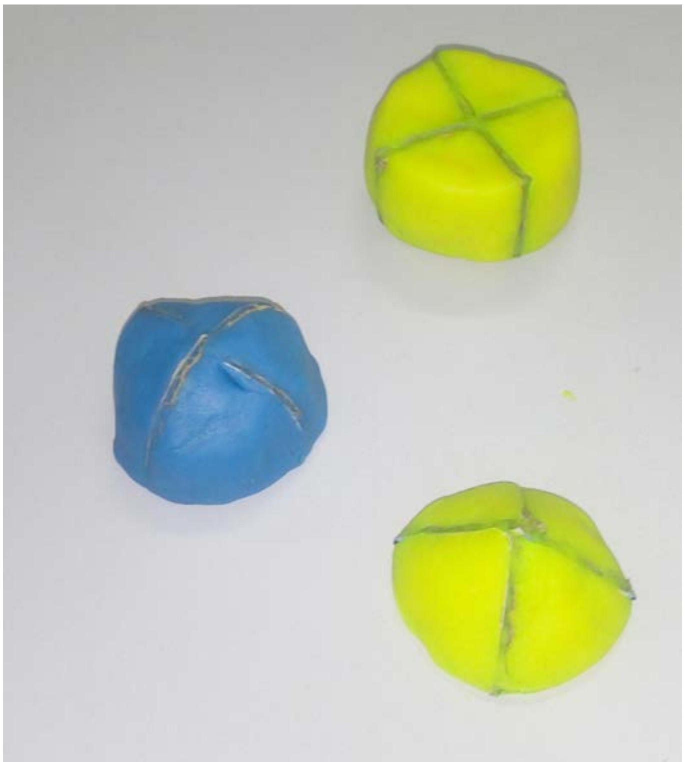
Fonte: Elaboração própria

Figura 91 – Grupo 2 modelando os corpos redondos (problema 54).



Fonte: Elaboração própria

Figura 92 – Cilindro, cone e semiesfera modelados pelo grupo 4 (problema 54).



Fonte: Elaboração própria

Figura 93 – Grupo 3 registrando os resultados encontrados (problema 54).

Fonte: Elaboração própria

4.10 Avaliação

De acordo com Brasil (1998), a avaliação deve assumir um papel formativo, favorecendo o progresso pessoal e a autonomia do aluno. Nesse sentido, a avaliação deixa de ser limitada apenas por provas e passa a ser integrada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo objeto da avaliação o progresso do aluno em relação aos domínios dos conceitos, das capacidades e das atitudes. A avaliação ainda permite ao professor melhorar sua prática docente e conscientizar o aluno de seu próprio caminhar em relação a sua aprendizagem.

Para Luckesi (2014), "a prática da avaliação da aprendizagem em seu sentido pleno, só será possível na medida em que se estiver efetivamente interessado na aprendizagem do educando."

Diante das transformações que a educação e o conceito de avaliação estão sofrendo, a pesquisadora avaliou os alunos não somente através de uma prova, mas também avaliou os seguintes itens, como consta no Termo de Compromisso (Apêndice A): assiduidade, atividades, trabalho em grupo e participação. Para avaliar tais itens, a pesquisadora coletou evidências através de observações diretas, diário de campo e as atividades recolhidas por escrito.

4.10.1 Observações diretas

Foram feitas observações diretas com o objetivo de acompanhar a participação e a interação dos alunos nos grupos, a assiduidade, a maneira como cada aluno argumentava, os seus esforços para compreender e enfrentar os problemas, elaborando propostas ou críticas, fazendo escolhas e assumindo, acima de tudo, uma atitude de constante aprendizagem.

4.10.2 Diário de Campo

O diário de campo foi um instrumento importante deste trabalho, pois nele a pesquisadora registrou os dados coletados através de suas observações. A pesquisadora anotou tudo o que ocorreu durante a aplicação dos problemas geradores, em todas as suas aulas: as interações entre os alunos, entre alunos e a pesquisadora, a postura dos alunos ao enfrentar os problemas, os seus avanços, as suas dúvidas, os registros na lousa e, ainda, reflexões sobre a sua própria prática.

4.10.3 Atividades recolhidas por escrito

Ao final de cada aula, os alunos entregaram por escrito as atividades trabalhadas. Como a pesquisadora, que também era a professora da turma, optou por não avaliar os alunos apenas com uma prova bimestral, essas atividades foram utilizadas para acompanhar as reações dos alunos e as diferentes maneiras que cada um enfrentou e resolveu os problemas. Através dessas atividades, os alunos comunicaram de maneira escrita o processo de resolução dos problemas, possibilitando que a pesquisadora avaliasse o desenvolvimento individual de cada aluno, assim como o do grupo.

Capítulo 5

Considerações Finais

O desenvolvimento da presente pesquisa possibilitou a análise de como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode colaborar para a construção de conhecimentos de Geometria Espacial no Ensino Médio. Diferente da metodologia tradicional, em que os conteúdos são apresentados pelo professor no início da aula para que depois os alunos façam exercícios de acordo com os exemplos já abordados pelo professor. Na metodologia proposta nessa pesquisa, os problemas são apresentados aos alunos antes do conteúdo e têm a função de introduzir novos conceitos, cuja construção é a última etapa da aprendizagem.

De um modo geral, os alunos se mostraram motivados com a metodologia aplicada, colaborando com o desenvolvimento das aulas. No entanto, conscientizá-los da importância do trabalho em grupo foi uma das dificuldades encontradas, visto que eles estavam acostumados a trabalhar individualmente, mostrando uma resistência inicial.

Ao fazer uma roda de conversa com os alunos, esclarecendo todas as suas dúvidas e explicando que a aprendizagem é muitas vezes um processo compartilhado, onde os alunos podem aprender uns com os outros, verificou-se que a resistência inicial foi superada. A pesquisadora e os alunos assinaram um termo de compromisso com a finalidade de orientar a disciplina em sala de aula, dessa maneira os objetivos puderam ser alcançados.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas segue o seguinte roteiro: formação de grupos, o papel do professor, resultados na lousa, plenária, análise dos resultados, consenso, formalização.

A formação de grupos possibilitou aos alunos uma maior interação com seus colegas de classe. Os alunos que possuíam menos dificuldades ajudou aqueles que estavam com mais dúvidas. A cooperação entre eles foi algo que chamou a atenção da pesquisadora. Até os alunos que a princípio estavam se mostrando menos interessados se engajaram na resolução dos problemas motivados por seus colegas.

O papel do professor não era o de transmissor de conhecimentos, mas sim o de orientador, observador, mediador e incentivador da aprendizagem. Ao lançar questões desafiadoras, os alunos se apoiaram uns nos outros para encontras as soluções. Este olhar do professor possibilitou aos alunos o desenvolvimento de segurança, iniciativa, proatividade e protagonismo.

Com o resultado na lousa, os alunos puderam observar seus erros, acertos, os diferentes caminhos que poderiam ser seguidos para obter o mesmo resultado, permitindo que os alunos fizessem comparações.

A plenária foi um momento importante, onde os alunos puderam defender seus pontos de vista, participaram de maneira dinâmica, aprendendo a respeitar a opinião dos colegas e expor suas ideias. Seguindo a plenária, foi feita a análise dos resultados e o consenso, chegando-se a um resultado final e correto.

Depois de todas essas etapas, seguiu a formalização na lousa. Nessa etapa, a pesquisadora colocou todas as definições, demonstrações e propriedades matemáticas na lousa. Este momento foi importante, pois os alunos aprenderam novas definições, conteúdos e terminologias próprias da matemática. Houve a construção de novos conceitos de Geometria Espacial por parte dos alunos.

Dada a importância de se trabalhar Geometria Espacial no Ensino Médio e sendo esse um conteúdo amplo, faz-se necessário a dedicação de mais tempo para cada unidade, possibilitando um estudo mais detalhado e acessível, ainda destacam-se como sugestões para trabalhos futuros o estudo de temas que são abordados no ENEM, como Estatística e Matemática financeira, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nesse sentido, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma forma eficiente para a construção de novos conceitos de Geometria Espacial, permitindo aos alunos o desenvolvimento de seu protagonismo.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas. In: ____. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí: São Paulo: Paco Editorial, 2014. cap. 2 - Parte 1, p. 35. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.

ALVES, G. Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador. *Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE)*, v. 1, n. 1, p. 1–10, November 2007. Citado na página 17.

AZEVEDO, E. Q. d. Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas. 2002. Citado na página 44.

BRASIL, M. d. E. d. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília (DF), 1998. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 39 e 108.

BRASIL, M. d. E. d. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio)*. Brasília: MEC, SEMTEC. [S.l.], 2002. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 38, 39, 40 e 44.

BRASIL, M. d. E. d. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza e Matemática*. Brasília: MEC, SEMTEC. [S.l.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 40.

BRASIL, M. d. E. d. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 12/11/2018 às 18:00. Citado na página 16.

DANTAS, E. H. *Uso da realidade aumentada no ensino da geometria espacial*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2018. Citado na página 17.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. [S.l.]: Editora Ática, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.

DANTE, L. R. *Matemática - volume único*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009. Citado na página 55.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplica cões: ensino médio*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 75, 79, 82, 88, 91, 93, 97 e 100.

ECHEVERRÍA, M. d. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *A solução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas*, p. 1–12, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

EJA, N. *Matemática e suas tecnologias - módulo 3*. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 50, 80, 86, 95, 98 e 102.

EJA, N. *Matemática e suas tecnologias - módulo 3 - Professor*. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 53, 54, 62 e 92.

ENEM. *Provas e gabartitos ano 2010*. 2010. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 21/11/2018 às 14:00. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

ENEM. *Provas e gabaritos 2011*. 2011. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 25/11/2018 às 18:20. Citado na página 72.

ENEM. *Provas e gabaritos ano 2012*. 2012. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 25/11/2018 às 18:00. Citado na página 59.

ENEM. *Provas e gabaritos ano 2016*. 2016. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 26/11/2018 às 18:35. Citado na página 60.

FIZZON, L. M. *O uso de jogos e material concreto no ensino de geometria espacial*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT- Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018. Citado na página 17.

HUANCA, R. R. H. *A resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.

HUANCA, R. R. H. *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro - SP, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 2 - Ensino Médio. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 87.

INEP. *Portal do ENEM*. 2018. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 10/11/2018 às 20:00. Citado na página 16.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições.* [S.l.]: Cortez editora, 2014. Citado na página 108.

MENDES, M. A. *Geometria Espacial: O cilindro e sua área.* 2011. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28286>. Acesso em: 18/08/2017 às 20:00. Citado na página 68.

ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: ____. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199–220. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 30 e 47.

ONUCHIC, L. d. l. R.; NOGUTI, F. C. H. A pesquisa científica e a pesquisa pedagógica. In: ____. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. Jundiaí: São Paulo: Paco Editorial, 2014. cap. 3 - Parte I, p. 53–67. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 36.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. [S.l.]: Editora Interciencia, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21, 22, 26 e 41.

PPP. *Projeto Político Pedagógico - Colégio Estadual Chequer Jorge*. Itaperuna - RJ, 2019. Citado na página 47.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. d. *Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo - Rio Grande do Sul - Brasil: Universidade Freevale, 2013. Citado na página 38.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 20, n. 27, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 32, 33, 34 e 35.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics*, p. 31–42, 1989. Citado na página 27.

SILVA, E. L. d.; MENEZES, E. M. Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação. *Revista Atual*, Florianópolis: UFSC, v. 4, p. 138p, 2005. Citado na página 38.

SILVA, L. P. M. *Exercícios sobre área da esfera*. 2018. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-area-esfera.htm>. Acesso em: 28/08/2018 às 19:20. Citado na página 99.

SILVA, M. B. da. A geometria espacial no ensino médio a partir da atividade webquest: Análise de uma experiência. 2006. Citado na página 17.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. *24ª Reunião*, 2001. Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A

Autorização

A.1 Autorização assinada pela diretora permitindo o desenvolvimento do projeto durante as aulas de matemática

UENF PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA

AUTORIZAÇÃO

Prezada Diretora,

Eu, **Carla Valéria Dionízio de Souza**, professora e discente, regularmente matriculada no curso de Pós-Graduação em Matemática, pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, venho solicitar por meio desta, a V. Senhoria, **Profa. Vânia Lúcia Pieruccetti Souza, Diretora Geral do C. E. Chequer Jorge,** a autorização para que possa desenvolver meu experimento de mestrado na turma 2001 do 2° ano do Ensino Médio.

As atividades serão realizadas durante as aulas de matemática, com o seguinte tema: GEOMETRIA ESPACIAL SOBA METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃ DE PROBLEMAS, em que òs alunos irão obter de forma significativa e motivadora, o entendimento de assuntos relacionados às Geometria Espacial.

Atenciosamente

Itaperuna, 01 de setembro de 2017

CVDSouza

Carla Valéria Dionízio de Souza

Profa. De Matemática

Autorizo 01/09/17.

Vânia Lúcia Pieruccetti de S
DIRETORA GER...
MAT. 189213-...
ID. 40060039

APÊNDICE B

Termo de Compromisso

B.1 Termo de Compromisso

PROFMAT

Termo de compromisso

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Objetivo: Este termo de compromisso tem por finalidade direcionar nosso trabalho durante a aplicação do projeto Geometria Espacial para a vida. Neste, encontram-se as responsabilidades e direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado com a turma 2001 do Ensino Médio da Escola Estadual Chequer Jorge.

Conteúdo e Metodologia: Estaremos, sempre que possível, utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de problemas.

Normas: Os alunos trabalharão em grupos de forma que possam colaborar uns com os outros, propondo soluções e resolvendo os problemas propostos.

- Os grupos serão formados por quatro alunos, e quando não for possível, por três.
- O aluno, mesmo estando em grupo, deverá comprometer-se a explorar os problemas propostos com o objetivo de solucioná-los.
- O trabalho individual de cada aluno influenciará diretamente no resultado do grupo.
- A formalização final dos conceitos será de responsabilidade da professora.

Avaliação: Cada aluno será avaliado individualmente nos seguintes itens:

- ASSIDUIDADE – 1 ponto – Todos os alunos deverão estar presentes no local e horário marcados.
- ATIVIDADES - 1 ponto - As atividades extraclasse serão recolhias no início de cada aula.
- TRABALHO EM GRUPO – 2 pontos - O desenvolvimento do trabalho em grupo será observado e avaliado pela professora.
- PARTICIPAÇÃO – 1 ponto - Será avaliada a participação do aluno nas discussões das atividades propostas.
- PROVA – 5 pontos – A avaliação será escrita e individual, constituída de questões objetivas e discursivas.

Outros problemas e questões que possam surgir durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos pelos alunos e pela professora com a finalidade de serem solucionados. Todas essas normas serão cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente e de pleno acordo com as condições propostas, assinamos abaixo.

Itaperuna, _______ de _______________________de 2017.

_______________________________ _______________________________

Professora Aluno (a)

APÊNDICE C

Lista de problemas por semana

C.1 Atividades da primeira semana

PROFMAT

Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:______________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Primeira semana de atividades

- **Problema 1**

(EJA, 2013a, p.57) Suponha que você quer fazer uma visita à Biblioteca Nacional no Rio de Janeiro. Para conhecer melhor as cercanias, você acessou o Google Maps, digitou "Biblioteca Nacional" e clicou em Ok. O site apresentou um mapa com 3 endereços, todos no centro do Rio: o da Fundação Biblioteca Nacional, marcado com A no mapa; o da Biblioteca Nacional, marcado como B, no mapa e o do escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional, marcado como C no mapa.
Ao longo do percurso, você aproveitou o trajeto para responder como verdadeiro ou falso algumas dúvidas de um amigo, sempre considerando as ruas e avenidas como retas e os endereços como pontos.

a) O ponto A (Fundação Biblioteca Nacional) pertence à Av. Rio Branco)
b) O ponto C (escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional) não pertence à Av. Graça Aranha.
c) O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à Av. Almirante Barroso.
d) O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à rua Debret.

e) O Museu Nacional de Belas Artes (logo acima do ponto A) pertence à Avenida Rio Branco.
f) Os 3 endereços da Biblioteca Nacional (pontos A, B e C) são colineares.
g) A estação do metrô Uruguaiana (representada pela letra M) não pertence à rua Uruguaiana.
h) As estações do metrô Carioca e Cinelândia, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

As estações do metrô Carioca, Cinelândia e Uruguaiana, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

Ainda observando o mapa da região do centro do Rio de Janeiro. Só que, desta vez, as perguntas dizem respeito à posição das ruas. Note que as ruas e avenidas continuam representando retas e os endereços representando os pontos. Analise as afirmações como sendo verdadeiras ou falsas.

i) A Av. Almirante Barroso é perpendicular a Av. Rio Branco.
j) A Rua Debret e a Rua México são concorrentes.
k) A Av. Graça Aranha, a rua México e a Av. Rio Branco são paralelas.
l) A rua São José e a Av. Nilo Peçanha não são concorrentes.
m) A rua do Carmo é perpendicular à rua da Assembleia.

- **Problema 2**

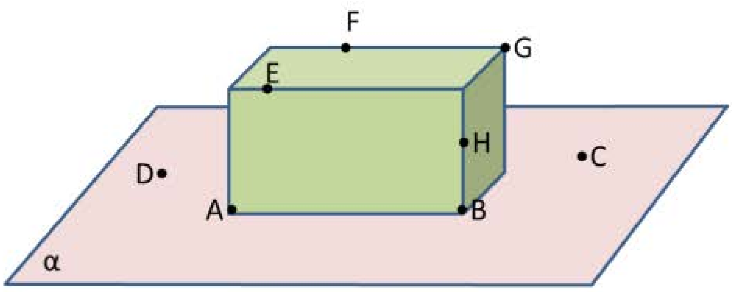
(EJA, 2013b, p.54-55) Escolham um dos retângulos da planificação abaixo, nomeando os vértices como A, B, C e D sobre este retângulo e considere a aresta AB. Marquem dois pontos, E e F entre A e B. identifiquem se A, B, E e F são colineares ou alinhados. Observem os pontos A, B, C e D. Eles são coplanares? Ainda respondam as seguintes perguntas:

a) Numa reta, bem como fora dela, existem quantos pontos?
b) Por dois pontos distintos, passam quantas retas?
c) Num plano, bem como fora dele, existem quantos pontos?
d) Por três pontos distintos passam quantos planos?

Após responderem as perguntas, montem o paralelepípedo.

- **Problema 3**

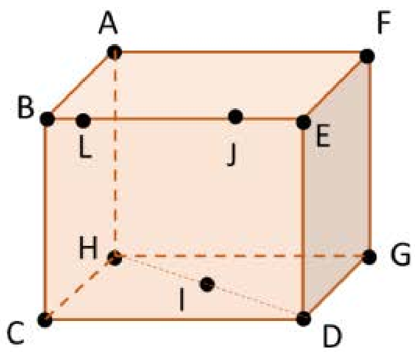
(EJA, 2013b, p.56-57) A partir das discussões promovidas em aula, observe a figura e responda às questões propostas:



a) Existe uma reta que passa por G e C da figura?
b) Dois pontos são sempre colineares? Justifique a sua resposta.
c) Sob que condições três são colineares? Que figura geométrica plana pode ser formada por três pontos não colineares?
d) Os pontos A, B, E e H são coplanares? E os pontos A, B e G? E os pontos E, F, G H?
e) Três pontos distintos são coplanares? Baseado nesta resposta, você saberia justificar por que uma mesa com três pés é mais firme do que uma com quatro pés? Que postulado de Euclides justifica esta resposta?

- **Problema 4**

(DANTE, 2009, p.344) Observe os pontos de A a L nos vértices, arestas e faces do cubo abaixo.



Verifique se os pontos indicados em cada item são ou não colineares e coplanares.

a) **A** e **D**
b) **A, F** e **E**
c) **H, I** e **D**
d) **B, C** e **D**
e) **E, J** e **L**
f) **B, E, L** e **J**
g) **C, H, F** e **E**
h) **B, C, H** e **I**
i) **H, D, I** e **E**

- **Problema 5**

(DANTE, 2009, p.344) Considere que os pontos, as retas e os planos citados são distintos e verifique se cada afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Por 2 pontos passa uma única reta.
b) 3 pontos são sempre colineares.
c) 3 pontos nunca são colineares.
d) 3 pontos podem ser colineares
e) Existem 5 pontos coplanares.
f) Existem 5 pontos não-coplanares.
g) Existem 3 pontos não-coplanares.
h) Pontos colineares são coplanares.
i) Pontos coplanares são colineares.
j) Pontos coplanares podem ser colineares.

- **Problema 6**

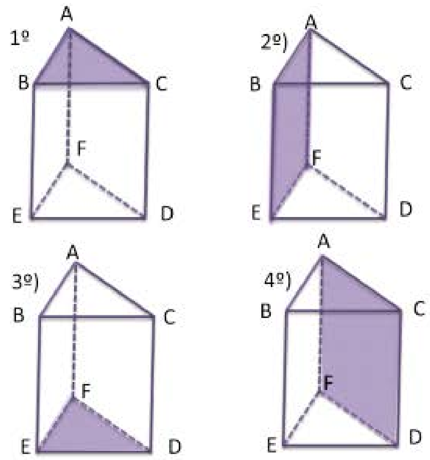
(DANTE, 2009, p.346) Observe as figuras e considere:

α = plano determinado pela reta ED o ponto F.

β = plano determinado pelas retas paralelas AF e CD

γ = plano determinado pelas retas concorrentes AB e BC.

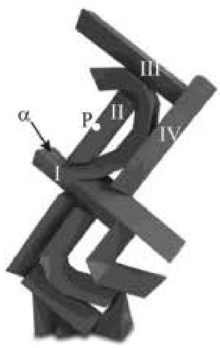
δ = plano determinado pelos pontos não-colineares B, A e E.



Identifique em cada figura (1ª, 2ª, 3ª ou 4ª) qual é o plano correspondente à face pintada (α, β, γ ou δ).

- **Problema 7**

(ENEM 2009) Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.

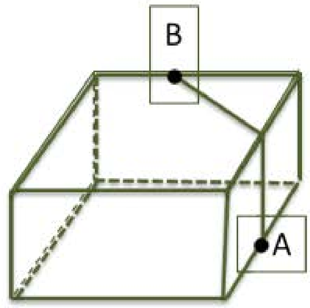


Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

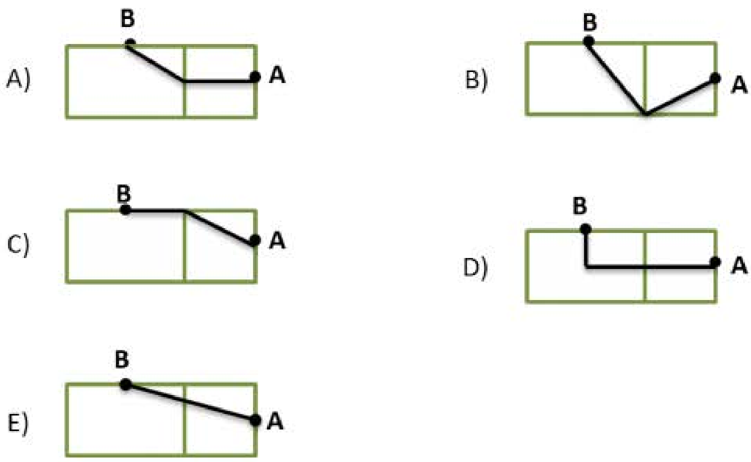
a) dois triângulos congruentes com correspondentes paralelos.
b) dois retângulos congruentes e com correspondentes paralelos.
c) dois trapézios congruentes com correspondentes perpendiculares.
d) dois paralelogramos congruentes com correspondentes paralelos.
e) dois quadriláteros congruentes com correspondentes perpendiculares.

- **Problema 8**

(ENEM 2010) A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.

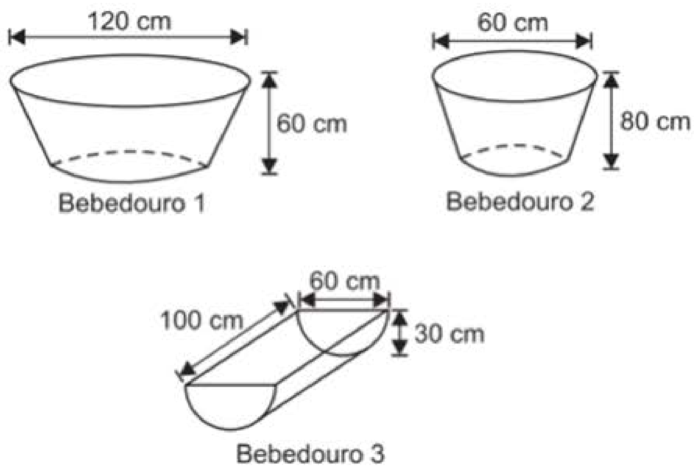


Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. afim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto. O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e b poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

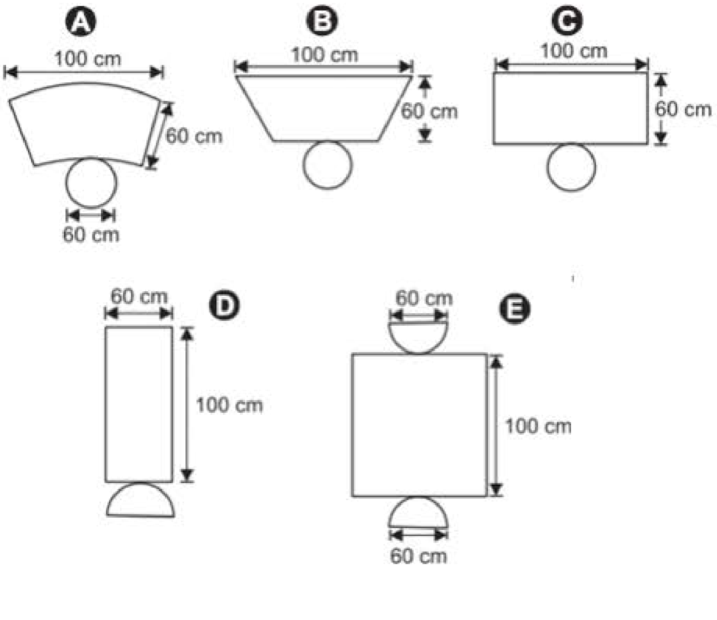


- **Problema 9**

(ENEM 2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



C.2 Atividades da segunda semana

PROFMAT

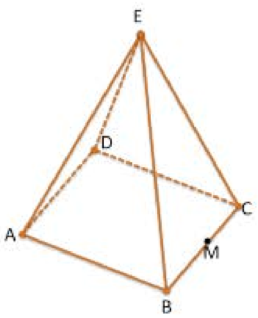
Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:____
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Segunda semana de atividades

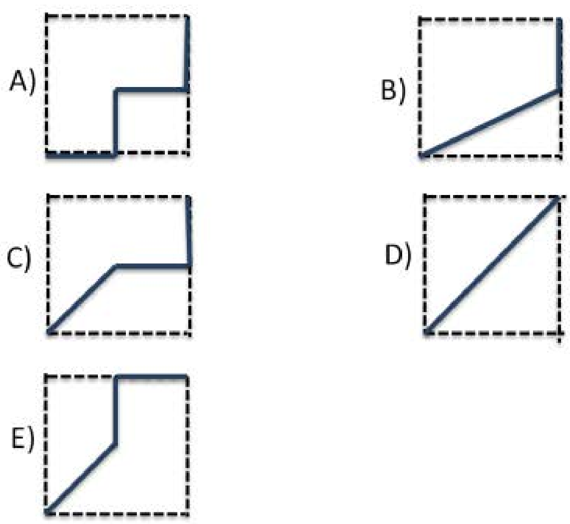
- **Problema 10**

(ENEM 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



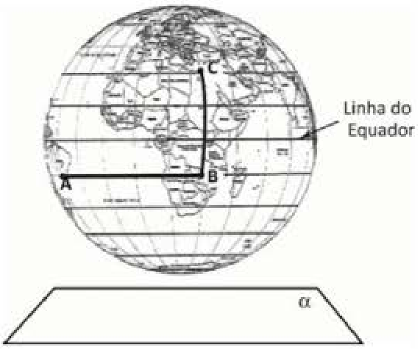
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é:

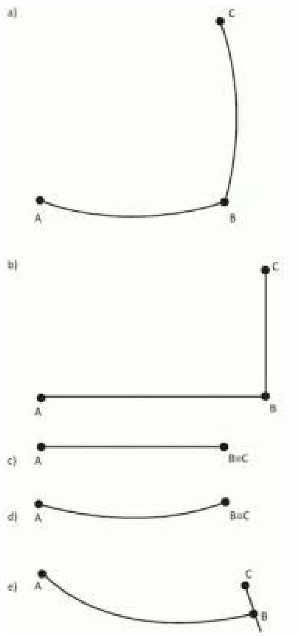


- **Problema 11**

(ENEM 2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A **projeção ortogonal**, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por:



- **Problema 12**

Reconhecendo sólidos geométricos em objetos do cotidiano

(EJA, 2013b, p.62-63) – Adaptado Manuseiem os materiais e observem suas características. Dividam o material em dois grupos: poliedros e não poliedros. Em seguida, separem os poliedros em convexos e não convexos.

Agora, realizem as questões propostas.

a) Quais dos objetos analisados representam poliedros?
b) Quais dos objetos que foram classificados como poliedros são convexos e quais são não convexos?
c) Com somente os objetos que foram classificados como poliedros convexos, preencham a seguinte tabela.

Objeto	Nº de vértices(V)	Nº de faces(F)	Nº de arestas(A)	V + F - A

d) Você consegue observar alguma relação entre os números de vértices, faces e arestas dos objetos selecionados no item c?

- **Problema 13**

(EJA, 2013b, p.76) No México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema de armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de bola colocada sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais. Quantas arestas e quantos vértices tem esse silo?

- **Problema 14**

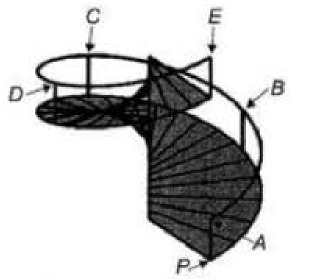
(EJA, 2013b, p.76) Num poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces?

- **Problema 15**

(EJA, 2013b, p.76) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, com 60 faces triangulares. Calcular o número de vértices desse cristal.

- **Problema 16**

(ENEM – 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A,B,C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto E.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão da pessoa é:

A) B) C) D) E)

- **Problema 17**

(EJA, 2013b, p.76) Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais. O número de arestas e o número de vértices deste poliedro são.

- **Problema 18**

(Elaboração própria) Montando os sólidos de Platão.

De posse das planificações dos Sólidos de Platão, recortem-nas. Agora montem os sólidos geométricos, observando as suas características.

C.3 Atividades da terceira semana

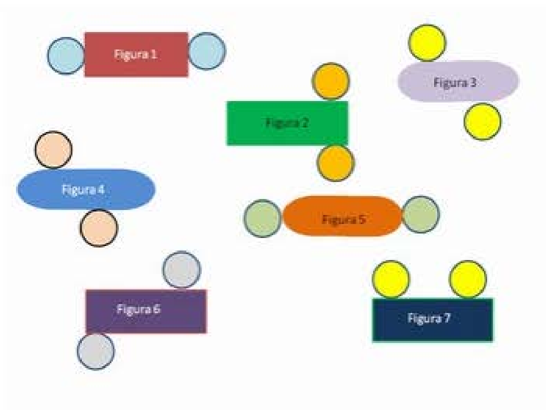
Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:___________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

Terceira semana de atividades

- **Problema 19**

(MENDES, 2011) De posse do cilindro fornecido pelo professor, observem-no e faça o que se pede.

1- Faça um esboço do cilindro.
2- Escreva as características do cilindro.
3- Entre os moldes a seguir, quais podem ser usados para se construir um cilindro?



a) Resposta: ___________________
b) Por que você escolheu esse molde?

4- Façam um esboço dos moldes que representam a planificação de um cilindro.

5- Observando os moldes que deram certo para a construção do cilindro, podemos observar que:

a) superfície lateral é formado por um polígono chamado de ______________________
b) As bases do cilindro são formadas por _____________________________________

6- Estando com o cilindro fornecido pelo professor, já construído, colem barbante no perímetro (contorno) do círculo que forma a base e também na superfície lateral de modo a destacar a altura do cilindro.

7- Recortem o cilindro do lado do barbante de forma a planificá-lo.

8- Agora observem o retângulo da planificação.
   a) Qual a medida do seu comprimento?
   b) Qual a medida de sua altura?

9- Logo, como é possível calcular a área lateral desse cilindro?

10- Observem novamente a planificação do cilindro. Qual figura forma as suas bases?

11- Ao planificarmos o cilindro, obtivemos um retângulo e dois círculos. Logo, o que você faria para calcular a área total do cilindro?

- **Problema 20**

(Elaboração própria) Um cilindro equilátero tem altura de 20 cm. Calcule:
a) A área lateral
b) A área da base
c) A área total

- **Problema 21**

***(DANTE, 2009, p.384)* –** Adaptado Um tanque cilíndrico tem 4 m de profundidade. Sua base superior é aberta e tem 6m de diâmetro. Quantos galões de tinta são necessários para pintar o interior desse tanque, se para cada metro quadrado gasta-se $\frac{1}{4}$ de galão?

- **Problema 22**

(DANTE, 2009, p.384) Num cilindro, a altura é igual ao raio da base. Sabe-se também que a área a área lateral desse cilindro é de 16π cm^2. Calcule a área total do cilindro.

- **Problema 23**

(DANTE, 2009, p.384) Uma lata de refrigerante tem a forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro nas bases e 15 cm de altura. Quantos centímetros quadrados de material são necessários, aproximadamente, para fabricar essa lata de refrigerante?

- **Problema 24**

(DANTE, 2009, p.384) Sabe-se que a área lateral de um cilindro é 20π cm^2. Se o raio d base é 5 cm, calcule a medida h da altura e a área total do cilindro.

- **Problema 25**

(DANTE, 2009, p.384) Duas latas têm forma cilíndrica. A lata mais alta tem o dobro da altura da outra, mas seu diâmetro é a metade do diâmetro da lata mais baixa. Em qual das duas latas se utiliza menos material?

- **Problema 26**

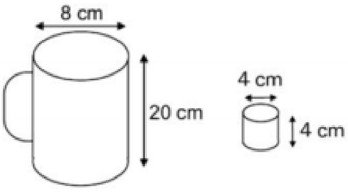
(ENEM 2001) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores, Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la. Ciência Hoje das crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize π(pi) = 3)

a) 20 ml. b) 24 ml. c) 100 ml. d) 120 ml. e) 600 ml.

- **Problema 27**

(ENEM 2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

- **Problema 28**

(ENEM 2010) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura.

Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando π(pi) =3,1 como valor aproximado de, então o preço dessa manilha é igual a

A) R$ 230,40.

B) R$ 124,00.

C) R$ 104,16.

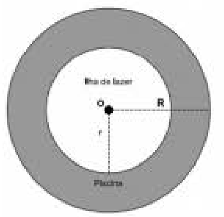
D) R$ 54,56.

E) R$ 49,60

- **Problema 29**

(ENEM 2013) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m3, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m3.

Considere 3 como valor aproximado para π.



Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de:

A) 1,6
B) 1,7
C) 2,0
D) 3,0
E) 3,8

- **Problema 30**

(ENEM 2016) Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio *R*, com volume dado por $\frac{4}{3}.\pi(R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\ (\frac{R}{3})^2.\ h$, sendo *h* a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de *R*) deverá ser igual a:

A) 2R
B) 4R
C) 6R
D) 9R
E) 12R

- **Problema 31**

(ENEM 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

- **Problema 32**

(IEZZI et al., 2013) Embalagens metálicas, custos de produção e a matemática.

Leiam o texto a seguir.

Na indústria de alimentos existem diversos tipos de embalagens para acondicionar os produtos e preservar as suas características por mais tempo. Entre elas, existem as latas metálicas e cilíndricas.

A superfície interna das latas metálicas é revestida com um verniz especial que evita o contato direto do alimento com o metal

A matéria-prima para a fabricação de latas metálicas são as **folhas de flandres** (enroladas em grandes bobinas). As folhas de flandres podem ser de ferro ou aço, laminadas e normalmente revestidas com estanho.

Imagine que uma empresa, com o objetivo de reduzir custos, estuda as possibilidades de produzir outras embalagens cilíndricas e metálicas, que acondicionem a mesma quantidade de leite em pó, porem com custo de produção inferior ao custo de produção das atuais embalagens. Uma dessas embalagens tem as seguintes dimensões: altura igual a 11 cm e diâmetro igual a 10 cm.

Vamos resolver o problema levantado pela empresa, seguindo os seguintes passos: (Use π = 3,14)

- Calcule o volume da embalagem atual.
- Calcule a área total de sua superfície.
- Estabeleça uma relação entre o diâmetro (d) e a altura (h).

A partir de agora, fica facilitada a tarefa de conhecer as dimensões (d e h) de outros cilindros que satisfaçam a relação encontrada no item anterior.

d (cm)	h (cm)	A_t (cm^2)
10	11	502,40
8		
5		
15		
12		

Existem latas de mesmo volume que podem ser fabricadas com quantidades diferentes de aço? Qual a embalagem que consome menor quantidade possível de material, entre as que tem dimensões acima?

C.4 Atividades da quarta semana

PROFMAT

Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:____________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

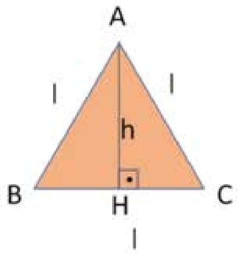
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Quarta semana de atividades

- **Problema 33**

(Elaboração própria) Revisando áreas

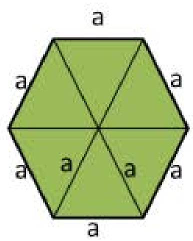
1- Desenhe um triângulo qualquer.
2- Qual a relação entre a área do retângulo e a área do triângulo?
3- Podemos afirmar então que a área do triângulo é __________ da área do retângulo.
4- Observe agora o triângulo equilátero.



a) Que tipo especial é o triângulo AHC e ABH?
b) Obtenha a altura do triangulo ABC:h=
c) Substitua a altura que você encontrou no item anterior na fórmula encontrada para área do triângulo:

A área do triângulo equilátero será dada pela fórmula:

5- Área do hexágono regular



a) O hexágono regular é formado por 6 triângulos do tipo:
b) Sendo ***a*** o lado do hexágono regular, a sua área será dada pela fórmula:

6- Área do trapézio:

a) Agora você mesmo vai construir um trapézio. Não se esqueça de relacioná-lo a um dos polígonos que já estudamos.

b) A partir da sua intuição e dos seus conhecimentos matemáticos, escreva a fórmula da área de um trapézio.

- **Problema 34**

(EJA, 2013a, p.97) – Adaptado A construção de uma piscina!!!

Vamos supor que sua família irá construir uma piscina na casa nova para onde estão se mudando. Suas dimensões serão: 2 metros de profundidade, 4 metros de largura e 6 metros de comprimento.

Para realizar essa empreitada, você vai precisar de duas importantes informações: a primeira é a quantidade de material necessária para a realização da obra. Como por exemplo, quantos metros quadrados de azulejo serão necessários para ladrilhar a piscina. A segunda é a quantidade de água necessária para encher a piscina.

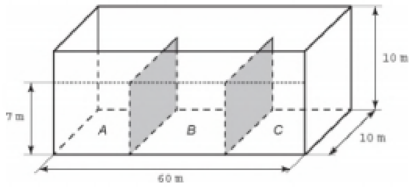
Vamos descobrir essas duas informações!!

Todos da família adoraram a ideia de construir uma piscina, mas você ficou pensando se não seria muito melhor construir uma piscina diferente, com borda circular. Suas dimensões seriam: o raio medindo 2,75m e sua profundidade, 2m. Como no caso anterior, você quis descobrir a quantidade de azulejo para revestir a piscina e a quantidade de água necessária para enchê-la (volume). Vamos descobrir essas duas informações!!!

Levando em consideração a quantidade de azulejo necessário para revestir a piscina e o volume de cada um dos modelos, qual dos modelos você acha mais vantajoso escolher: a piscina em forma de prisma com base retangular ou de cilindro?

- **Problema 35**

(ENEM 2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, *A, B* e *C*, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



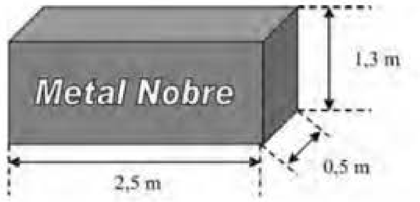
Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.
Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

a) $1,4 \times 10^3$ m^3
b) $1,8 \times 10^3$ m^3
c) $2,0 \times 10^3$ m^3
d) $3,2 \times 10^3$ m^3
e) $6,0 \times 10^3$ m^3

- **Problema 36**

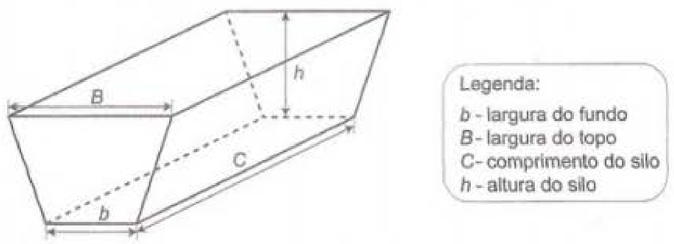
(ENEM 2010) A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



a) Massa
b) Volume
c) Capacidade
d) Superfície

- **Problema 37**

(ENEM 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



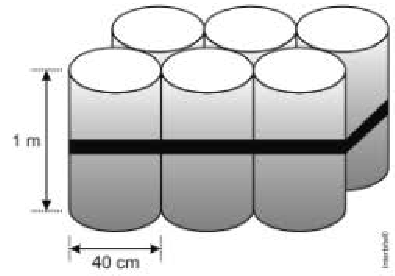
Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m3 desse tipo de silo. EMBRAPA. Gado de corte. *Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).*

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.
b) 125.
c) 130.
d) 220.
e) 260.

- **Problema 38**

(ENEM 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere $\pi=3$)

a) R$ 86,40.

b) R$ 21,60.

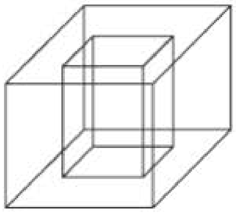
c) R$ 8,64.

d) R$ 7,20.

e) R$ 1,80.

- **Problema 39**

(ENEM 2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

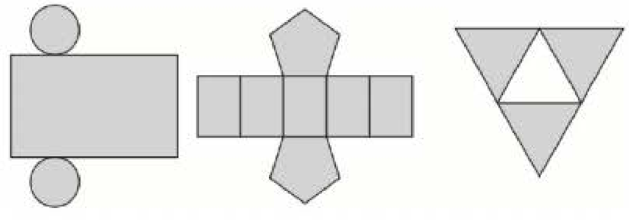


O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

a) 12 cm^3.
b) 64 cm^3.
c) 96 cm^3.
d) 1 216 cm^3.
e) 1 728 cm^3.

- **Problema 40**

(ENEM 2012) Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide
c) Cone, tronco de pirâmide e prisma
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma
e) Cilindro, prisma e tronco de cone

- **Problema 41**

(ENEM 2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que tem o formato de cubo é igual a

a) 5 cm

b) 6 cm

c) 12 cm

d) 24 cm

e) 25 cm

C.5 Atividades da quinta semana

PROFMAT

Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:____________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

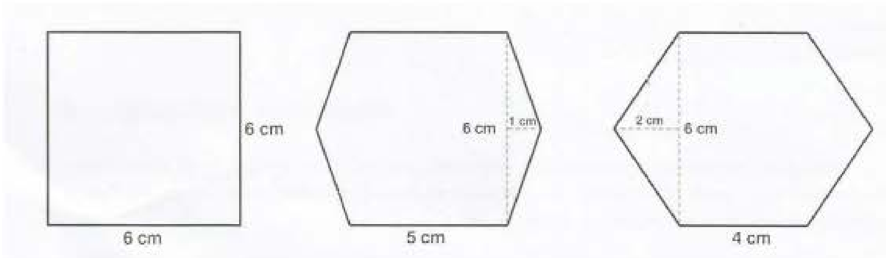
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Quinta semana de atividades

- **Problema 42**

(EJA, 2013b, p.147) – Adaptado **Volume de pirâmides**

Escolha um dos modelos como base para a construção de uma pirâmide.



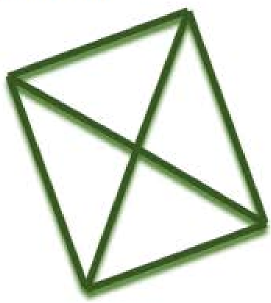
Reproduzam no papelão o molde da base da pirâmide. Perfurem o papelão no centro da base e nele fixem o canudo ortogonal à base com fita adesiva.

Agora vocês farão a planificação da pirâmide, marcando em uma folha de papel A4 os pontos que correspondem aos seus vértices. Por fim, liguem todos os pontos marcados na folha e desenhe uma aba para facilitar a montagem. Colem pedaços de papelão nas faces para dar firmeza ao modelo.

Etapa concluída!! Agora preencham a pirâmide com grãos de arroz e despeje no copo descartável. Comparem os níveis dos copos com os outros grupos. O que vocês notaram em relação ao volume das pirâmides construídas?

- **Problema 43**

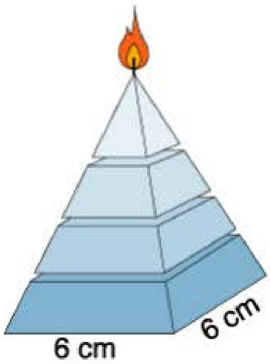
(Elaboração própria) Matheus está construindo e chegou a hora de fazer o telhado de sua casa. A área que receberá o telhado é retangular e tem dimensões 7m por 9m. Ele optou por fazer um telhado com quatro águas, como na figura abaixo.



a) Sabendo que a estrutura do telhado forma uma pirâmide de base retangular e altura igual a 1,6 metros, quantos metros quadrados de telha serão necessários para fazer o telhado?
b) Quantas telhas serão necessárias comprar se para cada metro quadrado são utilizadas 13 telhas?
c) Sabendo que o preço de cada telha escolhida por Mateus custa R$ 1,60, quanto ele gastará para comprar as telhas?

- **Problema 44**

(ENEM 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos da mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior – espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3
b) 189 cm^3
c) 192 cm^3
d) 216 cm^3
e) 540 cm^3

C.6 Atividades da sexta semana

PROFMAT
Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Alunos:______________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

Sexta semana de atividades

- **Problema 45**

Comparando o cone com o cilindro

***(EJA, 2013b, p.156)* –** Adaptado De posse da planificação de um cilindro e um cone de mesmo raio da base e mesma altura, recortem-nos e montem-nos. Observem que uma das bases do cilindro e a base do cone não devem ser coladas, para que vocês possam encher e esvaziar os sólidos com grãos de arroz.

a) Qual deles tem maior volume?
b) Quantas vezes o cone "cabe" no cilindro?
c) Estabeleçam uma relação entre o volume do cilindro e do cone.
d) Realce com caneta as linhas importantes do cone, como sua geratriz e seu raio.

- **Problema 46**

(Elaboração própria) No verão, é muito comum as pessoas tomarem sorvete na casquinha. Uma casquinha de sorvete assemelha-se a um cone de diâmetro igual a 6 cm e altura igual a 12 cm. Calcule o volume, em mililitros, de sorvete necessário para preencher a casquinha completamente.

- **Problema 47**

***(EJA, 2013a, p.141)* –** Adaptado Um empresário deseja fazer um doce de chocolate no formato cilíndrico, com diferentes recheios e embrulhado num papel colorido com cores vibrantes para que possa atrair seus fregueses.

Como em todo plano de ação, ele precisa planejar os custos de produção. Para isso, é necessário saber a quantidade de papel que será empregada para embalar cada unidade do doce e também a quantidade de chocolate utilizada na fabricação de cada um.

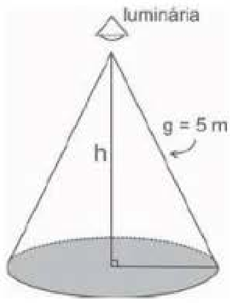
Em termos matemáticos, o empresário precisa conhecer a área do cone para saber o gasto para embalar cada unidade de doce. Também precisa conhecer o volume do cone, para saber a quantidade de chocolate necessária para fabricar cada doce.

As dimensões do doce escolhido pelo empresário são: 7 cm de altura e 2 cm de raio da base.

a) Sabendo que o papel deve cobrir tanto a base do cone quanto a sua superfície lateral, vamos ajudar esse empresário a calcular quantos metros quadrados de papel serão necessários para embrulhar cada doce.
b) E a quantidade de chocolate, em litros, para fabricar cada doce.

- **Problema 48**

(ENEM 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

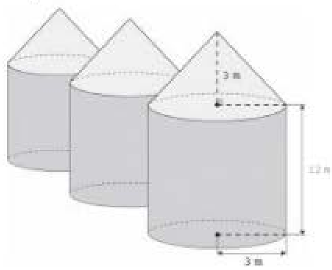


Sabendo que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando π=3,14, a altura h será igual a:

a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 9 m
e) 16 m

- **Problema 49**

(ENEM2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



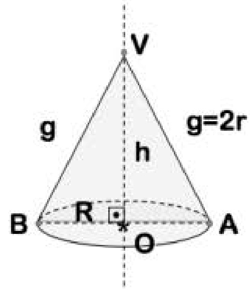
Utilize 3 como aproximação para π.
O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6
b) 16
c) 17
d) 18
e) 21

- **Problema 50**

(EJA, 2013a, p.144) Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana (plano que contém a reta que passa pelo vértice e pelo centro do círculo) é um triângulo equilátero, conforme mostra a figura a seguir.

Sabendo que o raio deste cone é de 1 cm determine:
a) A área da base do cone,
b) A área lateral do cone
c) A área total do cone
d) O volume do cone



C.7 Atividades da sétima semana

PROFMAT

Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:____
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Sétima semana de atividades

- **Problema 51**

(EJA, 2013b, p.186) – Adaptada Diferenciando superfície esférica e esfera

Com essa atividade você poderá identificar a diferença entre superfície esférica e esfera a partir das noções de superfície e sólido de revolução.

Com o compasso, trace um arco de circunferência de modo que você possa marcar uma semicircunferência e o diâmetro na folha de papel e a depois recortar como molde para um semicírculo. Depois obtenha a semicircunferência fazendo o contorno com o arame.

Após ter confeccionado os moldes, usem dois lápis como eixo, colando-os sobre o diâmetro do semicírculo e fixando o arame no caso da semicircunferência. Agora, girem a semicircunferência e o semicírculo em torno do eixo e tirem suas conclusões.

Classifiquem os seguintes objetos esféricos a seguir como esfera ou casca esférica, discutindo com os colegas as suas escolhas.

a) Laranja
b) Bolinha de tênis de mesa
c) Planeta Terra
d) Bolinha de gude
e) Bola de boliche
f) Lua
g) Bola de enfeite de Natal
h) Limão
i) Bola de basquete
j) Bola de sinuca
k) Bolha de sabão
l) Bola de canhão antiga
m) Bexiga em formato esférico
n) Bola de tênis de campo
o) Bola de pilates
p) Bola do lançamento de pelota (atletismo)
q) Bola de beisebol
r) Bola do lançamento de martelo (atletismo)
s) Bola de golfe

- **Problema 52**

(Silva 2018) Um artesão confecciona esferas de madeira para sua próxima criação. Ele terá que pintar três dessas esferas de branco e duas de vermelho para seu trabalho. Em suas pesquisas, conseguiu encontrar um artesão que vende tintas por centímetro quadrado, o que lhe sairá muito mais em conta. O metro centímetro quadrado da tinta branca custa R$ 0,09 e da tinta vermelha custa R$ 0,02. Sabendo que o raio da esfera vermelha é de 4 centímetros e que o raio da esfera branca é de 9 centímetros, quanto esse artesão gastará com tinta? (Considere $\pi = 3$).

a) R$ 91,32

b) R$ 262,44

c) R$ 270,12

d) R$ 7,68

e) R$ R$ 0,31

- **Problema 53**

(ENEM 2016) A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 1

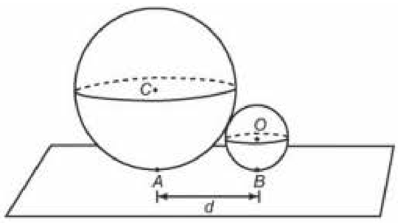


Figura 2

Considere o ponto *C* como o centro da bocha, e o ponto *O* como o centro do bolim. Sabe-se que *A* e *B* são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre *A* e *B* é igual a *d*. Nessas condições, qual a razão entre *d* e o raio do bolim?

a) 1
b) $2\sqrt{10}$
c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
d) 2
e) $\sqrt{10}$

C.8 Atividades da oitava semana

Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
Alunos:______________________________________
Grupo: ________ Turma: __________ Data: __/__/__

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Oitava semana de atividades

- **Problema 54**

(EJA, 2013b, p.198) **–** Adaptado **Comparando o volume do cone, do cilindro e da semiesfera**

Nesta atividade vocês terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio.

De posse dos moldes que servirão de apoio para modelar o cone, o cilindro e a esfera, cole-os sobre o papel-cartão, corte-os e monte-os encaixando as duas partes de cada sólido usando os cortes centrais.

Com massinha de modelar, construa os sólidos. Agora, com os sólidos prontos, vamos fazer a comparação dos volumes, seguindo as instruções abaixo:

a) Marque, no recipiente o nível de água.
b) Mergulhe o cone no recipiente e marque novamente o nível de água.
c) Retire o cone e coloque água novamente até o nível inicial.
d) Mergulhe a semiesfera e marque novamente o nível de água.
e) Retire a semiesfera e volte a colocar água até o nível anterior.
f) Mergulhe o cilindro marcando novamente o nível de água.

A partir dessa experiência, podemos concluir sobre a relação entre o volume do cone, da semiesfera e do cilindro que:

a) O volume do cilindro é _________ o volume do cone, ou seja, o volume do cone é _________ o volume do cilindro.

b) O volume da semiesfera é ________ o volume do cone, ou seja, o volume da semiesfera corresponde a __________ do volume do cilindro.

c) Qual a expressão para calcular o volume do cilindro?

d) No cilindro usado no experimento, temos que **h=r,** ou seja, a medida da altura do cilindro é igual a medida do seu raio da base. Neste caso, qual será a expressão para o cálculo do volume de um cone de mesma altura e mesmo raio da vase desse cilindro?

e) Qual a expressão para o cálculo do volume de uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro?

f) Logo, a expressão para o cálculo do volume da esfera será:

- **Problema 55**

(ENEM – 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

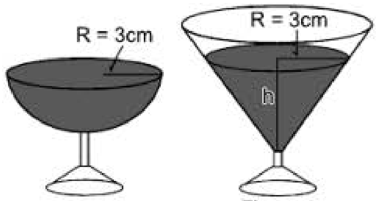
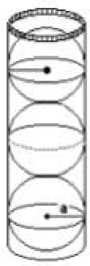


Figura 1 Figura 2

a) 1,33
b) 6,00
c) 12,00
d) 56,52

- **Problema 56**

(UFSM – 2000) Bolas de tênis são vendidas normalmente em embalagens contendo 3 unidades. Supondo que as bolas têm raio a em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que não é ocupado pelas bolas é :



a) $2\pi a^3$
b) $\frac{4\pi a}{3}$
c) $\frac{\pi a}{3}$
d) a^3
e) $\frac{2\pi a}{3}$

APÊNDICE D

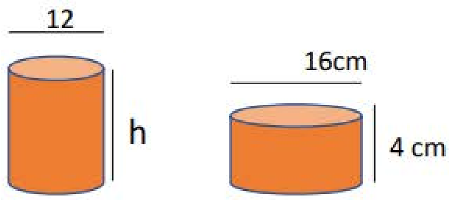
Prova

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Mestranda Pesquisadora: Carla Valéria D. de Souza
Orientadora: Elba O. Bravo A.
PROFMAT
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Aluno:_______________________________________
Turma: __________ Data: __/__/__
Valor: 5,0 Nota:_____

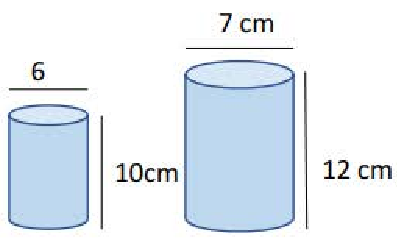
Avaliação de Matemática

1- Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Determine os números de faces de cada gênero.

2- As duas latas na figura abaixo possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura *h*?



3- Uma cantina vende sucos naturais em copos “grandes” e “pequenos”.

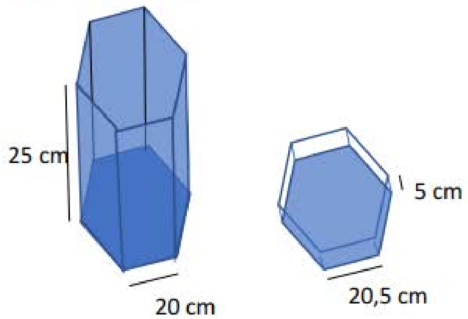


Copo pequeno:
R$ 2,00

Copo grande:
R$ 3,00

Em qual das opções o suco está mais barato?

4- Certa embalagem para presente é composta por duas partes e possui formato que lembra um prisma reto hexagonal regular. Observe as dimensões dessa embalagem, a seguir. Quantos metros quadrados de papel, no mínimo, são necessários para encapar a superfície externa dessa embalagem?



caixa

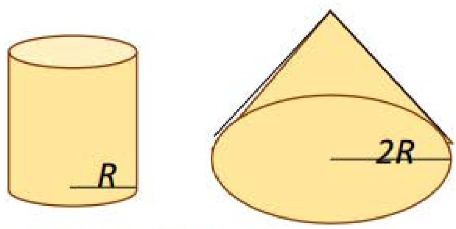
Tampa da caixa

5- Considere uma assadeira com formato de paralelepípedo retângulo com dimensões internas de 27,2 cm x 12,4 cm x 10 cm. Qual a capacidade dessa assadeira em litros?

6- Considerando uma pirâmide quadrangular regular cuja medida *l* da aresta da base é 3 cm e altura $h = 5$ cm, determine:

a) A medida do apótema da base.
b) A medida do apótema da pirâmide.
c) A medida da aresta lateral.
d) A área da base.
e) A área lateral.
f) A área total.

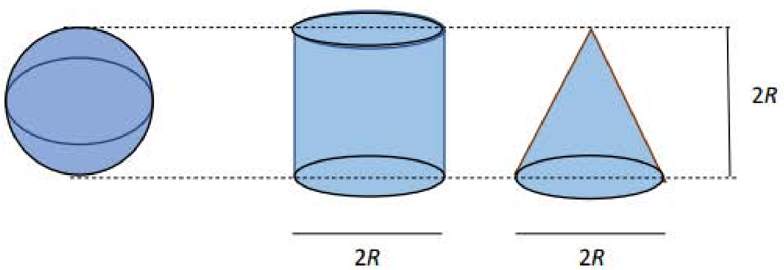
7- (Unicamp – SP) Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-se sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a:

a) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.
b) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.
c) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.
d) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

8- Considere os sólidos geométricos.

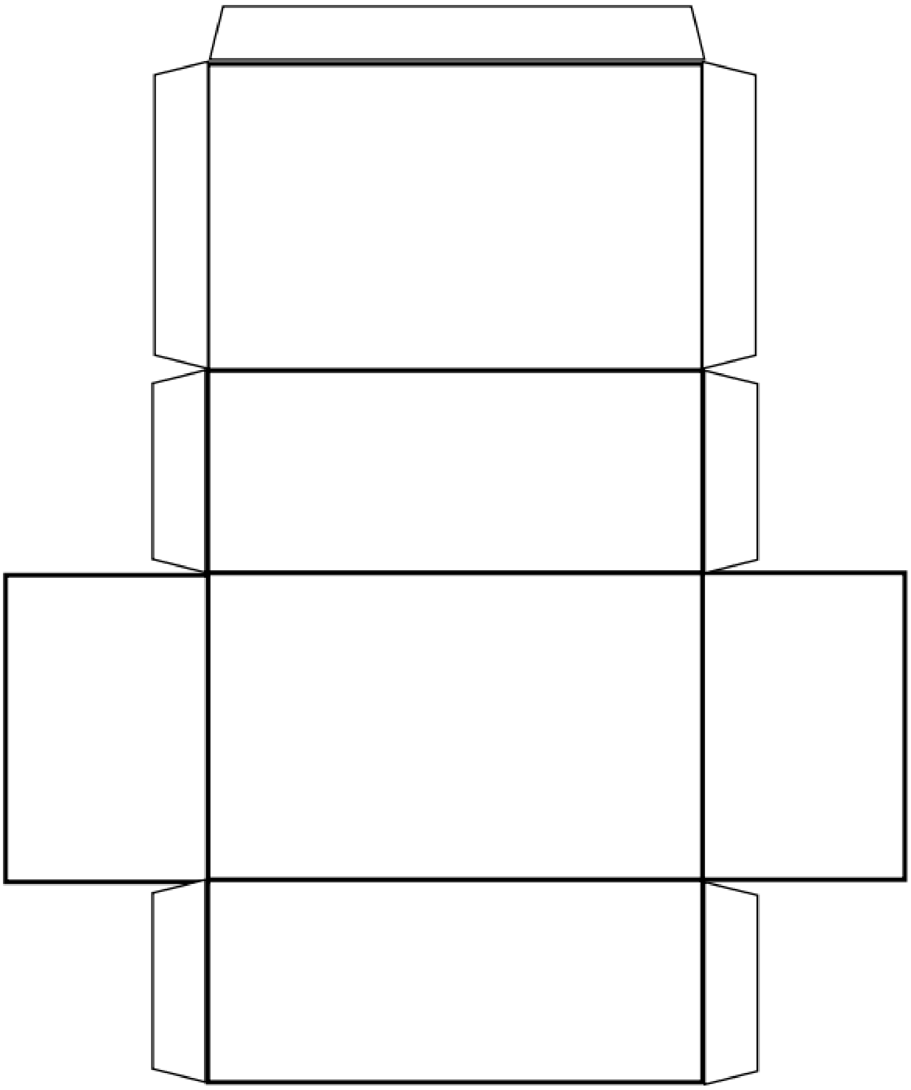


É correto afirmar que o volume da esfera é igual ao volume do cilindro, subtraído o volume do cone? Justifique.

APÊNDICE E

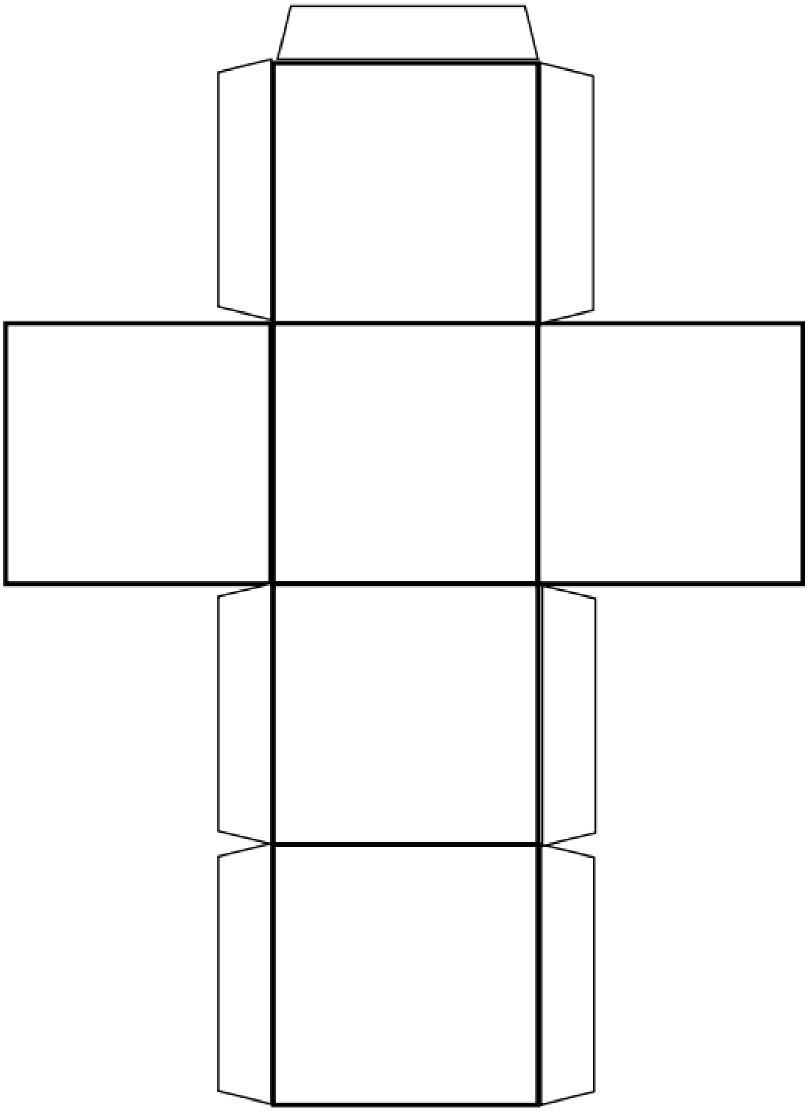
Planificações e moldes que foram utilizados durante a resolução dos problemas

Planificação do paralelepípedo



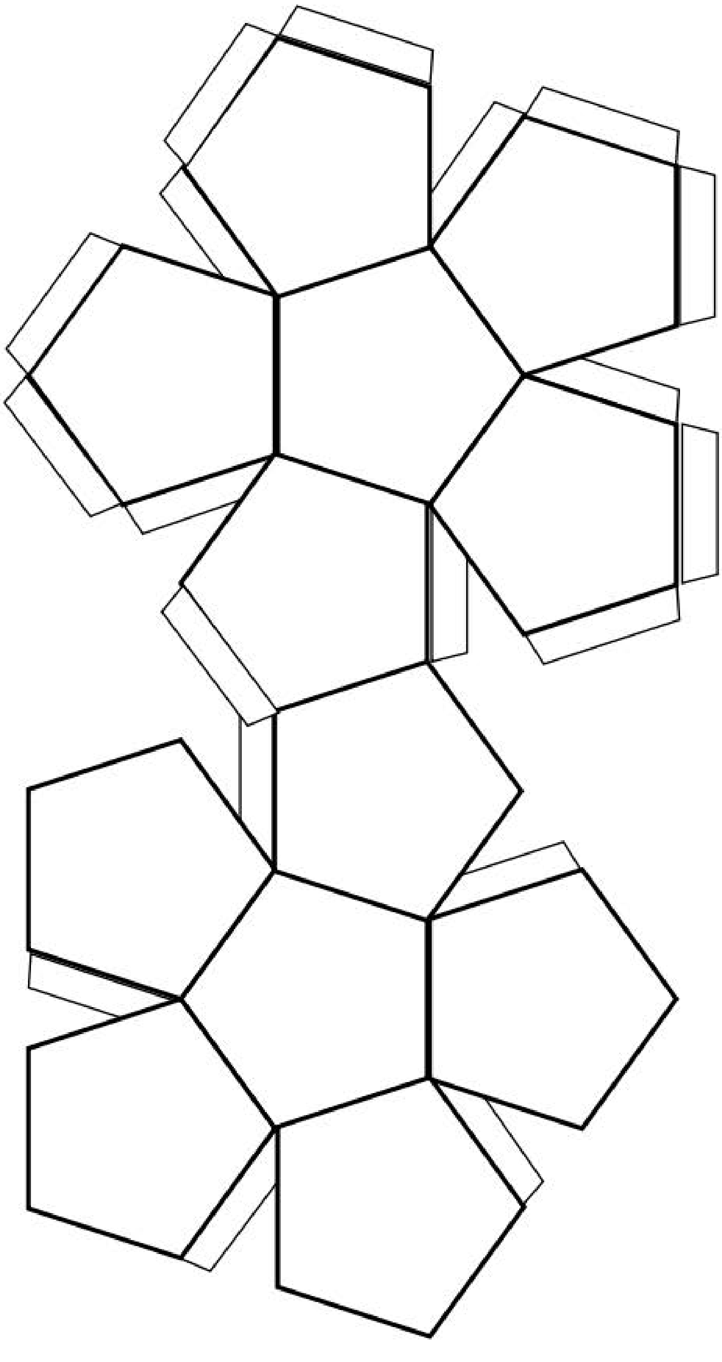
Fonte: Elaboração própria

Planificação do cubo



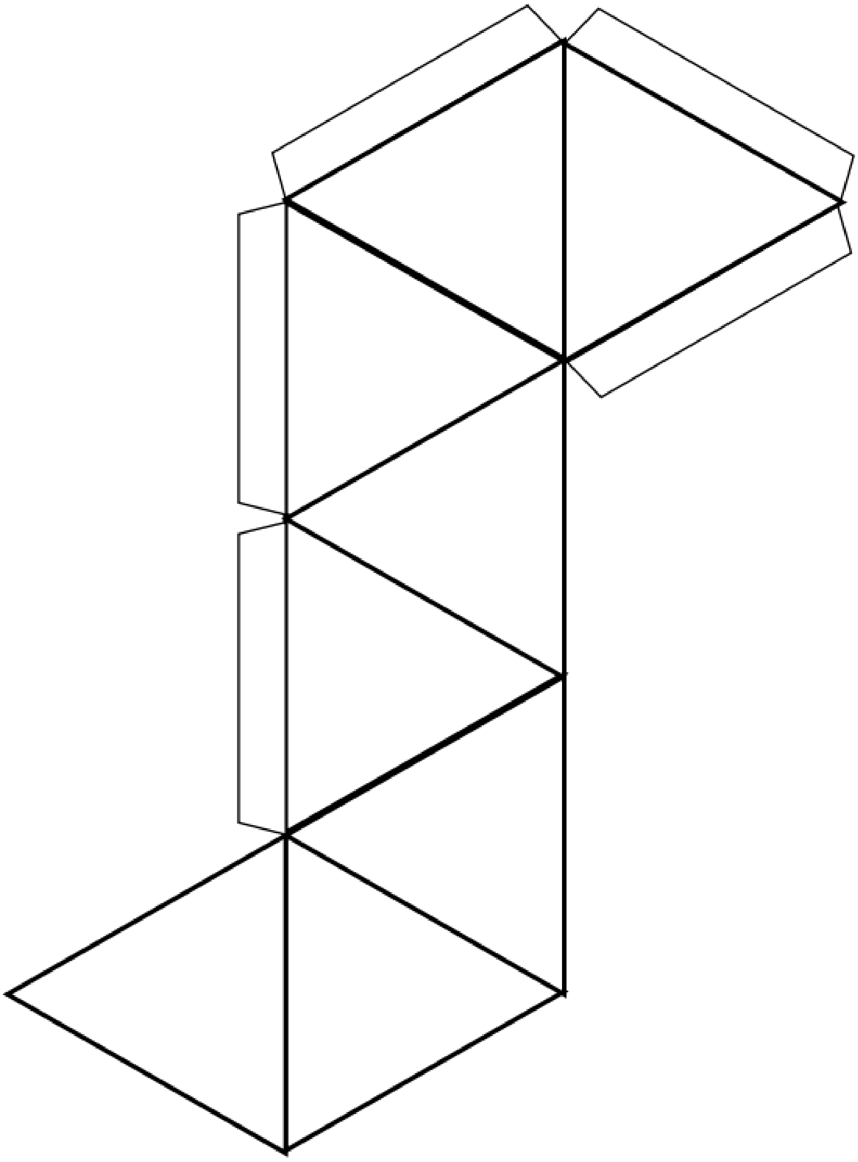
Fonte: Elaboração própria

Planificação do dodecaedro



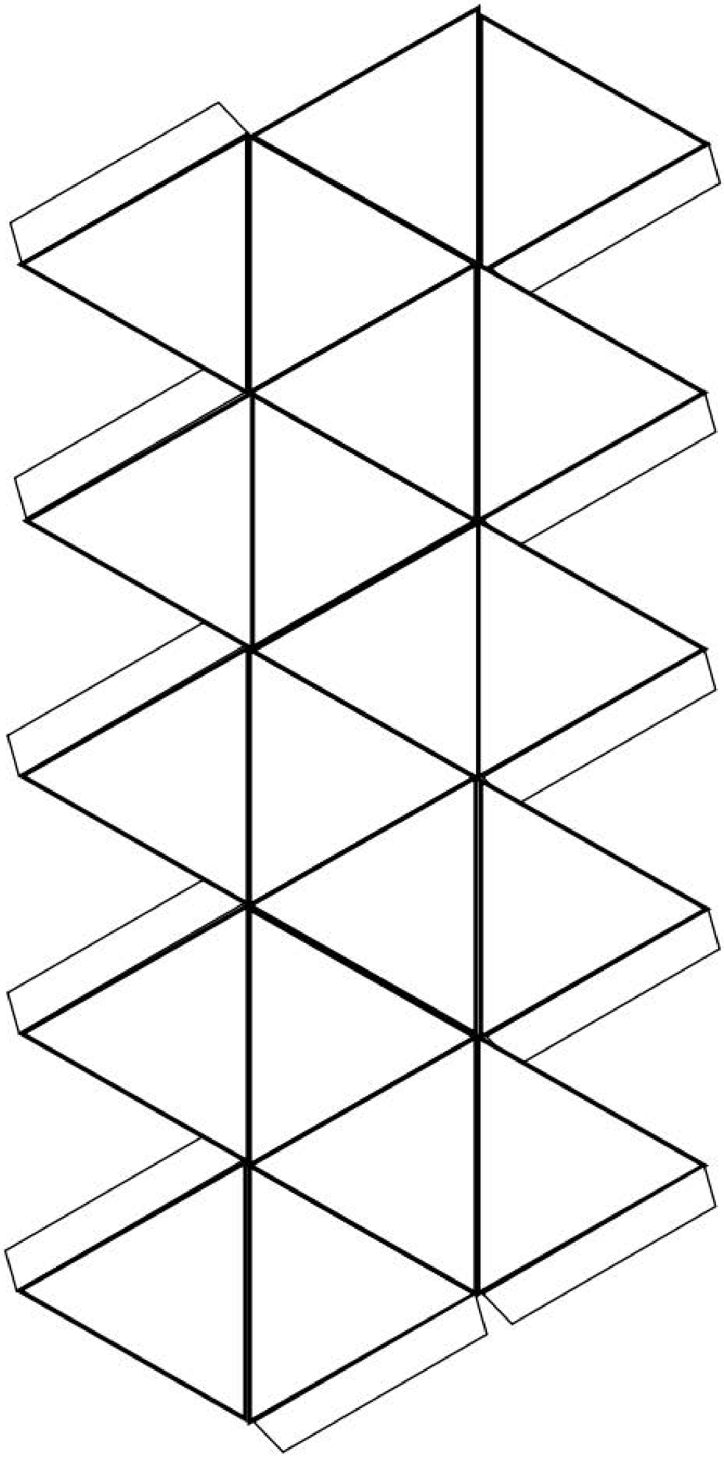
Fonte: Elaboração própria

Planificação do octaedro



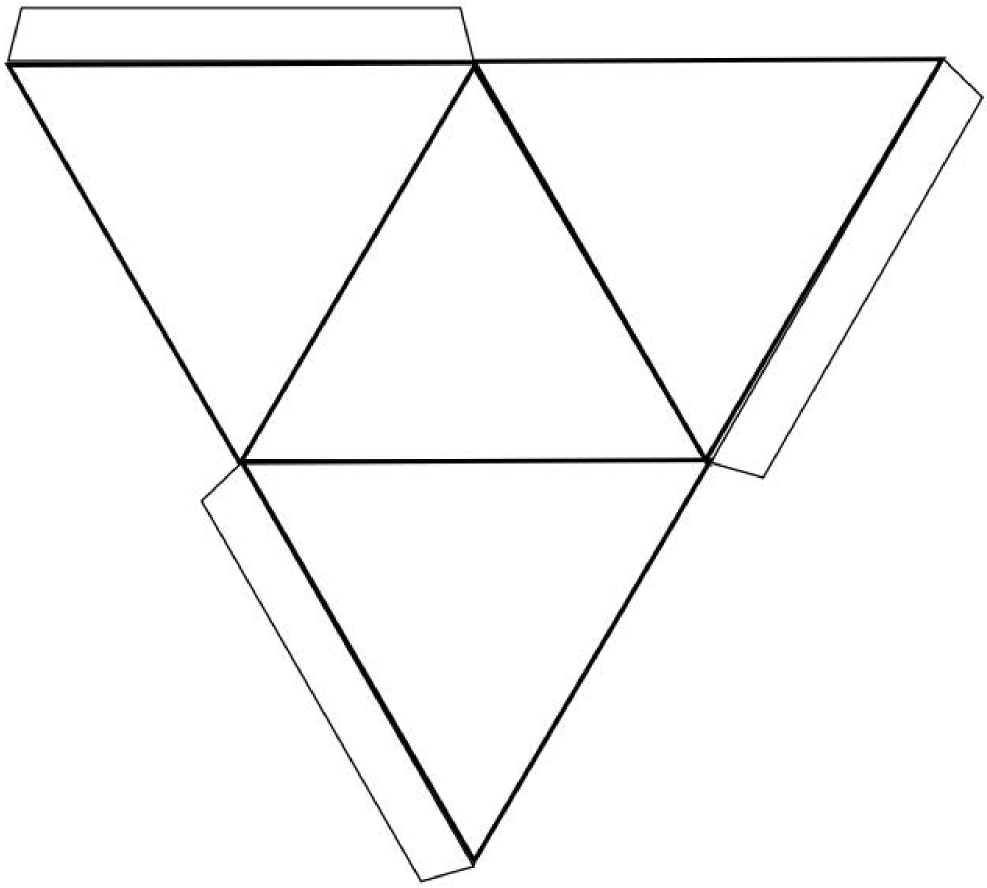
Fonte: Elaboração própria

Planificação do icosaedro



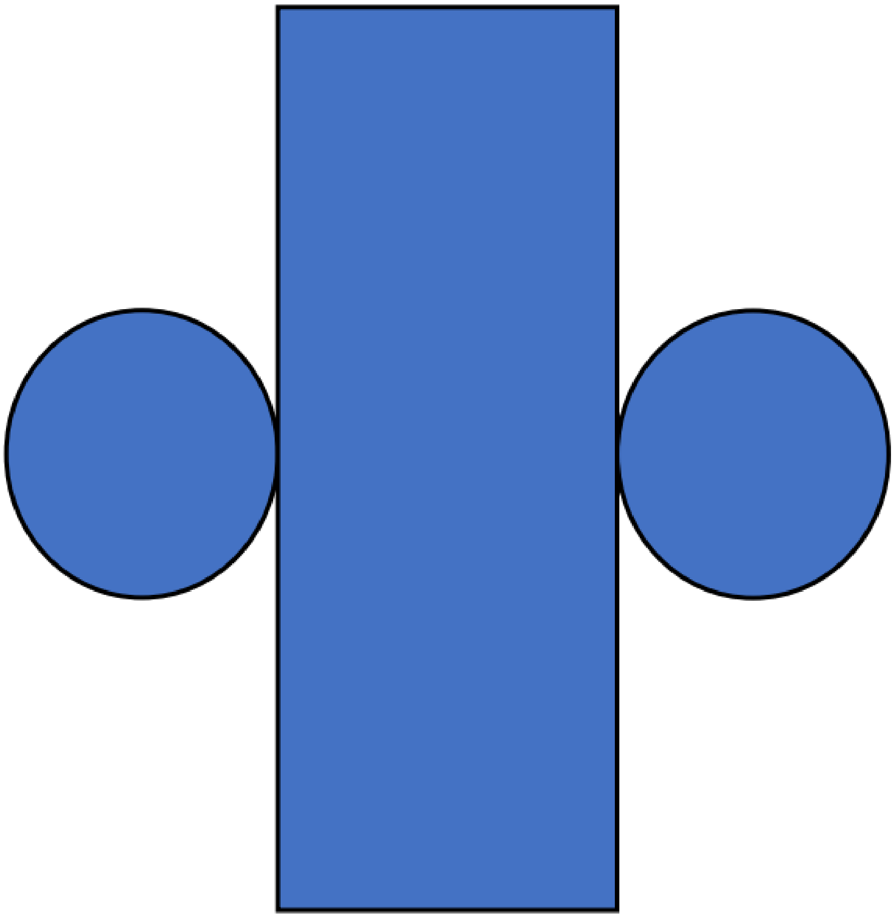
Fonte: Elaboração própria

Planificação do tetraedro



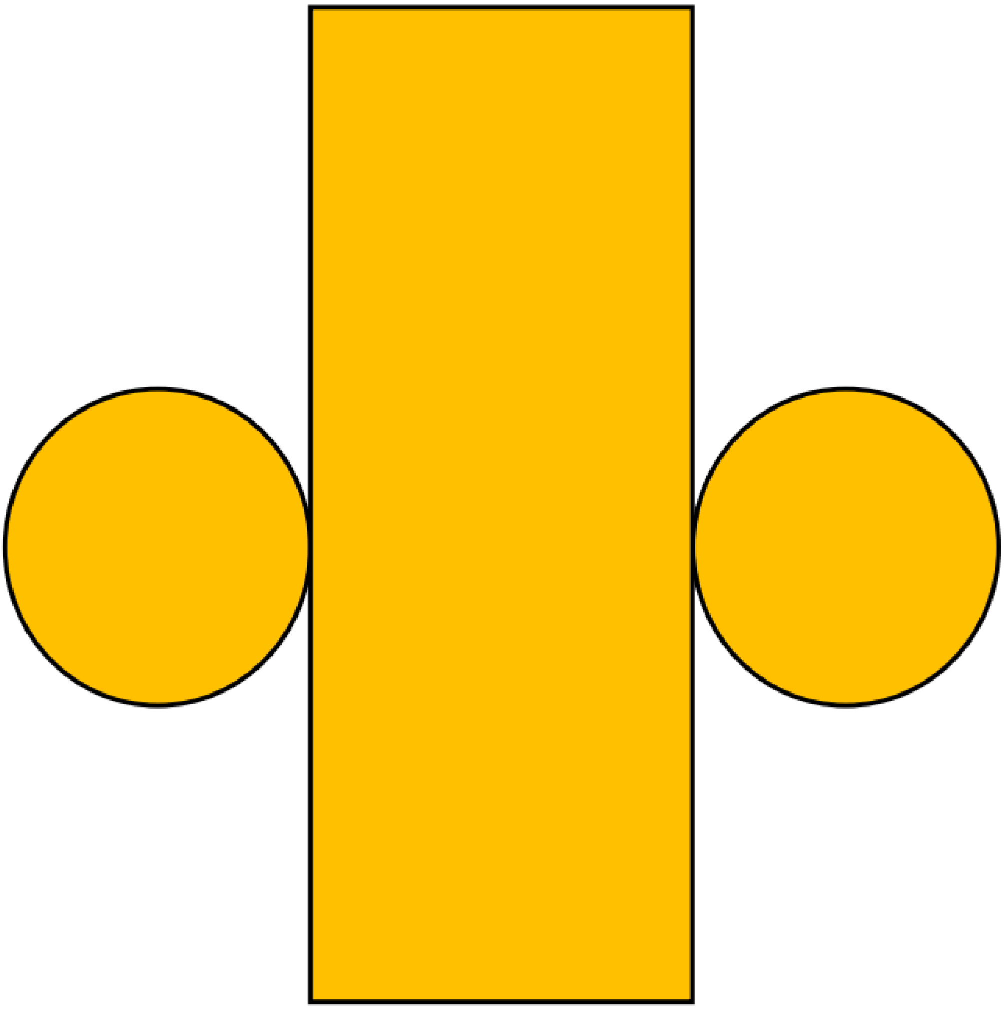
Fonte: Elaboração própria

Molde do cilindro1 – problema 19



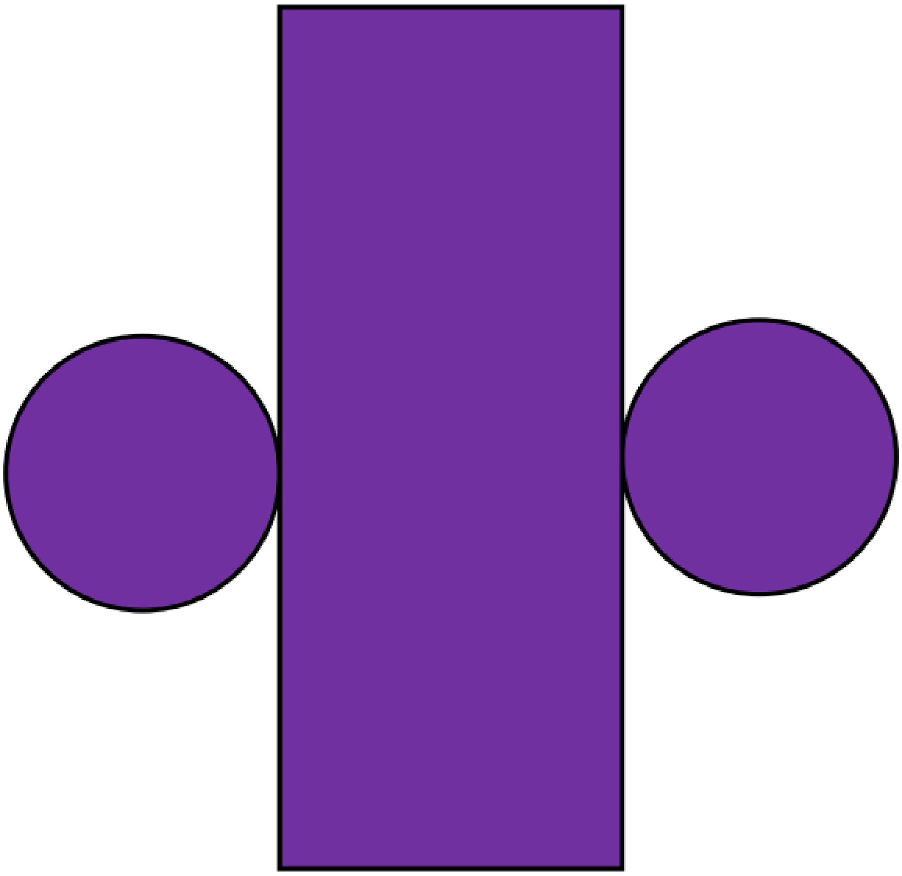
Fonte: Elaboração própria

Molde do cilindro 2 – problema 19



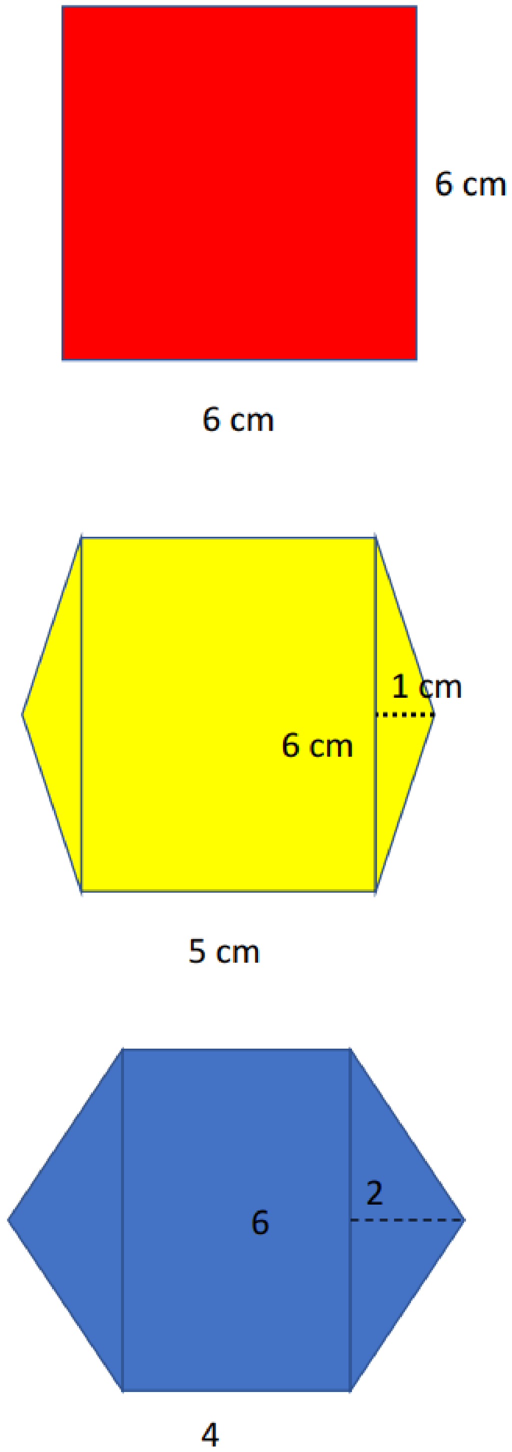
Fonte: Elaboração própria

Molde do cilindro 3 – problema 19



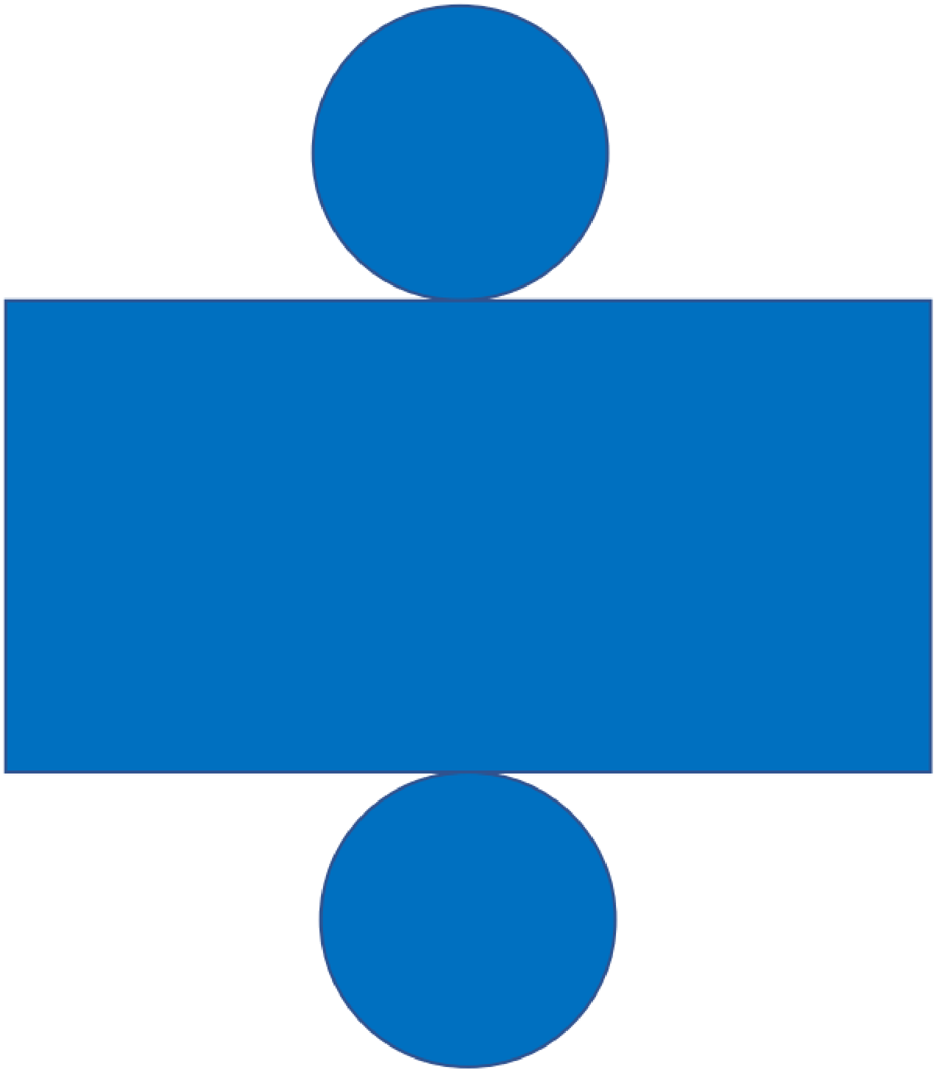
Fonte: Elaboração própria

Bases para confecção das pirâmides – problema 42



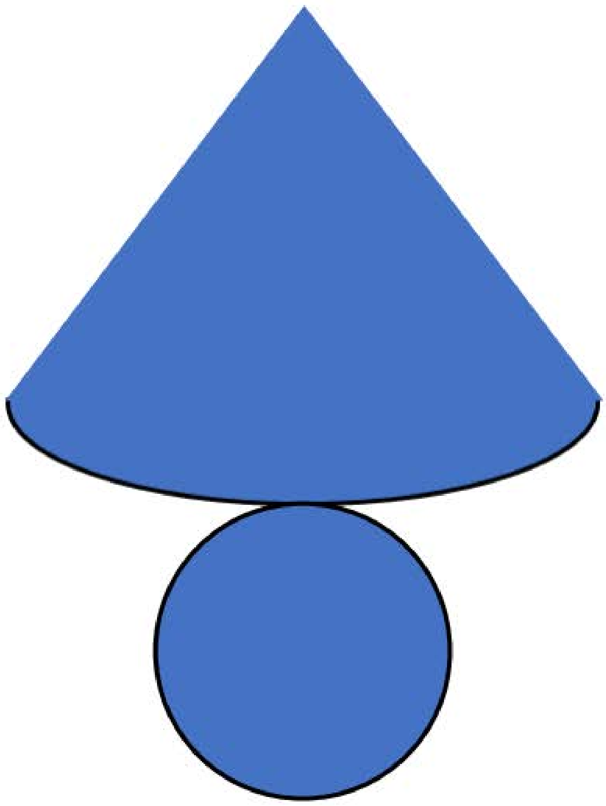
Fonte: Elaboração própria

Planificação do cilindro – problema 45



Fonte: Elaboração própria

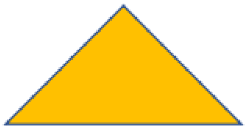
Planificação do cone – problema 45



Fonte: Elaboração própria

Moldes para modelar o cone, cilindro e semiesfera - problema 54

Esqueleto
cilindro



Esqueleto do
cone

Esqueleto
semiesfera

Fonte: Elaboração própria