

Rafaela dos Santos Souza Muniz

O ENSINO DE FUNÇÃO PELA
PERSPECTIVA DA TEORIA DOS
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA APOIADO POR
TECNOLOGIAS DIGITAIS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

17 de junho de 2019

Rafaela dos Santos Souza Muniz

O ENSINO DE FUNÇÃO PELA PERSPECTIVA DA
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA APOIADO POR TECNOLOGIAS
DIGITAIS

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

Coorientador: Prof^a. Arilise Moraes de Almeida Lopes

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

17 de junho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

M966

Muniz, Rafaela dos Santos Souza.

O ENSINO DE FUNÇÃO PELA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA APOIADO POR TECNOLOGIAS DIGITAIS / Rafaela dos Santos Souza Muniz. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

244 f. : il.

Bibliografia: 197 - 199.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.

Orientador: Rigoberto Gregorio Sanabria Castro.

Coorientadora: Arilise Moraes de Almeida Lopes.

1. Função Afim. 2. Registro de Representação Semiótica. 3. Tecnologia Digital. 4. Plataforma Khan Academy. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

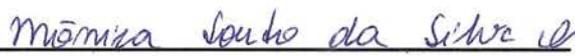
CDD - 510

Rafaela dos Santos Souza Muniz

O ENSINO DE FUNÇÃO PELA PERSPECTIVA DA
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA APOIADO POR TECNOLOGIAS
DIGITAIS

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 17 de junho de 2019.



Prof^ª. Mônica Souto da Silva Dias
D.Sc. - UFF



Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF



Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UFF



Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria
Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)



Prof^ª. Arilise Moraes de Almeida
Lopes
D.Sc. - IFF
(COORDENADOR)

Dedico este trabalho à minha amada mãe Jussara que, com muito amor, carinho, apoio e dedicação, não mediu esforços para que eu concluísse mais esta etapa da minha vida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter conseguido chegar até aqui e vencer mais uma etapa em minha vida, sempre me acompanhando e me protegendo pela estrada durante todo tempo desse mestrado.

A minha mãe Jussara e a minha Dinda Juciara, pela atenção, carinho, compreensão, apoio e incentivo em todas as fases da minha vida, acreditando no meu potencial possibilitando que eu conseguisse chegar até aqui.

Ao meu pai Roni e minha irmã Ranielly pelo apoio e carinho, sempre compreendendo minha ausência constante.

Aos meus familiares e amigos que compreenderam a minha ausência, vibrando com cada etapa vivenciada até aqui, torcendo sempre por mim. Em especial, ao meu primo Ettory pelo companheirismo.

À minha amiga Juliana que participou de todos os momentos desse mestrado, me ouvindo e me dando forças para continuar firme até o final.

Ao meu orientador Rigoberto Castro, pelo suporte durante todo o curso de mestrado, aceitando me orientar nesta pesquisa, sempre me ouvindo com paciência nos momentos mais difíceis.

À minha coorientadora Arilise Lopes por ter aceitado de imediato o convite, sempre me dando suporte e atenção durante a realização da pesquisa e escrita.

À banca desta dissertação, Mônica Souto, Oscar Paz e Nelson Barbosa, que aceitaram participar deste trabalho de uma forma especial, dedicando-se à sua leitura e análise.

Aos colegas de classe e amigos, que sempre estiveram comigo em todos os momentos de “desespero”, troca de experiências, dúvidas e sugestões, que nesta ocasião de mais uma etapa vencida, comemoram também esta alegria, principalmente ao grupo formado nesta reta final e em especial a Nathália e a Josie por ouvir minhas angústias, pelo incentivo e reciprocidade.

À Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro e aos meus professores do PROFMAT, especiais e essenciais em minha formação.

Aos colegas de trabalho, que me apoiaram durante todo o processo de realização desta dissertação, em especial a Diretora da Escola Municipal Francisco Paes de Carvalho Filho, Eliana Corrêa, e toda a equipe diretiva, pela confiança neste projeto. Aos novos colegas de trabalho da E. M. Quilombola Dona Rosa Geralda da Silveira, que entenderam minha ausência, me dando o suporte necessário para que conseguisse finalizar essa etapa.

Aos meus alunos da E. M. Francisco Paes de Carvalho Filho, por compreenderem a importância dessa dissertação, me apoiando e incentivando em todos os momentos, em particular, aos participantes desta pesquisa, meus, agora, ex-alunos.

Enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"O otimismo é a fé que leva a realização. Nada pode ser feito sem esperança ou
confiança"*

Helen Keller

Resumo

Este trabalho propõe investigar se a aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando Tecnologias Digitais como recurso em algumas atividades, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim, dos alunos do Ensino Fundamental II. A sequência didática proposta foi aplicada em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica aliada ao uso da plataforma Khan Academy e software Geogebra em algumas atividades. A sequência didática foi realizada entre os meses de outubro e novembro de 2018 em uma escola pública localizada na cidade de São Pedro da Aldeia/RJ. Buscou-se elaborar atividades que envolvam as várias formas de representações de função, bem como a exploração dessas representações e conversões, utilizando a mediação no processo de ensino e aprendizagem aliado ao uso da tecnologia. A análise da aplicação da sequência didática foi realizada a partir do objetivo que cada atividade propunha. Por meio da análise dos resultados, foi possível constatar que durante a realização da sequência didática em sala de aula com atividades elaboradas utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, junto à ação de uma proposta de interação entre os discentes dispostos em grupos e a mediação da pesquisadora com os grupos, favoreceu para que os mesmos conseguissem realizar as atividades propostas, possibilitando aos discentes reflexões para as desconstruções de conceitos errôneos que contribuíram para a construção do conhecimento dos mesmos. Ao fazer uso do *app* Geogebra explorando as transformações por conversão entre as representações gráficas e a representação algébrica, permitiu os discentes investigar de forma prática os gráficos da Função Afim, auxiliando as conclusões sobre os coeficientes a e b . O uso do *app* Khan Academy na sala de aula foi bastante favorável à aprendizagem dos alunos, possibilitando aos mesmos, independência na resolução de atividades propostas pela pesquisadora, sendo autônomos em sua aprendizagem.

Palavras-chaves: Função Afim; Registro de Representação Semiótica; Tecnologia Digital; Plataforma Khan Academy.

Abstract

This paper proposes to investigate whether the application of the Theory of Semiotic Representation Records, using Digital Technologies as a resource in some activities, can contribute to the construction of the concept of Function and Related Function, of elementary school students. The proposed didactic sequence was applied in a 9th grade elementary school class using the Semiotic Representation Records Theory combined with the use of the Khan Academy platform and Geogebra software in some activities. The didactic sequence was carried out between October and November 2018 in a public school located in the city of São Pedro da Aldeia / RJ. We sought to elaborate activities that involve the various forms of function representations, as well as the exploration of these representations and conversions, using the mediation in the teaching and learning process allied to the use of technology. The analysis of the application of the didactic sequence was performed based on the objective that each activity proposed. Through the analysis of the results, it was possible to verify that during the accomplishment of the didactic sequence in the classroom with activities elaborated using the Semiotic Representation Records Theory, together with the action of an interaction proposal between the students arranged in groups and the mediation. The researcher with the groups favored that they could perform the proposed activities, allowing students to reflect on the deconstruction of misconceptions that contributed to the construction of their knowledge. By making use of the Geogebra *app* by exploring the transformations by conversion between graphical and algebraic representations, it allowed students to practically investigate the graphs of the Affine Function, helping the conclusions about coefficients a and b . The use of the Khan Academy *app* in the classroom was very favorable to students' learning, allowing them to be independent in solving activities proposed by the researcher, being autonomous in their learning.

Key-words: Function Afim; Registration of Semiotic Representation; Digital Technology; Platform Khan Academy.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Produto Cartesiano $\overline{AB} \times \overline{CD}$	26
Figura 2 – Produto Cartesiano $X \times Y$	27
Figura 3 – Relação binária de X em Y por meio do diagrama de Venn	27
Figura 4 – Plano Cartesiano	28
Figura 5 – Quadrantes	29
Figura 6 – Uma relação f que não representa uma função	30
Figura 7 – Uma relação f que representa uma função	31
Figura 8 – A relação f não representa uma função	31
Figura 9 – Prova que o gráfico da função afim é uma reta	32
Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$	33
Figura 11 – Gráfico da função $y = f(x)$ com dois pontos em destaque	33
Figura 12 – Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ com $a > 0$	34
Figura 13 – Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ com $a < 0$	35
Figura 14 – Representação gráfica da função constante	35
Figura 15 – Gráfico da função identidade	36
Figura 16 – Gráfico da função linear $y = 3x$	36
Figura 17 – Exemplo de formação	39
Figura 18 – Exemplo de tratamento na representação algébrica	39
Figura 19 – Exemplo de tratamento e conversão	40
Figura 20 – Tela inicial do <i>app</i> Geogebra - campo algébrico para <i>smartphones</i>	45
Figura 21 – Tela inicial do <i>app</i> Geogebra - campo geométrico para <i>smartphones</i>	46
Figura 22 – Tela de configuração do <i>app</i> Geogebra para <i>smartphones</i>	47
Figura 23 – Menu do <i>app</i> Geogebra para <i>smartphones</i>	48
Figura 24 – Página inicial da plataforma Khan Academy	49
Figura 25 – Página inicial da plataforma Khan Academy	51
Figura 26 – Perfil do aluno na aba Progresso - habilidades	53
Figura 27 – Perfil do aluno na aba Progresso - foco	54
Figura 28 – Atividade 1 - Questão 1, itens (a) e (b)	63
Figura 29 – Atividade 1 - Questão 1, item (c)	64
Figura 30 – Atividade 1 - Questão 1, itens (d) e (e)	64
Figura 31 – Atividade 1 - Questão 2	65

Figura 32 – Atividade 1 - Questão 3	66
Figura 33 – Atividade 1 - Questão 4	67
Figura 34 – Atividade 1 - Questão 5, 6 e 7	67
Figura 35 – Atividade 1 - Questão 8	68
Figura 36 – Atividade 1 - Questão 9	68
Figura 37 – Atividade 2 - Questão 1	70
Figura 38 – Atividade 2 - Questão 2	71
Figura 39 – Atividade 2 - Questão 3	71
Figura 40 – Atividade 2 - Questão 4	72
Figura 41 – Atividade 2 - Questão 5	72
Figura 42 – Atividade 2 - Questão 6	73
Figura 43 – Atividade 2 - Questão 7	73
Figura 44 – Atividade 3 - Questão 1	75
Figura 45 – Atividade 3 - Questão 2	76
Figura 46 – Atividade 3 - Questão 3	77
Figura 47 – Atividade 3 - Questão 4	77
Figura 48 – Exemplo da atividade Calcule funções a partir de seus gráficos	79
Figura 49 – Exemplo da atividade Cálculo de funções	79
Figura 50 – Exemplo da atividade Complete soluções de equações com 2 variáveis	80
Figura 51 – Atividade 4 - Questão 1, itens (i), (ii) e (iii)	81
Figura 52 – Gráfico da função $y = ax + b$	81
Figura 53 – Atividade 4 - Questão 1, itens (iv), (v) e (vi)	82
Figura 54 – Atividade 4 - Questão 2	83
Figura 55 – Atividade 5 - Questão 1	84
Figura 56 – Atividade 5 - Questão 2	84
Figura 57 – Atividade 5 - Questão 3	85
Figura 58 – Atividade 5 - Questão 4	85
Figura 59 – Acesso à plataforma Khan Academy via <i>web</i>	88
Figura 60 – Tela inicial do primeiro login do aluno	89
Figura 61 – Página inicial ao efetuar o login	89
Figura 62 – Cursos da plataforma Khan Academy via <i>web</i>	90
Figura 63 – Encontrando as recomendações na plataforma	91
Figura 64 – Recomendação na plataforma Khan Academy via <i>web</i>	92
Figura 65 – Visualizando o perfil do “alunotestel”	93
Figura 66 – Visualizando o quadro de medalhas	93
Figura 67 – Acompanhando a aprendizagem do alunotestel	94
Figura 68 – Slide utilizado com exemplos de Localização no dia a dia	95
Figura 69 – Função Satélite do aparelho de GPS	96
Figura 70 – Função Cálculo de área do aparelho de GPS	97

Figura 71 – Slide utilizado com a Localização Real via <i>Google Eath</i>	97
Figura 72 – Marcação de pontos no plano cartesiano no <i>software</i> Geogebra	98
Figura 73 – Recomendação da plataforma Khan Academy realizada durante a aula	99
Figura 74 – Alunos utilizando a Plataforma Khan Academy em aula	100
Figura 75 – Recomendação “Pontos no plano cartesiano”	101
Figura 76 – Pergunta 1 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”	102
Figura 77 – Pergunta 2 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”	103
Figura 78 – Pergunta 7 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”	104
Figura 79 – Recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”	105
Figura 80 – Pergunta 1 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”	106
Figura 81 – Pergunta 2 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”	107
Figura 82 – Pergunta 6 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”	108
Figura 83 – Recomendação “Represente os pontos graficamente”	109
Figura 84 – Exemplo de pergunta da atividade “Represente os pontos graficamente”	110
Figura 85 – Resposta da pergunta 1, da recomendação "Represente os pontos graficamente", dos alunos A6, A11 e A13	110
Figura 86 – Resposta da pergunta 3, da recomendação "Represente os pontos graficamente", dos alunos A3 e A11	111
Figura 87 – Resposta da pergunta 5, da recomendação "Represente os pontos graficamente", do aluno A5	112
Figura 88 – Recomendação “Problemas no plano cartesiano (1 ^o quadrante)”	113
Figura 89 – Pergunta 1 da recomendação “Problemas no plano cartesiano (1 ^o quadrante)”	114
Figura 90 – Recomendação “Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes”	115
Figura 91 – Pergunta 1 da recomendação “Problemas de plano cartesiano em todos os quadrantes”	116
Figura 92 – Recomendação "Teste: Plano cartesiano: 1 teste"	117
Figura 93 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, itens (a) e (b) do Aluno A3 do Grupo 3	119
Figura 94 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (c) do Aluno A5 do Grupo 1	120
Figura 95 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (d) da aluna A6 do Grupo 2	121
Figura 96 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (e) do aluno A4 Grupo 3	122
Figura 97 – Resposta da Atividade 1 – Questão 2 da aluna A2 do grupo 2	123
Figura 98 – Resposta da Atividade 1 – Questão 3 do aluno A1 do grupo 1	124
Figura 99 – Resposta da Atividade 1 – Questão 4, itens (a), (b) e (c) do aluno A5 do Grupo 3	125
Figura 100 – Resposta da Atividade 1 – Questão 4, item (d) da aluna A6 do Grupo 2	126
Figura 101 – Resposta da Atividade 1 – Questões 5, 6, e 7 da aluna A2 do Grupo 2	127

Figura 102–Resposta da Atividade 1 – Questão 8	128
Figura 103–Resposta da Atividade 1 – Questão 9 incompleta da aluna A10 do Grupo 1	129
Figura 104–Resposta da Atividade 1 – Questão 9 completa da aluna A7 do Grupo 2	129
Figura 105–Resposta da Atividade 1 – Questão 9 incompleta do aluno A5 do Grupo 3	130
Figura 106–Resposta da Atividade 2 – Questões 1 do aluno A13 do Grupo 1	133
Figura 107–Resposta Atividade 2 – Questão 2 da aluna A2 do Grupo 2	134
Figura 108–Resposta Atividade 2 – Questão 2 do aluno A8 do Grupo 3	135
Figura 109–Resposta da Atividade 2 – Questões 3 da aluna A7 do Grupo 21	136
Figura 110–Resposta da Atividade 2 – Questões 3 do aluno A8 do Grupo 3	137
Figura 111–Resposta da Atividade 2 – Questão 4, item (a) do aluno A13 do grupo 1	138
Figura 112–Resposta da Atividade 2 – Questão 4, item (b) e (c) do aluno A4 do grupo 3	138
Figura 113–Resposta da Atividade 2 – Questão 5 da aluna A7 do grupo 2	140
Figura 114–Resposta da Atividade 2 – Questão 6 da aluna A2 do grupo 2	141
Figura 115–Resposta da Atividade 2 – Questão 6 do aluno A3 do grupo 3	141
Figura 116–Resposta da Atividade 2 – Questão 7 da aluna A11 do grupo 1	142
Figura 117–Resposta da Atividade 3 – Questão 1 do aluno A1 do Grupo 1	144
Figura 118–Resposta da Atividade 3 – Questão 1 do Aluno A5 do Grupo 3	145
Figura 119–Resposta da atividade 3 – Questão 2 do aluno A4 do grupo 2	146
Figura 120–Resposta da atividade 3 – Questão 3 da aluna A10 do grupo 1	148
Figura 121–Resposta da Atividade 3 – Questão 4 do aluno A9 do grupo 2	150
Figura 122–Recomendações complementares às atividades 2 e 3	152
Figura 123–Recomendação “Calcule funções a partir de seus gráficos”	154
Figura 124–Perguntas com índice de erros na primeira tentativa da atividade “Calcule funções a partir de seus gráficos”	156
Figura 125–Recomendação “Cálculo de funções”	157
Figura 126–Aluna A6 realizando a atividade “Cálculo de funções”	159
Figura 127–Perguntas com índices de erros da atividade “Calcule funções”	160
Figura 128–Recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”	161
Figura 129–Perguntas com índices de erros na primeira tentativa da atividade “Complete soluções de equações com 2 variáveis”	163
Figura 130–Preparando o Geogebra para iniciar a atividade 4	170
Figura 131–Gráfico da função $y = ax + b$	171
Figura 132–Resposta da Atividade 4 – Questão 1 itens (i), (ii) e (iii) do aluno A13 do grupo 1	172
Figura 133–Explorando o coeficiente a	173
Figura 134–Explorando o coeficiente b	173
Figura 135–Funções com o coeficiente a positivo	174
Figura 136–Funções com o coeficiente a negativo	175

Figura 137 – Funções com o coeficiente a zero	175
Figura 138 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1 item (iv)	176
Figura 139 – Exemplos explorados de duas funções afins	177
Figura 140 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1, item (v)	178
Figura 141 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1, item (vi) do aluno A1 do grupo 1	179
Figura 142 – Resposta da Atividade 4 – Questão 2: Utilizando o Geogebra para responder as perguntas do aluno A12 do grupo 1	180
Figura 143 – Resposta da Atividade 4 – Questão 2 do aluno A12 do grupo 1	180
Figura 144 – Anotação do aluno A13 ao final da aula	182
Figura 145 – Resposta da Atividade 5 – Questão 1 item a da aluna A2 do grupo 2 .	184
Figura 146 – Gráfico da Atividade 5 – Questão 1, item (a), feito no Geogebra pela aluna A2 do grupo 2	185
Figura 147 – Resposta da Atividade 5 – Questão 1 item b	186
Figura 148 – Resposta da Atividade 5 – Questão 2	187
Figura 149 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (a) do aluno A5 do grupo 3	188
Figura 150 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (a) do aluno A13 do grupo 1	189
Figura 151 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (b) da aluna A2 do grupo 2	190
Figura 152 – Resposta da Atividade 5 – Questão 4 da aluna A2	192

Lista de abreviaturas e siglas

APP	Aplicativo
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SD	Sequência Didática
TD	Tecnologias Digitais
TV	Televisão
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Lista de símbolos

$+$	Adição
$-$	Subtração
\cdot	Multiplicação
\times	Multiplicação
$=$	Igual
\neq	Diferente
$\%$	Porcentagem
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais
\mathbb{R}^2	Plano Numérico

Sumário

Introdução	20
1	FUNÇÕES 25
1.1	Produto Cartesiano, Sistema de Coordenadas Cartesianas e Relações 25
1.1.1	Par ordenado 25
1.1.2	Produto Cartesiano e Relação Binária 25
1.1.3	Sistema de Coordenadas Cartesianas \mathbb{R}^2 28
1.2	Funções 29
1.3	A Função Afim e os casos particulares 31
1.3.1	Função Constante 35
1.3.2	Função Identidade 35
1.3.3	Função Linear 36
2	ABORDAGEM SOBRE OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 37
3	USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM 43
3.1	Geogebra 44
3.2	Plataforma Khan Academy 48
3.2.1	Khan Academy no app 50
3.2.2	Khan Academy na web 51
4	ASPECTOS METODOLÓGICOS 55
4.1	Planejamento da Pesquisa 55
4.1.1	Elaboração, Aplicação e Análise do questionário 56
4.1.2	Elaboração da aula sobre a utilização da Plataforma Khan Academy . . . 59
4.1.3	Planejamento da aula de pré-requisitos 60
4.2	Elaboração da Sequência Didática 61
4.2.1	Atividade 1 - Definindo Funções 62
4.2.2	Atividade 2 - Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos . . . 69
4.2.3	Atividade 3 - Função Afim 73
4.2.4	Atividade complementar às atividades 2 e 3 na plataforma Khan Academy 78
4.2.5	Atividade 4 - Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim 80

4.2.6	Atividade 5 - Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica	83
5	APLICAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	86
5.1	Aula sobre a utilização da Plataforma Khan Academy	87
5.2	Aulas sobre Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Produto Cartesiano e Relação Binária	95
5.3	Atividade 1 - Definindo Função	118
5.4	Atividade 2 - Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos	131
5.5	Atividade 3 - Função Afim	143
5.6	Atividade complementar às atividades 2 e 3 na plataforma Khan Academy	152
5.7	Atividade 4 – Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim	168
5.8	Atividade 5 - Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica	182
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	194
	REFERÊNCIAS	197
	 APÊNDICES	 200
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO I	201
	APÊNDICE B – RECOMENDAÇÕES REALIZADAS NA PLATAFORMA KHAN ACADEMY, COM O CONTEÚDO DE PRÉ-REQUISITO	203
	APÊNDICE C – ATIVIDADE 1 – DEFININDO FUNÇÕES	219
	APÊNDICE D – ATIVIDADE 2 – FUNÇÃO: APROFUNDANDO E CONHECENDO NOVOS CONCEITOS	224
	APÊNDICE E – ATIVIDADE 3 – FUNÇÃO AFIM	228
	APÊNDICE F – RECOMENDAÇÕES REALIZADAS NA PLATAFORMA KHAN ACADEMY, COMO COMPLEMENTO ÀS ATIVIDADES 2 E 3	232

APÊNDICE G	–	ATIVIDADE 4 – UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA EXPLORAR O GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM	237
APÊNDICE H	–	ATIVIDADE 5 - FUNÇÃO AFIM: CONHECENDO MAIS A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E GRÁFICA	241

Introdução

A álgebra é desenvolvida desde as séries iniciais, generalizando padrões, relacionando grandezas, modelando e resolvendo problemas, representando-os por meio de equações ou inequações. Essa álgebra é ampliada nos anos finais do Ensino Fundamental, de tal forma que o encaminhamento dado anteriormente (generalização de padrões, variação de grandezas, por exemplo) possibilita a exploração da noção de função já nesse nível de ensino, deixando a abordagem aprofundada para o Ensino Médio (BRASIL, 1998, p. 51), perpassando por outras áreas do conhecimento como física, química e biologia.

Magarinus (2013) e Leite (2016) comentam que a não compreensão do conteúdo referente às funções vai perpassando pelos níveis de ensino, e os alunos chegam ao Ensino Médio com dificuldades adquiridas no Ensino Fundamental. Pinto (2014) relata em seu trabalho que ao lecionar nos Ensinos Fundamental e Médio se depara com inúmeras dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo de funções, desde a interpretação de problemas e realização de cálculos ao não reconhecimento das diferentes representações de um objeto matemático.

Leite (2016) comenta que o professor deve ter conhecimento sobre o que vai ensinar, avaliando o conteúdo e a abordagem que vêm nos livros didáticos, sobre o estudo de funções, devendo ser autônomos para selecionar materiais que permitirão a compreensão do assunto pelos alunos. O autor ainda relata que a diversidade das representações e as diversas concepções abordando o conteúdo de função desencadeiam inúmeras dificuldades embora, segundo ele, “para que ocorra a aprendizagem é necessário trabalhar com todas as formas de representações de funções e suas correspondências”.

Nesse sentido, o autor ainda destaca, que no ensino de função, as diferentes formas de representação é que precisam ser demonstradas e se faz necessária a exploração das várias representações e conversões, permitindo ao aluno a compreensão do conceito ao relacionar essas representações. Para Duval e Moretti (2012), as atividades de transformações de representação estão no centro da matemática, e a complexidade dessas transformações desencadeiam as dificuldades dos alunos, evidenciando a importância desse estudo.

Nesse sentido, o uso das Tecnologias Digitais (TD) permite ao professor orientar os alunos na construção do conhecimento, realizando “atividades, nas quais os alunos desenvolvem o espírito investigativo de pesquisar, analisar, comparar, conceituar, reformular,

perceber as propriedades matemáticas” (OLIVEIRA, 2015).

Assim, as dificuldades nas conversões de representações de um objeto matemático observadas na prática docente podem ser minimizadas ao utilizar TD. Entre as TD, os softwares de geometria dinâmica permitem a relação entre os signos (representações do objeto de estudo, por exemplo, língua natural, fórmula, símbolo, gráfico, figura...), evidenciando o potencial semiótico (STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013). Ao estudar funções, o Geogebra, por exemplo, permite a visualização de mais de uma representação deste objeto matemático, mostrando a forma algébrica e gráfica, lado a lado.

Essa pesquisa foi motivada pela vivência da pesquisadora em turmas da 1^a série do Ensino Médio as quais lecionou. Ao tratar do assunto de funções, os alunos apresentavam dificuldades, como se fosse o primeiro contato com o conteúdo, embora este tema seja trabalhado no 9^o ano do Ensino Fundamental II, ou seja, no ano anterior. Dessa forma, a pesquisadora propõe trabalhar com o 9^o ano do Ensino Fundamental II, com o objetivo de esses alunos alcançarem resultados melhores, tanto na série em questão, quanto na série seguinte (do ensino médio), onde aprofundarão seus conhecimentos, dando sequência ao conteúdo abordado aqui. Sobre as dificuldades dos alunos, a pesquisadora observou que muitos alunos não conseguem compreender o conceito de função, e suas múltiplas representações. Vivenciou-se que os alunos compreendem, algumas vezes, a dependência de variáveis, porém, ao “passarem para o papel”, ou ao formalizar o conceito, esta compreensão não ocorre. Dessa forma, acredita-se que a metodologia de registros de representação semiótica poderá contribuir para o aprendizado dos alunos, que aliado a tecnologia digital, irá despertar o interesse dos mesmos.

Um recurso que também possibilita uma nova forma de aprender e praticar o ensino, bem como a avaliação dos alunos, favorecendo o processo de ensino e aprendizagem é a plataforma Khan Academy ¹. Em sua pesquisa, Mognhol e Machado (2017) colocam que os alunos opinaram a respeito do uso da plataforma, onde foi constatada a importância do auxílio que a plataforma proporciona, de forma a ser um complemento das aulas “tradicionais”, com a intervenção do professor.

Nesse sentido, o que norteia essa pesquisa não é somente o desafio de levar para a sala de aula o estudo de funções por meio de Representações Semióticas com o uso de TD, mas o desejo de levar os alunos a construção do conhecimento do conteúdo abordado, tendo como expectativa que por serem nativos digitais, a associação de recursos tecnológicos, possibilite não só compreensão, mas o aprofundamento do tema propostos em algumas atividades.

Diante do exposto, têm-se a seguinte questão de pesquisa: Como a teoria dos

¹ A plataforma Khan Academy é uma plataforma gratuita que aborda conteúdos diversos por meio de exercícios, vídeo aulas e resumos, que permite qualquer pessoa aprender qualquer conteúdo, contido nela, com ritmo próprio, acompanhando sua própria aprendizagem

Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim no contexto do Ensino Fundamental II?

Como objetivo geral propõe-se investigar se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim no contexto do Ensino Fundamental II.

Dessa forma, os objetivos específicos são:

- (i) Reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações;
- (ii) Identificar dentre diversas relações entre duas grandezas, àquelas que constituem funções;
- (iii) Interpretar e resolver problemas utilizando dados, tabelas e gráficos;
- (iv) Articular as trocas de registros entre as várias representações;
- (v) Identificar uma função polinomial do 1° grau (função afim);
- (vi) Resolver problemas que envolvam a função afim;
- (vii) Reconhecer a representação algébrica de uma função afim dado o seu gráfico;
- (viii) Reconhecer o gráfico de uma função afim por meio de seus coeficientes;
- (ix) Utilizar a plataforma Khan Academy como complemento e reforço à aulas presenciais;
- (x) Utilizar o *app* Geogebra com a finalidade de explorar as características dos gráficos de função afim.

Com o intuito de aprofundar o estudo deste trabalho, foi realizada uma Revisão Sistemática de Literatura. A pesquisa foi realizada em três etapas: (i) planejamento: define-se os objetivos, entre os quais, metodologia, tecnologias e registros de representação semiótica durante o ensino de funções, (ii) protocolo: descreve-se a questão central da pesquisa, e palavras-chave e (iii) método de execução: critérios utilizados para incluir ou excluir trabalhos. Como critério de inclusão, trabalhos que retratassem uma aplicação do estudo de função no Ensino Fundamental e como critério de exclusão, trabalhos publicados antes de 2014, trabalhos que não contivessem os termos de busca no título e trabalhos que fossem apenas resumos, monografias, livros e projetos.

A pesquisa ocorreu com o recorte temporal entre os anos de 2014 a 2018, utilizando os seguintes termos: Representação Semiótica, Função Afim, Khan Academy. Assim, a

pesquisa foi realizada no banco de dissertações do Profmat, com o propósito de identificar trabalhos semelhantes à proposta aqui apresentada.

No Banco de dissertações do Profmat, obteve-se como resultado 28 trabalhos. Desses 28 trabalhos, 22 trabalhos foram publicados dentro do intervalo de tempo proposto. Todos os 22 trabalhos foram lidos na íntegra. Após a leitura, selecionou-se três trabalhos que reportavam a aplicação em sala de aula e o conteúdo de função afim, os quais tinham semelhança com a pesquisa e pelas possíveis contribuições para realização deste trabalho. São eles:

- (i) As contribuições dos Registros de Representação Semiótica no Processo de Ensino e Aprendizagem da Função Afim: um experimento com alunos do 1^o ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Maranhão/IFMA - Campus Avançado Rosário, de Lago (2018). Esta investigação teve como objetivo avaliar as contribuições dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem da função afim aos alunos do 1^a ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Maranhão no Campus Avançado da Cidade de Rosário - MA. Os resultados deste estudo, segundo o autor, indicam que os alunos têm dificuldades em estabelecer relações entre as múltiplas representações, e que os Registros de Representação Semiótica de Duval contribuem para que o professor compreenda os obstáculos enfrentados pelos alunos, identificando quais são as dificuldades para que os mesmos não consigam resolver os problemas propostos, elaborando assim, atividades com objetivo de mobilizar conhecimentos essenciais em novas aprendizagens. Em relação à pesquisa que está sendo realizada, este trabalho difere em nível de ensino e não contempla a proposta desta pesquisa em utilizar a tecnologia aliado à Teoria dos Registros de Representação semiótica, além disso, o mesmo utilizou dois grupos de investigação o que nessa pesquisa não ocorre.
- (ii) Função afim e suas propriedades através da Resolução de Problemas, de Boschetto (2015). Este trabalho propõe-se a ensinar os conceitos relacionados à função afim por meio de uma sequência didática com uso da metodologia de resolução de problemas e do software Geogebra. Essa sequência foi desenvolvida com os alunos do 1^o ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de José Bonifácio-SP. Este trabalho difere da pesquisa em andamento pela metodologia de resolução de problemas e nível de ensino. Segundo a autora, a experimentação com o uso das tecnologias fez com que os alunos gerassem conjecturas e verificassem os resultados obtidos. Construir e analisar gráficos no programa Geogebra motivou os alunos, acreditando-se que as visualizações práticas dos gráficos por meio do programa geraram boa compreensão e auxiliaram também às conclusões sobre os coeficientes a e b . O presente trabalho contribuiu com o estudo do uso do software Geogebra, acrescentando positivamente

a esta pesquisa, tendo como diferença o uso do software pelo app nos smartphones dos alunos na própria sala de aula.

- (iii) O Uso Da Plataforma Adaptativa Khan Academy No Ensino De Matemática e o Impacto Nas Avaliações, Mognhol (2015). Este trabalho relata a experiência do uso da plataforma adaptativa Khan Academy, disponível gratuitamente na web em <https://pt.khanacademy.org/>, com turmas do 1º ano de um Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - IFES Campus Venda Nova do Imigrante. O trabalho foi realizado em dois semestres letivos, em que durante o primeiro semestre, utilizou aulas expositivas, listas de exercícios, correções de exercícios, tira dúvidas, revisões, avaliações escritas, correções de avaliações, divulgação dos resultados e recuperações de notas e conteúdos para os alunos com baixo rendimento. No segundo semestre, optou-se por avaliar os alunos de acordo com os resultados obtidos na plataforma, por meio de dois procedimentos: aulas expositivas e realização de atividades na plataforma Khan Academy, como ferramenta de suporte ao ensino. O autor concluiu que o uso da plataforma é algo muito positivo, mas como ferramenta de suporte, não devendo substituir as tradicionais ferramentas de ensino, como as aulas expositivas e provas escritas. Este trabalho difere da presente pesquisa, além do nível de ensino, ao trabalhar vários conteúdos da matemática na plataforma Khan Academy, sendo a mesma utilizada à distância como reforço escolar. Apesar de não ter sido utilizada com o conteúdo de funções, o trabalho se assemelha à pesquisa no objetivo do reforço escolar. Assim, pôde-se verificar que apesar das ferramentas de ensino que a plataforma possui, a mesma não deve ser utilizada sozinha, destacando o uso em paralelo à sala de aula.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo apresenta os conteúdos de Produto Cartesiano, Relação Binária e Sistema de Coordenadas Cartesianas, sendo os mesmos pré-requisitos do tema central desta dissertação, bem como o conteúdo de Função Afim; o capítulo dois trata-se do referencial teórico de Registros de Representação Semiótica, por Raymond Duval; o terceiro capítulo aborda o uso das Tecnologias Digitais, destacando a utilização do *app* Geogebra e da Plataforma Khan Academy; o quatro trata-se dos aspectos metodológicos, apresentando o planejamento e o desenvolvimento da pesquisa, bem como a sequência didática para o estudo da Função Afim; o capítulo cinco discorre sobre a aplicação e análise de dados da Sequência Didática; finaliza-se este trabalho com as Considerações Finais e referências.

Capítulo 1

Funções

Neste capítulo, serão abordadas as definições e características da função afim, e os pré-requisitos para tal estudo, tais como, produto cartesiano, sistema de coordenadas cartesianas, relação binária e funções.

1.1 Produto Cartesiano, Sistema de Coordenadas Cartesianas e Relações

1.1.1 Par ordenado

Um par ordenado $P = (x, y)$ é formado por um objeto x , chamado de primeira coordenada de P e um objeto y , chamado de segunda coordenada de P (LIMA, 2017).

Dois pares ordenados $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ são iguais quando $x = u$ e $y = v$, ou seja,

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \quad \text{e} \quad y = v$$

. É importante ressaltar que o par ordenado $P = (x, y)$ é diferente do conjunto $\{x, y\}$, pois sempre teremos $\{x, y\} = \{y, x\}$, mas $(x, y) = (y, x)$ somente quando $x = y$, caso contrário, $(x, y) \neq (y, x)$ (LIMA, 2017).

1.1.2 Produto Cartesiano e Relação Binária

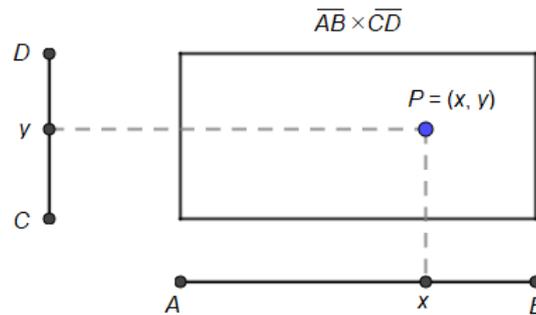
Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, o produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence ao conjunto X e a segunda coordenada y pertence ao conjunto Y (Lima (2017)).

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

O símbolo $X \times Y$ lê-se “ X cartesiano Y ” ou “produto cartesiano de X por Y ”.

Exemplo 1.1. Sejam \overline{AB} e \overline{CD} segmentos de reta. O produto cartesiano $\overline{AB} \times \overline{CD}$ pode ser interpretado como um retângulo, na forma indicada na [Figura 1](#). Tomamos \overline{AB} e \overline{CD} perpendiculares e cada elemento $(x, y) \in \overline{AB} \times \overline{CD}$ é representado pelo ponto P , interseção das perpendiculares a \overline{AB} e \overline{CD} tiradas pelos pontos x e y respectivamente ([LIMA, 2017](#)).

Figura 1 – Produto Cartesiano $\overline{AB} \times \overline{CD}$



Fonte: autoria própria

As seguintes observações são consideradas ([LIMA, 2017](#); [IEZZI, 2004](#)):

Observação 1.1. Se $X \neq Y$, então $X \times Y \neq Y \times X$, ou seja, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

Observação 1.2. Se X e Y são conjuntos finitos com m e p elementos respectivamente, e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$, então o produto cartesiano $X \times Y$ tem $m \cdot p$ elementos, isto é, $n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y)$, onde $n(X)$, $n(Y)$ representam o número de elementos de X e Y , respectivamente.

Observação 1.3. Se X ou Y for infinito e nenhum deles for vazio, então $X \times Y$ é um conjunto infinito.

Definição 1.1. Uma **relação** R entre elementos do conjunto X e elementos do conjunto Y é uma condição, ou um conjunto de condições, que permitem determinar, dados $x \in X$ e $y \in Y$, se x está ou não relacionado com y segundo R . Caso esteja, escreve-se xRy ([LIMA, 2017](#)).

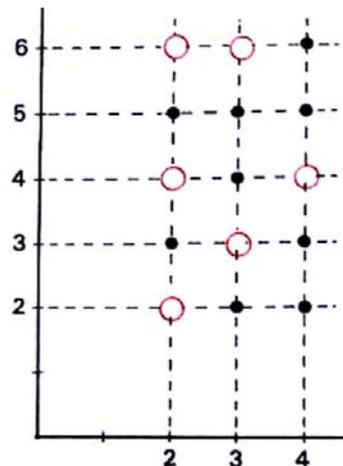
$$R \text{ é relação binária de } X \text{ em } Y \iff R \subset X \times Y$$

Definição 1.2. **Domínio** de uma relação é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a relação R .

Definição 1.3. **Imagem ou Contradomínio** de uma relação é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a relação R .

Exemplo 1.2. Consideremos os conjuntos $X = \{2, 3, 4\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. O produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ formado por $3 \cdot 5 = 15$ elementos representados na [Figura 2](#) por pontos pretos e vazios.

Figura 2 – Produto Cartesiano $X \times Y$



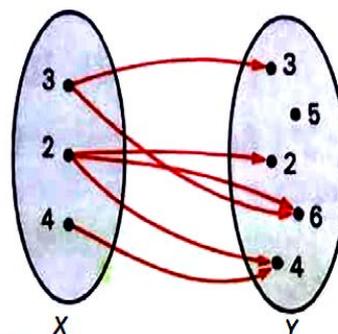
Fonte: autoria própria

Exemplo 1.3. Seja o conjunto dos pares ordenados (x, y) de $X \times Y$, como definido no [Exemplo 1.2](#). Definimos a relação binária R , tais que, $x|y$ (x é divisor de y), isto é, $R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x|y\}$.

A representação gráfica dessa relação está na [Figura 2](#), representados por pontos “vazios” com contorno em vermelho. Podemos representar também essa relação R por pares ordenados: $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$.

Também podemos representar esta relação por meio do diagrama de Venn, sendo considerada uma forma de visualização simples, como mostra a [Figura 3](#).

Figura 3 – Relação binária de X em Y por meio do diagrama de Venn

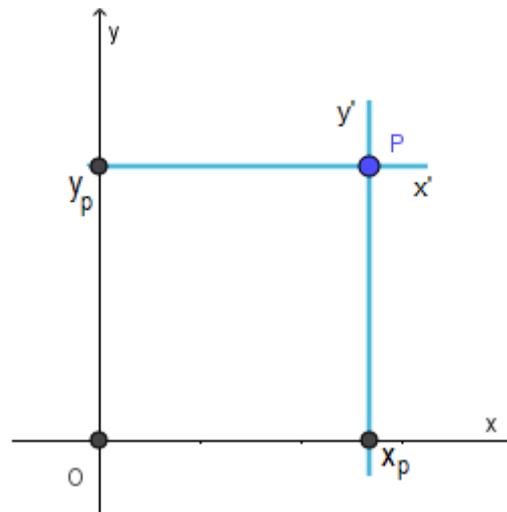


Fonte: [Iezzi \(2004, p. 71\)](#)

1.1.3 Sistema de Coordenadas Cartesianas \mathbb{R}^2

Para identificar ou localizar pontos de um plano precisamos de um sistema de coordenadas comumente chamado de sistemas de coordenadas cartesianas. Este sistema é composto por dois eixos x e y perpendiculares em O , chamado de origem, determinando um sistema de coordenadas do plano. Este sistema de coordenadas é chamado também de produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (Figura 4).

Figura 4 – Plano Cartesiano



Fonte: autoria própria

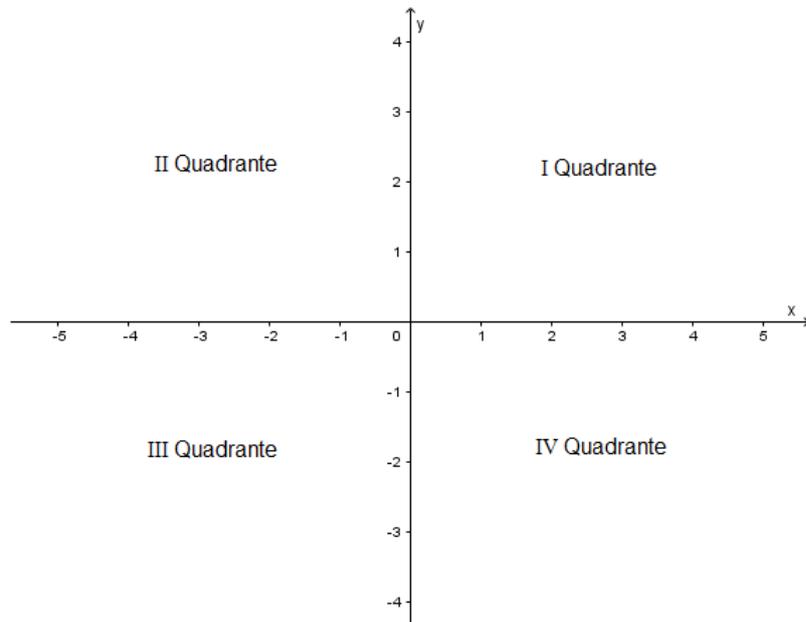
Assim, dado um ponto P qualquer no plano, conduzamos por ele duas retas paralelas: $x' \parallel x$ e $y' \parallel y$. Denominaremos x_p a interseção de x com y' e y_p a interseção de y com x' (IEZZI, 2004). Assim, define-se:

- (i) *eixo das abscissas* é o eixo x (ou Ox).
- (ii) *eixo das ordenadas* é o eixo y (ou Oy).
- (iii) *sistema de eixos cartesiano ortogonal* é o sistema xOy .
- (iv) *origem* do sistema é o ponto O .
- (v) *abscissa* de P é o número real x_p .
- (vi) *ordenada* de P é o número real y_p .
- (vii) *coordenadas* de P são os número reais x_p e y_p , indicados por (x_p, y_p) .

Teorema 1.1. *Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca.*

Os eixos Ox e Oy dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes (LIMA, 2017), como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Quadrantes



Fonte: autoria própria

A localização dos pares ordenados (x, y) nos quadrantes é dado de acordo com o sinal das coordenadas x e y :

- (i) primeiro quadrante tem-se $x > 0$ e $y > 0$.
- (ii) segundo quadrante tem-se $x < 0$ e $y > 0$.
- (iii) terceiro quadrante tem-se $x < 0$ e $y < 0$.
- (iv) quarto quadrante tem-se $x > 0$ e $y < 0$.

1.2 Funções

Definição 1.4. *Dados os conjuntos X e Y não vazios, uma relação de X em Y recebe o nome de **função** f com domínio em X e com imagem em Y se, e somente se, para todo $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$ (IEZZI, 2004). Também pode ser escrito da forma:*

$$f \text{ é função de } X \text{ em } Y \iff \forall x \in X, \exists y \in Y | (x, y) \in f$$

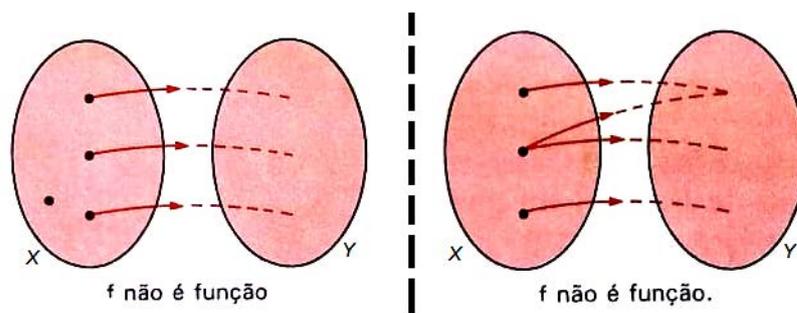
Para que a relação f seja função, a mesma deve satisfazer as seguintes condições (IEZZI, 2004):

1. É necessário que todo elemento do domínio tenha uma imagem, isto é, se $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

2. É necessário que para cada elemento de $x \in X$ tenha uma única imagem, isto é, se $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Uma relação f não é função se não satisfaz uma das condições acima, como vemos em diagrama de Venn na [Figura 6](#).

Figura 6 – Uma relação f que não representa uma função



Fonte: [Iezzi \(2004, p. 81\)](#)

Como toda função f é uma relação binária de X em Y , é um conjunto de pares ordenados. Geralmente existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in X$, determina-se $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Para expressar a lei de correspondência é habitual escrever a função f da forma:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \in X \longrightarrow y = f(x) \in Y$$

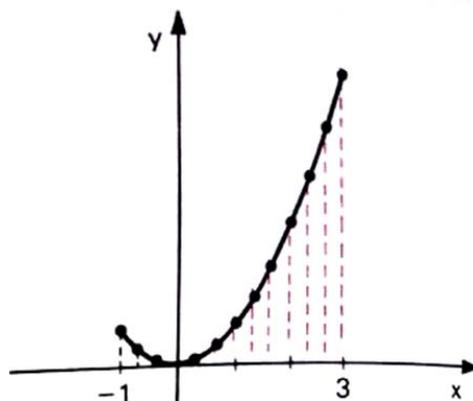
Definição 1.5. Definimos o gráfico de f como sendo o conjunto:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \quad (1.1)$$

As funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais são chamadas de **funções reais de variável real**.

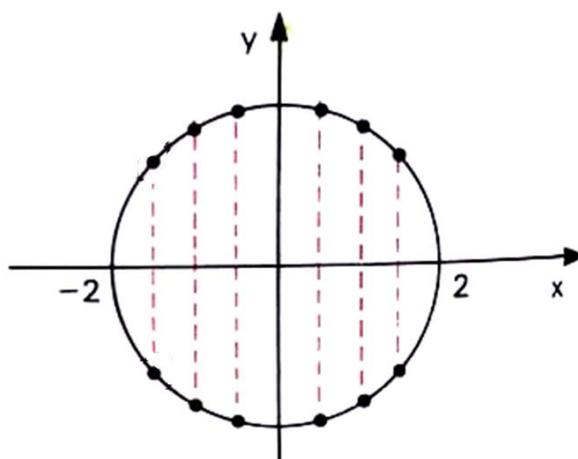
Observação 1.4. Quando temos o gráfico ou representação cartesiana de uma relação numérica f de X em Y , podemos verificar se f é ou não função ao verificar se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto $(x, 0)$, em que $x \in X$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto, como trata os exemplos abaixo.

Exemplo 1.4. A relação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, representada na [Figura 7](#), é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in X$ encontra sempre o gráfico de f num só ponto.

Figura 7 – Uma relação f que representa uma função

Fonte: Iezzi (2004, p. 82)

Exemplo 1.5. A relação $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, como mostra a [Figura 8](#), com $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

Figura 8 – A relação f não representa uma função

Fonte: Iezzi (2004, p. 82)

1.3 A Função Afim e os casos particulares

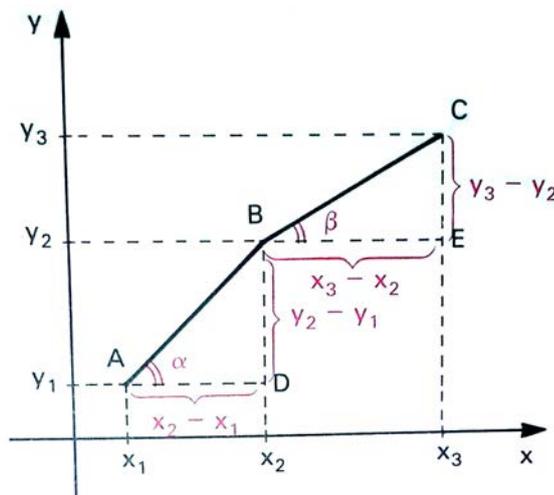
Definição 1.6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constante a , $b \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O coeficiente a é chamado de *taxa de variação* ou *taxa de crescimento* e o coeficiente $b = f(0)$ é chamado às vezes de o *valor inicial* da função afim. Casos particulares são quando $a = 0$ ou $b = 0$ que veremos mais adiante.

Teorema 1.2. *O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.*

Com efeito: Sejam três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ quaisquer do gráfico, distintos dois a dois. Para provarmos que os pontos A , B e C pertencem à mesma reta, mostraremos inicialmente que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCE$ são semelhantes. (Figura 9)

Figura 9 – Prova que o gráfico da função afim é uma reta



Fonte: Iezzi (2004, p. 101)

Desde que $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ e $y_3 = ax_3 + b$ temos que

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a,$$

$$\tan \beta = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$$

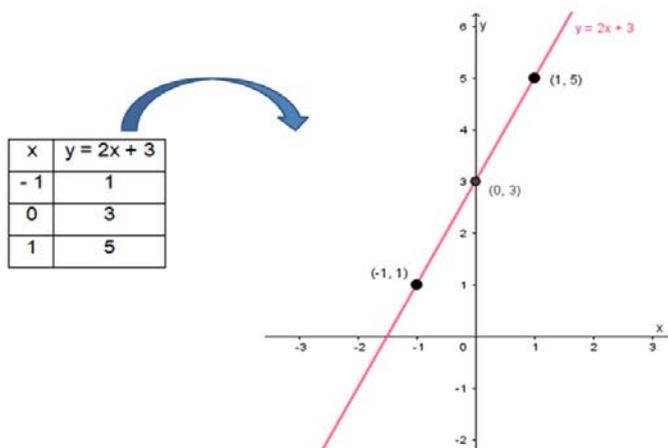
Conseqüentemente, $\alpha = \beta$. Portanto, os triângulos são semelhantes e os pontos estão alinhados. Por outro lado, o coeficiente a pode ser determinado a partir dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos e arbitrários x_1 e x_2 (LIMA, 2017). De fato, conhecidos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Logo,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1.2)$$

Exemplo 1.6. *Seja a função afim $f(x) = 2x + 3$. A partir da lei da função, traça-se o gráfico da mesma. Para isso, será utilizada uma tabela para auxiliar a marcação de pontos no plano cartesiano. Vimos anteriormente que se 3 pontos pertencem a função, eles estão alinhados, logo, formam o gráfico da função como vemos na Figura 10. Vale ressaltar que, dois pontos distintos são suficientes para traçar o gráfico da função afim, que é uma reta.*

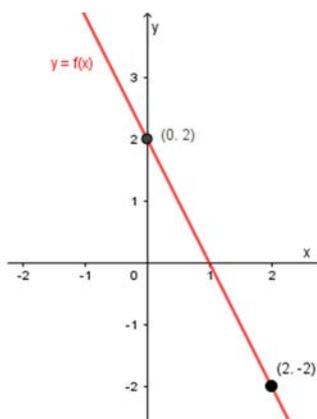
Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$ 

Fonte: autoria própria

Exemplo 1.7. Dado o gráfico da função $y = f(x)$ na Figura 11, podemos encontrar a lei da função. Temos os pontos $(0, 2)$ e $(2, -2)$ destacados. Com estes pontos podemos encontrar o coeficiente a usando a igualdade (1.2). Isto é,

$$a = \frac{-2 - 2}{2 - 0} = -2$$

Desde que $f(0) = b$ e observando que $(0, 2)$ pertence ao gráfico temos que $b = 2$. Logo a função afim é dado por $f(x) = -2x + 2$

Figura 11 – Gráfico da função $y = f(x)$ com dois pontos em destaque

Fonte: autoria própria

Definição 1.7. A raiz ou zero de uma função real é o número x cuja imagem é nula, isto é, x é raiz de f se e somente se, $f(x) = 0$.

Da definição anterior vemos que toda função afim $f(x) = ax + b$ tem como raiz o número $-\frac{b}{a}$. Observamos que a raiz da função do Exemplo 1.6 é $-\frac{3}{2}$ e do Exemplo 1.7 é 1.

Definição 1.8. *Seja*

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in X &\longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde X é subconjunto de \mathbb{R} .

i) f é **crescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

ii) f é **decrescente** quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. (LIMA, 2017)

Observação 1.5. *A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se a taxa de variação a é positivo. De fato, da definição de função crescente temos que:*

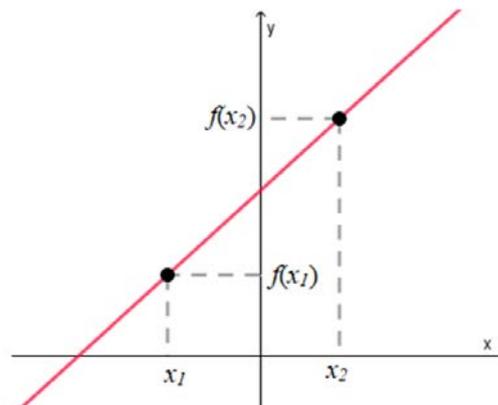
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_2 - b) - (ax_1 - b)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a > 0$$

Por outro lado, se a função afim é decrescente a taxa de variação a é negativo. De fato, da definição de função decrescente temos que:

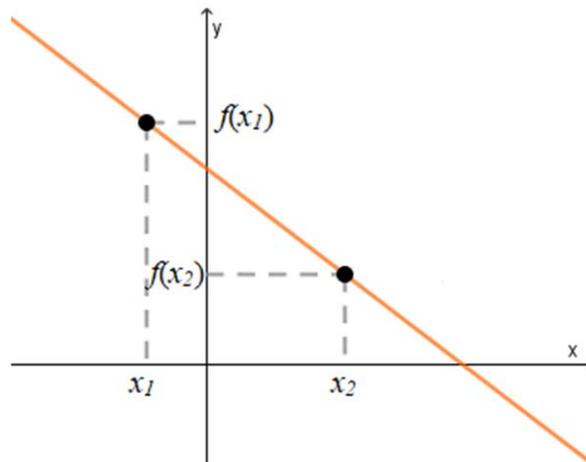
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_2 - b) - (ax_1 - b)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a < 0$$

Na [Figura 12](#) temos um exemplo do gráfico de uma função crescente e na [Figura 13](#) temos o exemplo do gráfico de uma função decrescente.

Figura 12 – Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ com $a > 0$



Fonte: autoria própria

Figura 13 – Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ com $a < 0$ 

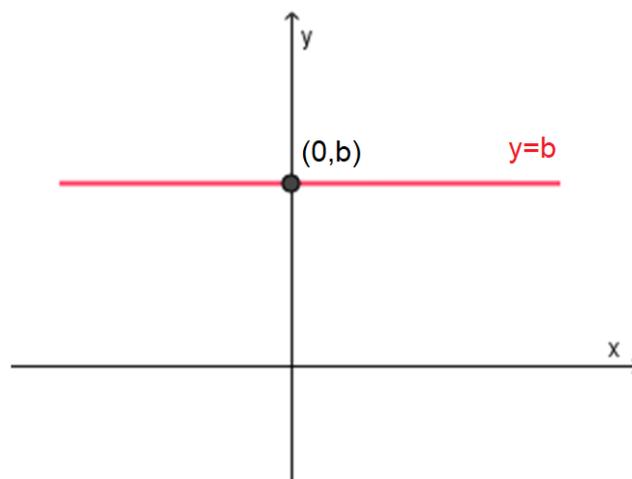
Fonte: autoria própria

1.3.1 Função Constante

A função constante é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Pode ser considerado como um caso particular de uma função afim onde a taxa de variação é zero (LIMA, 2017).

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x (Figura 14) passando pelo ponto $(0, b)$. A imagem é o conjunto $Im(f) = b$ (Figura 14).

Figura 14 – Representação gráfica da função constante



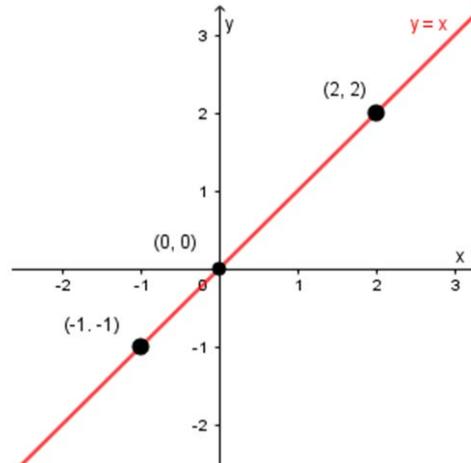
Fonte: autoria própria

1.3.2 Função Identidade

A função Identidade é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico da função identidade (Figura 15) é uma reta que contém as bissetrizes

do quadrantes. A imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Figura 15 – Gráfico da função identidade

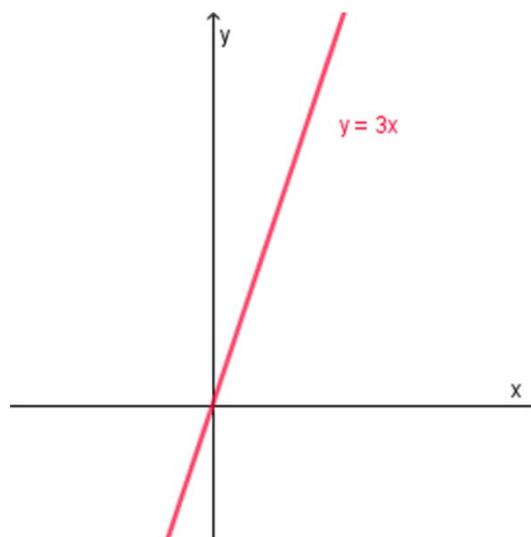


Fonte: autoria própria

1.3.3 Função Linear

A função linear é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$ para todo $a, x \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. É um caso particular da função afim cujo gráfico é uma reta que passa pela origem. A imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$. A figura [Figura 16](#) é um exemplo do gráfico da função linear.

Figura 16 – Gráfico da função linear $y = 3x$



Fonte: autoria própria

Capítulo 2

Abordagem sobre os Registros de Representação Semiótica

Este capítulo será dedicado ao estudo dos Registros de Representação Semiótica segundo a visão de Raymond Duval.

Representar um objeto matemático não é o mesmo que defini-lo. Por exemplo, ao representar um número, uma função ou um vetor (objetos matemáticos), utilizamos uma escrita, um símbolo, uma notação (representações). Da mesma forma que figuras representam, por exemplo, segmentos, ponto, círculos. É importante que não haja confusão entre a representação de um objeto matemático e o próprio objeto matemático, estando nessa diferenciação uma importante estratégia para a compreensão da matemática (DUVAL; MORETTI, 2012).

Duval e Moretti (2012) ainda colocam que para não haver essa confusão, entre objeto matemático e representação, é importante ter acesso a diversos registros, pois assim permitirá o reconhecimento do objeto em suas representações, onde por meio da coordenação dos vários registros de representação semiótica acontecerá a apreensão dos conceitos dos objetos em questão.

Dessa forma, Duval e Moretti (2012) definem representação semiótica como

“produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes” (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 269).

Ou seja, são as várias representações de um mesmo objeto matemático em distintos registros. Assim, Duval (2011) cita dois tipos de registros e quatro tipos de representações como mostra o Quadro 1 :

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: ➤ argumentação a partir de observações, de crenças... ➤ dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). ➤ apreensão operatória e não somente perceptiva; ➤ construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: ➤ numéricas (binária, decimal, fracionária...); ➤ algébricas; ➤ simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos ➤ mudanças de sistemas de coordenadas; ➤ interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2011, p. 14)

Os registros multifuncionais são aqueles utilizados em praticamente todas as áreas do conhecimento, sendo comuns a uma determinada cultura de forma espontânea. Estes podem ser discursivos, quando empregam a linguagem natural possibilitando, descrever e raciocinar por meio da argumentação e dedução, ou não discursivo, quando empregam figuras de maneira a obter compreensão não somente perceptiva, como operatória, bem como construí-la com instrumentos.

Já os registros monofuncionais são aqueles mais formais, específicos, e geralmente estudados em matemática. Estes podem ser discursivos, quando empregam o sistema de escritas, seja numérico ou algébrico, com símbolos permitindo descrever e calcular, ou não discursivo, quando empregam os gráficos cartesianos, mudando o sistema de coordenadas, determinando o valor de uma função num determinado intervalo conhecendo os valores extremos deste, bem calcular o valor exato de determinada função.

Ainda de acordo com Duval e Moretti (2012), as representações além de serem necessárias para fins de comunicação, são importantes para a atividade cognitiva do pensamento, pois desempenham papel fundamental no desenvolvimento de representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimento.

A representação mental diz respeito aos conceitos sobre um objeto ou uma situação que lhe é associado. Ao citar Vygotsky (1962) e Piaget (1968), Duval e Moretti (2012) comentam que essa representação depende da interiorização de representações semióticas, da mesma forma que é uma interiorização daquilo que é percebido.

Para desenvolver as representações mentais é importante que a representação semiótica esteja bem interiorizada, pois são estas que permitem completar funções cognitivas fundamentais, pois “o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável

da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação” (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 270).

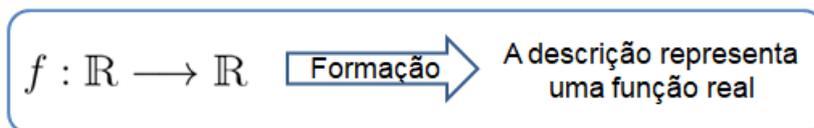
A compreensão ou a produção de uma representação semiótica é chamada de *semiose*, e a compreensão conceitual de um objeto é chamado de *noesis*, e para Duval (2009), não há noesis sem semioses, ou seja, não há compreensão do conceito de um objeto sem a compreensão ou produção de uma representação semiótica.

Duval e Moretti (2012) ainda citam Benveniste (1979) e Bresson (1978), ao falar da produção do conhecimento, onde as representações semióticas admitem representar um mesmo objeto de diferentes formas, atendendo a sistemas semióticos diferentes.

Um sistema semiótico deve permitir três atividades cognitivas ligadas a semiose: a formação de uma representação identificável como representação de um registro dado, o tratamento e a conversão (DUVAL; MORETTI, 2012).

Entende-se por **formação** de uma representação a “seleção de relações e de dados no conteúdo a representar”, ou seja, é uma descrição que segue regras, sejam elas gramaticais ou de construção de figuras num sistema mais formal, permitindo a identificação da representação, possibilitando o uso de tratamentos, conforme Figura 17.

Figura 17 – Exemplo de formação



Fonte: autoria própria

O **tratamento** de uma representação é a transformação desta em outra representação que ocorre dentro de um mesmo registro, sendo considerada uma transformação interna a um registro. Cada registro possui suas próprias regras de tratamento. Por exemplo, utilizamos o cálculo para as expressões simbólicas, como cálculo algébrico e numérico, como na Figura 18.

Figura 18 – Exemplo de tratamento na representação algébrica

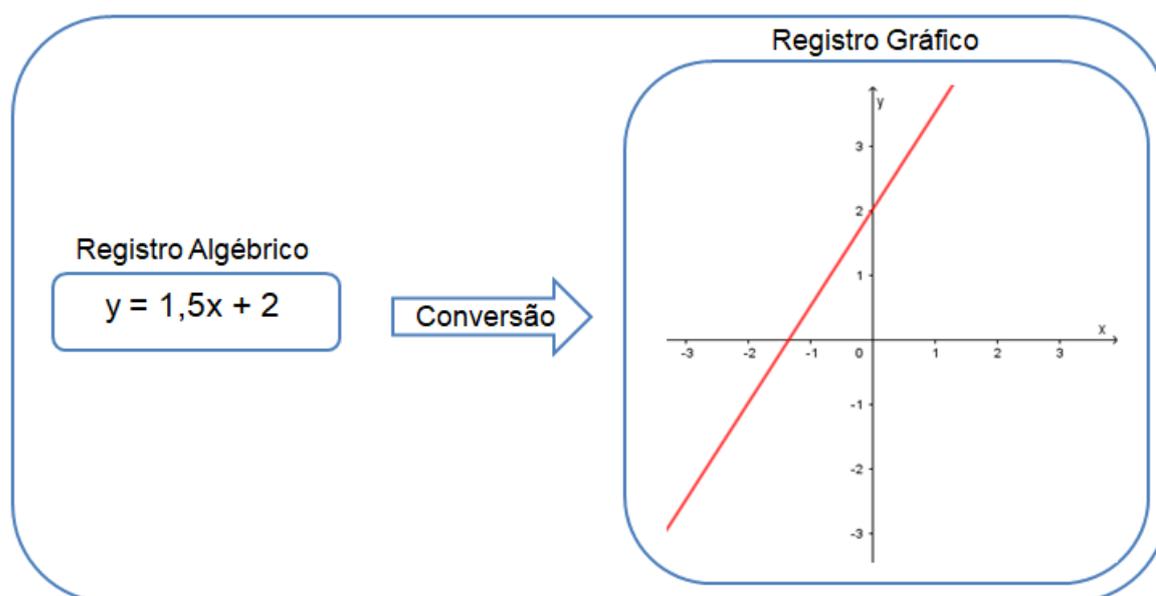


Fonte: autoria própria

Já na **conversão**, Figura 19, a transformação ocorre na representação de um registro para representação de outro registro, sendo considerada uma transformação externa. Por exemplo, ao converter uma representação linguística em uma representação

figural, utilizamos a ilustração. De forma contrária, utilizamos a descrição, que a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 272).

Figura 19 – Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: autoria própria

Carvalho, Anjos e Melo (2017) observam a importância da distinção dessas três atividades (formação, tratamento e conversão), visto que cada uma delas possui papéis diferentes e representam dificuldades diferentes no processo de aprendizagem conceitual. Os autores ainda comentam que os processos de formação e tratamento sobressaem ao processo de conversão, pois este último, de acordo com Duval e Moretti (2012), ocorre de maneira implícita para acelerar ou selecionar o melhor registro a ser utilizado, já que em matemática as atividades em geral possuem mais de um registro, o que se faz necessária a coordenação destes de forma simultânea.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; MÉDIO, 2002), os alunos devem

“Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. Fazer as conversões de uma linguagem para outra, selecionando a melhor representação para determinado problema” (BRASIL; MÉDIO, 2002, p. 114).

Ao encontro com a proposta acima, Carvalho, Anjos e Melo (2017) evidenciam a necessidade do uso das representações, e destaca o cuidado no processo de ensino, pois ao

citar [Duval \(2009\)](#) destaca que o aluno compreenderá a matemática a partir do momento em que distinguir o objeto matemático de sua representação.

Sobre o conceito de função, [Carvalho, Anjos e Melo \(2017, p. 118\)](#) destacam a diversidade de representações, “tais como diagramas, gráficos, expressões algébricas, língua natural e tabelas tendo cada uma delas algumas vantagens e limitações de acordo com as características que destacam”, o que vai ao encontro com os registros citados por [Duval \(2011, p. 14\)](#) : “sistema de numeração, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural”.

Para que haja de fato a compreensão do conceito, não é o bastante as várias representações, e sim a coordenação dessas representações em diferentes registros. [Henriques e Almouloud \(2016\)](#) afirmam que

“A coordenação é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. A coordenação aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem. [...] Os registros são sistemas inertes que acomodam as representações de objetos de saberes que, por sua vez, são dinâmicas, na medida em que elas podem, [...], sofrer transformações no mesmo ou entre diferentes registros” ([HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 470](#))

[Duval e Moretti \(2012\)](#) afirmam que para haver a compreensão de fato do conceito, deve-se haver a coordenação de pelo menos dois registros de representação. Apesar disso, essa coordenação não é natural, evidenciando as dificuldades encontradas pelos alunos, pois há falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica. [Duval \(2011\)](#), por exemplo, que em funções o ensino é enfático na conversão da representação algébrica para a representação gráfica, o que não ocorre de forma contrária, onde justamente é encontrada a dificuldade, pois ao ler e interpretar representações gráficas, os alunos não associam as regras de correspondência com a escrita algébrica.

[Barros \(2013\)](#) acredita que as diversas representações sejam importantes para o aprendizado de conceitos matemáticos, sendo insuficiente um só tipo de representação para a compreensão do conceito. Além disso, ressalta a importância da conversão entre as representações de registros.

A teoria de Representação Semiótica, segundo Duval, vai ao encontro com a teoria vygotskyana, ao utilizar e manipular signos e símbolos nos conceitos matemáticos. [Laburú, Zompero e Barros \(2013\)](#) colocam que as múltiplas representações reafirmam a posição vygotskyana, além de ampliar as considerações do pensamento e linguagem segundo Vygotsky.

Ainda de acordo com [Laburú, Zompero e Barros \(2013\)](#), a forma de relacionar o pensamento e as múltiplas representações por meio de “palavras, símbolos, ações, gestos,

figuração, imagens, entre outras”, em diferentes representações ativa o cognitivo do aluno. E ainda, estimular a atuação dos alunos com várias representações, é uma forma de potencializar os instrumentos do pensamento, objetivando níveis de compreensão elevados.

Capítulo 3

Uso das Tecnologias Digitais nos Processos de Ensino e Aprendizagem

Diante a evolução das Tecnologias Digitais (TD), [Tezani \(2011\)](#) comenta que as TD permitem que o processo de ensino e aprendizagem seja feita de uma interação “contínua, rica e insuperável”, viabilizando o processo de forma criativa, aperfeiçoando o desenvolvimento de competências e habilidades, tanto do professor quanto do aluno, envolvendo “desde ações de comunicação, agilidades, busca de informações, até a autonomia individual”, de forma a ampliar o conhecimento. Ainda de acordo com o autor, o progresso das TD vem influenciando na educação escolar, forçando-a a adaptar-se a evolução tecnológica.

O uso de TD, como aparelho celular, *smartphones*, *tablets*, entre outros aparelhos digitais, em sala de aula é proibido pelo projeto de lei federal nº 2246-a/07, pela seguinte redação: “Art. 1º - Fica proibido o uso de telefone celular nas escolas públicas do país”. Estados e municípios do Brasil também decretaram a proibição desse recurso em sala de aula. Mais especificamente no estado do Rio de Janeiro (RJ), está em vigor a lei nº 5453/09 (a qual modifica a redação da lei nº 5222/08), que proíbe o uso em escolas estaduais do estado do RJ. No entanto, [Costa, Costa e Camargo \(2017\)](#) comentam as pesquisas feitas em seu trabalho, verificando que o uso do celular, mediado de forma pedagógica, permitiu aos estudantes adquirir conhecimento, além de influenciar na motivação dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem.

[Carneiro e Passos \(2014\)](#) evidenciam em seu trabalho que o professor precisa saber das possibilidades e limites do uso da tecnologia em suas aulas, e conseguir promover mudanças necessárias para ensinar e aprender os conteúdos de forma atrativa e com significado, assim, fazendo com que as TD despertem o interesse e a motivação dos alunos para a construção do conhecimento de conteúdos de matemática. Os autores ainda comentam que a relação professor-aluno se torna diferente daquela que ocorre normalmente na sala de aula, tornando-se atores cooperativos.

Oliveira e Silva (2018) comentam que os alunos estão sempre conectados por meio de celular, *tablets* ou *smartphones*, sendo assim, possível ampliar a prática pedagógica de forma a auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem, utilizando aplicativos (*app*) com o objetivo de propor uma interação em sala de aula.

Os autores acima ainda comentam que “o uso das tecnologias pode flexibilizar o tempo de estudo dos alunos de forma eficiente dentro e fora do contexto escolar”. Moran (2013) ainda defende que “o uso da mobilidade na educação nos liberta dos espaços e dos tempos rígidos, previsíveis e determinados”.

3.1 Geogebra

“O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar” (GEOGEBRA, 2019). De acordo com o Instituto São Paulo Geogebra ¹, o software é livre e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, como parte de sua tese na Universidade Austríaca de Salzburg, em 2001, e, atualmente, utilizado em 190 países, traduzido para 55 idiomas.

O software Geogebra permite a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar e investigar conteúdos como geometria, álgebra, cálculo e estatística, auxiliando na construção do conhecimento matemático a partir de novas estratégias de ensino e aprendizagem. Para Araújo (2014) o software se destaca didaticamente por permitir representar um objeto na forma algébrica e na forma geométrica, os quais interagem entre si, permitindo ao usuário “condições para investigar, conjecturar, experimentar situações em um processo dinâmico”.

Araújo (2014) e Lopes, Costa e Oliveira (2016) destacam em seus trabalhos que o estudo de função afim é favorecido ao utilizar o software Geogebra, pois conduz o processo de ensino e aprendizagem de maneira investigativa.

“No ensino de função afim a construção de esboços desses gráficos ocupa um tempo importante no processo de ensino desta função. [...] O uso das novas tecnologias durante a aula proporciona benefícios à ação educativa. [...] Destacamos que o aspecto positivo mais importante notado durante o desenvolvimento na atividade proposta, foi a interação entre o aluno e a interface do software GeoGebra que possibilitou-o a especular, experimentar e, desse modo, sendo autônomo do seu estudo e do seu saber” (LOPES; COSTA; OLIVEIRA, 2016, p. 15).

Em concordância com Lopes, Costa e Oliveira (2016), Araújo (2014) ainda comenta que o Geogebra oferece

¹ <https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>

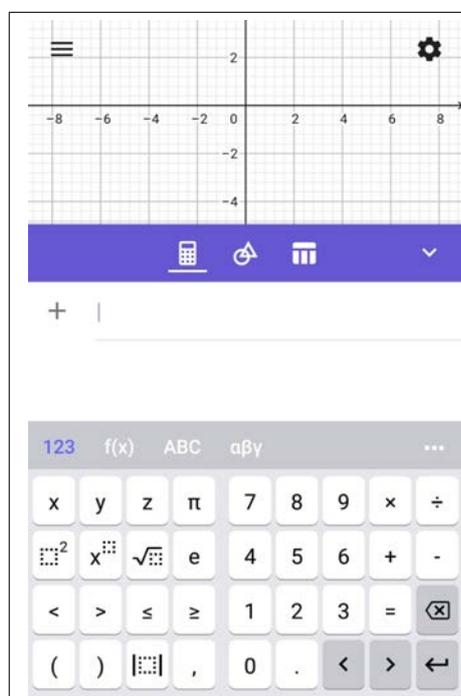
“Condições as múltiplas representações facilitando as conversões entre essas, onde permite a interatividade entre os objetos matemáticos e a visualização dos conceitos, possibilitando, assim, a formulação de conjecturas. Além disso, a aplicação do software matemático Geogebra no processo de ensino da função polinomial do primeiro grau se constituiu como um item motivador para a aprendizagem” (ARAÚJO, 2014, p. 113).

O software Geogebra foi adaptado para o uso em *smartphones* por meio do aplicativo “Geogebra Graphing Calculator” e é encontrado nos sistemas Android e iOS, nas lojas “Play Store” e “App Store”, respectivamente. O aplicativo também é livre, “utiliza pouca memória, mas produz um bom resultado para o processo de ensino aprendizagem” (SILVA, 2018, p. 28).

Para Silva (2018), o professor, como mediador, ao utilizar o *app* Geogebra em sala de aula, proporciona ao aluno a manipulação de objetos geométricos, posicionamento dos elementos, análise de suas respostas, construindo dessa forma, o conhecimento matemático de funções e gráficos.

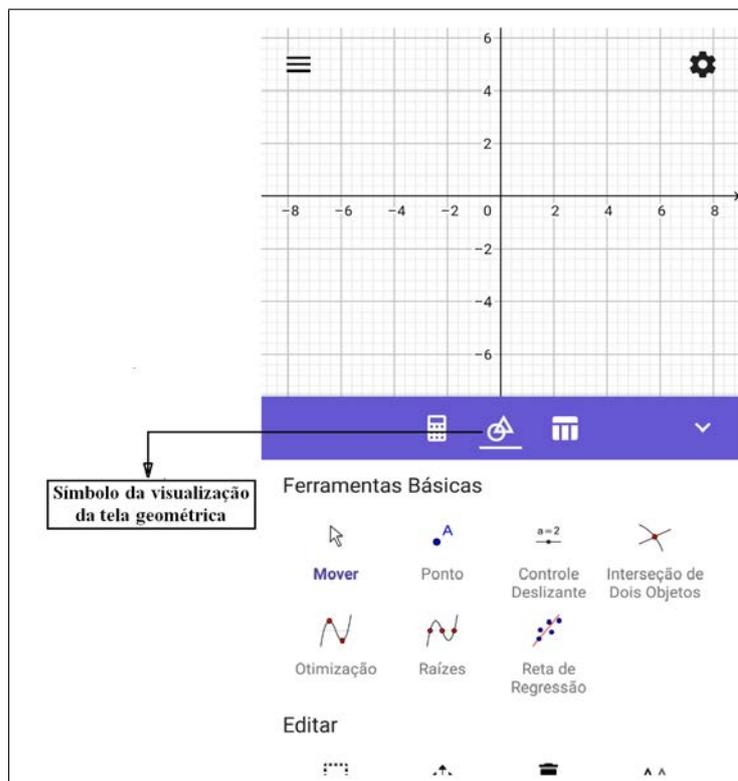
A tela inicial é conforme a Figura 20, e permite a entrada de dados pelo teclado numérico, funcional, alfabético e ainda inserir letras gregas.

Figura 20 – Tela inicial do *app* Geogebra - campo algébrico para *smartphones*



Fonte: autoria própria

Ao lado do símbolo da calculadora vemos um símbolo geométrico, permitindo a visualização da tela geométrica (Figura 21). Nesta, é possível identificar uma barra de ferramentas diversificadas, disponível para criar objetos, como: “ferramentas básicas”, “editar”, “medições”, “Transformar”, “Construções”, “retas”, “círculos”.

Figura 21 – Tela inicial do *app* Geogebra - campo geométrico para *smartphones*

Fonte: autoria própria

Os campos de visualização algébrico e geométrico permitem modificar de maneira dinâmica o objetos inseridos na tela do *app*. Por exemplo, ao inserir uma função no campo algébrico, será feito o esboço do gráfico referente à função dada no campo geométrico (SILVA, 2018). O mesmo acontece de forma contrária, onde ao traçar uma reta com o recurso do botão “reta” na tela geométrica, instantaneamente as coordenadas dos pontos plotados e a equação da reta aparecem no campo algébrico.

A configuração da tela do *app* é visto a partir do canto superior direito e tem as seguintes configurações, de acordo com a Figura 22:

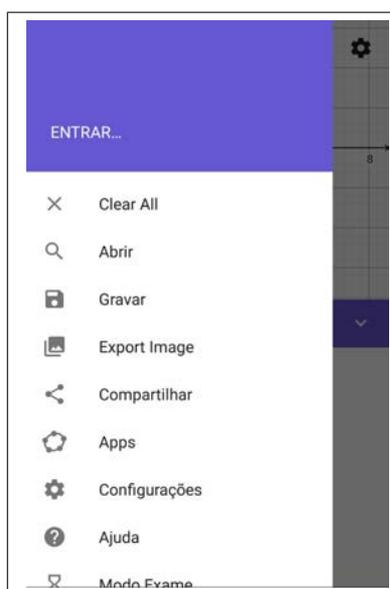
Figura 22 – Tela de configuração do *app* Geogebra para *smartphones*

Fonte: autoria própria

A configuração da tela se divide em configuração geral, configuração da janela de visualização, e configuração de álgebra.

Ainda é possível gravar todas as construções feitas no *app*. No canto superior esquerdo há um botão com 3 barras horizontais, Menu, que permite: fazer o login, se o usuário tiver uma conta do geogebra, limpar toda a construção feita, abrir um arquivo, gravar o que foi feito, exportar a tela como imagem, compartilhar a construção feita com arquivo .ggb², selecionar os *app*'s interligados entre si, abrir a janela de configurações, ajuda e modo exame [Figura 23](#).

² Arquivo de extensão própria do *app* Geogebra

Figura 23 – Menu do *app* Geogebra para *smartphones*

Fonte: autoria própria

3.2 Plataforma Khan Academy

Salman Khan, criador da plataforma Khan Academy, começou em 2004 com aulas particulares para sua prima por telefone, e posteriormente fazendo vídeos, sendo estes postados no youtube. O número de acesso foi tão grande, que decidiu em 2009 a se dedicar a plataforma que se conhece hoje por Khan Academy. Seus recursos iniciais eram mínimos, e além dos vídeos, contava com um software, montado por ele mesmo, para criar exercícios que rodava no provedor da *web*. Desde então, sua missão é “promover uma educação de nível internacional gratuita para qualquer um, em qualquer lugar” (KHAN, 2013).

A plataforma permite que qualquer pessoa aprenda qualquer conteúdo (contido na plataforma) a hora que quiser, de onde estiver, com ritmo próprio de aprendizado, por meio de vídeo aulas, exercícios, artigos ³, permitindo o acompanhamento de sua própria aprendizagem.

A Plataforma Khan Academy está disponível na *web* (Figura 24) e também em *app*. Independente da forma de acesso (*web* ou *app*), além de poder navegar e fazer as atividades sem estar logado (onde seu desenvolvimento não será “guardado”), a plataforma conta com três opções de *login*: alunos, professores e pais. O cadastro pode ser realizado por meio de um e-mail de preferência do usuário, pela conta do *Facebook*, ou pela conta do Google. Em todos os cadastros deve-se concordar com os Termos de uso e Política de Privacidade.

³ O artigo na Plataforma Khan Academy é um resumo de determinado assunto. Alguns artigos são interativos, tendo exemplos prontos e exemplos para ser complementados.

Figura 24 – Página inicial da plataforma Khan Academy

The image shows the homepage of Khan Academy in Portuguese. At the top, there is a navigation bar with 'Cursos', 'Pesquisar', and the Khan Academy logo. On the right, there are links for 'Faça uma doação', 'Entrar', and 'Cadastrar-se'. The main banner features the headline 'Você pode aprender qualquer coisa. Gratuitamente. Para todos. Sempre.' and three buttons: 'Alunos, comecem aqui', 'Professores, comecem aqui', and 'Pais, comecem aqui'. Below the banner, there are five main course categories: Matemática, Ciências por ano, Ciências e engenharia, Economia e finanças, and Computação. Each category has a list of sub-topics. For example, under 'Matemática', there are 'Fundamentos de matemática', 'Aritmética', and 'Pré-álgebra'. The footer contains the mission statement: 'Nossa missão é oferecer uma educação gratuita e de alta qualidade para todos, em qualquer lugar.' and a grid of links for 'Sobre', 'Contato', and 'Cursos'.

Fonte: <https://pt.khanacademy.org>, acesso em 06/04/2019

A plataforma funciona como um game no sentido de acumular pontos ao praticar uma sequência de exercícios, assistir vídeo aulas ou estudar pelos artigos oferecidos, ou seja,

todas as atividades realizadas na plataforma geram pontos. Além dos pontos acumulados, é possível ganhar medalhas de acordo com a pontuação feita, e trocar o avatar do perfil.

O login do aluno permite que os mesmos tenham autonomia para escolher quais “cursos” gostariam de aprender bem como, a ordem das atividades a serem realizadas. À medida que vão completando uma série de perguntas apresentadas em um bloco, por exemplo, vão acumulando pontos, e ao final desse bloco de perguntas é possível que veja o seu resumo com a porcentagem de acertos, optando por tentar novamente ou seguir para a próxima tarefa. Em cada pergunta há possibilidade de pedir dicas, ou assistir a vídeos para melhor entender determinada questão, caso surja alguma dúvida. Ao errar a pergunta, o aluno tem a possibilidade de tentar novamente sem ajuda ou com ajuda de alguma dica, ou seguir em frente. Ressalta-se que ao errar uma pergunta, e refazer acertando a mesma, o aluno não acumulará a pontuação referente a essa pergunta, não sendo contabilizada em seu progresso, nem aparecendo na porcentagem de acertos do bloco de perguntas em questão. Isso também acontece ao pedir dicas, o progresso do mesmo não é contabilizado.

O aluno ainda pode estar inserido em alguma turma de professor, onde pode fazer recomendações ⁴ específicas.

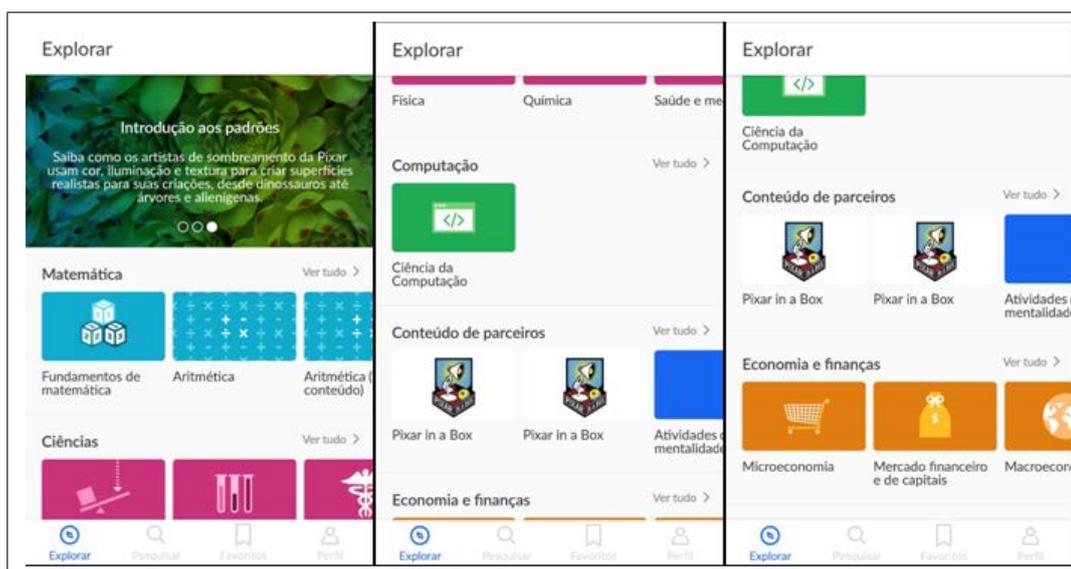
3.2.1 Khan Academy no app

O *app* Khan Academy pode ser encontrado na maioria dos *smartphones*, como por exemplo, dos sistemas mais utilizados Android e iOS, nas lojas “Play Store” e “App Store”, respectivamente.

A interface ao abrir imediatamente o *app* é como mostra a [Figura 25](#)

⁴ Recomendações na plataforma Khan Academy são atividades compostas por um bloco de questões, que variam de 4 a 7 questões por recomendação.

Figura 25 – Página inicial da plataforma Khan Academy



Fonte: App Khan Academy, acesso em 06/04/2019

O app Khan Academy é vantajoso por se ter à mão os recursos oferecidos. Os alunos podem visualizar as atividades recomendadas ativas (as que ainda estão no prazo para serem feitas), bem como realizá-las em seu *smartphone*. Como uma espécie de jogo, tudo o que é feito na plataforma gera pontos. As atividades realizadas sem erro e sem dicas, visualizar os vídeos disponíveis e estudar pelos artigos disponibilizados. O aluno também pode adicionar tópicos a uma lista de favoritos, facilitando o acesso ao mesmo. Em seu perfil, visualiza seu total de pontos e medalhas adquiridas ao longo de seu estudo na plataforma.

3.2.2 Khan Academy na web

A plataforma pode ser acessada pelo endereço eletrônico <http://pt.khanacademy.org> ou www.khanacademy.org.br. Na página inicial é possível identificar os conteúdos abordados na plataforma (Matemática, Ciências e Engenharia, Economia e Finanças e Computação), entrar (se já possuir o login), ou se cadastrar.

O login do professor/tutor tem várias funcionalidades, desde criar uma turma até o acompanhamento da mesma, de forma geral, ou individual. O painel de professor/tutor permite:

- Criar uma turma: Para criar uma turma, o professor/tutor pode importar a turma do Google sala de aula, ou criar uma nova. Escolhe os cursos (oferecidos na plataforma) para a turma, podendo ser mais de um curso. Nesse momento é gerado um código de turma. Os alunos podem ser inseridos nesta por meio de convite por e-mail, ou o próprio professor criar uma conta e senhas e distribuir aos seus alunos. Ou pedir

para que os mesmos criem e peçam para entrar na turma por meio do código gerado anteriormente que o professor divulgará.

- Exibir conteúdo: O professor/tutor navega pelo conteúdo do curso escolhido para a turma de forma detalhada.
- Recomendar atividades: Para recomendar atividades, o professor/tutor pode selecionar as atividades desejadas quando estiver navegando pelo conteúdo do curso escolhido para a turma.
 - Na aba recomendações, o professor/tutor acompanha as recomendações feitas com um relatório completo que permite visualizar o dia e horário que foi recomendado, bem como o prazo final do mesmo. Quantos e quais alunos fizeram as atividades, o horário em que foi feito, quantas tentativas foram utilizadas e a melhor nota. Na opção exibir relatório, é possível identificar qual questão teve o maior índice de erro, ou de acerto, e quais alunos erraram ou acertaram aquela questão.
- Visualizar o Progresso da turma. Este pode ser por habilidade ou por aluno.
- Visualizar o tempo em que os alunos ficaram ativos na plataforma na aba “Atividades”. O professor/tutor pode escolher o período que deseja visualizar, por exemplo, últimos 7 dias, últimos 30 dias, tempo total... É mostrado um gráfico de barras, e quando passa o mouse por cima, é visualizado o tempo total, e qual atividade foi feita naquele tempo.
- Visualizar pela aba “Lista”, todos os alunos cadastrados na turma. Ao clicar em algum deles, aparece todas as recomendações feitas por ele, com o status de concluído ou não, com a quantidade de tentativas e com a melhor nota. Ao clicar na nota, exibe um relatório com as questões feitas daquela recomendação. Além disso, pode incluir alunos novos, ou excluir alunos da turma em questão.
- Na aba “configurações”, pode-se modificar o nome da turma, incluir ou excluir cursos, sincronizar com o Google sala de aula, baixar em arquivo CSV ⁵ (Comma-separated values) dados dos alunos como recomendações, status de conclusão e pontuação dos mesmos.

Na maioria das abas de acompanhamento é possível baixar as informações em arquivo CSV.

⁵ CSV (comma-separated values) é um formato de arquivo que armazena dados tabelados, sendo este um implemento particular de arquivos textos separados por um delimitador, que usa a vírgula e a quebra linha para separar os valores.

O login dos pais permite acompanhar seus filhos pelas “abas” (i) perfil, (ii) medalhas, (iii) progresso e (iv) projetos. Em síntese, o responsável pelo aluno consegue visualizar o perfil do mesmo obtendo dados dos dias de acesso, das atividades recentes que o aluno fez, bem como acompanhar a evolução na aba progresso observando os tópicos os quais tiveram dificuldade, o tempo gasto nas atividades, bem como os vídeos assistidos e o foco obtido em cada conteúdo. Bem parecido com o acompanhamento individual que o login de professor/tutor tem.

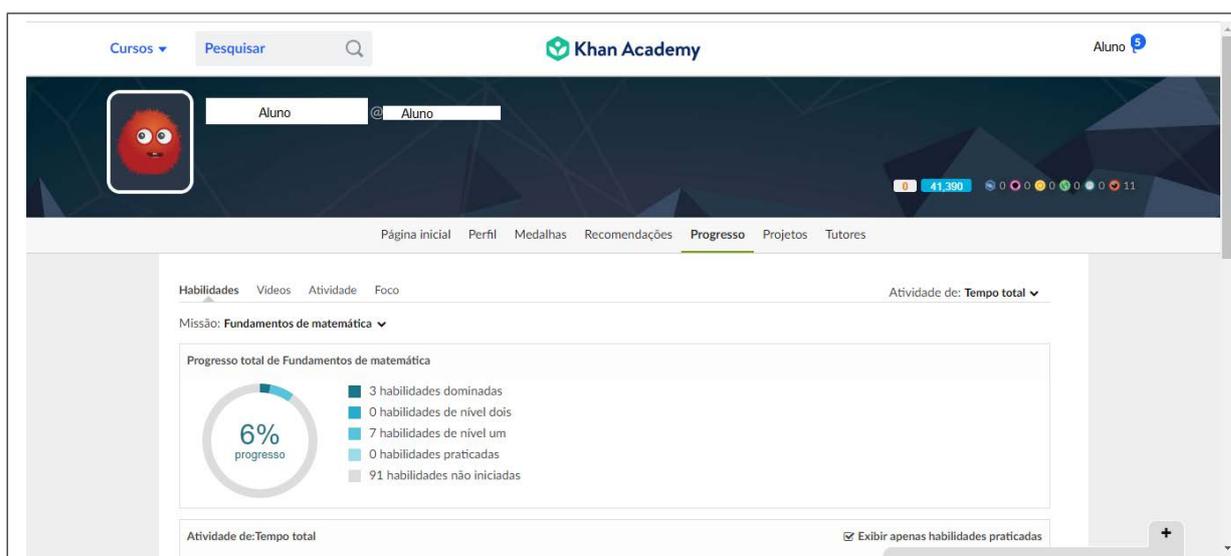
Pode-se perceber que os mesmos conteúdos vistos na plataforma no *app*, são vistos na plataforma pela *web*.

Com o acesso via *web* os alunos além dos recursos disponíveis no *app*, conseguem acompanhar sua própria aprendizagem de forma mais completa, pois na *web* tem o recurso de acessar recomendações anteriores (aquelas cujo prazo para a realização já terminaram) e também as ativas.

Em seu perfil além da pontuação e medalhas, consegue visualizar a sequência de acesso à plataforma, identificando inclusive o último acesso.

Dois funcionalidades apresentadas na *web* que não estão no *app* são “progresso” e “tutor”. Em progresso, o próprio aluno consegue acompanhar sua atividade, visualizando o tempo investido em cada tópico, inclusive com porcentagem. Possui a aba “habilidades”, [Figura 26](#), “vídeos” (mostrando os vídeos assistidos), “atividade” e “foco” ([Figura 27](#)). E em tutor, o aluno visualiza qual(is) é(são) seu(s) professor(es).

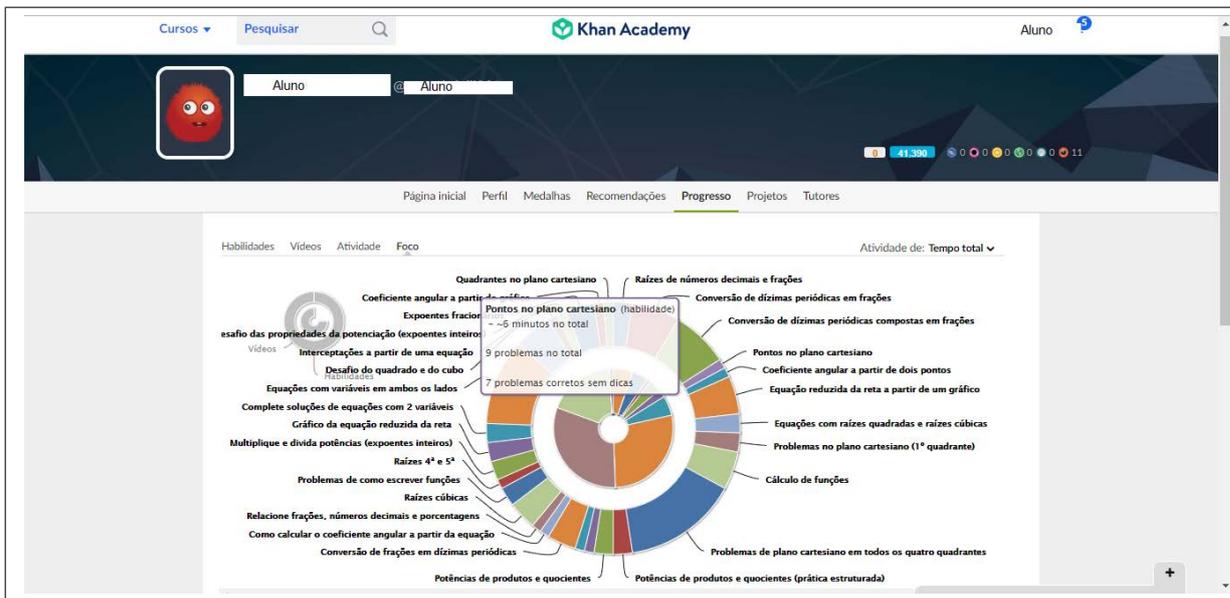
Figura 26 – Perfil do aluno na aba Progresso - habilidades



Fonte: Plataforma Khan Academy, acesso em 02/04/2019

Logo abaixo de habilidades está escrito missão. Nesta, pode-se selecionar o tópico desejado entre todos oferecidos na plataforma para visualizar as habilidades praticadas.

Figura 27 – Perfil do aluno na aba Progresso - foco



Fonte: Plataforma Khan Academy, acesso em 02/04/2019

Na Figura 27, ao passar o mouse por cima de cada cor indicada no gráfico, o aluno consegue visualizar o que foi feito naquela atividade. Quanto maior a cor, maior foi o tempo investido naquele assunto.

Capítulo 4

Aspectos Metodológicos

Buscando responder a questão de pesquisa “*Como a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim no contexto do Ensino Fundamental II?*”, a presente pesquisa tem abordagem qualitativa, baseada no estudo de caso, que de acordo com Yin (2015) deve ser utilizada quando as questões de pesquisa são do tipo como ou porque, o objeto a ser estudado é atual, no contexto da vida real e o pesquisador não tem controle sobre os resultados, visto que após a coleta e análise de dados, a resposta à questão de pesquisa, pode ser satisfatória ou não.

Dessa forma, os instrumentos escolhidos para esse estudo foram: questionário, atividades elaboradas, *app* Geogebra e plataforma Khan Academy (*web* e *app*). Assim, houve uma diversidade de elementos, enquanto instrumento de dados.

Essa pesquisa utiliza métodos e técnicas com finalidade específica, para a aplicação prática e está organizada da seguinte forma: planejamento e análise de dados.

A análise de dados será feita de acordo com as atividades realizadas e relatórios da plataforma Khan Academy, com os objetivos expostos na introdução.

4.1 Planejamento da Pesquisa

O planejamento se deu pela revisão bibliográfica, escolha dos sujeitos da pesquisa, elaboração, aplicação e análise do questionário, elaboração da aula sobre a utilização da plataforma Khan Academy, elaboração da aula sobre Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Produto Cartesiano e Relação Binária como pré-requisito, elaboração da sequência didática das aulas presenciais e online com seleção dos tópicos a serem trabalhados na plataforma Khan Academy.

Os conteúdos escolares podem sofrer modificações ao serem apresentado pelo professor, buscando simplificar o conceito por meio de diferentes formas de ensinar. Esse

conjunto de transformações é chamado de transposição didática, que de acordo com [Chevallard \(1991\)](#),

“Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática” ([CHEVALLARD, 1991](#) apud [PAIS, 2016](#), p. 23)

É importante esclarecer que as transposições didáticas em Matemática não alteram as definições, teoremas ou saberes por terem sido contextualizados, apenas reformulam o conteúdo escolar com elementos da prática da transposição. Ao fazê-lo, o professor pode, explicar de forma diferente, utilizando outra linguagem, métodos, materiais e recursos que acredita que irão contribuir positivamente para o processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, [Libâneo \(2013\)](#) comenta que para tais objetivos serem atingidos, o trabalho docente deve ser planejado, conforme uma estrutura e organização. Sobre o planejamento, ele destaca que o professor deve levar em consideração objetivos, conteúdos e métodos, podendo utilizá-lo como uma reflexão acerca das opções e ações.

A revisão bibliográfica ocorreu durante toda a pesquisa, por meio de leitura de livros, dissertações, teses e trabalhos publicados em anais de eventos com assuntos afins. Dessa forma, há uma diversidade de informações de fontes de pesquisa visando um melhor embasamento teórico para a pesquisa em questão.

Os sujeitos da pesquisa foram os alunos da turma 901 do 9º ano do Ensino Fundamental II da Escola Municipal Francisco Paes de Carvalho Filho, localizada no município de São Pedro da Aldeia – RJ, a qual a professora regente é a própria pesquisadora.

Destaca-se que a identidade dos alunos foi preservada e os mesmos foram identificados por A1, A2, A3, A4, ..., A13, em ordem alfabética. Os grupos definidos no início de cada aula presencial foram identificados por Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3.

4.1.1 Elaboração, Aplicação e Análise do questionário

Foi elaborado e aplicado um questionário contendo 5 questões fechadas e abertas, com a finalidade de identificar se os alunos possuem acesso à internet, e de que forma e finalidade acessam, para definir como seria utilizada a plataforma Khan Academy, como recurso metodológico em apoio ao planejamento de aula, pois seria necessário o acesso à internet e a escola não dispõe de internet sem fio (*wi-fi*) disponível para acesso dos alunos, nem de um laboratório de informática equipado.

O questionário I, que encontra-se no [Apêndice A](#) e foi aplicado no dia 22 de agosto de 2018 para os 12 alunos presentes da turma 901, com duração de 10 min. O [Quadro 2](#) mostra a identificação dos sujeitos da pesquisa.

Quadro 2 – Identificação dos sujeitos

Identificação da turma	901
Total de Alunos	13
Responderam ao questionário	12
Feminino	4
Masculino	8

Fonte: autoria própria

Quanto ao acesso à internet, foi unânime a resposta que todos possuem acesso à internet, de acordo com o [Quadro 3](#).

Quadro 3 – Acesso à internet

Pergunta		
Você tem acesso à internet? Se sim, de que forma?	Sim	12
	Não	0
Somente pelo meu próprio celular.		7
Pelo computador e pelo celular em minha própria casa.		5

Fonte: autoria própria

Quanto ao acesso à internet, obtivemos as seguintes respostas mostradas no [Quadro 4](#):

Quadro 4 – Forma de acesso à internet

Pergunta		
O acesso à internet é por:		
Somente rede <i>wi-fi</i>		9
Somente rede de dados móveis		0
Rede <i>wi-fi</i> e/ou rede de dados móveis (estou sempre conectado)		3

Fonte: autoria própria

Após a análise dessas duas primeiras questões, optou-se por utilizar a plataforma Khan Academy como um reforço às aulas presenciais, sendo utilizada de casa, onde as recomendações ocorreram de acordo com os tópicos trabalhados em aula.

Em relação à finalidade de acesso à internet, as respostas encontram-se no [Quadro 5](#). Pode-se perceber que os alunos utilizam em sua maioria com a finalidade de comunicação

social e diversão, onde a maioria dos alunos marcaram frequência 5, ou seja, utilizam de forma mais frequente com essas finalidades, enquanto para pesquisas escolares utiliza-se de forma média, onde a maioria marcou uma frequência 3. Para acessar e-mail e informar-se sobre notícias da atualidade, verificou-se que a frequência para este uso é baixa, onde a maioria dos alunos marcaram uma frequência entre 1 e 3.

Quadro 5 – Objetivos do uso da internet

Pergunta	Frequência de 1 a 5				
	1	2	3	4	5
Com que objetivos você utiliza a internet?					
Para acessar meus e-mails	7	2	1	1	1
Redes sociais e como meio de comunicação pessoal	1	0	0	4	7
Para minhas pesquisas escolares	1	4	6	0	1
Para divertir-me: ouvir música, assistir a vídeos, jogar.	0	1	0	2	9
Utilizo a internet para informar-me sobre as notícias da atualidade	5	2	4	1	0

Fonte: autoria própria

Após a análise do [Quadro 5](#), entende-se que a proposta de utilizar a plataforma Khan Academy como reforço escolar de casa é um desafio, visto que os alunos não estão acostumados a estudarem utilizando a internet.

Verifica-se no [Quadro 6](#) o tempo gasto diário pelos alunos ao navegarem na internet utilizando o computador.

Quadro 6 – Tempo diário gasto na internet utilizando o computador

Pergunta	
Em casa, quantas horas por dia você gasta navegando na internet usando o computador?	
até 2 horas	1
de 2 a 5 horas.	1
mais de 5 horas.	2
não uso em casa	1
não tenho computador em casa	7

Fonte: autoria própria

Verifica-se no [Quadro 7](#) o tempo gasto diário pelos alunos ao navegarem na internet utilizando o celular.

Quadro 7 – Tempo diário gasto na internet utilizando o celular

Pergunta	
Em casa, quantas horas por dia você gasta navegando na internet usando o celular?	
até 2 horas	2
de 2 a 5 horas.	2
mais de 5 horas.	8
não uso em casa	0

Fonte: autoria própria

Após a análise do [Quadro 6](#) e do [Quadro 7](#), é possível perceber que os alunos acessam mais o celular do que o computador, e que os mesmos passam mais de 5 horas utilizando a internet do seu *smartphone*.

Assim, após analisar o questionário, foi definida, inicialmente, que a plataforma Khan Academy será utilizada de forma individual e de casa, onde cada aluno estará com seu *smartphone*, utilizando a plataforma citada via *web* ou *app*, como complemento e reforço em algumas atividades de sala de aula.

4.1.2 Elaboração da aula sobre a utilização da Plataforma Khan Academy

O uso da plataforma Khan Academy, enquanto recurso tecnológico a ser usada pelos alunos nesta pesquisa, deu-se em função da pesquisadora ter conhecimento de seu uso por um professor de geometria da instituição, com a finalidade de incentivar os alunos a utilizá-la como reforço escolar.

Inicialmente, os alunos relataram ter conhecimento sobre a plataforma, dessa forma, visando o conhecimento e interação dos alunos com a plataforma para o estudo de funções objeto desta pesquisa, a pesquisadora criou novos login's para os mesmos e recomendou atividades sobre o conteúdo abordado na época (potências, nos meses de junho e julho) para que eles fossem se adaptando ao uso da plataforma, como um reforço escolar em paralelo às aulas lecionadas, bem como identificar possíveis dúvidas quanto ao uso das ferramentas da plataforma em questão e foi percebido o baixo acesso dos alunos à plataforma, onde alegaram que não estavam sabendo acessar e utilizar a mesma.

Ao iniciar a pesquisa sobre o estudo de funções, a pesquisadora optou por criar uma “turma teste” na plataforma, com aluno fictício, denominado de “aluno teste1”, para então ministrar uma aula sobre como acessar a plataforma Khan Academy por meio do computador e do *smartphone* e conhecer os recursos oferecidos, diante das dificuldades relatadas pelos alunos quanto ao estudo de potências.

A aula foi planejada para 02 tempos de aula com 50 min cada, utilizando o computador, e o smartphone da pesquisadora e a televisão da instituição. O andamento da aula se deu pelas seguintes etapas:

(i) Acessar o ambiente da plataforma: Explicar a forma de acesso com o login e senha, dos próprios alunos, fornecidos em aulas anteriores. Nesta aula, o login e a senha utilizados serão do “aluno teste1”.

(ii) Como navegar na plataforma pelos diversos cursos oferecidos.

(iii) Como encontrar uma recomendação e realizar a mesma. Na realização da recomendação, propôs-se que fosse feito junto com a pesquisadora uma atividade do aluno teste para que os alunos entendam melhor como funcionam as recomendações (com o conteúdo de equações, visto que os alunos já haviam estudado esse conteúdo).

(iv) Visualizar seu próprio perfil, acompanhando sua aprendizagem, bem como sua pontuação e medalhas adquiridas (recurso que a plataforma oferece).

Após a discussão da *web*, passou-se para o *app*. Para explorar a plataforma via *app*, foi utilizada a televisão com o dispositivo “*chromecast*¹” que possibilita espelhar a tela do celular da pesquisadora na TV, o que levou os alunos a acompanharem o que era feito no celular, já que a escola não dispunha de internet wi-fi para que os alunos tivessem acesso individual em seu celular. Os mesmos procedimentos utilizados no computador foram realizados no celular da pesquisadora, para que os alunos tivessem conhecimento dos recursos a serem utilizados nas atividades que foram propostas.

4.1.3 Planejamento da aula de pré-requisitos

Após a aula sobre a exploração dos recursos da plataforma Khan Academy, foram ministradas as aulas de Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Produto Cartesiano e Relação Binária como pré-requisito. As aulas foram planejadas para 04 tempos de 50 min cada, sendo divididas em dois encontros de 2 tempos de aulas cada.

Sobre o conteúdo de Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, foi utilizado o *PowerPoint*, abordando os sistemas de localização geográfico e cartesiano, mostrando o assunto por meio de 01 aparelho de GPS ², a plataforma *Google Earth* ³, e o software Geogebra, possibilitando assim a melhor visualização do conteúdo, e

¹ *Chromecast* é um dispositivo criado pelo Google para transformar TVs comuns em Smart TVs com acesso a apps diversos e funciona conectando o media center em uma porta HDMI.

² O GPS (global positioning system), sistema de posicionamento global, é um mecanismo de posicionamento por satélite que fornece a um aparelho receptor móvel a sua posição, assim como o horário, sob quaisquer condições atmosféricas, a qualquer momento e em qualquer lugar na Terra.

³ O *Google Earth* é um aplicativo de mapas em três dimensões. Ele permite passear virtualmente por qualquer lugar do planeta, onde as imagens foram capturadas por satélite. O programa traz a integração com o *Street View* (recursos que permitem andar por ruas) e o Google Maps e pode ser utilizado online

contextualizando com o cotidiano do aluno. Foram propostos exercícios do livro [Andrini e Vasconcellos \(2015\)](#), adotado pelo município de São Pedro da Aldeia para o triênio PNLD 2017 - 2019, sobre o Sistema de Coordenadas Cartesianas, para serem feitos em casa.

Para a aula seguinte planejou-se um reforço abordando Sistema de Coordenadas Cartesianas, como forma de revisão, destacando o plano cartesiano, os quadrantes e a marcação de pontos, bem como, abordar de forma expositiva e explicativa os conteúdos de produto cartesiano e relação binária.

4.2 Elaboração da Sequência Didática

De acordo com [Araújo \(2013\)](#), uma sequência didática é um conjunto de atividades organizadas pelo professor de acordo com os núcleos temáticos e procedimentais. Ela foi composta por um conjunto de atividades, que se encontram nos apêndices B a O.

As atividades que compõem a sequência didática foram propostas para serem aplicadas conforme o tempo previsto, na turma 901 composta por 13 alunos. Cada atividade foi elaborada com os objetivos específicos correspondentes à matriz curricular do curso de 9º ano do ensino fundamental II da rede municipal de São Pedro da Aldeia.

A sequência didática foi elaborada para ser aplicada em grupo tendo como procedimento metodológico algumas atividades em sala de aula e outras a distância na plataforma Khan Academy. Algumas atividades realizadas em sala de aula foram elaboradas com o uso do *app* Geogebra.

As atividades foram distribuídas em 10 tempos de aulas, onde cada uma contém 50 min. A cada encontro de 02 tempos de aulas aconteceu uma atividade, contabilizando um total de oito atividades.

Em todas as atividades utilizou-se o conceito de mediação, que nesse trabalho, possui a intenção de intervenção pedagógica como interferência de um sujeito ou entre sujeitos ou grupos, com o objetivo de se atingir a meta, ocorrendo no ambiente de sala de aula, dentro de um contexto de reflexão entre o aluno, o professor no papel de mediador e o recurso tecnológico, avaliando posteriormente os resultados dessas interferências ([DAMIANI et al., 2013](#)).

A sequência didática elaborada para a sala de aula foi composta pelas atividades:

- (i) Atividade 1 – Definindo Função,
- (ii) Atividade 2 – Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos,
- (iii) Atividade 3 – Função Afim,
- (iv) Atividade 4 – Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim e

(v) Atividade 5 – Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica.

A sequência didática na plataforma Khan Academy foi realizada como atividade complementar às atividades 2 e 3, sendo realizadas direto na plataforma Khan Academy individualmente de casa. Os alunos acessaram o site <https://pt.khanacademy.org> ou seu *app* da plataforma disponível para o *smartphone*. As atividades recomendadas são encontradas pelo aluno em seu perfil individual, como explicado anteriormente no capítulo 3.

Descreve-se a seguir, os procedimentos metodológicos para cada atividade da sequência didática. Em todas as atividades, os alunos foram divididos inicialmente em três grupos de 4 alunos, com a finalidade de motivar a interação e colaboração entre eles. Todos os alunos receberam uma folha de atividades impressa com vistas a alcançarem os objetivos já descritos, já que nesse momento, eles trazem os conceitos prévios, estudado anteriormente.

4.2.1 Atividade 1 - Definindo Funções

Na elaboração da Atividade 1, foram propostas nove questões investigativas a serem aplicadas em dois tempos de aula (1h 40 min) com o objetivo de:

(i) reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações,

(ii) identificar dentre diversas relações entre conjuntos, àquelas que constituem função e

(iii) definir função, por meio de pelo menos duas representações, permitindo assim a conversão entre as representações de mais de um registro.

Na **questão 1**, foi proposto cinco itens objetivando explorar: o item (a) uma situação contextualizada, sendo solicitado após a interpretação da situação, a complementação de uma tabela, com os dados levantados da situação, realizando a conversão de representação (Figura 28).

No item (b) a partir dos dados completados na tabela, propôs-se a representação por meio de pares ordenados, utilizando a conversão de representação (Figura 28).

Figura 28 – Atividade 1 - Questão 1, itens (a) e (b)

1) Após observar a conversa do professor com seus alunos, complete a Tabela 1, com a resposta dos alunos depois do professor dizer outros números.



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p.95

a)

Tabela 1

Número dado pelo professor (x)	Resposta dos Alunos (y)
4	11
2	
-1	
0	
1,3	

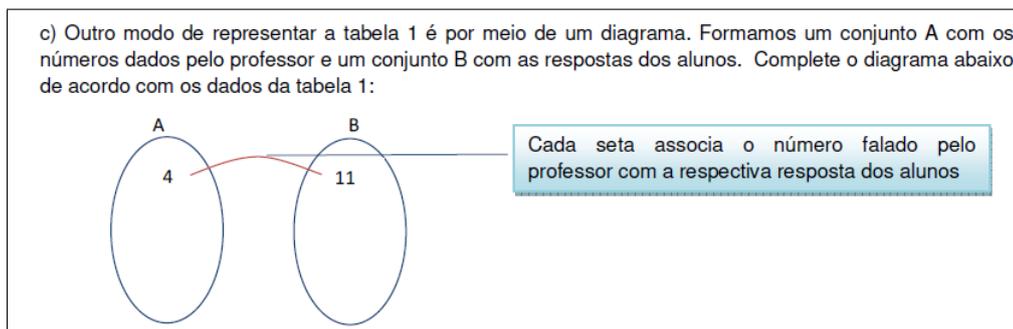
Será que a resposta dos alunos pode ser qualquer uma ou depende do número dado pelo professor? Por quê?

b) Também podemos escrever os pares ordenados (x; y) formados pela relação entre x e y. Escreva esses pares ordenados abaixo.

Fonte: Adaptado - Andrini e Vasconcellos (2015, p. 95)

No item (c), Figura 29, a conversão de representação solicitando que os pares ordenados fossem convertidos em Diagrama de Venn.

Figura 29 – Atividade 1 - Questão 1, item (c)



Fonte: autoria própria

No item (d), [Figura 30](#), fazer a representação gráfica a partir dos dados fornecidos no Diagrama de Venn, realizando a conversão de representação. E, por fim, buscou-se que soubessem expressar por uma fórmula (lei da função), no item (e), usando a conversão de representação, passando da representação gráfica para a lei da função.

Figura 30 – Atividade 1 - Questão 1, itens (d) e (e)

d) Agora, represente a relação entre x (número dado pelo professor) e y (número respondido pelos alunos), no sistema cartesiano abaixo.

Quantas respostas corretas (y) os alunos respondem para cada valor dado pelo professor (x)? Por quê?

e) Chamando o número expressado pelo professor de x , e o número registrado pelos alunos de y , qual a "fórmula" que expressa a relação entre x e y ? _____

Fonte: autoria própria

Na [questão 2](#), [Figura 31](#), foi proposto aos alunos construírem uma tabela com a in-

serção de dados apresentados em uma situação proposta e depois foi solicitado que fizessem a representação por diagrama. Nesta atividade explorou-se a conversão de representação.

Figura 31 – Atividade 1 - Questão 2

2) Faça uma tabela relacionando o nome e a idade de cada aluno do grupo. Represente essa relação (aluno; idade) também por um diagrama.

Fonte: autoria própria

Estas duas questões tiveram por objetivo que os alunos percebessem que para cada valor “x” só havia um correspondente “y”, como também a possibilidade de explorar representações de registros por conversão, permitindo reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações.

A **questão 3**, **Figura 32**, explorou uma situação contextualizada, abordando a relação de dependência entre duas variáveis, envolvendo a relação entre o tempo de espera do ônibus e o tempo de duração do trajeto. Essa relação foi apresentada por uma tabela, e foi solicitado que representasse também por Diagrama de Venn e representação gráfica, com objetivo de utilizar a conversão das representação de registros tabela, gráfico e diagrama. O objetivo da questão foi os alunos perceberem que não há relação de dependência entre os dados apresentados, visto que o tempo de espera do ônibus independe da duração do trajeto, logo as duas variáveis apresentadas não possuem relação de dependência.

Figura 32 – Atividade 1 - Questão 3

3) A tabela abaixo compara o tempo em que Carolina espera o ônibus para ir a escola (em minutos) e a duração do trajeto (em minutos), em uma semana (segunda-feira a sexta-feira, respectivamente).

Tabela 2

Tempo de Espera (min)	Duração do Trajeto (min)
15	10
5	11
10	15
12	13
15	12

Represente essa relação por meio de um diagrama.

Represente graficamente essa relação.

Fonte: Adaptado - Plataforma Khan Academy

A **questão 4**, [Figura 33](#), foi proposta com o objetivo de explorar: nos itens (a), (b) e (c) a relação de dependência entre duas variáveis, descrita por uma situação contextualizada. No item (d) o objetivo foi representar por meio de Diagrama de Venn os dados da questão, a partir da situação contextualizada dos itens (a), (b) e (c), explorando a conversão de representação.

Figura 33 – Atividade 1 - Questão 4

4) Agora, o professor da questão 1 propõe outra brincadeira, veja, e responda as questões:



Fonte: Andrini, *Praticando Matemática*, 2015, p. 97

- a) Se o professor disser 3, qual será a resposta dos alunos?
- b) Se o professor disser 5, qual será a resposta dos alunos?
- c) Se o professor disser 1, qual será a resposta dos alunos?

d) Faça um diagrama para representar a relação entre os números dados pelo professor e a resposta dos alunos, onde o conjunto A são os números ditos pelo professor {1, 3, 5} e o conjunto B os números anotados no quadro {2, 4, 6, 8}.

Fonte: Adaptado - Andrini e Vasconcellos (2015, p. 97)

As questões 5, 6 e 7, Figura 34, tiveram por objetivo que os alunos respondessem se as relações das questões 2, 3 e 4, tiveram uma relação de dependência ou não de acordo com cada conjunto tratado em cada questão, verificando a relação de dependência entre duas variáveis.

Figura 34 – Atividade 1 - Questão 5, 6 e 7

Agora converse com o grupo e responda as questões abaixo, com base nas respostas dos exercícios anteriores.

5) Na questão 2, a idade dos alunos depende do nome do aluno? Por quê?

6) Na questão 3, a duração do trajeto (min) depende do tempo de espera (min)? Por quê?

7) Na questão 4, a resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor? Por quê?

Fonte: autoria própria

A **questão 8**, **Figura 35**, teve por objetivo que o aluno refletisse com base nas questões elaboradas anteriormente, sobre o conceito de função, respondendo qual o entendimento ou significado de função, explorando a definição do conceito de função.

Figura 35 – Atividade 1 - Questão 8

8) Nessa atividade você representou uma relação por diagrama, tabela, gráfico, par ordenado e verificou se um determinado valor y depende de outro valor x . Com base em tudo que foi feito, diga, com suas palavras, o que você entende ou o que significa função para você.

Fonte: autoria própria

A **questão 9**, **Figura 36**, teve por objetivo, que o aluno identificasse dentre as quatro primeiras questões aquelas que constituíram ou não função, estando relacionado ao assunto de relação de dependência.

Figura 36 – Atividade 1 - Questão 9

9) Você acha que as quatro primeiras questões propostas nessa atividade representam função? Por quê? Responda em cada item a seguir.

a) Questão 1: _____

b) Questão 2: _____

c) Questão 3: _____

d) Questão 4: _____

Fonte: autoria própria

Durante toda a atividade, a professora fez uso de um Diário de Campo, anotando o que observava na interação entre os alunos em sala de aula e as possíveis dúvidas, bem como intervindo quando necessário, fazendo questionamentos e direcionamentos com a finalidade de sanar as dúvidas surgidas para que os objetivos propostos nas questões fossem alcançados.

Após finalizarem a atividade 1, de acordo com o que foi respondido por eles nas questões 8 e 9, foi proposto aos alunos a reflexão e a formalização do conceito de função no quadro. Retomando às questões realizadas, buscando alcançar os objetivos iniciais dessa atividade 1: (i) reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações, (ii) identificar dentre diversas relações entre conjuntos, aquelas que constituem função e (iii) definir o conceito de função.

4.2.2 Atividade 2 - Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos

A Atividade 2, foi proposta para ser aplicada em dois tempos de aula (1h40min), composta por sete questões investigativas, com o objetivo de

(i) reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações,

(ii) identificar dentre diversas relações entre conjuntos, aquelas que constituem função,

(iii) conceituar domínio e imagem de uma função e

(iv) calcular o valor da função utilizando dados, tabelas, e gráficos.

A **questão 1**, [Figura 37](#), teve como objetivo (a) a partir de uma situação na linguagem natural “da máquina”, propôs-se a resposta em linguagem numérica, explorando a conversão de representação, quando Item (b) a partir na linguagem natural “da máquina”, propôs-se a representação por meio da linguagem algébrica escrevendo a lei de formação, explorando a conversão de representação. Após a finalização da questão 1 pelos alunos um objetivo a ser explorado é o de “definir” domínio e imagem de função, abordando valores de entrada e saída, levando-os a reflexão se os valores de entrada pode ser qualquer número real, bem como se os valores de saída também.

Figura 37 – Atividade 2 - Questão 1

1) Na primeira questão da atividade 1 da aula anterior, professor dizia um número e os alunos faziam as operações pedidas e davam o resultado. Pensando nisso, uma aluna propôs uma nova brincadeira:



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99

Observem no desenho abaixo, a função imaginada como uma máquina pensada pela aluna.



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99

a) Qual o valor de saída das bolinhas que tem como entrada as bolinhas 7; 0 e 1,5, respectivamente?

b) Qual a lei de formação da máquina? _____

Obs.: Chamamos os valores de entrada na máquina de _____ da função e os valores de saída de _____ da função.

Fonte: Adaptado - Andrini e Vasconcellos (2015, p. 99)

A **questão 2**, **Figura 38**, teve como objetivo a partir de uma tabela dada com uma relação entre dois conjuntos (A e B): no item (a) identificar se a relação de A em B é função, explorando a formação e no item (b) identificar se a relação de B em A é função, explorando também a formação.

Figura 38 – Atividade 2 - Questão 2

2) Observe a tabela abaixo:

A	Número de Calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

a) A relação de A em B representa uma função? Por quê? _____

b) A relação de B em A representa uma função? Por quê? _____

Fonte: [Andrini e Vasconcellos \(2015, p. 98\)](#)

A **questão 3**, [Figura 39](#), teve como objetivo a partir de um gráfico dado com uma relação f : itens (a) e (b), os objetivos foram (i) a partir de um gráfico escrever os pares ordenados pertencentes ao gráfico e (ii) identificar a partir de um gráfico, se este representa ou não uma função, respectivamente. No item (c) o objetivo foi que os alunos fossem capazes de a partir de uma representação gráfica, determinarem a lei de formação, explorando a conversão gráfico – lei de formação

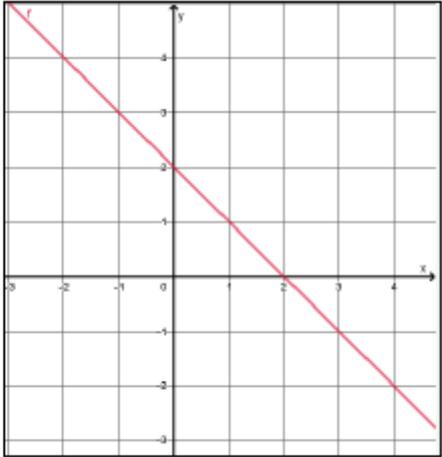
Figura 39 – Atividade 2 - Questão 3

3) O gráfico ao lado representa uma relação f . Observe esse gráfico e responda:

a) Escreva quatro pontos (pares ordenados) $(x; y)$ que pertencem ao gráfico dessa relação f .

b) O gráfico da relação f representa uma função? Por quê?

c) Se a resposta da letra b for positiva, qual a lei da função que corresponde a esse gráfico?



Fonte: autoria própria

Na **questão 4**, [Figura 40](#), são dados dois gráficos. O objetivo foi explorar no item (a) a partir de cada gráfico, propor a construção de uma tabela (ou seja, aqui, os alunos farão duas tabelas: uma para cada gráfico), utilizando a conversão de representação, e nos itens (b) e (c) identificar se cada um dos gráficos representa uma função, explorando a formação. Nesse item ainda, o aluno pôde fazer o reconhecimento tanto pelo gráfico quanto pela tabela construída no item (a).

Figura 40 – Atividade 2 - Questão 4

4) Veja os gráficos:

Fonte: Andrini, *Praticando Matemática*, 2015, p. 113.

a) Para cada um dos gráficos construa uma tabela com os pontos indicados.

b) O gráfico 1 representa uma função? Por quê? _____

c) O gráfico 2 representa uma função? Por quê? _____

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 113)

Na **questão 5**, **Figura 41**, a partir de uma tabela com valores que estão relacionados o objetivo foi no item (a) escrever a lei de formação da função, utilizando a linguagem algébrica, explorando a conversão de representação. No item (b) escrever o valor da função de um determinado número e no item (c) determinar o valor do domínio dado o valor da imagem.

Figura 41 – Atividade 2 - Questão 5

5) Complete a tabela:

x	f(x)
0	-1
1	1
-2	-5
	11

a) Qual a lei de formação dessa função?

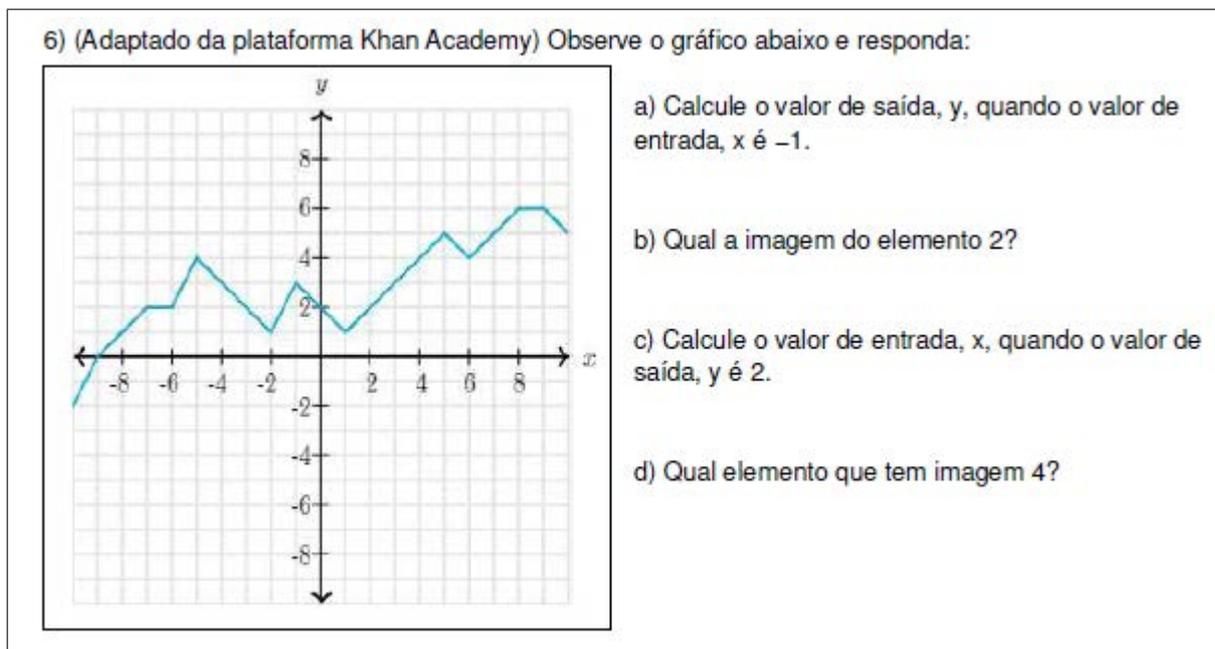
b) Qual a imagem do número 14?

c) Qual o valor do número que tem imagem 11 (complete a tabela).

Fonte: autoria própria

Na **questão 6**, **Figura 42**, a partir de um gráfico que representa uma função qualquer, o objetivo foi nos itens (a) e (b) determinar, a partir de uma representação gráfica, nos itens (a) e (b) o valor de saída (y) de determinado valor de entrada, enquanto nos itens (c) e (d) determinar os valores de entrada, conhecendo os valores de saída.

Figura 42 – Atividade 2 - Questão 6



Fonte: Adaptado - Plataforma Khan Academy

Na **questão 7**, **Figura 43**, o objetivo foi nos itens (a) e (d) calcular o “valor de saída” por meio da lei de formação indicada em cada item, dados pares ordenados com o “valor de entrada”, utilizando assim o tratamento para efetuar o cálculo; nos itens (b) e (c) calcular o “valor de entrada” por meio da lei de formação indicada em cada item, dados pares ordenados com o “valor de saída”, utilizando assim o tratamento para efetuar o cálculo.

Figura 43 – Atividade 2 - Questão 7

7) Complete o valor que falta no par ordenado $(x; y)$, para que as afirmações sejam, verdadeiras.

a) O par ordenado $(1; \underline{\quad})$ satisfaz a equação $y = 3x - 7$.

b) O par ordenado $(\underline{\quad}; -2)$ satisfaz a equação $y = -2x + 4$.

c) O par ordenado $(\underline{\quad}; 8)$ satisfaz a equação $-4x - y = 24$.

d) O par ordenado $(-3; \underline{\quad})$ satisfaz a equação $y - 4 = -2(x + 3)$.

Fonte: Adaptado - Plataforma Khan Academy

4.2.3 Atividade 3 - Função Afim

A Atividade 3, foi proposta para ser aplicada em dois tempos de aula (1h40min), composta por cinco questões investigativas, com o objetivo de

- (i) reconhecer uma função afim.
- (ii) resolver problemas que envolvam a função afim.

A **questão 1**, **Figura 44**, teve como objetivo:

(i) a partir de uma situação na linguagem natural do problema, propôs-se a representação em linguagem algébrica (lei de formação da função), explorando a conversão de representação.

(ii) a partir na linguagem algébrica, propôs-se a representação por meio da tabela, explorando a conversão de representação.

(iii) após os dados inseridos na tabela, propôs-se a representação gráfica, utilizando a conversão de representação. Após essas representações explora-se o domínio da função, levando-os a pensar sobre os possíveis valores de x , e sobre a representação gráfica, sendo perguntado em relação aos pontos estarem alinhados, e a representação por meio de uma reta.

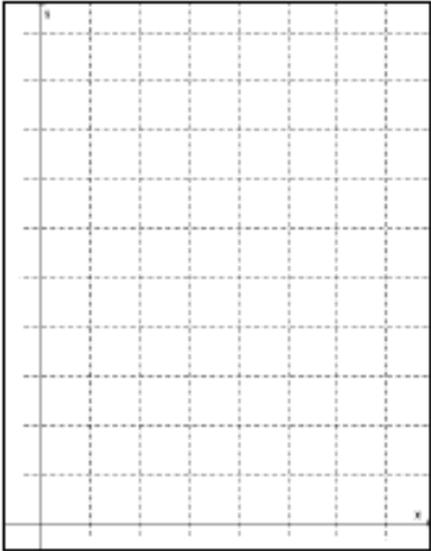
Figura 44 – Atividade 3 - Questão 1

1) Acompanhe a situação a seguir:

Joaquina vende salgadinhos para festas. Ela cobra R\$ 10,00 por quilograma de salgadinhos mais R\$ 20,00 de taxa de entrega. O pedido mínimo é de 1 quilograma. O preço (y) da encomenda é função da massa (x) dos salgadinhos, em quilograma, e pode ser expressa por: _____

Complete a tabela com o valor a ser pago por algumas quantidades de salgadinhos e faça a representação gráfica no plano cartesiano ao lado.

Massa de salgadinhos (em kg)	Preço a pagar (em R\$)	Par ordenado
x	$y =$	$(x; y)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		



A massa de salgadinhos (em Kg) vendida pode ser qualquer valor real?

- > Os pontos estão alinhados?
- > Você pode "unir" os pontos do gráfico?

O gráfico dessa função pode ser representado por uma _____.

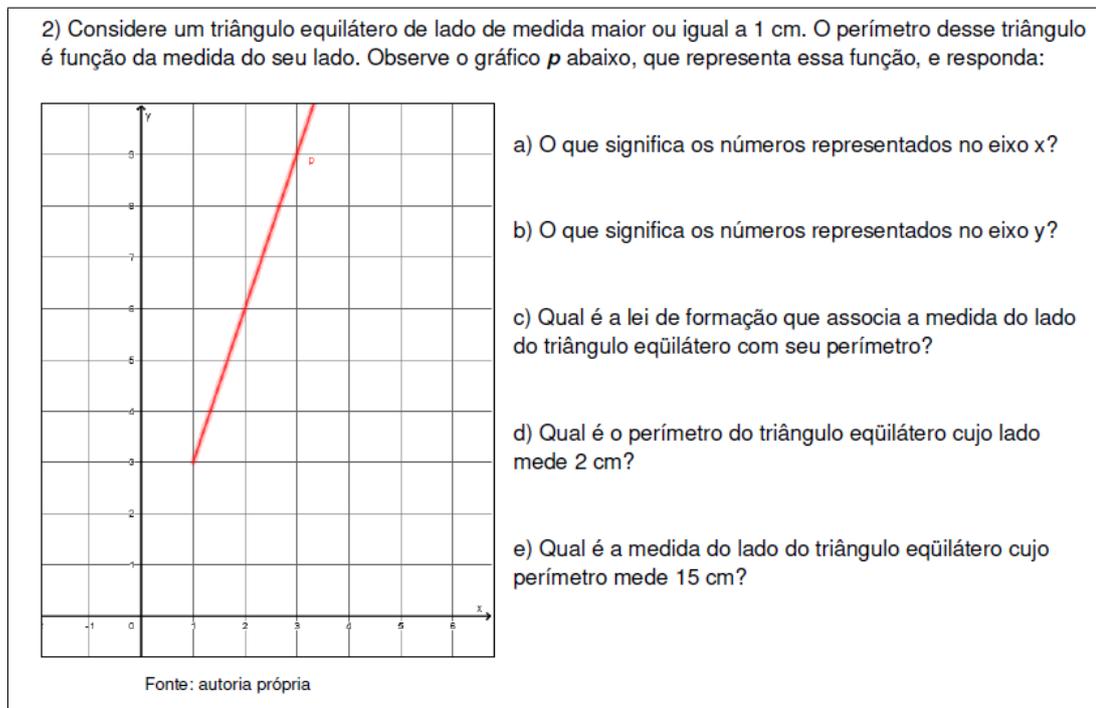
Fonte: Adaptado - Gay (2014, p. 146)

Após o desenvolvimento a questão 1, foram feitas intervenções, com perguntas sobre a forma da expressão algébrica, e sobre a característica do gráfico ser uma reta. Assim, foi definido a função afim em conjunto com a turma.

A **questão 2**, **Figura 45**, teve como objetivo a partir do gráfico da função p dado: no item (a) identificar o que significava os números representados no o eixo das abscissas e no item (b) o que significava os números representados no eixo das ordenadas, pois foi necessário que o aluno compreendesse a representação gráfica das funções trabalhadas, onde muitas das vezes não foram só denominados como x e y , e sim pela situação problema. No item (c) propôs-se escrever a representação por meio da linguagem algébrica ao escrever a lei da função a partir dos dados do gráfico, explorando a conversão de representação. No item (d) responder o valor da função (imagem), a partir do gráfico dado. E o item (e) a

partir das questões anteriores explorou-se o valor do domínio, dado a imagem, mesmo que esse valor não estivesse visível no gráfico, tendo como alternativa utilizar a representação em linguagem algébrica do item c, substituindo os valores.

Figura 45 – Atividade 3 - Questão 2



- O que significa os números representados no eixo x?
- O que significa os números representados no eixo y?
- Qual é a lei de formação que associa a medida do lado do triângulo equilátero com seu perímetro?
- Qual é o perímetro do triângulo equilátero cujo lado mede 2 cm?
- Qual é a medida do lado do triângulo equilátero cujo perímetro mede 15 cm?

Fonte: autoria própria

A **questão 3**, [Figura 46](#), abordou o conteúdo de função por meio de uma situação contextualizada e teve como objetivo: no item (a) a partir de uma situação problema determinar a lei de formação da função por meio da conversão. Nos itens (b), (c) determinar o valor da imagem da função, dado o valor do domínio, e no item (d) determinar o valor do domínio, dado o valor de sua imagem.

Figura 46 – Atividade 3 - Questão 3

3) O preço a ser pago numa corrida de taxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R\$ 3,50 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,60, responda:

a) Qual é o valor v a pagar numa corrida de n quilômetros?

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

d) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 13,70 pela corrida?

Fonte: autoria própria

Na questão 4, [Figura 47](#), abordou o conteúdo de função por meio de sequências numéricas, que se relacionaram entre si mediante uma “fórmula” ainda desconhecida, e objetivou-se: no item (a) completar a sequência numérica com o número que faltava. O aluno teve que perceber qual a relação existente entre as sequências numéricas expostas. No item (b) determinar a lei de formação a partir de uma sequência numérica explorando a conversão de representação.

Figura 47 – Atividade 3 - Questão 4

4) Ari dizia um número e Rui respondia outro usando uma regra que só ele conhecia.



ARI



RUI

12	14	19	25	36
↓	↓	↓	↓	↓
25	29	39	51	■

a) Que número deve ser respondido por Rui para o número 36 dito por Ari?

b) Chame de x os números ditos por Ari e de y os números respondidos por Rui. Escreva uma expressão matemática de y em função de x .

(Fonte: Andrini, *Praticando Matemática*, 2015, p. 107)

Fonte: Adaptado - Andrini e Vasconcellos (2015, p. 107)

4.2.4 Atividade complementar às atividades 2 e 3 na plataforma Khan Academy

As três atividades propostas como reforço na Plataforma Khan Academy teve por objetivo complementar as atividades 2 e 3 desenvolvidas em sala aula. As atividades (recomendações) são intituladas como:

- (i) Calcule funções a partir do seus gráficos;
- (ii) Cálculo funções; e
- (iii) Complete soluções de equações com 2 variáveis.

Os alunos tiveram um prazo de três dias para realizarem essas recomendações feitas. No momento da recomendação, a professora escolherá que os alunos façam o mesmo grupo de perguntas, por meio de uma opção dada pela plataforma nesse momento.

As três atividades acima mencionadas foram compostas por quatro perguntas cada uma, as quais a plataforma seleciona esse grupo de perguntas, de cada atividade, em seu banco de questões. Abaixo comenta-se o objetivo de cada atividade proposta nesse momento.

(i) Calcule funções a partir dos seus gráficos (Figura 48): O objetivo das perguntas desse tópico foi identificar o valor de saída y (imagem), dado um valor de entrada x (domínio), por meio do gráfico de uma função qualquer fornecido na pergunta. Essa atividade está de acordo com a questão 6 da atividade 2.

Figura 48 – Exemplo da atividade Calcule funções a partir de seus gráficos

Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é -1 .

$y =$

Enroscou? [Assista a um vídeo ou use uma dica.](#) [Relatar um problema](#)

2 de 4

Fonte: Plataforma Khan Academy

(ii) Cálculo de funções (Figura 49): O objetivo das perguntas desse tópico foi calcular o valor de saída y (imagem), dado um valor de entrada x (domínio), por meio da função na forma algébrica “ $y = ax + b$ ”. Essa atividade vai ao encontro da questão 1 da atividade 2.

Figura 49 – Exemplo da atividade Cálculo de funções

Calcule o valor de saída, f , quando o valor de entrada, t , é 7.

$f = 2t - 3$

$f =$

Enroscou? [Assista a um vídeo ou use uma dica.](#) [Relatar um problema](#)

Resolva 4 problemas

Fonte: Plataforma Khan Academy

(iii) Complete soluções de equações com 2 variáveis (Figura 50): o objetivo das perguntas desse tópico foi calcular o valor de entrada x (domínio) ou o valor de saída y (imagem), por meio da função na forma algébrica, dado um par ordenado incompleto,

substituindo corretamente na função (que na atividade é chamada de equação) o valor dado, encontrando o valor que faltava para completar o par ordenado.

Figura 50 – Exemplo da atividade Complete soluções de equações com 2 variáveis

Complete soluções de equações com 2 variáveis

$$y + 2 = -3(x - 4)$$

Complete com o valor que falta na solução da equação.

(, -2)

Enroscou? [Assista a um vídeo ou use uma dica.](#) [Relatar um problema](#)

2 de 4 ● ○ ○ ○ [Verificar](#)

Fonte: Plataforma Khan Academy

Durante o tempo em que a recomendação estiver ativa, a pesquisadora acompanhará o desenvolvimento dos alunos pelo relatório.

4.2.5 Atividade 4 - Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim

A Atividade 4, foi proposta para ser aplicada em dois tempos de aula (1h40min) com objetivo do uso do *app* Geogebra para explorar o gráfico da função afim. A partir das observações por manipulação no *app*, o aluno se propôs a responder sobre:

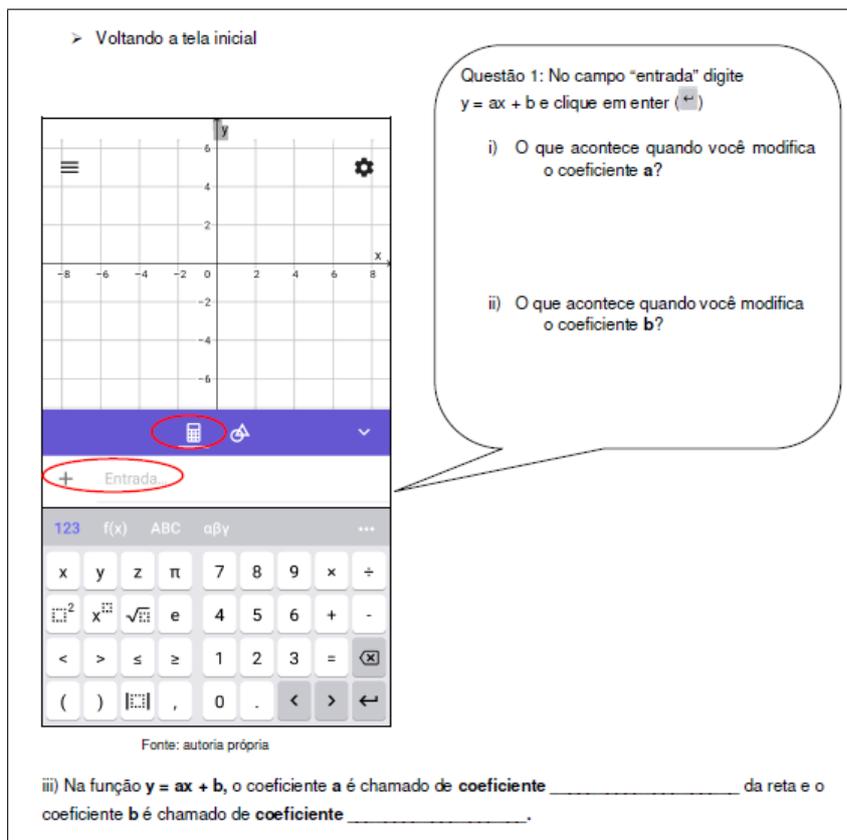
- (i) coeficiente angular.
- (ii) coeficiente linear.
- (iii) interseções com os eixos.

Abaixo será descrito passo a passo da atividade.

Na aula se propôs-se a explicar como configurar (de forma conveniente) o *app* desenvolvendo as seguintes ações: i) deixar somente a malha principal aparecendo; ii) legendas (para aparecer o nome dos eixos x e y); iii) na janela de álgebra deixar marcado somente a definição (para que ao traçar a reta a partir de dois pontos o *app* não mostre a equação da reta, pois esse será o objetivo do aluno posteriormente); iv) e na janela geral, em rotular, selecionar “para todos os objetos novos”. De volta à tela inicial, começar as atividades da aula.

Primeiro propôs-se que o aluno incluía na entrada “ $y = ax + b$ ” (forma reduzida da função afim), como na [Figura 51](#).

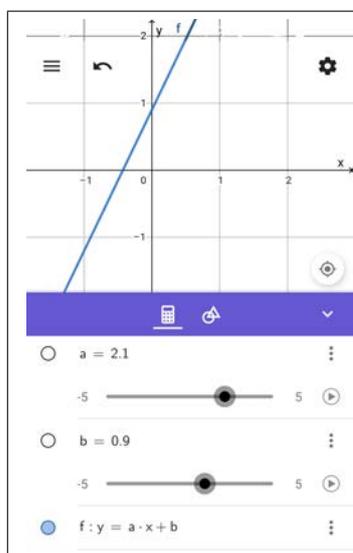
Figura 51 – Atividade 4 - Questão 1, itens (i), (ii) e (iii)



Fonte: autoria própria

Ao aparecer o gráfico no *app* (Figura 52) propõe-se que o aluno manipule os coeficientes a e b para observar o que acontece com o gráfico de acordo com a mudança dos coeficientes.

Figura 52 – Gráfico da função $y = ax + b$



Fonte: autoria própria

Ao explorar o coeficiente a da função, teve-se por objetivo que o aluno percebesse o crescimento e decréscimo da função de acordo com o sinal de a . Ao explorar o coeficiente b da função, teve-se por objetivo que o aluno percebesse a translação, além de verificar que o valor de b é onde o gráfico “corta” o eixo y . Além disso, verificaram a interseção do gráfico com os eixos coordenados, como mostra a [Figura 53](#).

Figura 53 – Atividade 4 - Questão 1, itens (iv), (v) e (vi)

<p>iv) Explorando o coeficiente a:</p> <ul style="list-style-type: none">• O que acontece com o gráfico quando o valor de a é positivo? <hr/> <ul style="list-style-type: none">• O que acontece com o gráfico quando o valor de a é negativo? <hr/> <ul style="list-style-type: none">• O que acontece com o gráfico quando o valor de a é zero? <hr/> <p>Obs.: Quando a é zero, temos uma função _____.</p> <p>v) Explorando o coeficiente b:</p> <ul style="list-style-type: none">• O que acontece com o gráfico quando fixamos o valor de a e mudamos o valor de b? <hr/> <p>vi) Interseções com os eixos</p> <ul style="list-style-type: none">• Interseção com o eixo x → significa que o valor de _____ é zero, logo podemos escrever o par ordenado _____.• Interseção com o eixo y → significa que o valor de _____ é zero, logo podemos escrever o par ordenado _____.

Fonte: autoria própria

O aluno utilizou a conversão de representação, visto que esteve comparando a todo tempo o gráfico e o registro algébrico apresentado na tela do *app* ao mesmo tempo. Os alunos foram instigados a fazer conclusões sobre a função constante e linear (funções afim “especiais”), bem como analisar o crescimento e decréscimo da função, explorando o registro algébrico e gráfico ao mesmo tempo, bem como as interseções com os eixos coordenados.

Duas questões foram propostas, [Figura 54](#), de forma que foi dada a função na forma algébrica e solicitado que o aluno faça o gráfico no *app*, respondendo sobre os coeficientes e as interseções com os eixos, utilizando aqui a conversão de representação.

Figura 54 – Atividade 4 - Questão 2

Questão 2: Utilizando o Geogebra, faça os gráficos abaixo, e responda as perguntas observando a lei da função e o gráfico correspondente:

i) Faça o gráfico da função $y = x - 2$

a) Qual o valor do coeficiente angular? _____

b) Qual é o valor do coeficiente linear? _____

c) Qual é o ponto de interseção com o eixo x? _____

d) Qual é o ponto de interseção com o eixo y? _____

ii) Faça o gráfico da função $y = -x + 3$

a) Qual o valor do coeficiente angular? _____

b) Qual é o valor do coeficiente linear? _____

c) Qual é o ponto de interseção com o eixo x? _____

d) Qual é o ponto de interseção com o eixo y? _____

iii) O que podemos dizer sobre o coeficiente **b** ao comparar o gráfico com a lei da função?

Fonte: autoria própria

A atividade encerrou-se com a associação do coeficiente angular da reta com a taxa de variação da função. Um exemplo pronto foi apresentado, com o cálculo da taxa de variação, onde da representação gráfica foram utilizados dois pontos da reta para o cálculo do valor de a . A pesquisadora discutiu com os alunos os valores de a , encontrados na questão dita anteriormente, fazendo o mesmo procedimento do exemplo dado, com a finalidade de verificar por meio da função na forma algébrica, ou por meio do cálculo que o valor de a é o mesmo. Assim, utiliza-se também a conversão, visto que da representação gráfica foi encontrado o coeficiente angular da reta.

4.2.6 Atividade 5 - Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica

A atividade 5 foi aplicada em dois tempos de aula (1h40min), composta por quatro questões, e sendo o complemento da atividade 4, tendo por objetivo:

- (i) reconhecer o gráfico de uma função afim por meio de seus coeficientes.
- (ii) reconhecer a representação algébrica da função afim dado seu gráfico.

A **questão 1**, [Figura 55](#), teve como objetivo nos itens (a) e (b) encontrar o coeficiente angular da reta a partir de dois pontos dados, bem como a equação da reta (lei de formação da função), explorando a conversão. Pediu-se em seguida que o aluno no *app* Geogebra: (i) plotasse os pontos dados para traçar a reta que passa por esses pontos; (ii) digitasse no campo “entrada” a equação da reta encontrada por meio de seus cálculos. A finalidade dessa verificação foi para que o aluno compreenda que se trata da mesma reta,

ou seja, da mesma função.

Figura 55 – Atividade 5 - Questão 1

1) Encontre o coeficiente angular da reta e a equação da reta que passa pelos pontos abaixo:
a) (-3, 5) e (1, 2)

➤ Essa função é crescente ou decrescente?
➤ Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo "entrada" a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?

Fonte: autoria própria

A **questão 2**, **Figura 56**, teve como finalidade nos itens (a) e (b) encontrar o coeficiente angular da reta a partir da lei de formação da função, explorando o tratamento da representação algébrica, visto que foi solicitado que o aluno encontre o coeficiente angular da reta a partir da lei da função. Para isso, o aluno manipulou algebricamente a equação para deixar na forma " $y = ax + b$ ".

Figura 56 – Atividade 5 - Questão 2

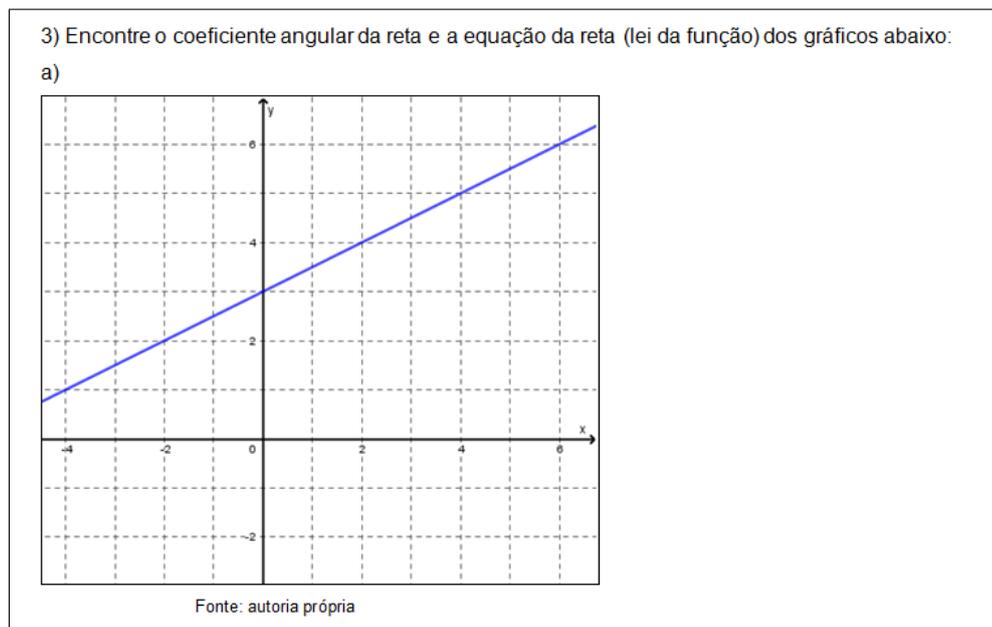
2) Encontre o coeficiente angular da reta das equações abaixo. Dica: reescreva a equação para que fique da forma " $y = ax + b$ ".

<p>a) $2x - 5y = 9$</p>		<p>b) $y + 5 = 2(x + 1)$</p>
------------------------------------	--	---

Fonte: autoria própria

A **questão 3**, **Figura 57**, objetivou explorar: nos itens (a) e (b) encontrar o coeficiente angular da reta, bem como a lei da função a partir do gráfico dado, explorando a conversão.

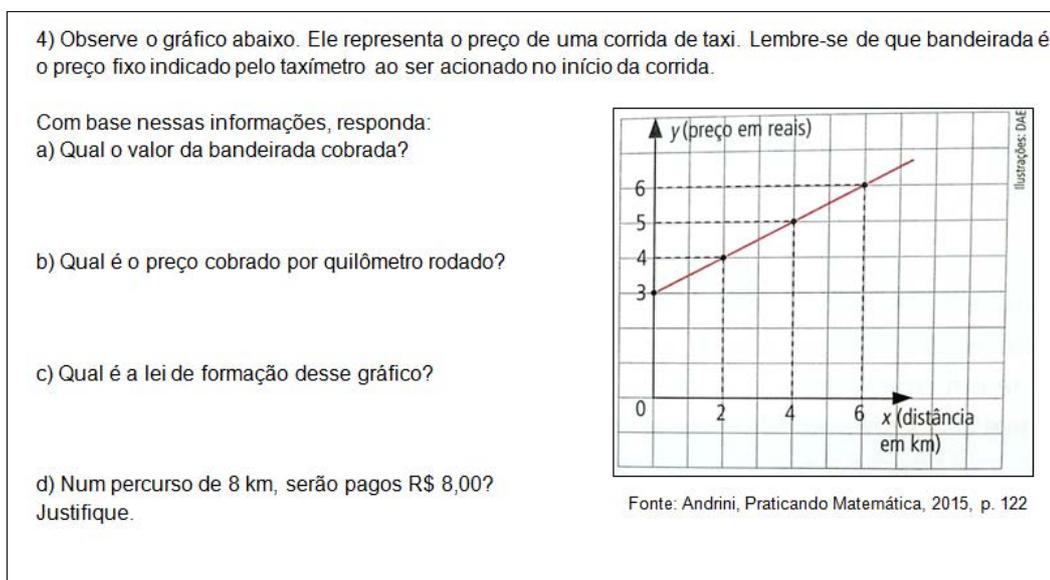
Figura 57 – Atividade 5 - Questão 3



Fonte: autoria própria

A **questão 4**, **Figura 58**, objetivou a interpretação de gráficos, visando explorar a partir do gráfico dado: item (a) identificar o valor fixo da função, ou seja, o coeficiente linear. Item (b) encontrar o coeficiente angular, a partir de dois pontos, utilizando assim a conversão de representação. Item (c) a partir de dois pontos, utilizando a conversão de representação, encontrar a lei da função. Item (d) verificar o valor da função dado um número por meio do tratamento.

Figura 58 – Atividade 5 - Questão 4



Fonte: Adaptado - Andrini e Vasconcellos (2015, p. 122)

Capítulo 5

Aplicação e Análise de dados da Sequência Didática

Este capítulo contém a análise de dados das aulas de pré-requisitos e da sequência didática realizada em sala de aula e na plataforma Khan Academy, as quais foram aplicadas entre os dias 29 de agosto e 22 de novembro de 2018, tendo acontecido em 13 encontros presenciais de 02 horas/aula cada, totalizando 26 horas/aula. No [Quadro 8](#), estão descritas as atividades realizadas sem o uso da plataforma Khan Academy, contendo o dia e a duração das mesmas. O [Quadro 9](#) apresenta as atividades realizadas na plataforma Khan Academy.

Quadro 8 – Atividades desenvolvidas sem o uso da plataforma Khan Academy

Atividades desenvolvidas sem o uso da plataforma Khan Academy			
	Carga horária (hora/aula)	Data	Tema das atividades
Pré-requisito	2	29/08/2018	Aula sobre a utilização da Plataforma Khan Academy
Pré-requisito	2	26/09/2018	Sistema de Informações Geográficas e Sistema de Coordenadas Cartesianas
Pré-requisito	2	02/10/2018	Sistema de Informações Geográficas e Sistema de Coordenadas Cartesianas
Pré-requisito	2	23/10/2018	Produto Cartesiano e Relação Binária
Atividade 1	2	31/10/2018	Definindo Função
	2	01/11/2018	
Atividade 2	2	06/11/2018	Função: Aprofundando e conhecendo novos conceitos
Atividade 3	2	07/11/2018	Função Afim
Atividade 4	2	13/11/2018	Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim
Atividade 5	2	21/11/2018	Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica
	2	22/11/2018	

Fonte: autoria própria

No **Quadro 9** estão descritas, de forma detalhada, as atividades (recomendações) realizadas, na plataforma Khan Academy, com as datas das recomendações e os prazos finais de cada atividade. Ressalta-se que algumas foram feitas em casa e outras em sala de aula.

Quadro 9 – Atividades desenvolvidas com o uso da Plataforma Khan Academy

Atividade desenvolvida na Plataforma Khan Academy			
	Data da recomendação	Data final da recomendação	Tema das recomendações (Atividades)
Pré-requisito (feito em sala de aula)	02/10/2018	05/10/2018	Pontos no plano cartesiano
			Quadrantes no plano cartesiano
			Represente os pontos graficamente
Pré-requisito (feito em casa)	06/10/2018	10/10/2018	Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)
			Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes
Pré-requisito (feito em sala de aula)	Correção realizada em 10/10/2018		Correção das recomendações (feitas em casa) da plataforma Khan Academy
Pré-requisito (feita em casa)	15/10/2018	17/10/2018	Plano Cartesiano: Teste 1
Pré-requisito (feito em sala de aula)	07/11/2018	08/11/2018	Calcule funções a partir de seus gráficos
			Cálculo de funções
			Complete soluções de equações com 2 variáveis

Fonte: autoria própria

As atividades realizadas em sala de aula foram descritas de forma detalhada, contendo o dia e a duração das mesmas, os objetivos, a metodologia desenvolvida, o resultado da aplicação, ressaltando as dificuldades encontradas, os questionamentos feitos pelos alunos e as intervenções realizadas pela pesquisadora.

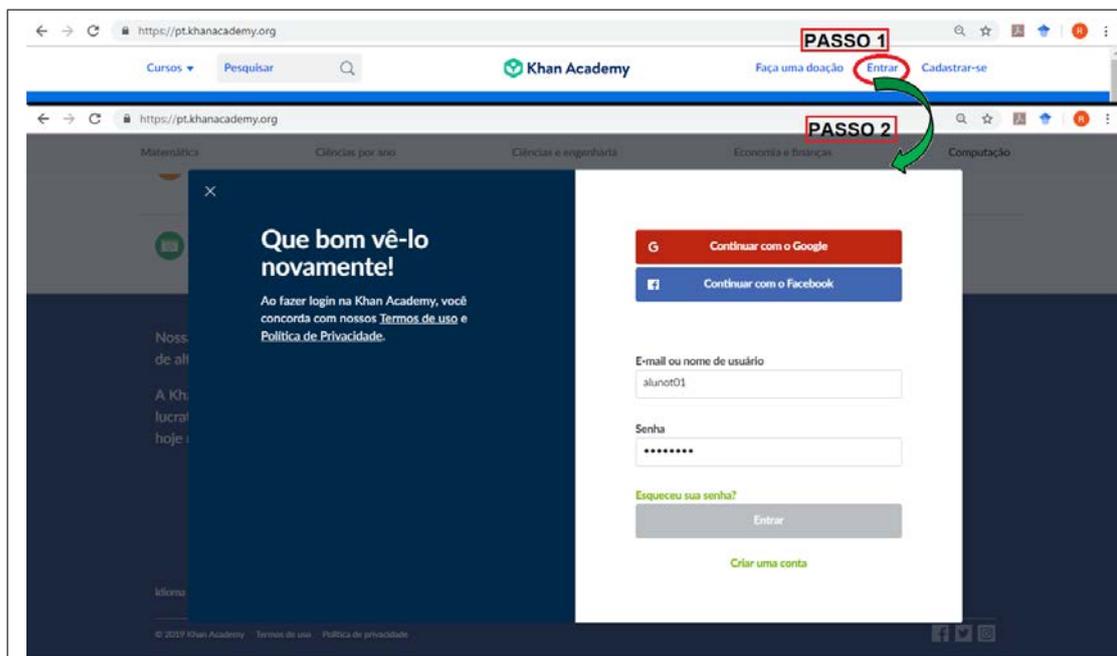
5.1 Aula sobre a utilização da Plataforma Khan Academy

A aula ocorreu no dia 29 de agosto de 2018, com duração de 02 horas/aula, com a presença de todos os 13 alunos. A escola não possui um laboratório de informática com acesso a internet para que os alunos pudessem ser levados ao mesmo e cada um pudesse ter acesso a um computador para acessar a plataforma.

A pesquisadora levou seu notebook para a sala de aula e foi mostrada a plataforma *via web*, com a tela do notebook da pesquisadora sendo projetada na televisão existente na sala de aula. Os alunos acompanharam a explicação sentados em suas carteiras.

Inicialmente a pesquisadora acessou a plataforma (<https://pt.khanacademy.org>) e na tela inicial, clicou em entrar, no canto superior direito (circulado de vermelho na Figura 59). Usou o login e senha do “aluno teste1”, inserindo nos campos específicos a informação.

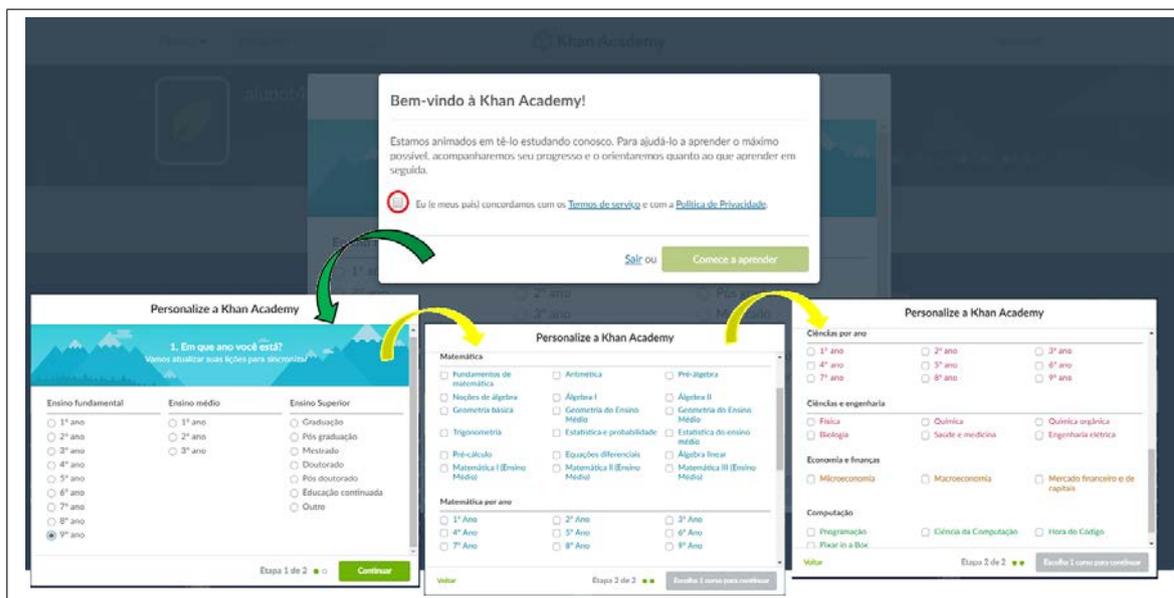
Figura 59 – Acesso à plataforma Khan Academy via web



Fonte: Plataforma Khan Academy

No primeiro acesso à plataforma, a pesquisadora mostrou que a primeira tela que aparece é para aceitar “os termos de serviço e política de privacidade”, assim, clicou na caixinha circulado de vermelho, concordando com “os termos de serviço e política de privacidade”. Posteriormente, mostrou como personalizar a plataforma Khan Academy, primeiro escolhendo a série (etapa 1) e depois escolhendo pelo menos um curso dentre os que apareceram, conforme Figura 60.

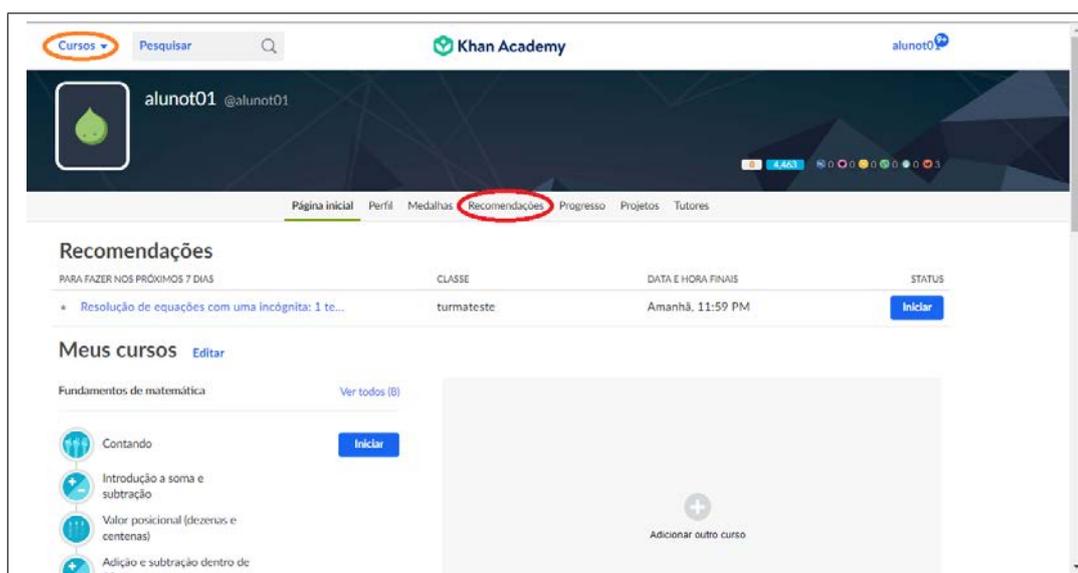
Figura 60 – Tela inicial do primeiro login do aluno



Fonte: Plataforma Khan Academy

Após os passos descritos acima (somente no primeiro acesso), apareceu a página inicial da plataforma (Figura 61). A pesquisadora mostrou que esta página apresenta os cursos que a plataforma oferece, clicando em “cursos” circulado de laranja no canto superior esquerdo, bem como, onde encontrar a recomendação proposta, clicando em “recomendações” circulado de vermelho.

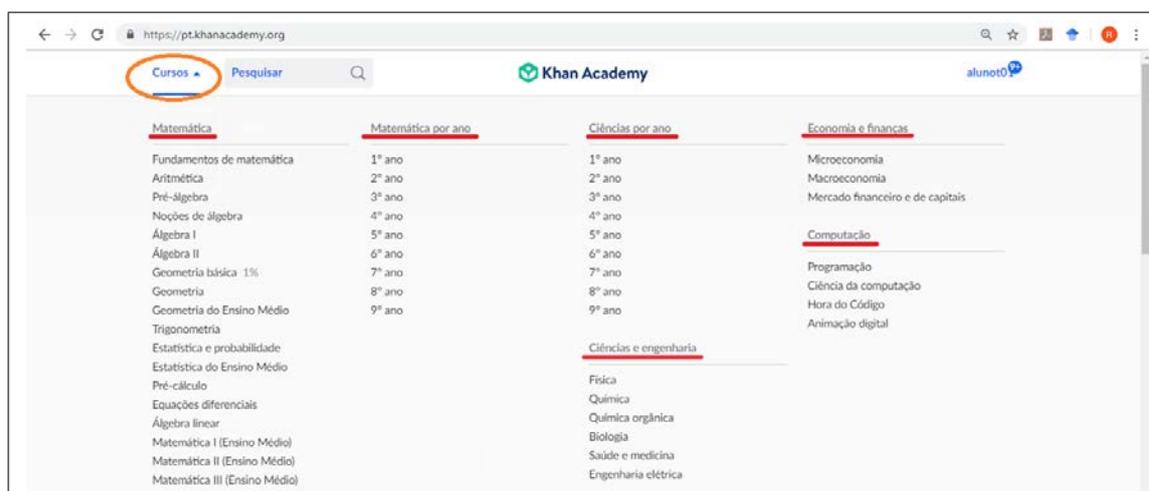
Figura 61 – Página inicial ao efetuar o login



Fonte: Plataforma Khan Academy

Ao clicar em “cursos” (circulado de laranja), apareceu todos os cursos disponíveis na plataforma, conforme Figura 62.

Figura 62 – Cursos da plataforma Khan Academy via web

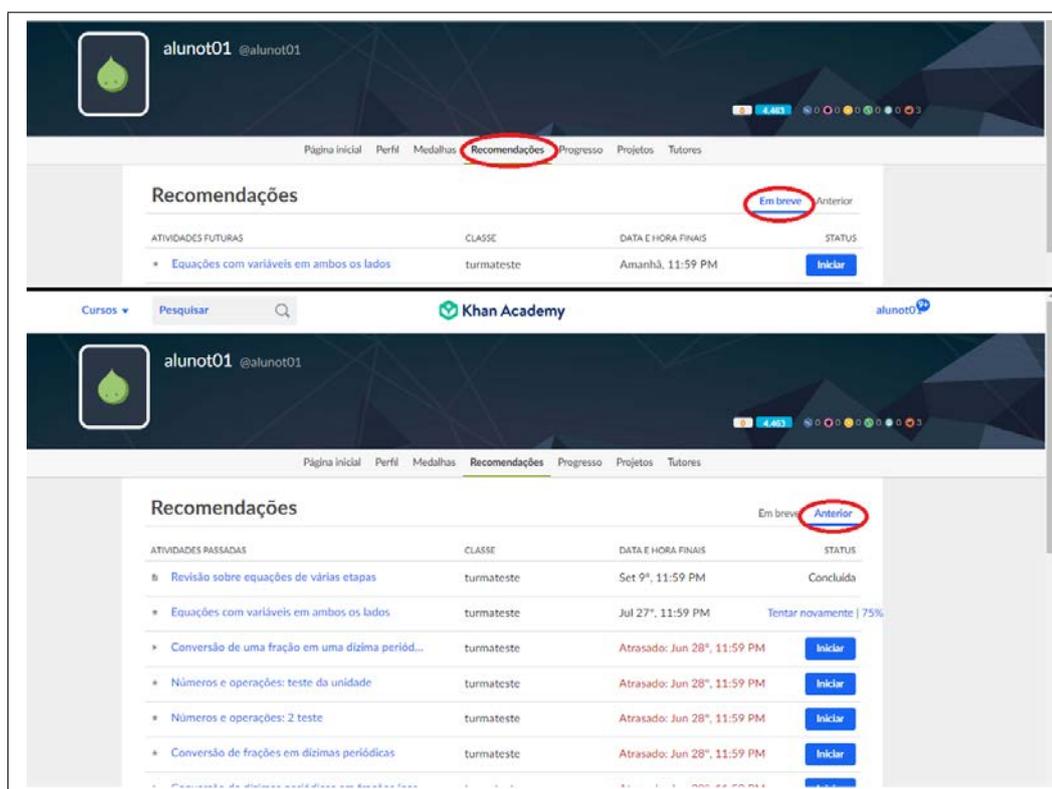


Fonte: Plataforma Khan Academy

Ao mostrar os cursos existentes, a pesquisadora ressaltou os conteúdos dentro do curso de matemática.

Em seguida, voltou a página inicial e clicou em recomendações. As recomendações puderam ser vistas clicando em “recomendações” circulado de vermelho na Figura 61. As recomendações propostas podem estar ativas ainda ou não, conforme já explicado anteriormente, sendo assim, as recomendações ainda ativas, apareceu em “em breve”, na Figura 63, mostrando a recomendação a ser feita. Ao clicar em “anterior” foi mostrado todas as recomendações passadas, aparecendo as que não foram feitas e mostrando desde quando está atrasada, bem como as que já foram feitas com o percentual de acerto e a opção de tentar novamente, conforme Figura 63.

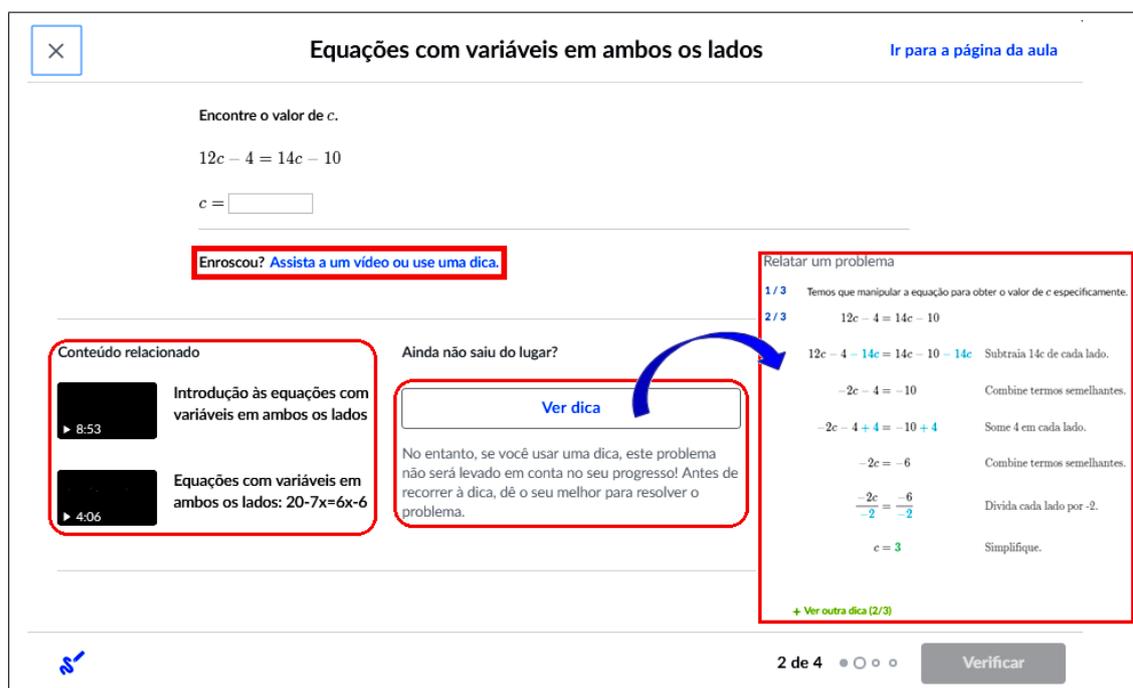
Figura 63 – Encontrando as recomendações na plataforma



Fonte: Plataforma Khan Academy

Em seguida foi apresentado aos alunos “como realizar uma recomendação”. Como já descrito anteriormente, recomendação trata-se de uma atividade proposta na plataforma, que tem um período de tempo definido pelo professor para ser realizada. A pesquisadora mostrou uma recomendação (Figura 64) sobre equações com variáveis em ambos os membros, tema já visto pelos alunos.

Figura 64 – Recomendação na plataforma Khan Academy via web



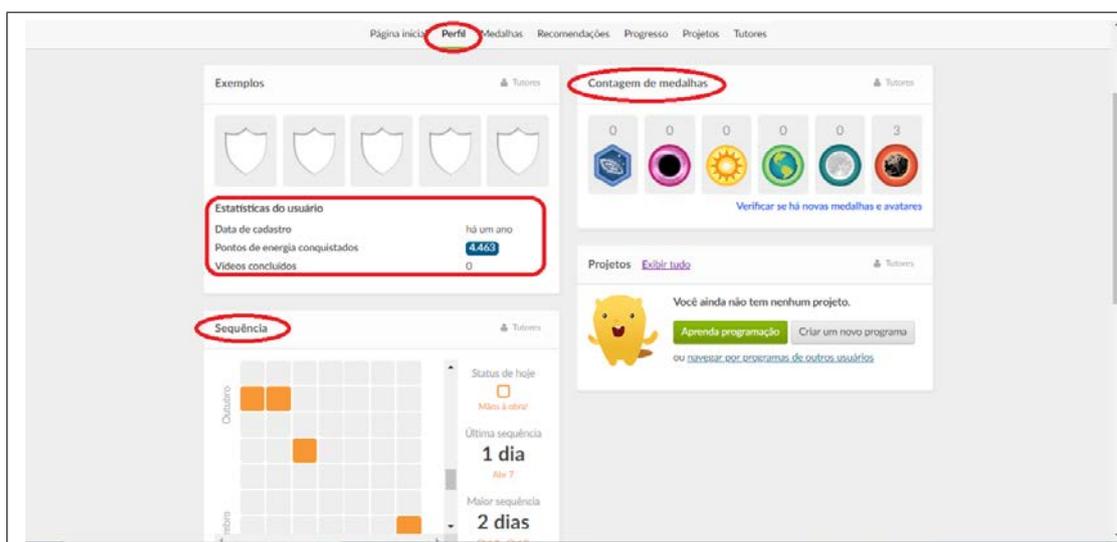
Fonte: Plataforma Khan Academy

A pesquisadora explicou como realizar a recomendação exemplificada. Colocou que sempre haveria um campo para ser inserida a solução e caso tivessem dúvidas a recomendação oferecia dicas, vídeo e acesso ao conteúdo para aprofundar o conhecimento e sanar uma dúvida existente.

A pesquisadora solicitou a participação da turma e com a tela do notebook espelhada na TV, os alunos foram respondendo a atividade para que os mesmos pudessem entender melhor a interface da recomendação.

Após a realização da recomendação, mostrou-se aos alunos como os mesmos visualizam seu próprio perfil, bem como sua pontuação e medalhas adquiridas. A pesquisadora ao clicar em perfil (Figura 65), mostrou ao aluno uma visão geral das ações do “aluno teste1” na plataforma, a contagem das medalhas adquiridas, a sequência de acesso à plataforma e a pontuação.

Figura 65 – Visualizando o perfil do “alunoteste1”



Fonte: Plataforma Khan Academy

Para saber detalhadamente das medalhas, mostrou-se que ao clicar em medalhas (Figura 66), o aluno tem uma visão de todas as medalhas possíveis para se conquistar. Consegue-se visualizar cada medalha possível e a pontuação necessária para adquiri-la, ou seja, quanto mais pontos o aluno fizer na plataforma, mais medalhas ele ganhará. Assim, é como se fosse um jogo.

Figura 66 – Visualizando o quadro de medalhas

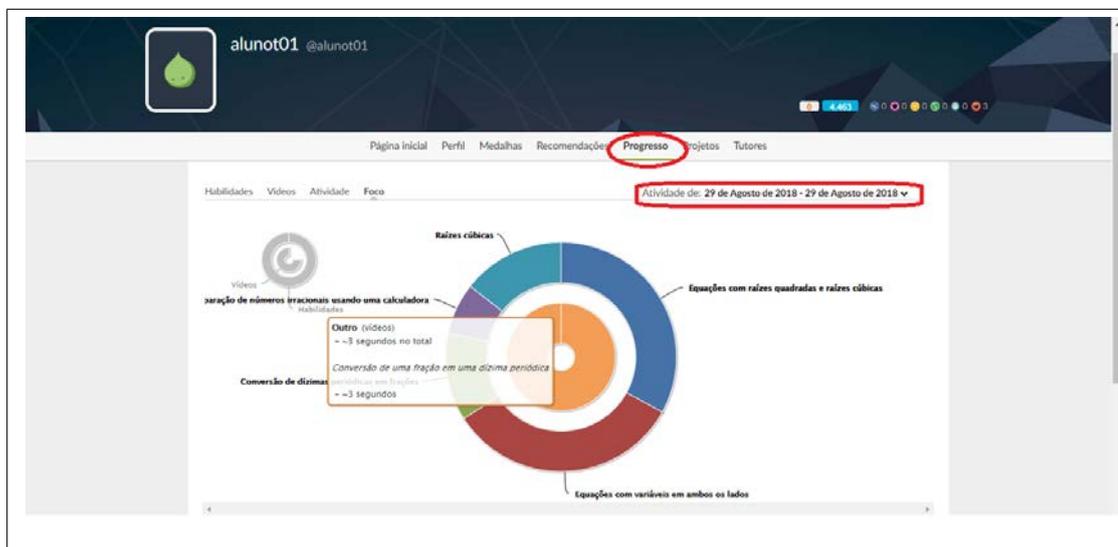


Fonte: Plataforma Khan Academy

Por fim, mostrou-se como acompanhar a própria aprendizagem, clicando na aba “progresso” as habilidades, vídeos, atividades e foco do aluno. A pesquisadora fez outras recomendações junto com os alunos, para que aprofundasse o conhecimento dos recursos da plataforma, assim, a Figura 67 ilustra o foco do aluno teste, mostrando as atividades

realizadas conjuntamente, ressaltando que quanto maior a área colorida do assunto, maior foi o tempo investido naquele tema.

Figura 67 – Acompanhando a aprendizagem do alunotestel



Fonte: Plataforma Khan Academy

Após serem realizadas as orientações descritas do "aluno teste1", e para que ficasse mais dinâmica a aula, a pesquisadora fez o login de um aluno da turma que ainda não havia acessado a plataforma, refazendo todas as orientações anteriores.

Após mostrar a plataforma Khan Academy pelo notebook, mostrou ser possível também seu acesso via *app*, ou seja, ter uma aprendizagem por meio do dispositivo celular. Explorou a plataforma via *app*, utilizando a televisão com o dispositivo "chromecast". Fez o login do "aluno teste1" e os alunos acompanharam a apresentação das mesmas etapas feitas no computador.

Ao acessar as recomendações via *app*, foi possível visualizar somente as que ainda estavam ativas, ou seja, ainda no prazo estipulado pelo professor para a realização da mesma. Não foi possível visualizar as recomendações anteriores, ou seja, as que passaram do prazo para serem realizadas, pois o *app* apresenta limitações quanto ao acesso de recomendações expiradas.

Os próprios alunos comentaram sobre essa diferença, pois alguns já haviam utilizado o *app* anteriormente com outro professor, e ao mostrar a plataforma pela *web*, conseguiram fazer as comparações. É importante destacar que enquanto a recomendação estiver ativa, ou seja, ainda no prazo estipulado para ser feito, os alunos conseguem visualizar de forma prática, e respondem sem prejudicar sua aprendizagem, pois a mesma atividade mostrada na *web* também é mostrada no *app*.

A pesquisadora comentou que tinha acesso as recomendações feitas pelos alunos. Dessa forma, a mesma, acessou seu login de professor/tutor, mostrando algumas ferramentas

que tem acesso para acompanhar o desenvolvimento dos mesmos, como: a forma com que consegue visualizar os alunos que efetuaram as recomendações; dia e o horário que acessaram o ambiente, bem como o número de tentativas ao realizar as atividades.

De forma geral, os alunos gostaram da proposta de como acessar e usar os recursos da plataforma e este momento foi importante para poder elaborar um plano de aula com o uso da plataforma Khan Academy.

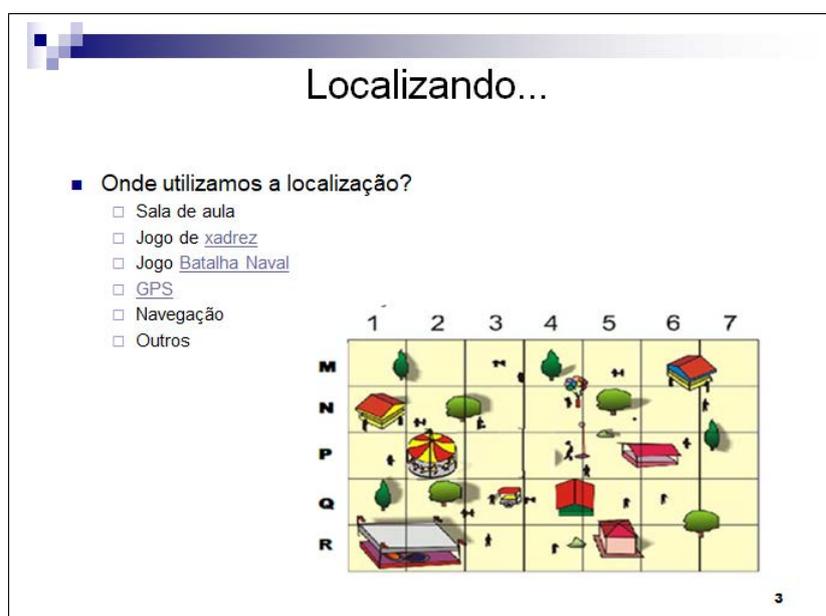
5.2 Aulas sobre Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Produto Cartesiano e Relação Binária

Nas aulas consideradas nesta seção, os temas, Sistema de Informações Geográficas, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Produto Cartesiano e Relação Binária foram considerados pré-requisitos para o estudo de Funções e os resultados da aplicação das mesmas estão descritos a seguir.

No dia 26 de setembro de 2018 em 02 horas/aulas, com a presença de 12 alunos, o conteúdo sobre Sistema de Informação Geográfica e Sistema de Coordenadas Cartesianas foi exposto utilizando como recurso didático a tecnologia com a TV e o computador da pesquisadora na própria sala de aula.

Iniciou-se aula com a apresentação de slides no PowerPoint (Figura 68), expondo os assuntos e como estes aparecem em seu dia a dia.

Figura 68 – Slide utilizado com exemplos de Localização no dia a dia



Fonte: autoria própria

O aparelho de GPS foi utilizado como instrumento para despertar a curiosidade dos alunos neste momento, mostrando sua localização real, na sala de aula, via satélite. O aparelho de GPS foi entregue aos alunos, para que os mesmos conhecessem e manuseassem suas funções, dentre elas: satélite e cálculo de área.

A função satélite é informar na tela os satélites disponíveis para fornecer a melhor precisão do ponto de localização da pessoa que manuseia o GPS. Ao ligar o aparelho, automaticamente, o mesmo busca os satélites que estão em órbita, aparecendo, após poucos minutos, em verde (Figura 69) os satélites com a maior potência relativa à recepção do sinal. Quanto maior o tempo do GPS ligado, mais satélites são alinhados reduzindo a margem de erro da localização. Após “adquirir satélites”, é também possível visualizar na tela as coordenadas geográficas, bem como a margem de erro do ponto.

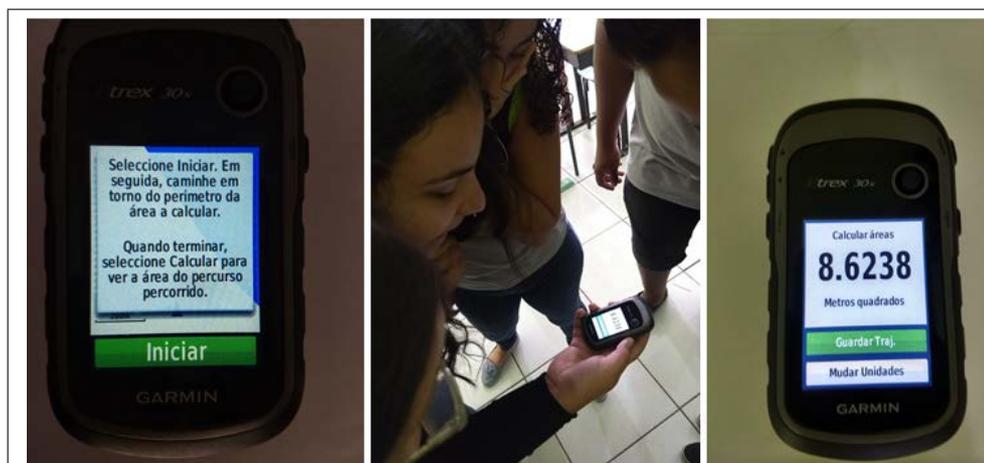
Figura 69 – Função Satélite do aparelho de GPS



Fonte: GPS Garmin eTrex 30x; dados da pesquisa

A função “cálculo de área” permite calcular determinada área no próprio aparelho de GPS. Como curiosidade, essa função foi explorada pelos alunos ao calcular a área da sala de aula. Com o GPS em mãos, em um ponto inicial da sala de aula, os alunos caminharam em torno da mesma (perímetro) seguindo a orientação do GPS. Após o percurso concluído, voltando ao ponto inicial, o GPS mostrou na tela a área calculada (Figura 70).

Figura 70 – Função Cálculo de área do aparelho de GPS



Fonte: GPS Garmin eTrex 30x; dados da pesquisa

Em continuidade à aula, a partir da explicação dos slides, foi apresentado aos alunos o Sistema de Coordenadas Geográficas, através a plataforma *Google Earth* com o objetivo de auxiliar o estudo das Coordenadas Cartesianas de forma contextualizada, possibilitando aos alunos a visualização em tempo real da localização da escola, rua, bairro e cidade que estão inseridos, bem como “viajar pelo mundo” (Figura 71).

Figura 71 – Slide utilizado com a Localização Real via *Google Earth*

Sistema Geográfico

■ Nossa localização:

- R. Apolinário Rodrigues Soares, 110 - Boqueirão, São Pedro da Aldeia - RJ, 28940-000
- Latitude: 22° 52' 06"
- Longitude: 42° 06' 43"

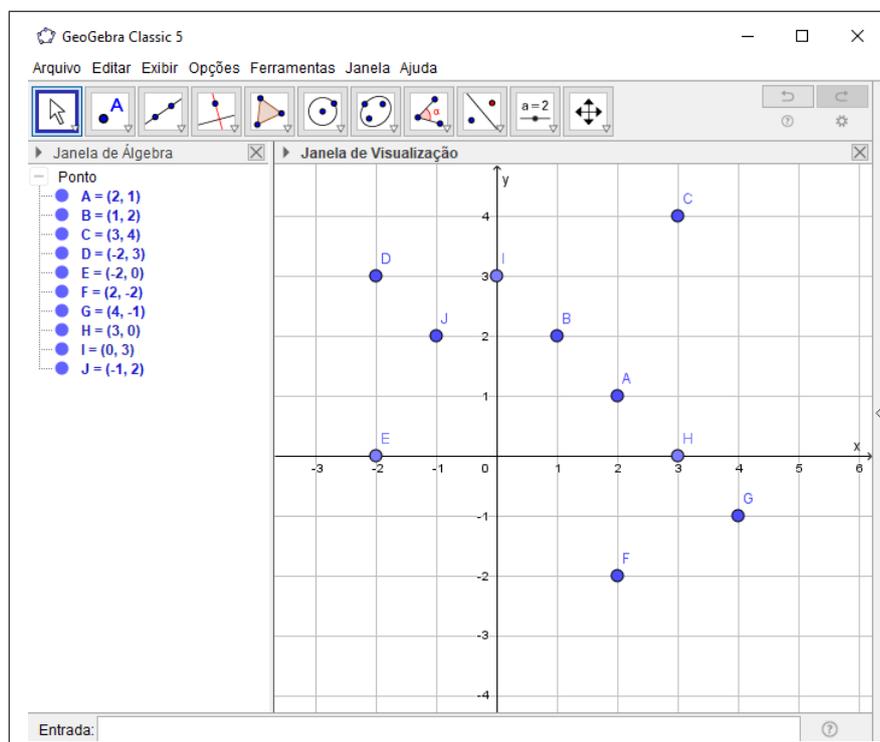
7

Fonte: autoria própria

Apesar de somente a pesquisadora estar manipulando a ferramenta *Google Earth*, os alunos participaram ativamente da aula, fazendo perguntas a respeito da localização de outras cidades, estados e até países, interessados quanto à mudança das coordenadas que apareciam na tela de acordo com as localidades sugeridas.

Após a explanação do conteúdo de Sistema de Coordenadas Geográficas foi explorado o Sistema de Coordenadas Cartesianas, onde explicou-se os eixos coordenados, a marcação de pontos no plano cartesiano e nomenclatura do ponto marcado. Utilizou-se o *software* Geogebra, projetado na TV, para ensinar aos alunos a marcarem pontos no plano, bem como encontrar as coordenadas de um ponto já marcado. O objetivo de utilizar o software se deu pela possibilidade do mesmo mostrar na tela, o ponto de coordenadas (x, y) representado algebricamente e graficamente (Figura 72), permitindo a visualização de mais de uma representação do objeto matemático em questão.

Figura 72 – Marcação de pontos no plano cartesiano no *software* Geogebra



Fonte: autoria própria

Finalizou-se a aula, sendo propostos exercícios do livro, para serem feitos em casa, sobre o Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Na aula seguinte, ocorrida em 02 de outubro de 2018, em 02 horas/aula, com a presença de 12 alunos, a pesquisadora iniciou a aula corrigindo os exercícios do livro, os quais foram feitos em casa. Os alunos relataram que tiveram dúvidas na realização dos mesmos. Foi feito, nesse momento, uma revisão do conteúdo de Sistema de Coordenadas Cartesianas, destacando o plano cartesiano, os quadrantes e a marcação de pontos.

Após a revisão, a pesquisadora perguntou quantos alunos estavam com seus *smartphones* em sala de aula e sete alunos presentes (A1, A3, A4, A7, A8, A11, A13) dispunham dos aparelhos. Apesar de não ter sido planejado previamente, a pesquisadora propôs fazerem três recomendações da plataforma Khan Academy em sala de aula e

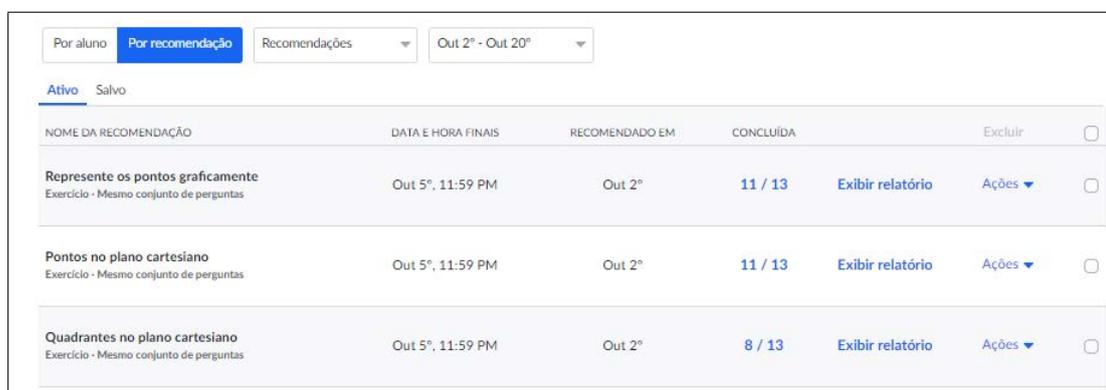
disponibilizou sua rede de dados móveis para que os mesmos conseguissem acessar a plataforma. Já tinham seu perfil cadastrado e passado pelo processo de conhecimento da plataforma e seus recursos, bem como o app da plataforma instalado em seus smartphones.

Os outros cinco alunos presentes que não estavam com celular em sala, sentaram juntos com os que estavam, fazendo em conjunto às atividades recomendadas naquele momento, possibilitando dessa forma a troca de ideias, bem como compartilhando as dúvidas com os próprios colegas e a pesquisadora.

Ao propor as atividades na plataforma Khan Academy, a pesquisadora pode escolher recomendar de forma que apareça o mesmo grupo de perguntas para todos os alunos, ou um grupo de perguntas diferentes para todos os alunos. Para as atividades a seguir, foi proposto que a plataforma selecionasse o mesmo grupo de perguntas para todos os alunos. Ressalta-se que cada aluno poderia iniciar a resolução das recomendações por qualquer uma das três atividades propostas.

As atividades recomendadas foram: (i) “Represente os pontos graficamente”, (ii) “Pontos no plano Cartesiano”, (iii) “Quadrantes no plano cartesiano”, como mostra a Figura 73.

Figura 73 – Recomendação da plataforma Khan Academy realizada durante a aula



NOME DA RECOMENDAÇÃO	DATA E HORA FINAIS	RECOMENDADO EM	CONCLUÍDA	Excluir
Represente os pontos graficamente Exercício - Mesmo conjunto de perguntas	Out 5 ^o , 11:59 PM	Out 2 ^o	11 / 13	Exibir relatório
Pontos no plano cartesiano Exercício - Mesmo conjunto de perguntas	Out 5 ^o , 11:59 PM	Out 2 ^o	11 / 13	Exibir relatório
Quadrantes no plano cartesiano Exercício - Mesmo conjunto de perguntas	Out 5 ^o , 11:59 PM	Out 2 ^o	8 / 13	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Enquanto estavam fazendo as recomendações durante a aula, surgiram dúvidas de como plotar pontos com coordenadas decimais, bem como, a localização de determinado ponto no plano cartesiano. Os alunos se ajudaram, como mostra a Figura 74, e também solicitavam a ajuda da pesquisadora. As dúvidas comuns à maioria, foram sanadas pela pesquisadora no quadro, quando explicou as perguntas e deu outros exemplos.

Figura 74 – Alunos utilizando a Plataforma Khan Academy em aula



Fonte: Dados da pesquisa

Após analisar o resultado das atividades, e pela observação feita na sala de aula, acredita-se que os alunos iniciaram a resolução das atividades pela recomendação “Pontos no plano cartesiano”. Dessa forma, descreveu-se as atividades na ordem: (i) “Pontos no plano cartesiano”, (ii) “Quadrantes no plano cartesiano”, (iii) “Represente os pontos graficamente”.

Para cada atividade recomendada, os alunos além de terem a possibilidade de utilizar vídeos e dicas como recursos, podem refazer a atividade completa, quantas vezes quiserem, tendo um número infinito de tentativas. A plataforma não considera o “progresso” do aluno em seu total de acertos, em duas situações: (i) ao utilizar dicas para resolver a pergunta e (ii) ao cometer um erro em determinada pergunta (independente de dicas), mesmo que antes de seguir para a próxima pergunta, o aluno refaça acerte a mesma.

A recomendação “Pontos no plano cartesiano”, foi composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente, pela plataforma, do banco de questões composto por 24 perguntas, e teve por objetivo (i) identificar, dentro os pontos fornecidos, quais pontos não estavam no plano cartesiano, (ii) representar graficamente pontos solicitados, (iii) dada a coordenada de um ponto, verificar no plano cartesiano quais pontos atendiam a uma determinada condição exposta na questão.

A plataforma Khan Academy disponibiliza um relatório que apresenta o número de tentativas que cada aluno fez nas perguntas propostas, bem como a quantidade de acertos do mesmo, conforme [Figura 75](#). Além disso, possibilita visualizar quais as perguntas feitas pelos alunos que concluíram toda a recomendação.

Figura 75 – Recomendação “Pontos no plano cartesiano”

ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Out 2º, 1:43 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A2	Out 10º, 10:16 AM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A3	Out 2º, 1:44 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A4	Out 2º, 1:23 PM	1	4 / 7 57%	Exibir relatório
A5	Out 10º, 7:15 PM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A6	Out 5º, 8:14 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A7	Out 2º, 1:19 PM	1	3 / 7 43%	Exibir relatório
A8	Out 2º, 1:46 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A9	-	-	-	
A10	Out 4º, 8:40 AM	5	5 / 7 71%	Exibir relatório
A11	Out 2º, 1:58 PM	1	3 / 7 43%	Exibir relatório
A12	-	-	-	
A13	Out 2º, 2:09 PM	1	4 / 7 57%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Pôde-se observar que a atividade foi concluída por 11 alunos, conforme [Figura 75](#), e que todos os 11 alunos que iniciaram a atividade terminaram a mesma. O aluno A9 não estava presente nesta aula e o aluno A12 acompanhou a atividade com os demais colegas e não fez as atividades individualmente em casa, visto que o mesmo estava sem seu *smartphone* em aula.

Observa-se ainda que os alunos A1, A3, A6 e A8 só acertaram 1 das 7 questões propostas e fizeram somente 1 tentativa e os alunos A7 e A11 acertaram 3 das 7 questões propostas e fizeram somente 1 tentativa também, evidenciando a dificuldade dos mesmos para alcançar os objetivos desta atividade, mas não fizeram uma nova tentativa da atividade para que pudessem responder novamente as mesmas. Somente por esse relatório fornecido, não se pode afirmar que esses alunos utilizaram ou não os recursos de vídeos e dicas, pois, ao utilizar as dicas, e mesmo que acertem a questão após o recurso, não contabiliza o acerto. Além disso, pelo que foi vivenciado durante a aula, os alunos A1, A3, A7, A8 e A11 (com o uso do *app* em sala de aula) recorriam à pesquisadora após o erro, em que a pergunta era explicada e dessa maneira, ao refazer a mesma antes de seguir para a próxima, conseguiam acertá-la. Assim, o relatório não evidencia os acertos ao final da atividade, pois os alunos poderiam ter usado dicas e outros pediram o auxílio da pesquisadora antes de seguir em diante. Mais a frente, conseguiu-se perceber a evolução dos alunos A1, A3

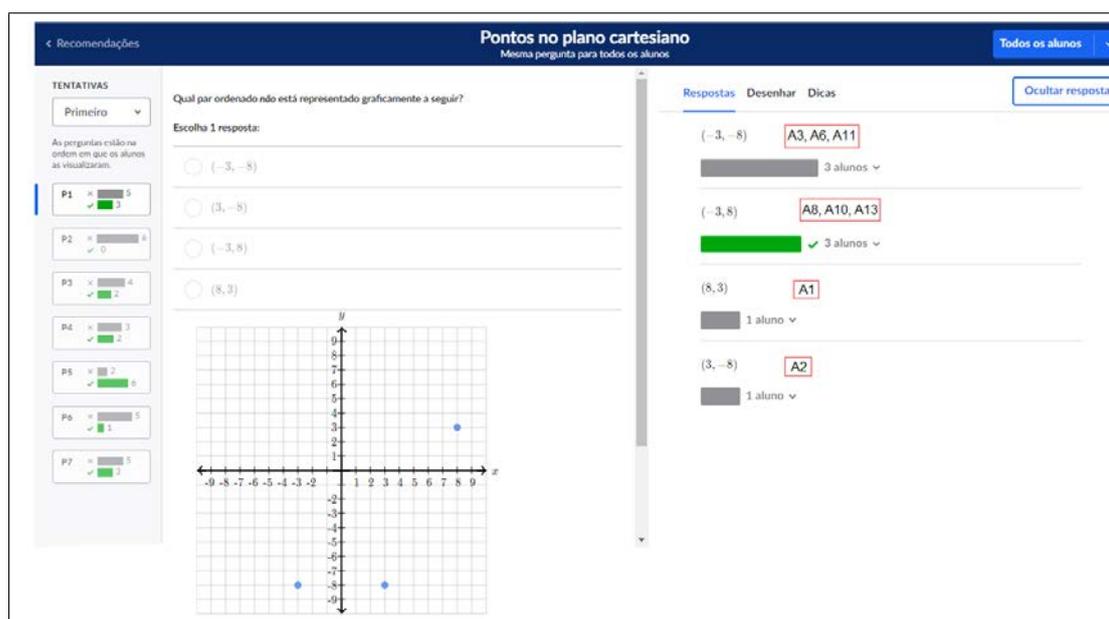
A8 e A11 no teste proposto na própria plataforma, ao final da aplicação do pré-requisito.

Foram selecionadas três, das sete perguntas realizadas pelos alunos, para serem descritas a seguir. A escolha ocorreu dentre as perguntas que tiveram o maior índice de erros, aquelas que se apresentaram de formas diferentes entre si. Sendo assim, foram descritas as perguntas 1, 2 e 7. O relatório que aparece no canto esquerdo da Figura 76, explica que as perguntas estão dispostas na ordem que os alunos as visualizaram.

A pergunta 1 (Figura 76), propôs que o aluno identificasse qual dos pontos presente nas alternativas, não estava representado graficamente, realizando a conversão.

Essa pergunta foi a segunda com maior índice de erros. Somente os alunos A8, A10 e A13 acertaram essa pergunta. Percebeu-se que os alunos não conseguiam identificar corretamente os pares ordenados representados, não sabendo responder sobre qual par ordenado apresentado nas alternativas, não estava no plano cartesiano. Assim, a pesquisadora foi ao quadro reforçar como identificar o par ordenado representado graficamente.

Figura 76 – Pergunta 1 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”



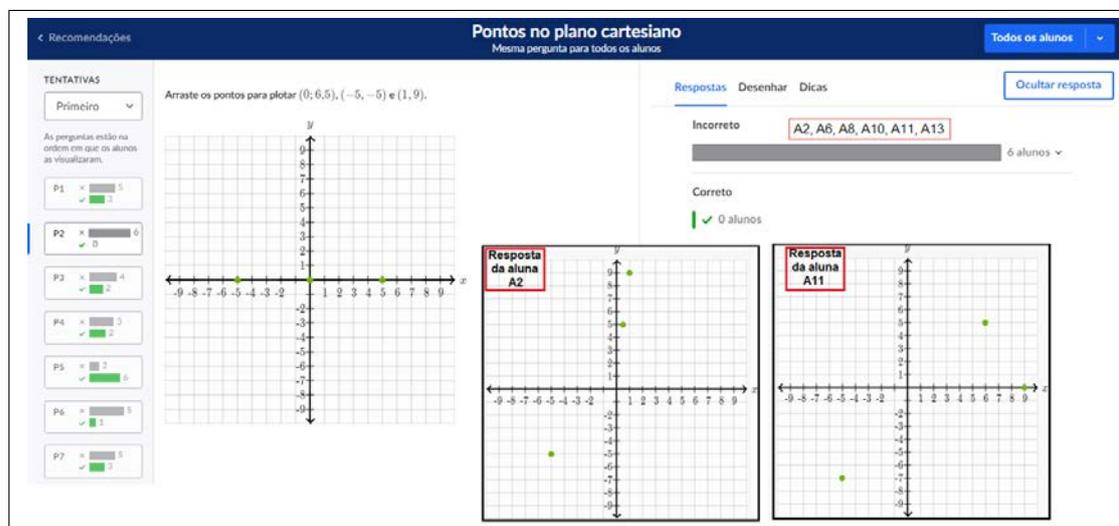
Fonte: Plataforma Khan Academy

A pergunta 5 é similar a pergunta 1, a qual possui o mesmo objetivo, com outros pares ordenados. Os alunos A1, A6, A7, A10, A11 e A13 apresentaram um bom desempenho na pergunta 5, acertando as mesmas, demonstrando uma melhora.

A pergunta com o maior índice de erros foi a pergunta 2, apresentada na Figura 77. A pergunta 2 propôs que o aluno localize no plano cartesiano três pontos, cujas coordenadas são $(0; 6, 5)$, $(-5, -5)$ e $(1, 9)$. Acredita-se que esta tenha sido uma questão com mais erros, pois, segundo relato dos alunos, os mesmos apresentam dúvidas quando uma das coordenadas do ponto é um número racional. Durante a resolução desta atividade, a

pesquisadora, após relato dos alunos, foi ao quadro explicar e exemplificar a localização de pontos com coordenadas com números racionais.

Figura 77 – Pergunta 2 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”



Fonte: Plataforma Khan Academy

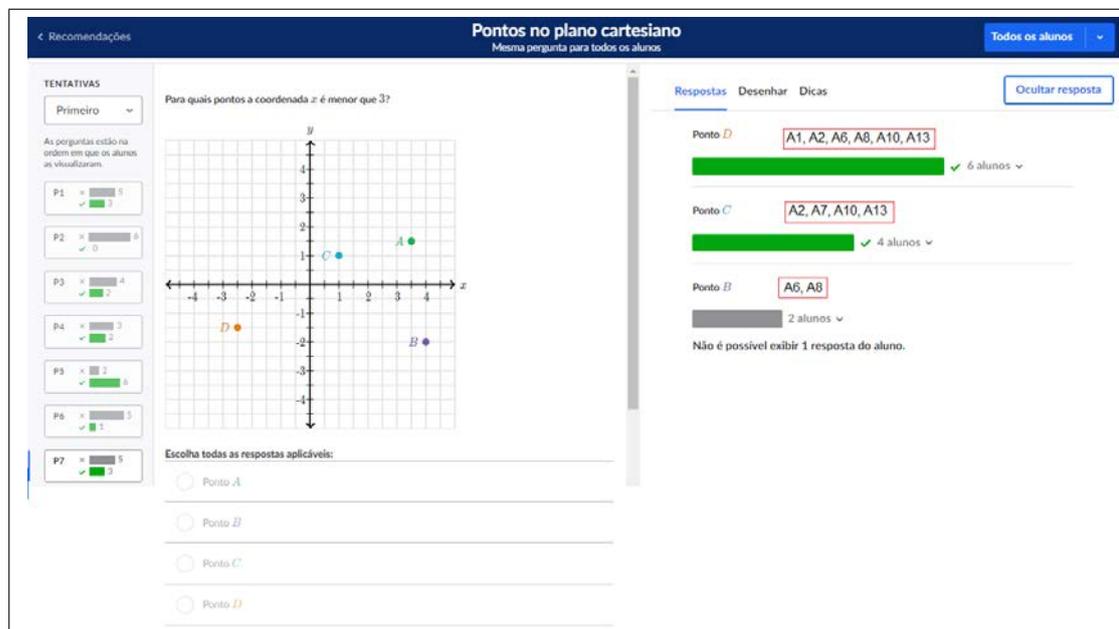
Em relação ao ponto $(0; 6,5)$ o relato foi que confundiram as coordenadas, não identificando qual era a abscissa e qual era a ordenada. A maioria dos alunos que erraram a pergunta como um todo foi por se confundirem na marcação do ponto $(0; 6,5)$. Observou-se ainda que os alunos A8, A10 e A13, que acertaram a pergunta 1, erraram a pergunta 2. Notou-se na resposta da aluna A2 (Figura 77) que a mesma marcou o ponto $(0, 5; 6)$ e a aluna A11 marcou o ponto $(6, 5)$ desconsiderando o zero. Para essa pergunta, a pesquisadora foi solicitada para esclarecimento. Assim, a mesma foi ao quadro explicando como marcar pontos com coordenadas representadas por números decimais. Além disso, ressaltou a rescrita do par ordenado, visto que os alunos comentaram “*como vou marcar um ponto com 3 coordenadas?*”, assim, a pesquisadora explicou que quando há coordenadas com números decimais, separa-se com ponto e vírgula (;).

A pergunta 6 é similar a pergunta 2, objetivando-se plotar no plano cartesiano os pontos de coordenadas $(6, -8)$, $(2, 7)$ e $(1, -4)$. Foi observado no relatório da plataforma Khan Academy, que o maior erro nessa pergunta referente a marcar os pontos citados foi a “troca” de coordenadas, ou seja, marcaram $(-8, 6)$, $(7, 2)$ e $(-4, 1)$. Assim, foi possível identificar que a dificuldade dos alunos estava também em marcar pontos “simples”, pois não haviam compreendido o conceito de par ordenado, não se atentando que $(x, y) \neq (y, x)$. Dessa forma, a pesquisadora foi até o quadro e fez mais exemplos sobre marcar pontos no plano cartesiano, explicando novamente o par ordenado.

A pergunta 3, tem por objetivo identificar entre os pontos marcados no plano cartesiano, aqueles que possuem a coordenada y menor que 1, 5. A pergunta 7, similar a pergunta 3, tem por objetivo identificar entre os pontos marcados no plano cartesiano,

aqueles que possuem a coordenada x menor que 3. A Figura 78, apresenta a pergunta 7, sendo esta a que os alunos erraram mais em comparação com a pergunta 3.

Figura 78 – Pergunta 7 da recomendação “Pontos no plano cartesiano”



Fonte: Plataforma Khan Academy

Pôde-se observar que a resposta correta foi aquela em que os alunos marcaram todos os pontos possíveis, sendo as alternativas corretas as que contêm os pontos C e D . Observou-se pelas respostas dos alunos que $A1$ e $A7$ só marcaram uma das alternativas corretas, respondendo de maneira incompleta. Verificou-se que os mesmos não se atentaram para responder de forma completa. Os alunos $A6$ e $A8$ marcaram uma alternativa correta e outra errada. Pela resposta dos mesmos (pontos B e D) infere-se que não se atentaram para o fato de que a coordenada x que deveria ser menor que 3, e não a coordenada y , evidenciando a confusão entre os eixos x e y .

Explorou-se nessa atividade o conceito de par ordenado, bem como a conversão de representação, gráfico – par ordenado e vice-versa.

Na segunda recomendação proposta, “Quadrantes no plano cartesiano”, cujo banco de questões foi composto por 22 perguntas. A plataforma selecionou aleatoriamente 7 perguntas para compor esta atividade. A mesma teve por objetivo em algumas perguntas: (i) representar graficamente o ponto solicitado e responder o quadrante em que o ponto está localizado e (ii) responder quanto à localização de pontos no plano cartesiano (sem plotar o mesmo).

Ao acessar relatório disponibilizado pela plataforma, Figura 79, identificou-se que os alunos $A6$, $A9$ e $A12$ não iniciaram a atividade, e os alunos $A1$ e $A3$ não concluíram algumas das sete perguntas da atividade proposta, aparecendo no relatório “em andamento”,

ou seja, começaram a atividade, mas não a finalizaram. Os outros oito alunos concluíram as sete perguntas propostas.

Figura 79 – Recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”

The screenshot shows a table with the following data:

ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	-	Em andamento	-	
A2	Out 10º, 10:23 AM	1	3 / 7 43%	Exibir relatório
A3	-	Em andamento	-	
A4	Out 2º, 1:35 PM	1	5 / 7 71%	Exibir relatório
A5	Out 5º, 5:32 PM	3	6 / 7 86%	Exibir relatório
A6	-	-	-	
A7	Out 2º, 1:34 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A8	Out 2º, 2:09 PM	1	4 / 7 57%	Exibir relatório
A9	-	-	-	
A10	Out 4º, 7:02 AM	4	7 / 7 100%	Exibir relatório
A11	Nov 9º, 7:25 PM	4	7 / 7 100%	Exibir relatório
A12	-	-	-	
A13	Out 2º, 1:26 PM	1	2 / 7 29%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Ainda sobre a [Figura 79](#), destaca-se que os alunos A5, A10 e A11, fizeram mais de uma tentativa para alcançarem um melhor desempenho, indicando que apresentaram algumas dúvidas em sua realização. Estes alunos durante a aula relataram que ainda estavam confusos sobre a localização dos pontos no plano, o que os levou a praticarem mais vezes a atividade, conseguindo alcançar um rendimento satisfatório após as tentativas.

Sendo assim, dos 5 alunos que tentaram uma única vez, os alunos A4 e A8 tiveram um percentual de acertos maior que 50%, e os alunos A2, A7 e A13 tiveram um rendimento abaixo de 50%, evidenciando suas dificuldades.

Foram selecionadas três, das sete perguntas realizadas pelos alunos, para serem descritas a seguir. A escolha ocorreu dentre as perguntas que tiveram o maior índice de erros, aquelas que se apresentaram de formas diferentes entre si. Sendo assim, foram descritas as perguntas 1, 2 e 6.

A pergunta 1, teve por objetivo plotar o ponto de coordenadas $(6, 0)$ e em seguida determinar a localização do mesmo nos quadrantes ou nos eixos coordenados, conforme [Figura 80](#). As perguntas 3 e 7 são similares a pergunta 1, tendo por objetivo plotar e localizar no plano cartesiano os pontos $(0, -4)$ e $(-1, 5)$, respectivamente.

Figura 80 – Pergunta 1 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”

The screenshot shows a Khan Academy interface for a question titled "Quadrantes no plano cartesiano". The question asks to plot the point $(6, 0)$ and then select its location. The interface includes a grid with the point $(6, 0)$ plotted on the x-axis. The question asks "Onde $(6, 0)$ está localizado no plano cartesiano?". The interface also shows a list of student attempts (P1 to P7) and a list of student answers (Resposta 1 and Resposta 2) with their respective scores and student IDs.

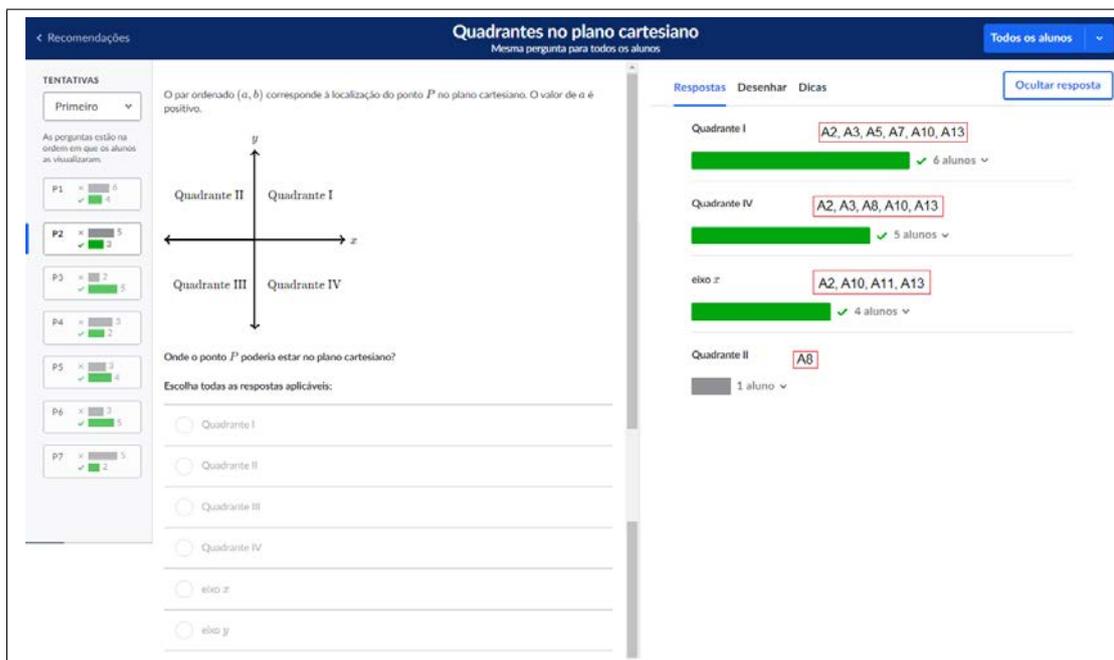
Fonte: Plataforma Khan Academy

Ressalta-se que alguns alunos comentaram durante a realização desta pergunta que não entenderam que era para plotar o ponto (arrastando o ponto verde até a localização exata), respondendo somente onde o mesmo estava localizado.

Observou-se a partir da Figura 80, que os alunos A4, A5, A6 e A10 responderam corretamente ambas as perguntas apresentadas, ou seja, plotaram corretamente o ponto no plano e responderam corretamente sua localização no mesmo. A aluna A7, plotou corretamente o ponto no plano, mas respondeu que o mesmo localiza-se no 1º quadrante. O aluno A13 respondeu corretamente que o ponto localiza-se sobre o eixo x , porém deixou de marcar o ponto $(6, 0)$ no plano cartesiano, comentando que não percebeu que eram duas perguntas, visto que o mesmo plotou corretamente este mesmo ponto na atividade “represente os pontos graficamente”. Observou-se que os alunos A1 e A8 inverteram as coordenadas do ponto pedido, visto que marcaram o ponto $(0, 8)$, evidenciando suas respostas ao marcarem que o ponto estava sobre o eixo y .

A pergunta 2, teve por objetivo identificar todas as localizações possíveis de um ponto P de coordenadas (a, b) , de forma que a abscissa do mesmo é um número real positivo, conforme Figura 81. A pergunta 5 é similar a pergunta 2, tendo por objetivo identificar todas as localizações possíveis de um ponto E , em que as coordenadas x e y de E têm sinais diferentes (um é positivo e o outro é negativo) e nenhuma coordenada é zero.

Figura 81 – Pergunta 2 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”

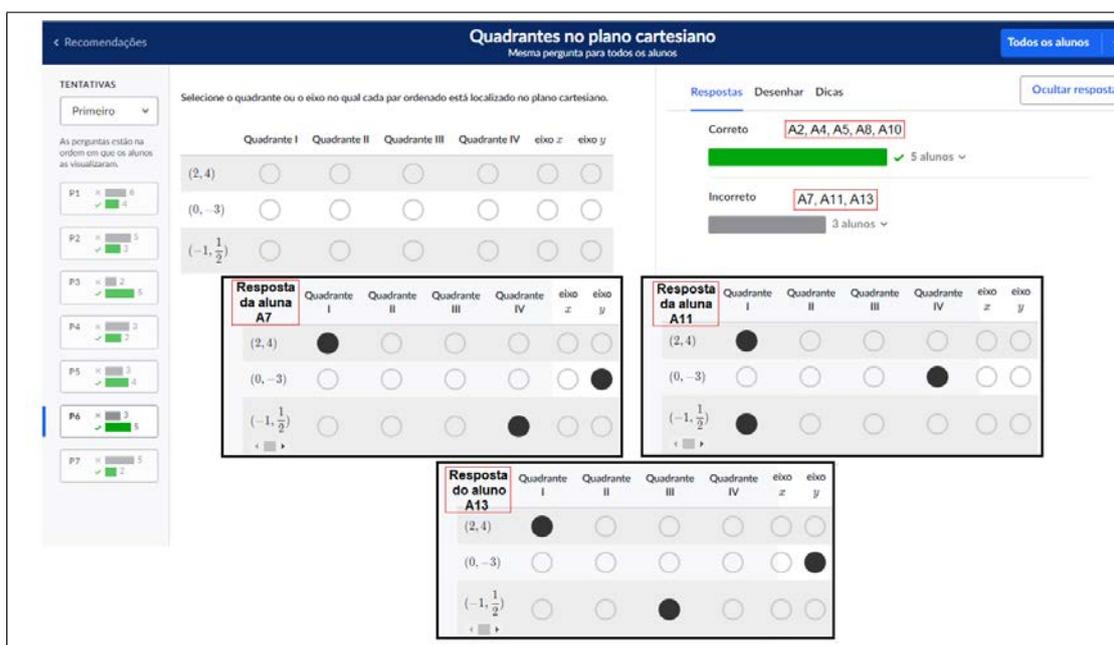


Fonte: Plataforma Khan Academy

Observou-se a partir da [Figura 81](#), que os alunos A2, A10 e A13 responderam corretamente todas as localizações do ponto P (I e IV quadrantes e o eixo x). Os alunos A3, A5, A7 e A11, responderam parcialmente de forma correta a pergunta. O aluno A8, não respondeu corretamente todas as localizações possíveis, acertando uma, e errando a outra. Pela resposta dada por ele (localização nos I e II quadrantes) pode-se perceber que o mesmo trocou a abscissa e ordenada, sendo esta uma solução correta se a pergunta fosse referente à ordenada ser positiva, ainda assim, faltando a localização sobre os eixos.

A pergunta 6, teve por objetivo identificar a localização de três pontos de coordenadas $(2, 4)$, $(0, -3)$ e $(-1, \frac{1}{2})$, conforme [Figura 82](#). A pergunta 3 é similar a pergunta 6, tendo por objetivo identificar localização dos pontos de coordenadas $(-9, -8)$, $(1, 0)$ e $(7, 5; 2)$.

Figura 82 – Pergunta 6 da recomendação “Quadrantes no plano cartesiano”



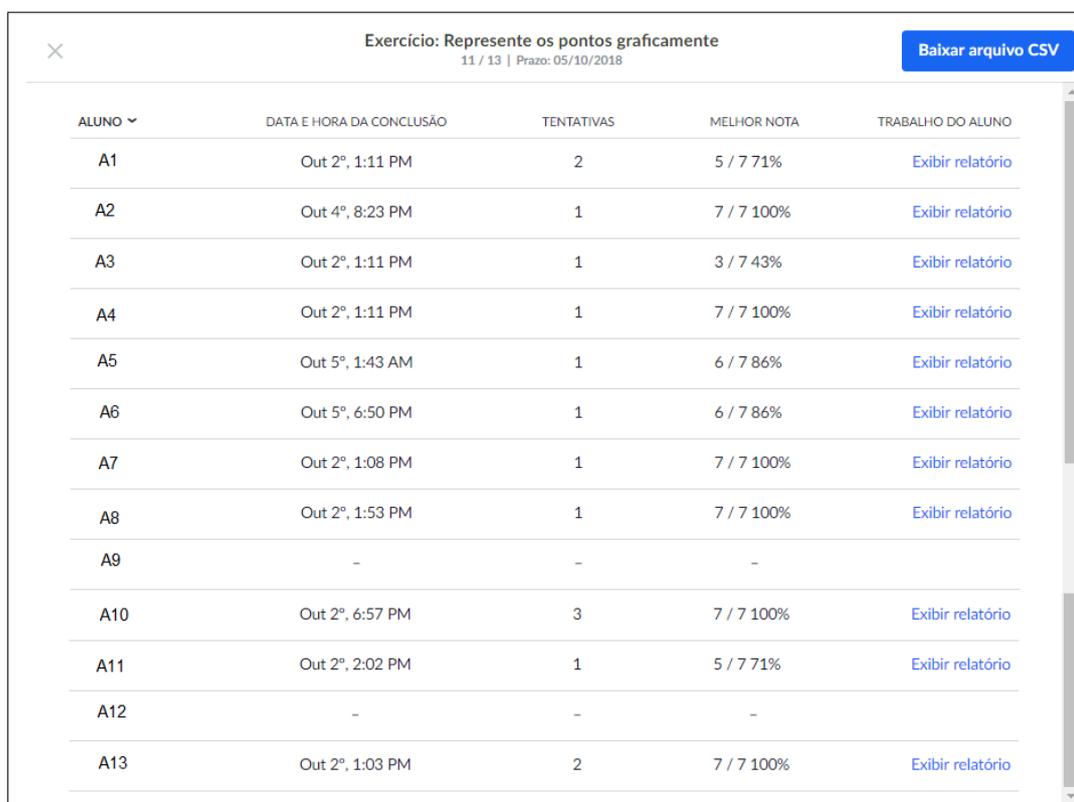
Fonte: Plataforma Khan Academy

Percebeu-se a partir da Figura 82, que os alunos A2, A4, A5, A8 e A10 responderam corretamente a localização dos pontos propostos. Destaca-se ainda na Figura 82 as respostas dos alunos A7, A11 e A13. Observou-se pelos erros cometidos que estes alunos não apresentaram dificuldade quanto a localização do ponto (2, 4). Para o ponto (0, -3), sobre o eixo y, a aluna A11 apresentou dificuldade na localização do mesmo, respondendo que estava localizado no IV quadrante. A localização do ponto $(-1, \frac{1}{2})$ foi dúvida comum aos 3 alunos. Acredita-se que, pela respostas apresentadas, a aluna A7 tenha trocado os sinais das coordenadas do ponto, respondendo estar localizado no IV quadrante.

Por último, comenta-se a recomendação “Represente os pontos graficamente”, que foi composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente do banco de questões composto por 20 perguntas e teve por objetivo representar graficamente os pontos solicitados.

A Figura 83 traz o relatório disponibilizado pela plataforma Khan Academy, o qual apresenta o número de tentativas que cada aluno fez nas perguntas propostas, bem como a quantidade de acertos do mesmo. Além disso, possibilitou visualizar quais as perguntas feitas pelos alunos.

Figura 83 – Recomendação “Represente os pontos graficamente”



The screenshot shows a table with the following columns: ALUNO, DATA E HORA DA CONCLUSÃO, TENTATIVAS, MELHOR NOTA, and TRABALHO DO ALUNO. The table lists 13 students (A1 to A13). Student A9 has no data, and student A12 has a dash in all columns. All other students have completion dates, attempt counts, and scores. A 'Baixar arquivo CSV' button is visible in the top right corner.

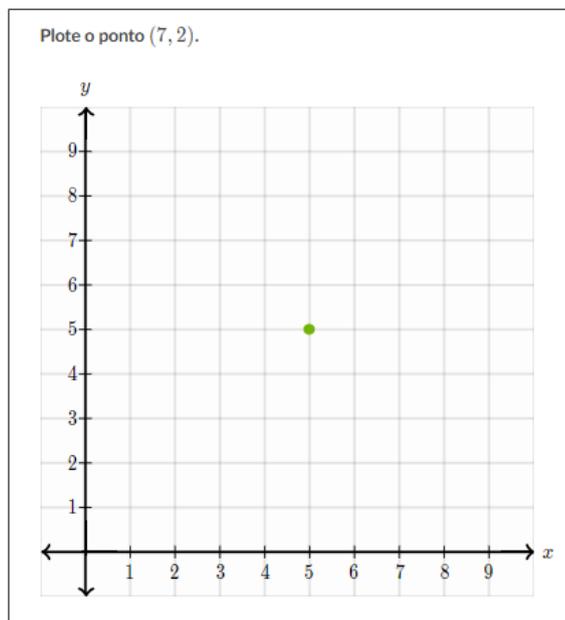
ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Out 2º, 1:11 PM	2	5 / 7 71%	Exibir relatório
A2	Out 4º, 8:23 PM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A3	Out 2º, 1:11 PM	1	3 / 7 43%	Exibir relatório
A4	Out 2º, 1:11 PM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A5	Out 5º, 1:43 AM	1	6 / 7 86%	Exibir relatório
A6	Out 5º, 6:50 PM	1	6 / 7 86%	Exibir relatório
A7	Out 2º, 1:08 PM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A8	Out 2º, 1:53 PM	1	7 / 7 100%	Exibir relatório
A9	-	-	-	
A10	Out 2º, 6:57 PM	3	7 / 7 100%	Exibir relatório
A11	Out 2º, 2:02 PM	1	5 / 7 71%	Exibir relatório
A12	-	-	-	
A13	Out 2º, 1:03 PM	2	7 / 7 100%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Observou-se que a atividade foi concluída por 11 alunos, conforme Figura 83, e que todos os 11 alunos que iniciaram a atividade terminaram a mesma. Ressalta-se que o aluno A9 não estava presente nesta aula e o aluno A12 acompanhou a atividade com os demais colegas e não fez as atividades individualmente em casa.

As sete perguntas propostas são do tipo: “Plote o ponto (x, y) ” em que (x, y) são coordenadas do ponto solicitado pela atividade, sendo este localizado no primeiro quadrante. Para responder as perguntas, o aluno deve mover o ponto verde até que esteja representado corretamente no plano (Figura 84).

Figura 84 – Exemplo de pergunta da atividade “Represente os pontos graficamente”

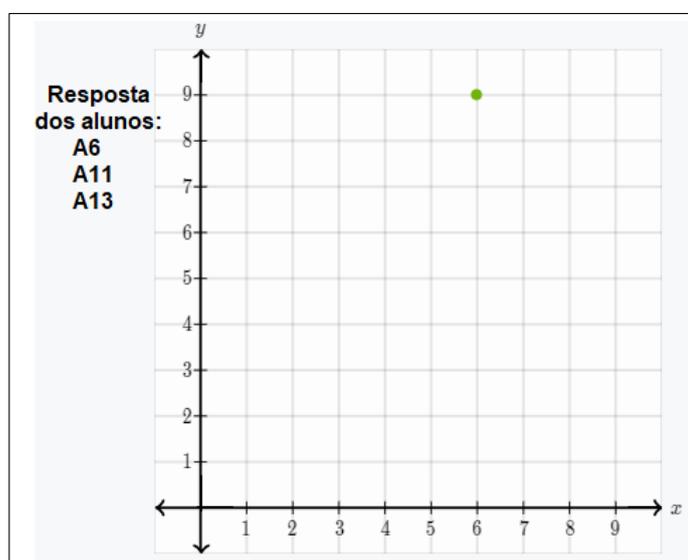


Fonte: Plataforma Khan Academy

Percebeu-se ainda, ao analisar o relatório, que após a primeira tentativa, as perguntas 2, 4, 6 e 7 que propunham a plotagem dos pontos (4, 8), (2, 2), (6, 0) e (5, 9), respectivamente, os alunos não tiveram dúvidas. Observou-se que os erros incorreram nas perguntas 1, 3 e 5 na plotagem dos pontos (9, 6), (3, 7) e (3, 4), respectivamente.

Na pergunta 1, ao solicitar a plotagem do ponto (9, 6), os alunos A6, A11 e A13, não responderam corretamente, conforme [Figura 85](#).

Figura 85 – Resposta da pergunta 1, da recomendação "Represente os pontos graficamente", dos alunos A6, A11 e A13

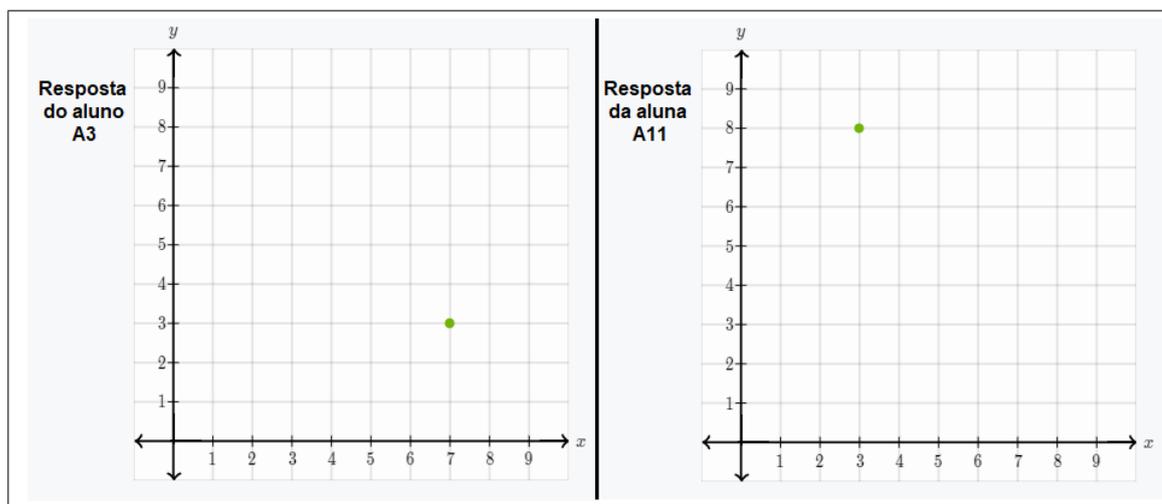


Fonte: Plataforma Khan Academy

Percebeu-se pela resposta dada pelos alunos, que os mesmos “trocaram” a abscissa e a ordenada do ponto solicitado, plotando o ponto de coordenadas (6, 9).

Na pergunta 3, ao solicitar a plotagem do ponto (3, 7), os alunos A3 e A11, não responderam corretamente, conforme [Figura 86](#).

Figura 86 – Resposta da pergunta 3, da recomendação "Represente os pontos graficamente", dos alunos A3 e A11

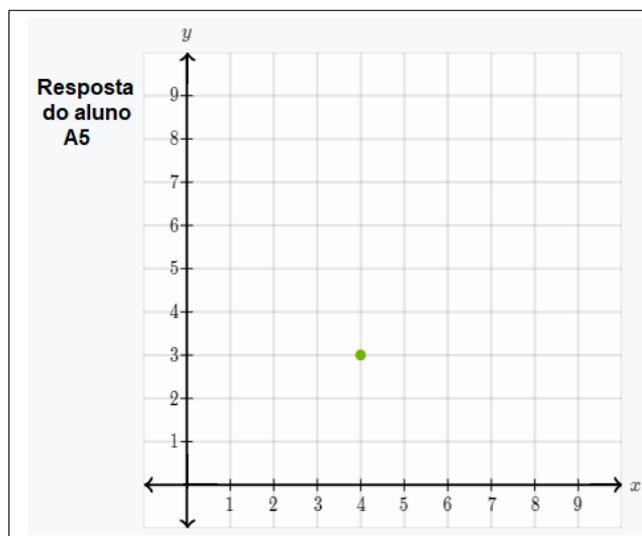


Fonte: Plataforma Khan Academy

Observou-se com a resposta dada pelos alunos, que o aluno A3 “trocou” a abscissa e a ordenada do ponto solicitado, plotando o ponto de coordenadas (7, 3). Já a aluna A11, plotou o ponto (3, 8). Acredita-se que a mesma tenha arrastado o ponto uma unidade acima por distração.

Sobre a pergunta 5, ao solicitar a plotagem do ponto (3, 4), o aluno A5, não respondeu corretamente, conforme [Figura 87](#). Percebeu-se que o mesmo “trocou” a abscissa e a ordenada do ponto solicitado, plotando o ponto de coordenadas (4, 3).

Figura 87 – Resposta da pergunta 5, da recomendação "Represente os pontos graficamente", do aluno A5



Fonte: Plataforma Khan Academy

A pesquisadora percebeu esses erros durante a aula e mais uma vez explicou a marcação de pontos no plano cartesiano, e embora após analisar essa atividade, verificou-se que a maioria dos erros ocorridos foram referentes a troca das coordenadas dos pontos solicitados. Mesmo diante dessas dúvidas, foi possível observar pelo relatório da [Figura 83](#), que os alunos no geral tiveram um bom desempenho, e que os alunos A1, A10 e A13 fizeram mais de uma tentativa, sendo que o aluno A1 fez duas tentativas e das sete perguntas, duas foram consideradas erradas, enquanto os alunos A10 e A13 ao terem a possibilidade de tentarem novamente, resultou em todas as questões respondidas corretamente. O aluno A3 foi o único com baixo rendimento e fez apenas uma tentativa, evidenciando que apresentava dúvidas, mas não voltou para refazer a atividade. Ressalta-se que não foi possível identificar as duas perguntas incorretas do aluno A1 e as outras três perguntas incorretas do aluno A3.

Percebeu-se que uso da plataforma Khan Academy durante a aula como instrumento facilitou a interação entre os alunos, da mesma forma que auxiliou na mediação que a pesquisadora realizou durante a atividade, conseguindo identificar pontualmente os alunos que apresentaram dúvidas.

Para reforçar o conteúdo, no dia 06/10/2018, foram feitas duas recomendações na plataforma Khan Academy, com prazo final para 10/10/2018, sobre problemas no plano cartesiano (questões contextualizadas), para que fizessem em casa. As recomendações são: "Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)" e "Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes".

No dia 10 de outubro de 2018, com duração de 02 horas/aula e todos os 13 alunos

presentes, a pesquisadora corrigiu todas as perguntas das recomendações que ficaram para casa, projetando a tela do computador no quadro da sala de aula, tecendo comentários complementarem, revisando o conteúdo estudado. Ressalta-se que os alunos participaram ativamente da correção, lembrando-se das perguntas feitas, e tirando suas dúvidas.

A recomendação “Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)” é composta por 4 perguntas selecionadas aleatoriamente pela plataforma do banco de questões composto por 12 perguntas. A mesma teve por objetivo interpretar uma situação problema de acordo com o gráfico mostrado na questão. Ao propor as atividades na plataforma Khan Academy, a pesquisadora escolheu que a plataforma selecionasse o mesmo grupo de perguntas para todos os alunos.

Ao acessar relatório disponibilizado pela plataforma, [Figura 88](#), identificou-se que os alunos A4, A6, A8, A9 e A12 não iniciaram a atividade, e os outros oito alunos concluíram as quatro perguntas propostas.

Figura 88 – Recomendação “Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)”

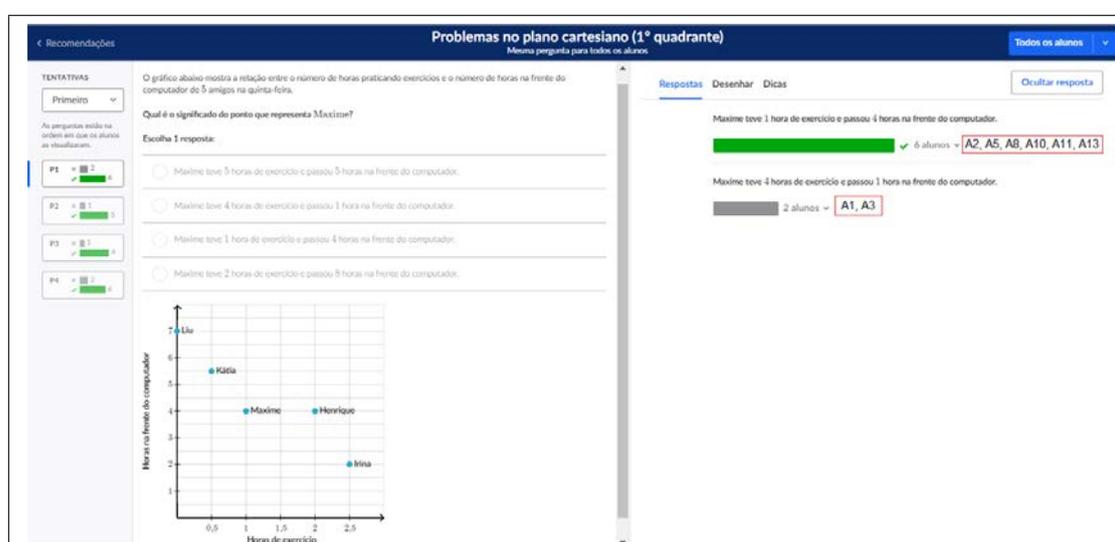
ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Nov 27, 9:53 AM	2	4 / 4 100%	Exibir relatório
A2	Out 8, 1:08 PM	3	4 / 4 100%	Exibir relatório
A3	Out 9, 8:58 AM	1	2 / 4 50%	Exibir relatório
A4	-	-	-	
A5	Out 10, 6:51 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A6	-	-	-	
A7	Out 10, 10:28 AM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A8	-	-	-	
A9	-	-	-	
A10	Out 6, 10:43 PM	5	4 / 4 100%	Exibir relatório
A11	Nov 8, 9:32 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A12	-	-	-	
A13	Out 10, 1:51 AM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Conforme apresentado na [Figura 88](#), na atividade Problemas no plano cartesiano (1º quadrante), os oito alunos que concluíram a atividade, alcançaram um aproveitamento satisfatório, onde os alunos A3, A5, A7, A11 e A12 realizaram somente uma tentativa, e A1, A2 e A10 tentaram mais de uma vez para obter um resultado satisfatório.

A Figura 89 ilustra a questão a qual obteve mais erros, na primeira tentativa, sendo somente os alunos A1 e A3. A questão apresentou um gráfico com vários pontos marcados, em que o eixo das abscissas representa “quantidade de horas de exercícios” e eixo das ordenadas representa a “quantidade de horas na frente do computador”. De acordo com o gráfico apresentado, o aluno deveria ter interpretado o que representa o ponto identificado pelo nome de “Maxime”, ou seja, identificar quanto tempo o nome indicado passou realizando exercícios e quantas horas passou à frente do computador. Assim, o aluno precisou identificar e interpretar os significados dos eixos coordenados, bem como localizar corretamente o ponto pedido. Observou-se que os alunos que erraram a questão, pela resposta dada, trocaram a ordem das coordenadas do ponto, errando assim a interpretação da questão.

Figura 89 – Pergunta 1 da recomendação “Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)”



Fonte: Plataforma Khan Academy

Inferre-se sobre os alunos A1 e A3, que os mesmos não compreenderam ainda o conceito de par ordenado. Ao realizar a correção dessa pergunta, os alunos comentaram que acharam fácil, e os alunos A1 e A3 relataram que “confundiram” os eixos coordenados. Novamente a pesquisadora lembrou o conceito de par ordenado, e realizou as outras três perguntas que compõem a atividade.

A recomendação “Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes” foi composta por 7 perguntas selecionadas aleatoriamente pela plataforma do banco de questões composto por 25 perguntas. A mesma também teve por objetivo interpretar uma situação problema de acordo com o gráfico mostrado na pergunta, em que a situação contextualizada envolveu todos os quadrantes do plano cartesiano. Ao propor as atividades na plataforma Khan Academy, a pesquisadora escolheu que a plataforma selecionasse o mesmo grupo de perguntas para todos os alunos.

A Figura 90 apresenta o relatório que a plataforma Khan Academy disponibilizou. Ao analisa-lo, identificou-se que os alunos A4 e A9 não iniciaram a atividade, e os alunos A3, A6 e A12 não concluíram algumas das sete perguntas da atividade proposta, aparecendo no relatório “em andamento”, ou seja, começaram a atividade, mas não a finalizaram. Os outros oito alunos concluíram as sete perguntas propostas.

Figura 90 – Recomendação “Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes”

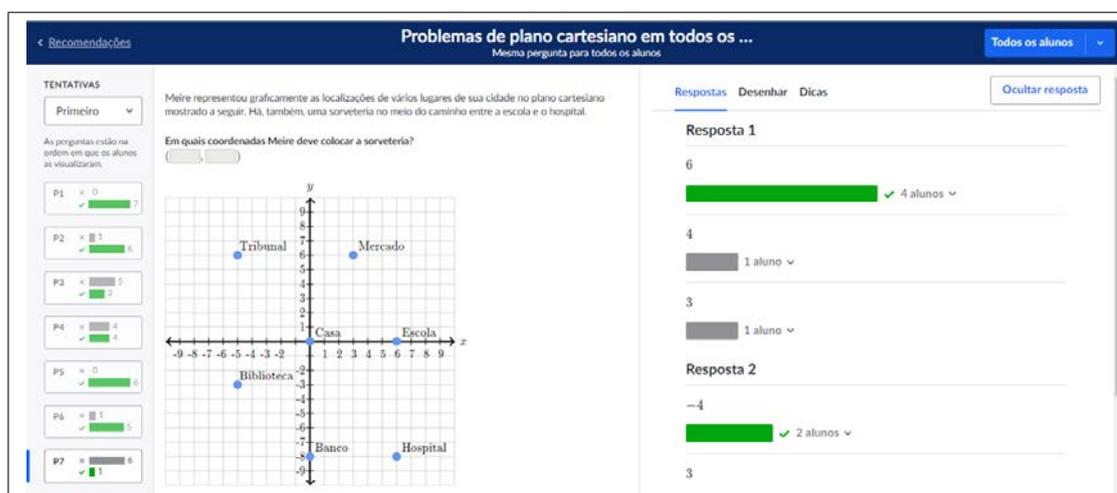
ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Nov 8º, 1:04 PM	1	1 / 7 14%	Exibir relatório
A2	Out 10º, 9:52 AM	6	6 / 7 86%	Exibir relatório
A3	-	Em andamento	-	
A4	-	-	-	
A5	Out 10º, 8:30 PM	3	7 / 7 100%	Exibir relatório
A6	-	Em andamento	-	
A7	Out 10º, 6:37 PM	1	4 / 7 57%	Exibir relatório
A8	Out 10º, 12:26 AM	1	3 / 7 43%	Exibir relatório
A9	-	-	-	
A10	Out 10º, 7:40 PM	7	6 / 7 86%	Exibir relatório
A11	Nov 8º, 9:55 PM	2	7 / 7 100%	Exibir relatório
A12	-	Em andamento	-	
A13	Out 10º, 10:37 AM	2	4 / 7 57%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Pela análise do relatório da Figura 90, pôde-se perceber que os alunos sentiram mais dificuldades quando todos os quadrantes foram envolvidos. Durante a correção, os alunos relataram essa dificuldade, e disseram que recorreram a vídeos e dicas durante a resolução. Mesmo que o aluno tenha tentado mais de uma vez, a pesquisadora tomou como referência as respostas da primeira tentativa, corrigindo todas as dúvidas dos alunos.

A Figura 91 apresenta a questão a qual obteve mais erros por parte dos alunos. O objetivo da questão foi para que o aluno calculasse qual o ponto está centralizado entre os pontos que estão representados o hospital e a escola. Somente a aluna A11 acertou as duas coordenadas do ponto solicitado na questão, compreendendo a mesma. Os alunos A2, A7 e A13 acertaram somente a primeira coordenada do ponto e a aluna A10 acertou somente a segunda coordenada do ponto.

Figura 91 – Pergunta 1 da recomendação “Problemas de plano cartesiano em todos os quadrantes”



Fonte: Plataforma Khan Academy

Os alunos julgaram essa atividade como a mais difícil, visto que os mesmos além de identificarem dois pontos específicos (informados na questão) tiveram que “calcular” as coordenadas do ponto de forma que o ponto solicitado na questão estivesse exatamente no meio dos pontos informados. A pesquisadora reproduziu o desenho da figura 13 no quadro, explicando primeiro a localizar os pontos que representam a escola e o hospital, sendo eles, $(6, 0)$ e $(6, -8)$, respectivamente. Continuou explicando que os pontos estavam alinhados verticalmente, então, a coordenada x só poderia ser 6 também, visto que estão na mesma direção, e então para determinar o ponto foi necessário saber qual é o número que está exatamente centralizado entre 0 e -8 . Após fazer esse comentário, os alunos responderam corretamente que a ordenada y valia -4 .

Com relação às atividades proposta na plataforma Khan Academy, buscou-se reforçar a interpretação gráfica, bem como de situações problemas, seguindo as Orientações Curriculares Nacionais, onde o aluno deve saber “ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas...”

A turma mostrou-se bastante interessada, interagindo todo o tempo. Os próprios alunos questionavam sobre perguntas que tinham feito e errado, comentando sobre a dificuldade de interpretar e solicitavam para que fosse feito em conjunto com a pesquisadora. A mediação professor-aluno-objeto de aprendizagem se deu de forma satisfatória.

Como uma atividade avaliativa, foi recomendado na plataforma a recomendação “teste 1” sobre plano cartesiano, com o conteúdo das cinco recomendações trabalhadas anteriormente (em sala de aula e em casa) com o objetivo de encerrar o conteúdo de pré-requisito.

O teste foi composto por 5 questões, selecionadas aleatoriamente pela plataforma

contemplando as cinco atividades mencionadas anteriormente, com um grupo de perguntas diferentes para cada aluno. Observou-se nesse momento, que a pesquisadora não teve escolha quanto a recomendar um grupo de perguntas para todos os alunos, visto que para as atividades denominadas “teste” não há possibilidade dessa escolha. Percebeu-se que no geral houve um avanço por parte dos alunos ao analisar o relatório mostrado na [Figura 92](#). Observou-se que todos os alunos realizaram a atividade, somente os alunos A5 e A10 realizaram 2 tentativas, e dos demais alunos, somente os alunos A1, A6 e A7 ficaram abaixo da média de 50%.

Figura 92 – Recomendação "Teste: Plano cartesiano: 1 teste"

ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Out 16°, 8:54 AM	1	2 / 5 40%	Exibir relatório
A2	Out 15°, 7:53 PM	1	4 / 5 80%	Exibir relatório
A3	Out 17°, 8:48 AM	1	3 / 5 60%	Exibir relatório
A4	Out 15°, 6:51 PM	1	4 / 5 80%	Exibir relatório
A5	Out 17°, 7:22 PM	2	4 / 5 80%	Exibir relatório
A6	Out 15°, 8:53 PM	1	2 / 5 40%	Exibir relatório
A7	Out 16°, 9:26 PM	1	2 / 5 40%	Exibir relatório
A8	Out 16°, 11:08 PM	1	4 / 5 80%	Exibir relatório
A9	Out 17°, 11:52 PM	1	4 / 5 80%	Exibir relatório
A10	Out 17°, 1:07 AM	2	4 / 5 80%	Exibir relatório
A11	Out 19°, 9:29 PM	1	4 / 5 80%	Exibir relatório
A12	Nov 8°, 1:58 PM	1	5 / 5 100%	Exibir relatório
A13	Out 16°, 10:06 PM	1	5 / 5 100%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Percebeu-se que o banco de perguntas foi muito diversificado, pois reuniu todas as perguntas de todas as cinco recomendações feitas: “Pontos no plano cartesiano”, “Quadrantes no plano cartesiano”, “Represente os pontos graficamente”, “Problemas no plano cartesiano (1º quadrante)” e “Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes”.

Acredita-se que ao final dessas atividades os alunos tenham sanado suas dúvidas quanto a representação gráfica de pares ordenados, bem como sobre as situações contextualizadas, sendo as aulas “presenciais” e as atividades na plataforma Khan Academy, instrumentos facilitadores da aprendizagem.

Para encerrar os assuntos de pré-requisito, também foram trabalhados produto cartesiano e relação binária com atividades no caderno, no dia 23 de outubro de 2018 com

duração de 02 horas/aula e todos os 13 alunos presentes. Chamou-se a atenção novamente ao representar pontos com coordenadas “invertidas”, por exemplo, $(2, 3)$ e $(3, 2)$, fazendo a observação que são pontos distintos.

Percebeu-se que os alunos compreenderam bem os pré-requisitos, com bastante interação, cumprindo satisfatoriamente essa etapa.

5.3 Atividade 1 - Definindo Função

A atividade 1 intitulada “Definindo Função”, que encontra-se no [Apêndice C](#), foi aplicada no dia 31 de outubro de 2018, com duração de 02 horas/aula com a presença de 12 alunos. Os mesmos foram divididos em 3 grupos de 4 alunos cada, para que se pudesse promover interações e fizessem conjecturas entre eles.

Após a divisão dos grupos, por eles mesmos, foi entregue a cada aluno a folha da atividade 1, ou seja, se dividiram em grupos, porém cada aluno do grupo registrou suas respostas individualmente na Atividade proposta. A divisão de grupos foi realizada para melhor interação entre os mesmos e mediação com a pesquisadora.

A atividade 1 composta de nove questões foi formulada com os seguintes objetivos: (i) reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis e suas representações, (ii) identificar dentre diversas relações entre conjuntos, aquelas que constituem função e (iii) definir o conceito de função, por meio de pelo menos duas representações, permitindo assim a conversão entre as representações de mais de um registro, e a formalização do conceito de função.

Os alunos ainda não haviam estudado sobre o conceito de função, apenas o conceito de relação, estudado como pré-requisito nas aulas anteriores e o objetivo da atividade, a partir do conhecimento de dependência entre duas variáveis, foi explorar e conceituar o conceito de função. Dessa forma, a pesquisadora explicou que eles teriam um tempo para responder as questões propostas, na folha entregue, podendo trocar ideias com os colegas do grupo, bem como tirar dúvidas com a mesma, pois estaria percorrendo a sala durante a atividade, e ao final da aula a atividade seria corrigida em conjunto.

Na **questão 1**, no item (a) explorou-se uma situação contextualizada, sendo solicitado após a interpretação da situação, a complementação de uma tabela, com os dados levantados da situação. Observou-se nos grupos que a questão 1 ([Figura 93](#)) foi realizada sem dúvidas para a maioria dos alunos, conseguindo entender o que foi proposto nos itens.

A dúvida surgiu apenas no grupo 3, ao operarem com número negativo. A pesquisadora esclareceu a dúvida dos alunos, uma vez que todos colocaram a mesma resposta. A [Figura 93](#) apresenta a resposta do aluno A3, após a intervenção da pesquisadora, no qual

havia errado a resposta, junto com os demais colegas, destacada na tabela. O aluno A3 assim como os demais colegas do grupo colocou como resposta (1). Dessa forma, enquanto processo de mediação com o grupo, a pesquisadora explicou que a expressão matemática que chegaria ao resultado da resposta da tabela estava colocada no exemplo da situação contextualizada, ou seja, deveriam observar o exemplo e refazer a operação. A pesquisadora indagou a eles: “você tem na tabela (-1) , multiplicado pelo dobro, qual a operação?” O grupo respondeu “ $(-1) \cdot 2$ ” e a pesquisadora continuou “a esta expressão, soma-se 3, portanto qual o resultado?” O grupo fez a expressão $(-1) \cdot 2 + 3$ e chegaram a (1) como resposta.

Figura 93 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, itens (a) e (b) do Aluno A3 do Grupo 3

1) Após observar a conversa do professor com seus alunos, complete a Tabela 1, com a resposta dos alunos depois do professor dizer outros números.

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p.95

a)

Número dado pelo professor (x)	Resposta dos Alunos (y)
4	11
2	7
-1	1
0	3
1,3	5,6

CONVERSÃO

Será que a resposta dos alunos pode ser qualquer uma ou depende do número dado pelo professor? Por quê?

depende do número dado pelo professor pois cada número que ele se dá soma resultados diferentes

b) Também podemos escrever os pares ordenados (x; y) formados pela relação entre x e y. Escreva esses pares ordenados abaixo.

CONVERSÃO

*(4, 11)
(2, 7)
(-1, 1)
(0, 3)
(1,3; 5,6)*

Fonte: Dados da pesquisa

Ao mudar os registros de representação, no processo de conversão verificou-se que os alunos não tiveram dificuldades em fazer as duas conversões, tanto no item (a) como no item (b).

Os alunos consideraram o item (c) o mais fácil, em que se propunha a partir dos pares

ordenados fazer a representação pelo Diagrama de Venn, e todos os grupos conseguiram realizar a conversão proposta, como mostra a [Figura 94](#) na resposta do aluno A5 do Grupo 1. Os alunos ao fazerem a representação de par ordenado, observado no diagrama, tendo o entendimento que os elementos do conjunto A, tinham como representação, valores de “ x ” e os elementos do conjunto B, elementos de “ y ”.

Figura 94 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (c) do Aluno A5 do Grupo 1

b) Também podemos escrever os pares ordenados $(x; y)$ formados pela relação entre x e y . Escreva esses pares ordenados abaixo.

$(4, 11), (2, 7), (-1, 1), (0, 3), (1, 3), (5, 6)$

c) Outro modo de representar a tabela 1 é por meio de um diagrama. Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos. Complete o diagrama abaixo de acordo com os dados da tabela 1:

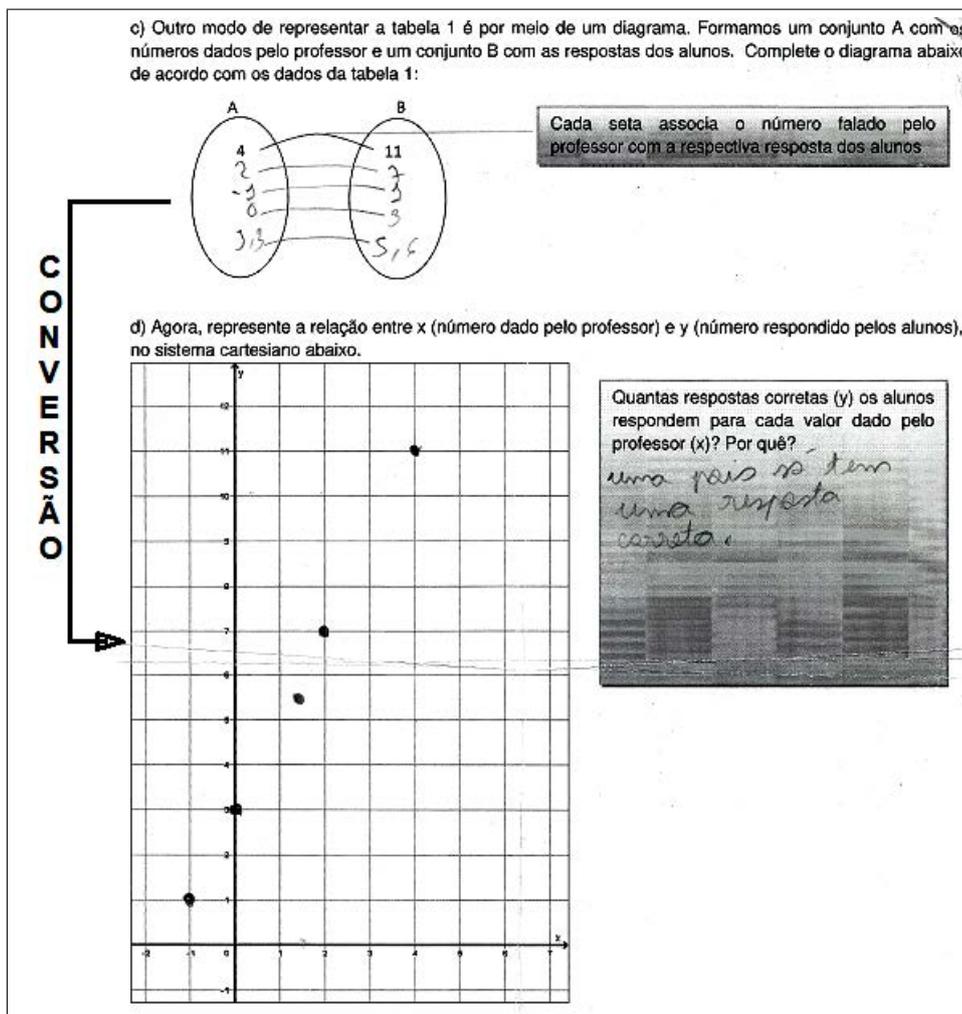
CONVERSÃO

Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos

Fonte: Dados da pesquisa

Na conversão da representação do Diagrama de Venn (item c) para o plano cartesiano (item d) constatou-se que nenhum grupo apresentou dificuldade. Neste item há uma pergunta a qual os integrantes do Grupo 2 apresentaram dificuldades da interpretação. A pesquisadora observando o grupo, não entrevistou, pois os mesmos trocaram informações com os outros grupos, que em um processo de cooperação, explicavam o raciocínio deles e permitindo que o grupo 2 chegasse a conclusão correta, como mostra a [Figura 95](#), na resposta da aluna A6 do Grupo 2.

Figura 95 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (d) da aluna A6 do Grupo 2

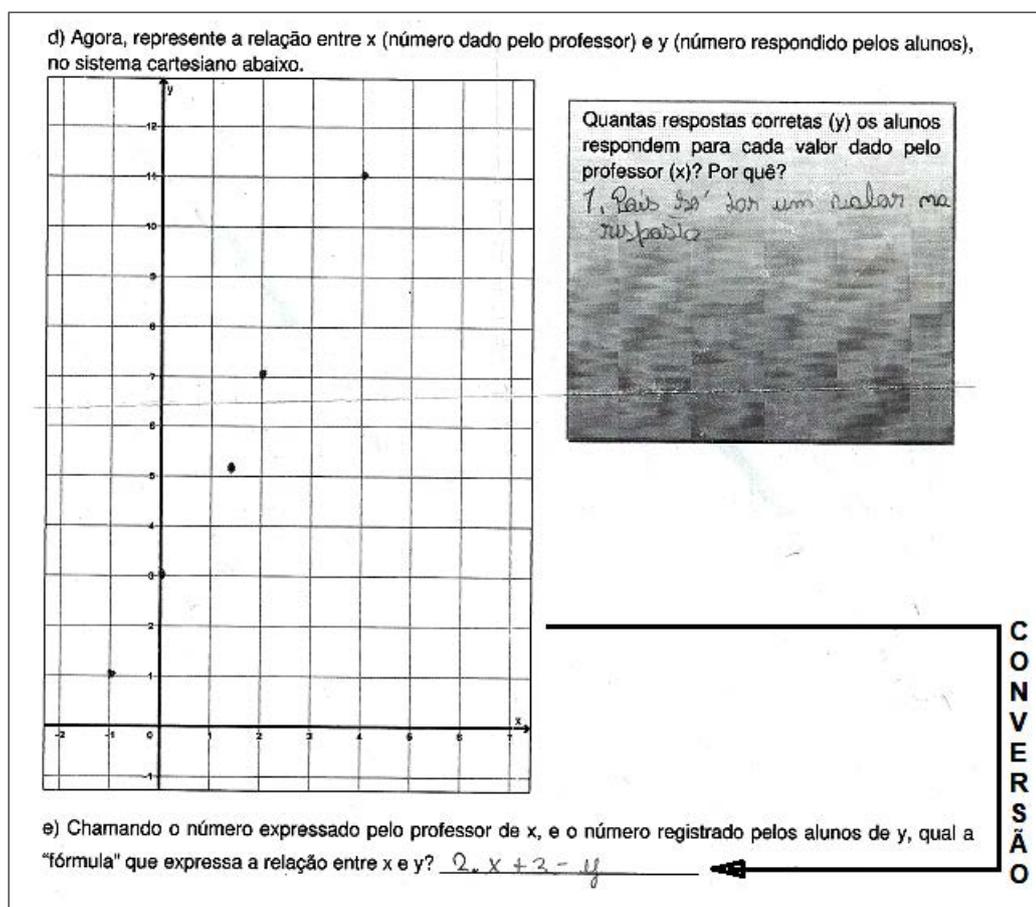


Fonte: Dados da pesquisa

Finalizando a questão 1, buscou-se ainda explorar relação de dependência entre duas variáveis e por conversão fazer a transformação da representação do plano cartesiano (do item d) para a lei de formação (no item e). Nesta questão, a expectativa era observar como os alunos iriam responder, pois ao explorar as transformações de representações por meio de conversões, partindo de uma representação gráfica e buscando que reconheçam a lei de formação, é corroborado por [Duvall \(2011\)](#) quando afirma ser esta a conversão que os alunos apresentam mais dificuldades.

No entanto, verificou-se que todos os alunos conseguiram reconhecer função como uma relação de dependência entre duas variáveis sem dificuldades, como exemplificado pela resposta do aluno A4 do Grupo 3 na [Figura 96](#).

Figura 96 – Resposta da Atividade 1 – Questão 1, item (e) do aluno A4 Grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa

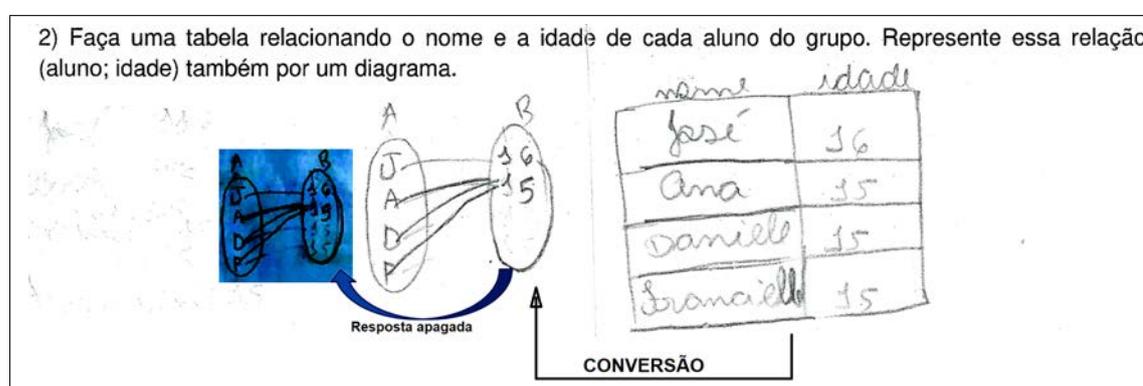
Na questão 1, buscou-se elaborar vários itens que promovessem a construção do conhecimento dos alunos no reconhecimento de função como uma relação de dependência entre duas variáveis, exploradas por meio de conversão. A exploração desse registro foi propor que o aluno fosse capaz de fazer a conversão entre as representações, de transitar entre uma e outra representação.

Acredita-se que os alunos tenham internalizado o objetivo proposto, vindo a facilitar a conversão proposta por último ao escrever a lei de formação da função. [Laburú, Zompero e Barros \(2013\)](#) comentam que estimular a atuação dos alunos com várias representações, é uma forma de potencializar os instrumentos do pensamento, objetivando níveis de compreensão elevados. Dessa forma, ao utilizar a tabela, par ordenado, Diagrama de Venn e gráfico, acredita-se que tenha sido mais simples a conversão para a lei de formação.

A **questão 2** propõe a construção de uma tabela e Diagrama de Venn, explorando o conceito de relação entre os elementos, por meio do registro de representações por conversão de tabela em diagrama. Foi elaborada buscando um contexto em que os próprios alunos estivessem inseridos. O enunciado solicitava que criassem uma tabela com os próprios nomes dos integrantes do grupo e suas respectivas idades e depois fizessem a representação para

o Diagrama de Venn. Verificou-se que nenhum aluno apresentou dificuldades, realizando assim a conversão esperada. Observou-se que ao construírem o diagrama, todos os alunos (de todos os grupos) repetiram o mesmo número mais de uma vez, já que alguns alunos possuem a mesma idade. Nesse momento a pesquisadora interveio comentando sobre a forma de escrita em diagramas, percorrendo cada grupo, explicando a forma correta de inserir números nessa representação, alertando para o fato da contagem, que por se tratar de conjunto, coloca-se o número uma única vez. Acredita-se que essa repetição não prejudicou o entendimento da questão. Na [Figura 97](#), percebe-se que após a intervenção da pesquisadora os alunos apagaram o diagrama que haviam feito e refizeram a associação de forma correta.

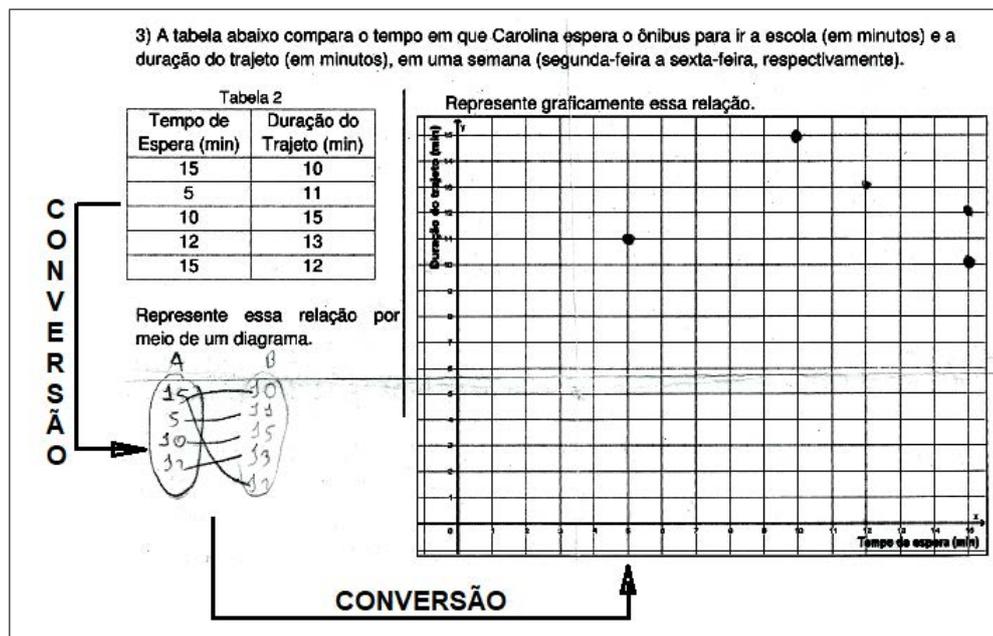
Figura 97 – Resposta da Atividade 1 – Questão 2 da aluna A2 do grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Na **questão 3** propõe-se que uma situação contextualizada novamente representada por uma tabela, fosse representada por Diagrama de Venn e também por gráfico, explorando o conceito de relação entre duas variáveis e realizando a conversão entre as representações. Nessa questão observou-se que os alunos também não apresentaram dificuldades e não mais repetiram um número mais de uma vez no diagrama, lembrando da questão anterior. O aluno A1 do Grupo 1, [Figura 98](#), observou que dois pontos estava na mesma direção vertical no plano cartesiano, dessa forma relatando que fazia sentido não repetir o número no diagrama.

Figura 98 – Resposta da Atividade 1 – Questão 3 do aluno A1 do grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

A **questão 4**, composta de quatro itens foi proposta com o objetivo de explorar a relação de dependência entre duas variáveis, novamente, descrita por uma situação contextualizada. Explorou-se a conversão da linguagem numérica para o Diagrama de Venn. No item (a), o aluno A5 do Grupo 1, não se atentou a pergunta e respondeu 1 e 2, sendo a resposta correta somente o número 2, visto que o número 1 não está entre as opções que o professor da situação problema apresentou. Acompanhando as interações entre os alunos neste grupo, os colegas do grupo explicaram a A5 o seu erro. Depois de ser corrigido pelos colegas do grupo, A5 apagou o número 1, como mostra a [Figura 99](#).

No item (b) não tiveram dúvidas, porém em relação ao item (c) foi unânime a dúvida nos três grupos. O objetivo deste item foi explorar a partir de um conjunto finito $\{2, 4, 6, 8\}$, qual o elemento anterior a 2. Segundo os alunos “não havia resposta no quadro”. Os alunos nos três grupos ficaram se perguntando o que colocariam, pois não havia nenhum número informado que satisfazia a condição do item (c), condição esta do número respondido pelos alunos, entre os números expostos no quadro, ser menor do que o falado pelo professor. Nesse momento a pesquisadora interveio solicitando que os mesmos colocassem exatamente o que disseram: que não havia um número que satisfazia àquela condição. A pesquisadora ressaltou que o conjunto finito era composto pelos elementos que estavam na representação do conjunto, não tendo portanto, elemento anterior a 2.

Figura 99 – Resposta da Atividade 1 – Questão 4, itens (a), (b) e (c) do aluno A5 do Grupo 3

4) Agora, o professor da questão 1 propõe outra brincadeira, veja, e responda as questões:



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 97

a) Se o professor disser 3, qual será a resposta dos alunos?
1, 2

b) Se o professor disser 5, qual será a resposta dos alunos?
2, 4

c) Se o professor disser 1, qual será a resposta dos alunos?
nenhum

Fonte: Dados da pesquisa

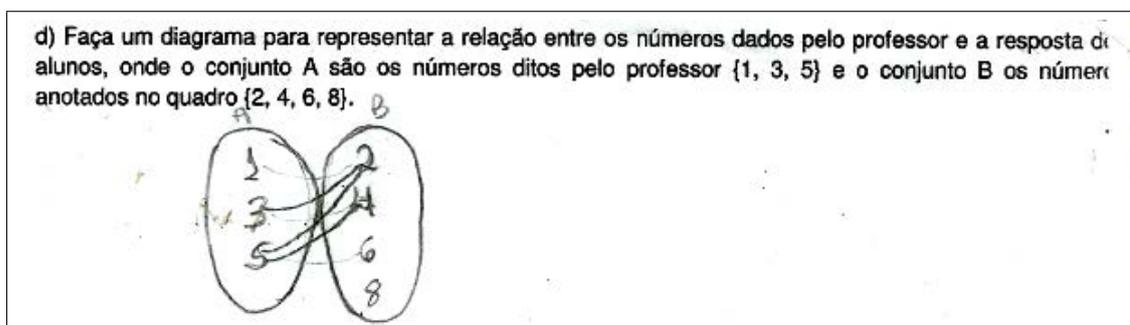
Após os itens (a), (b), e (c) serem respondidos a partir da situação apresentada, foi proposto no item (d) a conversão da representação em linguagem numérica para o Diagrama de Venn.

Todos os alunos do Grupo 2 tiveram dúvida no registro de representação. A aluna A6 do grupo 2, apresentou a dúvida do Grupo na hora de fazer a representação por meio do Diagrama de Venn, fazendo a relação de B em A, quando o que foi solicitado foi de A em B. A6 chamou a pesquisadora pois estava “achando estranho” o fato de número “sobrarem sozinhos”. A pesquisadora solicitou que a mesma e os demais integrantes do grupo 2 fizessem uma nova leitura da questão, para que visualizassem que a relação feita não era a solicitada na questão. A pesquisadora perguntou “Quais números pertencem ao conjunto A?” A6 respondeu “1, 3 e 5”, a pesquisadora comentou “então, represente o conjunto A no diagrama. Agora, quais são os números que pertencem ao conjunto B?” A6 respondeu “2, 4, 6 e 8” e a pesquisadora continuou “ótimo, represente o conjunto B no diagrama. Agora, quais são as associações entre esses números?” A6 respondeu prontamente a associação correta e refez o diagrama da forma que foi solicitado na questão, como mostra a [Figura 100](#).

A pesquisadora nesse momento foi ao quadro e fez com que eles pensassem nas relações estudadas em aulas anteriores, lembrando um exemplo que já haviam feito. A pesquisadora comentou “Quando fizemos o produto cartesiano de $A \times B$ em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 5\}$, obtivemos...” e os alunos responderam “ $\{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}$ ” a pesquisadora então anotou no quadro a informação e continuou “agora determinem a relação $R = \{(x, y) \in A \times B / x = y\}$ ” e os alunos responderam “ $\{(1, 1), (2, 2)\}$ ” e a pesquisadora continuou “quando representamos essa relação por Diagrama de Venn,

todos os números estão associados entre si?” e os alunos responderam “não, pois para associar os números os valores de x e y devem ser iguais”, assim, os alunos compreenderam o que tinha sido proposto na questão, lembrando que já haviam feito uma atividade similar.

Figura 100 – Resposta da Atividade 1 – Questão 4, item (d) da aluna A6 do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Finalizadas as questões 1, 2, 3 e 4, observou-se no geral que os grupos realizaram os registros de representação por meio de conversões propostas sem grandes dificuldades, sendo importante o acesso aos diversos registros do mesmo objeto matemático, como propõe as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais e que vai ao encontro do que afirma Barros (2013) ao dizer que as diversas representações são “importantes para o aprendizado de conceitos matemáticos, sendo insuficiente um só tipo de representação para a compreensão do conceito”. Além de conhecer e ter acesso a essa diversidade de registros, é importante, ainda de acordo com Duval e Moretti (2012) a coordenação entre eles ao afirmar que “em matemática as atividades em geral possuem mais de um registro, o que se faz necessária a coordenação destes de forma simultânea”.

As **questões 5, 6 e 7** foram elaboradas com o propósito de inserir o conceito da relação de dependência entre grandezas, buscando chegar ao objetivo fim, que é conceituar função. As três questões geraram uma discussão bastante positiva e enriquecedora para o domínio do estudo proposto. Os alunos discutiram com os colegas de seus grupos. Na observação desta pesquisadora, discordavam e concordavam expondo seus pontos de vista, até chegarem a mesma conclusão sobre as relações perguntadas. A pesquisadora mediou a conversa, sem influenciar nas respostas dos alunos, levando-os a refletir sobre suas justificativas positivas ou negativas, buscando exemplificar que as perguntas 5 e 6 formuladas, por exemplo, apresentam situações que acontecem em seu próprio cotidiano. A [Figura 101](#) ilustra a resposta das questões 5, 6 e 7 da aluna A2 do grupo 2.

Figura 101 – Resposta da Atividade 1 – Questões 5, 6, e 7 da aluna A2 do Grupo 2

5) Na questão 2, a idade dos alunos depende do nome do aluno? Por quê?
Sim, porque é através do nome do aluno que identificamos a idade.

6) Na questão 3, a duração do trajeto (min) depende do tempo de espera (min)? Por quê?
Não, pois o tempo de espera não interfere na duração do trajeto.

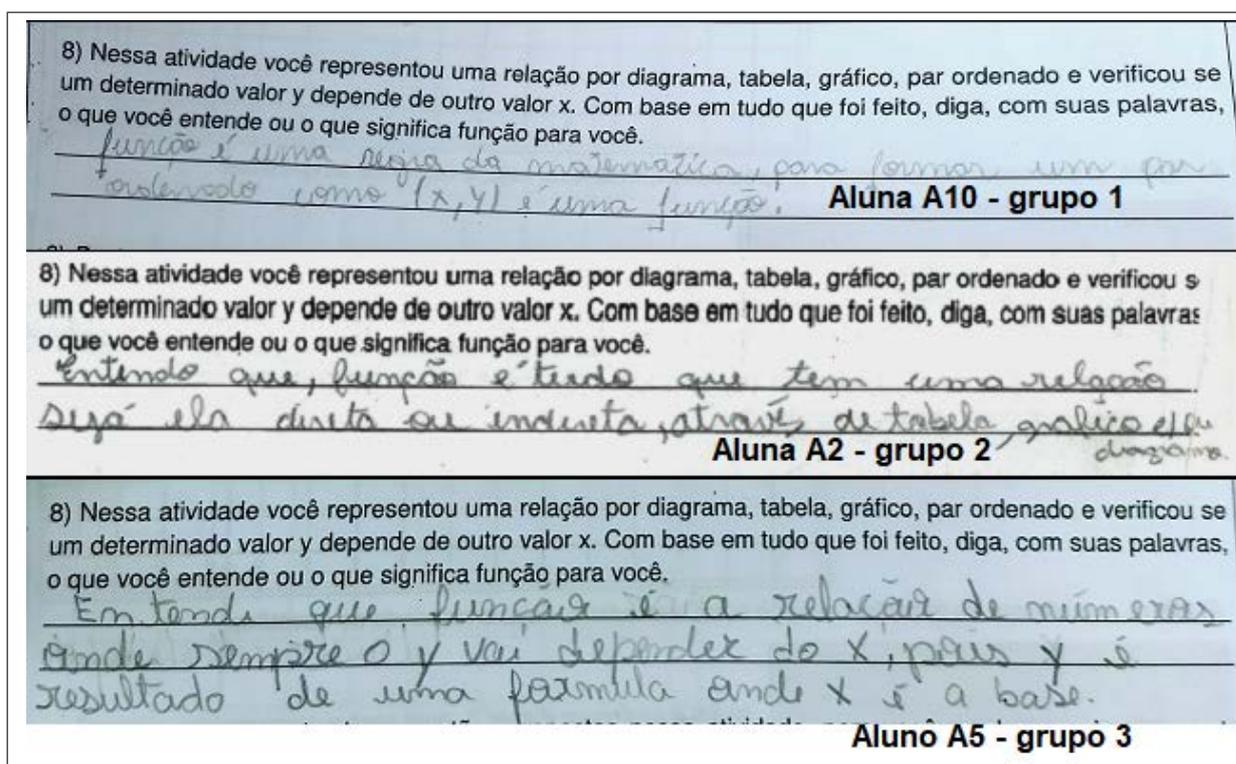
7) Na questão 4, a resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor? Por quê?
Sim, pois se o professor não falar o número não há como resolver o problema.

Fonte: Dados da pesquisa

Após a discussão, observou-se que todos os alunos fizeram as questões sem dificuldades, mas relataram que não gostaram de sempre justificar suas respostas, dizendo que não sabiam explicar. Nesse momento, a pesquisadora colocou que as justificativas eram importantes, para que conseguissem compreender as questões propostas e elaborassem suas próprias respostas.

A **questão 8**, que teve por objetivo explorar de forma intuitiva o conceito de função com base nas questões anteriores, também foi discutida em conjunto com toda a classe, onde os grupos se ajudaram e comentaram seus pontos de vista com dificuldade de expressar seus pensamentos. Ao responderem “o que você entende ou o que significa função para você”, o aluno A8 disse: “a função do professor é ensinar”, o aluno A4 disse: “a função do lápis é escrever”, entre outros. A pesquisadora mediou a conversa de forma imparcial, solicitando que os mesmos anotassem nesse momento o que estavam dizendo. A [Figura 102](#) trás a resposta de alguns alunos após a mediação da pesquisadora e reflexão dos alunos.

Figura 102 – Resposta da Atividade 1 – Questão 8



Fonte: Dados da pesquisa

Acredita-se que a aluna A10, citada anteriormente, tenha compreendido duas representações de função: regra (entendido como fórmula) e par ordenado. Acredita-se ainda que ao identificar as representações, a aluna compreendeu que há uma relação de dependência entre grandezas.

Sobre a aluna A2 infere-se que tenha compreendido de forma intuitiva o conceito de função como uma relação entre duas grandezas. Além disso, observou-se que a mesma conseguiu identificar as várias representações de um mesmo objeto matemático, distinguindo-o de suas representações, compreendendo o conceito abordado, como defende [Duval e Moretti \(2012\)](#).

Em relação ao aluno A5, citado acima, entende-se que tenha compreendido de forma intuitiva, como a aluna A2, o conceito de função ao perceber a relação entre duas grandezas, observando ainda que uma variável sempre será dependente da outra, ressaltando uma das representações.

A aula estava terminando quando os grupos começaram a responder a **questão 9**, que teve por objetivo identificar se as questões 1, 2, 3 e 4 representam ou não uma função. Os grupos 1 e 3 não conseguiram terminar de responder a questão em sala devido ao tempo, como mostra a [Figura 103](#) e a [Figura 105](#). Observou-se ainda que os grupos associaram função pela forma de sua representação.

Observa-se que as respostas foram parecidas, e a [Figura 103](#) mostra a resposta, incompleta da aluna A10 do grupo 1. Acredita-se que para a aluna mencionada, ensinar a multiplicar na questão 1, bem como representar os dados da questão por meio de Diagrama de Venn (resposta da questão 2), é o suficiente para que a situação apresentada seja função.

Figura 103 – Resposta da Atividade 1 – Questão 9 incompleta da aluna A10 do Grupo 1

9) Você acha que as quatro primeiras questões propostas nessa atividade representam função? Por quê? Responda em cada item a seguir.

a) Questão 1: Sim, porque envolve não multiplicar e soma.

b) Questão 2: Sim, envolve a mal e liga um com outro.

c) Questão 3: _____

d) Questão 4: _____

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 2 conseguiu responder a questão completa, como mostra a [Figura 104](#) com a resposta da aluna A7. Observou-se que assim como o grupo 1, os alunos responderam que o tipo de representação foi o determinante para responder se a atividade representa ou não função.

Figura 104 – Resposta da Atividade 1 – Questão 9 completa da aluna A7 do Grupo 2

9) Você acha que as quatro primeiras questões propostas nessa atividade representam função? Por quê? Responda em cada item a seguir.

a) Questão 1: Sim pois foi utilizado função para ordenado

b) Questão 2: foi utilizado o diagrama e a tabela com a relação

c) Questão 3: não por que não é diagrama

d) Questão 4: sim usar relação de números menores

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo 3, assim como o grupo 1, não completou a questão, como mostra a [Figura 105](#) a resposta do aluno A5 do grupo 3. Observou-se que os mesmos não souberam responder se as questões 1, 2, 3 e 4 dessa atividade representam função.

Figura 105 – Resposta da Atividade 1 – Questão 9 incompleta do aluno A5 do Grupo 3

9) Você acha que as quatro primeiras questões propostas nessa atividade representam função? Por quê? Responda em cada item a seguir.

a) Questão 1: sim, porque ela não me mostrou uma
nova fórmula

b) Questão 2: _____

c) Questão 3: _____

d) Questão 4: _____

Fonte: Dados da pesquisa

A aula terminou com a discussão da questão 9, não havendo tempo para a correção de toda a atividade, ficando para a aula seguinte. Notou-se que a atividade 1 ficou um pouco extensa, principalmente pelas últimas questões as quais os alunos deveriam justificar seus pensamentos.

Apesar da mediação da pesquisadora com os grupos, principalmente nas questões 5, 6, 7, 8 e 9, na qual os alunos conseguiram realizar as conversões propostas, percebeu-se que a dificuldade estava em transcrever para o papel seus pensamentos, quando solicitado que explicassem o entendimento e justificassem suas respostas.

No dia seguinte, 01 de novembro de 2018, a professora discutiu durante toda a aula a atividade 1. Teve duração de 02 horas/aula, com a presença de 11 alunos.

As questões foram corrigidas uma a uma, com as observações pertinentes da aula anterior. Os alunos relataram a dificuldade em “operar com números decimais”, o que havia sido observado durante a atividade, com a interferência da pesquisadora quando solicitada, e ainda percebeu-se que as dúvidas incidiram nas questões 8 e 9.

Após a correção da questão 8, sobre conceito de função, os alunos relataram que compreenderam o que foi exposto na atividade 1, bem como o que foi explicado nesse momento, pois os mesmos já traziam consigo o conhecimento do significado de relação entre duas grandezas. Enfatizaram novamente que o maior problema foi passar para o papel o que entendiam por função.

Após a questão 8, foi proposto que voltassem a questão 9 para discutirem novamente. Durante a correção, todos os alunos conseguiram responder oralmente e forma correta os itens (a), (b) e (c) da questão 9, identificando se as questões 1, 2 e 3 representam ou não função. Ao responder o item (d) dessa mesma questão, apresentaram dúvida se a questão 4 representa ou não função, pois, segundo o relato dos alunos havia uma

relação de dependência entre as grandezas, mas a pesquisadora entrevistou que mesmo as grandezas sendo dependentes, nem sempre uma relação representa uma função, portanto, não bastando só essa condição.

Nesse momento a pesquisadora formalizou o conceito de função no quadro com a definição e utilizou as questões da Atividade 1 para exemplificar, complementando com outros exemplos. Dessa forma, nesta aula houve a formalização do conceito de função.

Observou-se que, na Atividade 1, as interações aluno-aluno e as mediações ocorridas entre pesquisadora-alunos propiciaram aos alunos reflexões e contribuíram para a construção do conhecimento dos mesmos. Nas questões iniciais, os alunos apresentaram um nível de conhecimento considerado sem dificuldades, e não necessitando da mediação pesquisadora-alunos. Como já descrito, nas questões 8 e 9 os alunos apresentaram dificuldades para a compreensão do conceito de função. Para a compreensão do conceito de função, o registro de representação semiótica explorando a conversão presente na Atividade 1, junto à ação de uma proposta de interação entre os alunos nos grupos e a mediação da pesquisadora com os grupos, favoreceu para que os grupos conseguissem realizar a Atividade 1, fazendo-os chegarem ao conceito de função.

5.4 Atividade 2 - Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos

A atividade 2 intitulada “Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos”, [Apêndice D](#), foi aplicada no dia 06 de novembro de 2018, com duração de 02 horas/aula com a presença de 12 alunos, na sala de aula. Ela é composta de sete questões com os objetivos de (i) identificar imagem e função e lei de formação; (ii) identificar se uma relação de A em B ou B em A representa uma função; (iii) identificar a partir de um gráfico, se este representa ou não uma função; (iv) representar pontos do gráfico através de uma tabela e definir se o gráfico representa ou não uma função; (v) identificar a lei de formação da função; (vi) determinar a lei de formação a partir de pares ordenados (x, y) e (vi) definir y a partir de um valor dado para x e definir x a partir de um valor dado para y .

Os alunos continuaram divididos em três grupos de quatro alunos cada (o mesmo formado nas aulas anteriores), para que pudessem continuar a trocar ideias e fazer conjecturas juntos.

Ao iniciar o encontro, a pesquisadora apresentou os objetivos da aula e entregou as folhas de atividades para os alunos de cada grupo. A metodologia proposta foi efetuar a correção na mesma aula, discutindo com os grupos as questões da atividade 2.

Na **questão 1**, propôs-se uma situação em que a partir de um valor de entrada, os alunos compreendessem que o valor de saída representava a imagem do valor de entrada.

A partir da expressão (linguagem natural) descrita na máquina, foi proposto também escreverem a lei de formação. Além de analisar esta construção do conhecimento dos alunos, buscou-se observar se seriam capazes de realizar a conversão de representação, na qual a partir da linguagem natural, escrevessem em linguagem numérica no item (a) e, no item (b), escrever a lei de formação da função apresentada, realizando a conversão de representação. Neste momento, os alunos ainda não tinham conhecimento de como escrever a lei de formação. O objetivo é que a partir da linguagem natural encontrassem a “fórmula matemática” correspondente.

Esta questão foi desenvolvida por todos os alunos sem dificuldades, tanto o item (a), quanto no item (b), sendo a única intervenção da pesquisadora feita no item (a) no momento em que o grupo 1 ao calcular o “valor de saída” referente ao valor de entrada 1,5 chamou a pesquisadora antes de anotarem suas respostas na folha, devido a dificuldade levantada na operação com número decimal. Dessa forma, a pesquisadora entrevistou nesse grupo, os orientando a respeito da operação com números decimais, em especial o número 1,5 os fazendo pensar nesse número na forma monetária R\$ 1,50. Assim, a resposta foi imediata de forma correta, como mostra a resposta do aluno A13 do grupo 1 ([Figura 106](#)).

Figura 106 – Resposta da Atividade 2 – Questões 1 do aluno A13 do Grupo 1

1) Na primeira questão da atividade 1 da aula anterior, professor dizia um número e os alunos faziam as operações pedidas e davam o resultado. Pensando nisso, uma aluna propôs uma nova brincadeira:



Observem no desenho abaixo, a função imaginada como uma máquina pensada pela aluna.



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99

C O N V E R S ã O

a) Qual o valor de saída das bolinhas que tem como entrada as bolinhas 7; 0 e 1,5, respectivamente?

$2 \cdot 3 + 2 = 8$	$7 \cdot 3 + 2 = 23$	$0 \cdot 3 + 2 = 2$	$1,5 \cdot 3 + 2 = 6,5$
---------------------	----------------------	---------------------	-------------------------

b) Qual a lei de formação da máquina? $x \cdot 3 + 2 = y$

Obs.: Chamamos os valores de entrada na máquina de domínio da função e os valores de saída de imagem da função.

Fonte: Dados da pesquisa

Observou-se que ao final dessa questão, os alunos foram capazes de realizar as conversões necessárias, sendo uma única dúvida do grupo 1, já comentada ao realizar o tratamento para responder o item (a). Mesmo com a dúvida que foi sanada, acredita-se que houve compreensão do que foi proposto.

Conforme os alunos terminavam as questões, os mesmos avançavam para as questões seguintes por si mesmos. Só paravam por alguma dúvida em que chamavam a pesquisadora.

A **questão 2** que teve por objetivo identificar se uma relação de A em B ou B em A representa uma função por meio da tabela apresentada, foi feita por todos os alunos sem dificuldades.

Em nenhum momento a pesquisadora foi consultada para tirar dúvidas, sendo chamada apenas pelo grupo 2, que perguntaram se poderiam utilizar a representação de diagramas (Figura 107), pois a questão não pedia, e os mesmos gostariam de utilizar. A

pesquisadora os orientou que utilizassem e fizessem as questões como achassem melhor.

Figura 107 – Resposta Atividade 2 – Questão 2 da aluna A2 do Grupo 2

2) Observe a tabela abaixo:

A	Número de Calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

A. em B

140 → 40
 170 → 42
 230 → 44
 180 → 46
 170 → 48
 190 → 50

a) A relação de A em B representa uma função? Por quê? Não, pois não pode ter um valor de y para um x .

b) A relação de B em A representa uma função? Por quê? Sim, porque para cada x há um valor diferente.

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora na correção da atividade indagou ao grupo:

P: "Por que vocês utilizaram Diagrama de Venn nesta questão?"

G2: "Nos ajudou a pensar melhor se a relação era ou não função."

Relataram ainda que ao fazerem o Diagrama de Venn a resposta correta ficava mais clara, de acordo com seus pensamentos.

Duval e Moretti (2012) afirma que há a compreensão do conceito quando há a coordenação de pelo menos dois registros semióticos. No caso do grupo 2, ficou evidenciado a compreensão dos alunos, uma vez que fizeram a representação dos dados através de uma tabela e por meio do Diagrama de Venn.

Foi possível constatar que através do diagrama que elaboraram e terem feito a relação entre os elementos de A para B, a visualização possibilitou responderem corretamente os itens (a) e (b).

Os grupos 1 e 3 não chamaram a pesquisadora para perguntar, observando-se que ambos os grupos não fizeram uso de outra representação para responder de forma correta, mostrando o domínio da questão, mesmo sem utilizar o Diagrama de Venn, como mostra a Figura 108 a resposta do aluno A8 do grupo 3.

Figura 108 – Resposta Atividade 2 – Questão 2 do aluno A8 do Grupo 3

2) Observe a tabela abaixo:

A	Número de Calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

a) A relação de A em B representa uma função? Por quê? Não! Porque tem 1 valor de x associado a 2 valores de y diferentes.

b) A relação de B em A representa uma função? Por quê? Sim! Porque tem 1 valor de x associado a 1 valor de y .

Fonte: Dados da pesquisa

Observou-se que ao final dessa questão, os alunos foram capazes de identificar se as relações de A em B e de B em A expostas representam ou não função, sem apresentar dúvidas.

Na **questão 3**, itens (a) e (b), os objetivos foram (i) a partir de um gráfico escrever os pares ordenados pertencentes ao gráfico e (ii) identificar a partir de um gráfico, se este representa ou não uma função. Durante a realização desses dois itens, nenhum aluno de nenhum grupo chamou a pesquisadora para explicar a questão, discutindo entre eles no grupo, não apresentando dificuldades.

Em relação ao item (c) desta questão, que teve por objetivo que os alunos fossem capazes de a partir de uma representação gráfica, determinarem a lei de formação, explorando a conversão gráfico – lei de formação. Observou-se que os alunos ainda possuíam dúvidas. Os grupos solicitaram a ajuda da pesquisadora, que então foi até o quadro para explicar para todos.

Na explicação, a pesquisadora buscou fazer questionamentos sobre o que já havia sido respondido nos itens (a) e (b).

P: Em relação ao item (a) quando se pede: “Escreva quatro pontos (pares ordenados) (x, y) que pertencem ao gráfico dessa relação f ”, quais pares ordenados pertencem ao gráfico?

G2: $(2, 0), (1, 1), (-1, 3), (-2, 4) \dots$

G3: $(0, 2), (3, -1) \dots$

P: Certo. Agora imaginem a máquina de fazer contas da questão 1. Todos os valores de x são de entrada na máquina, e os valores de y são de saída da máquina, assim, vamos pensar. O grupo 3 respondeu o par ordenado $(0, 2)$. Isso quer dizer que quando o x é o y é 2. O grupo 2 respondeu $(-2, 4) \dots$

Enquanto a pesquisadora dialogava com os grupos, anotava no quadro as informações recebidas dos alunos, e desenhou a “máquina de calcular” da questão 1, com os valores de entrada e os de saída.

P: Vamos pensar qual o cálculo que essa “máquina de calcular” faz.

G3: Se x é zero e y é dois, significa que tem zero mais dois.

P: Então, se o valor x é zero, podemos escrever x mais dois?

G3: Para esse par ordenado sim

P: E para os outros pares ordenados? Todos pertencem à mesma função!

G2: Quando o x vale menos um, o y vale três. E se temos um número mais dois, então nesse caso temos menos um vezes menos um mais dois igual a três.

P: Então se o valor de x é menos um, podemos escrever menos um vezes x mais dois?

Nesse momento, os alunos “testaram” a expressão matemática com os outros pares ordenados e responderam que chegaram à conclusão que a lei de formação da função é $y = -x + 2$.

Os grupos então, copiaram a resposta final do item (c) que estava apresentada no quadro. Apresenta-se o raciocínio do Grupo 2 (Figura 109), por meio da aluna A7 após a mediação da pesquisadora com os grupos.

Figura 109 – Resposta da Atividade 2 – Questões 3 da aluna A7 do Grupo 21

3) O gráfico ao lado representa uma relação f . Observe esse gráfico e responda:

a) Escreva quatro pontos (pares ordenados) $(x; y)$ que pertencem ao gráfico dessa relação f .

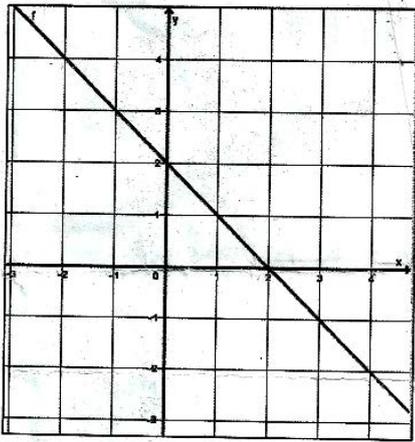
$(2; 0)$, $(3; 1)$, $(-3; 3)$, $(-2; 4)$
 $(0; 2)$ $(4; -2)$

b) O gráfico da relação f representa uma função? Por quê?

sim, porque cada valor de x tem um y diferente.

c) Se a resposta da letra b for positiva, qual a lei da função que corresponde a esse gráfico?

$-1 \cdot x + 2 = y$



Fonte: Dados da pesquisa

No Grupo 3, nos itens (a) e (b) também não tiveram dúvidas, ressalta-se porém, que o aluno A8, Figura 110, escreveu no item (a) o par ordenado $(3, 1)$, quando na verdade

deveria ter escrito $(3, -1)$. Assim, acredita-se que tenha sido falta de atenção, pois o mesmo comentou, no item (c), durante a mediação da pesquisadora no quadro com os grupos, este par ordenado de forma correta, como mencionado anteriormente. Após a explicação, tal aluno só copiou parte do item (c), faltando escrever a resposta final $y = -x + 2$ (Figura 110).

Figura 110 – Resposta da Atividade 2 – Questões 3 do aluno A8 do Grupo 3

3) O gráfico ao lado representa uma relação f . Observe esse gráfico e responda:

a) Escreva quatro pontos (pares ordenados) $(x; y)$ que pertencem ao gráfico dessa relação f .

$(-2, 0)$ $(3, 1)$
 $(1, 1)$
 $(0, 2)$

b) O gráfico da relação f representa uma função? Por quê?

Sim, pois tem valor de x associado a um valor de y .

c) Se a resposta da letra b for positiva, qual a lei da função que corresponde a esse gráfico?

-1
 -2
 0 → $(-1) \cdot x + 2$

CONVERSÃO

FORMAÇÃO

CONVERSÃO

Fonte: Dados da pesquisa

Ressalta-se que a conversão (a) da representação gráfica – par ordenado, foi concluída por todos os grupos, o que leva a inferir que extrair pontos do gráfico e colocá-los na forma de pares ordenados mostrou conhecimento dos alunos em realizar esta conversão, ressaltando-se que no caso do aluno A8 grupo 3, quando durante a explicação do item (c) respondeu $(3, -1)$ e escreveu em sua folha $(3, 1)$, notou-se que mesmo não prestou atenção no que estava anotando e respondendo.

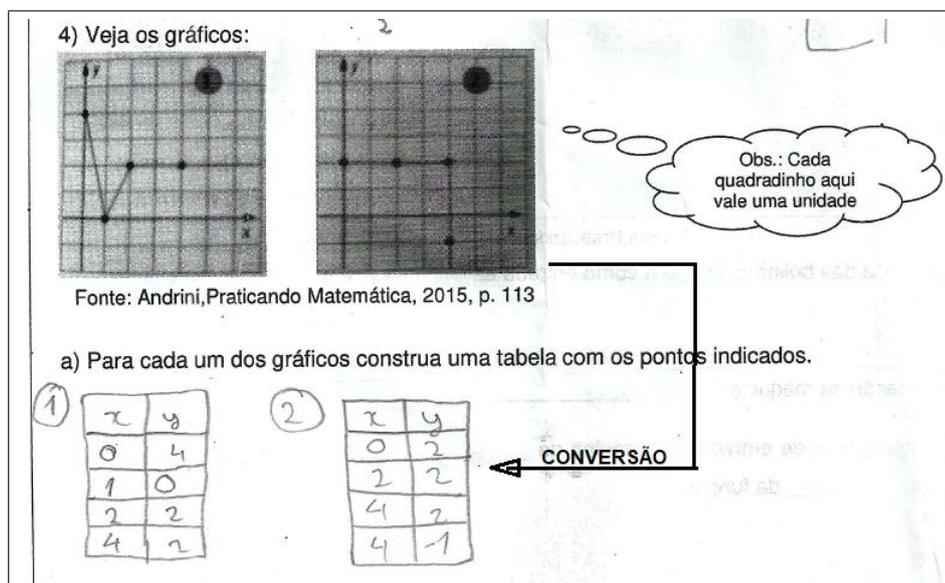
O item (b), cujo objetivo foi identificar se a relação ilustrada no gráfico representa uma função, os alunos também a fizeram como esperado, conseguindo realizar a formação necessária para responder corretamente a questão, sem necessidade de interferência.

O item (c), cujo objetivo foi realizar a conversão gráfico – lei de formação, todos os alunos questionaram a pesquisadora que mediou a construção desse conhecimento com os alunos.

Na **questão 4**, o objetivo foi representar pontos do gráfico através de uma tabela e definir se o gráfico representa ou não uma função. Esta questão foi feita por todos os alunos sem dificuldade e nenhum grupo precisou da intervenção da pesquisadora, respondendo de forma consciente e correta toda a questão.

Como todos responderam corretamente, destaca-se a resposta do aluno A13 do grupo 1 na [Figura 111](#).

Figura 111 – Resposta da Atividade 2 – Questão 4, item (a) do aluno A13 do grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

Este grupo, como os outros dois não tiveram dúvidas em fazer a conversão da representação gráfica para tabela. Todos os outros dois grupos realizaram da mesma forma.

Constatou-se que nenhum aluno dos grupos apresentou dificuldade nos itens (b) e (c) da questão 4, como se destaca na resposta do aluno A4 do grupo 3 na [Figura 112](#).

Figura 112 – Resposta da Atividade 2 – Questão 4, item (b) e (c) do aluno A4 do grupo 3

b) O gráfico 1 representa uma função? Por quê? Sim, porque para cada x tem um y diferente

c) O gráfico 2 representa uma função? Por quê? não, pois x tem dois valores

Fonte: Dados da pesquisa

Ao finalizarem a questão percebeu-se que os alunos alcançaram os objetivos de representarem pontos do gráfico através de uma tabela e definir se o gráfico representa ou não uma função, bem como, realizarem a conversão dos gráficos para tabela. Foram capazes de determinar se as relações exploradas representam ou não função sem intervenção, o que se infere que compreenderam o conceito explorado.

A **questão 5** cujo objetivo foi identificar a lei de formação da função, foi considerada difícil por todos os alunos. A mesma explorava no item (a) a fazer a conversão da representação gráfica para a lei de formação da função. Para Duval, a aprendizagem não

se faz apenas por meio de uma transposição. Nesta questão a análise da representação gráfica para a escrita na linguagem algébrica é onde se evidencia as maiores dificuldades dos alunos, o que vem a corroborar com a situação vivenciada em sala de aula.

Na sala de aula, a pesquisadora após ir às carteiras dos alunos de cada grupo e percebendo a dificuldade observada nessa conversão, foi ao quadro e escreveu a tabela da questão.

Por meio de perguntas sobre os números apresentados na tabela, e a relação entre o valores que estavam associados (x, y) , questionou os alunos:

P: Observando os valores da tabela, quando x é igual a zero, y é igual a menos um. De acordo com o que discutimos na questão 3, o que significa?

A7: Que zero vezes x menos um dá menos um. Então tem um número menos um que é igual a y .

P: Agora observando o segundo dado da tabela. Quando x é igual a um, o valor de y é um também. De acordo com o que A7 falou, sobre esse dado, o que podemos dizer?

A7: Que dois menos um é igual a um. E se x vale um, então tem que ser duas vezes um menos um igual a um.

P: Já podemos escrever de forma geral?

A7: Dois vezes x menos um igual a um. Igual na terceira linha. Porque duas vezes menos dois é igual a menos quatro com menos um dá menos cinco.

Ao fazer as perguntas percebeu-se que mesmo com a dúvida da questão 3 sanada anteriormente, os mesmos permaneciam com dúvidas nesta questão, conforme resposta de A7 no diálogo acima, precisando de intervenção, evidenciando a dificuldade de interpretar dados da tabela para linguagem algébrica, na escrita da lei de formação. Diante da dificuldade dos alunos em converter dados da tabela para a lei de formação, essa questão foi discutida no quadro, apresentando a representação da lei de formação.

Ilustra-se na [Figura 113](#) a resposta da aluna A7 do grupo 2, após a discussão no quadro.

Figura 113 – Resposta da Atividade 2 – Questão 5 da aluna A7 do grupo 2

5) A tabela abaixo representa uma função f .

x	$f(x)$
0	-1
1	1
-2	-5
6	11

a) Qual a lei de formação dessa função?
 CONVERSÃO $\rightarrow 2 \cdot x - 1 = y$

b) Qual a imagem do número 14?
 $2 \cdot 14 - 1 = 27$

c) Qual o valor do número que tem imagem 11 (complete a tabela).
 $2 \cdot 6 - 1 = 11$

Fonte: Dados da pesquisa

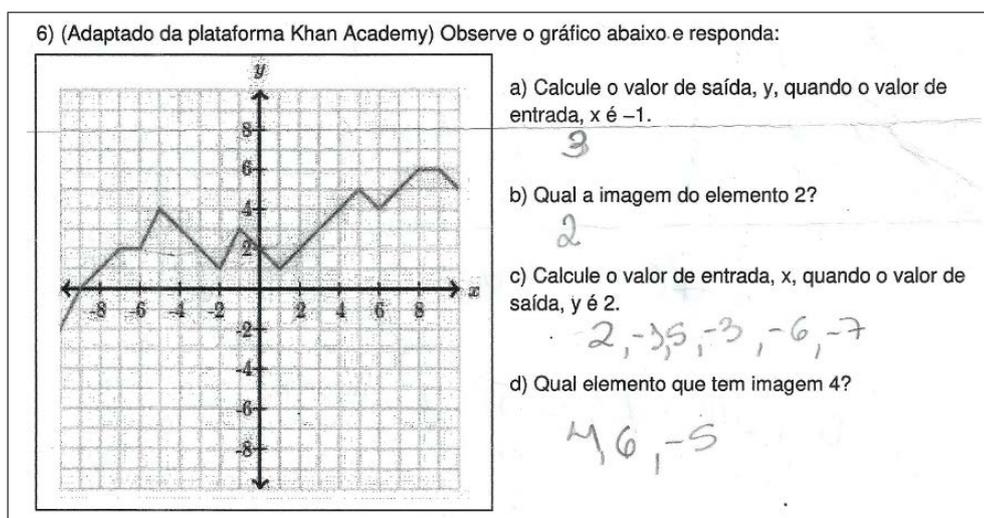
Após a discussão do item (a), a qual os grupos conseguiram chegar a lei de formação correta, os mesmos fizeram o item (b). Ressalta-se que a maioria das operações não são registradas na folha de atividade, como pode ser evidenciado na resolução pela aluna A7, quando o raciocínio deveria ser encontrar o valor de “ x ” e parece que os cálculos são feitos mentalmente em que o aluno provavelmente pensou: qual o número que multiplicado por 2 e subtraído de 1 é igual a 11? Mentalmente encontram 6 e substituem no valor de x , ou observado na tabela a relação de par ordenado (6, 11).

Observa-se na resposta da aluna A7, que a mesma nos itens (b) e (c) não formalizou corretamente o conceito de encontrar a variável solicitada. Substituiu os valores de x e y em ambos os membros.

As questões 6 e 7 foram respondidas juntas com a pesquisadora, pois havia pouco tempo de aula para finalizar a atividade. Em todos os momentos, os alunos participaram ativamente nas respostas, respondendo oralmente e anotando as respostas na folha.

A **questão 6** teve por objetivo determinar, a partir de uma representação gráfica, nos itens (a) e (b) o valor de saída y de determinado valor de entrada x , enquanto nos itens (c) e (d) determinar os valores de entrada, conhecendo os valores de saída como mostra a resposta da aluna A2 do grupo 2 na [Figura 114](#).

Figura 114 – Resposta da Atividade 2 – Questão 6 da aluna A2 do grupo 2

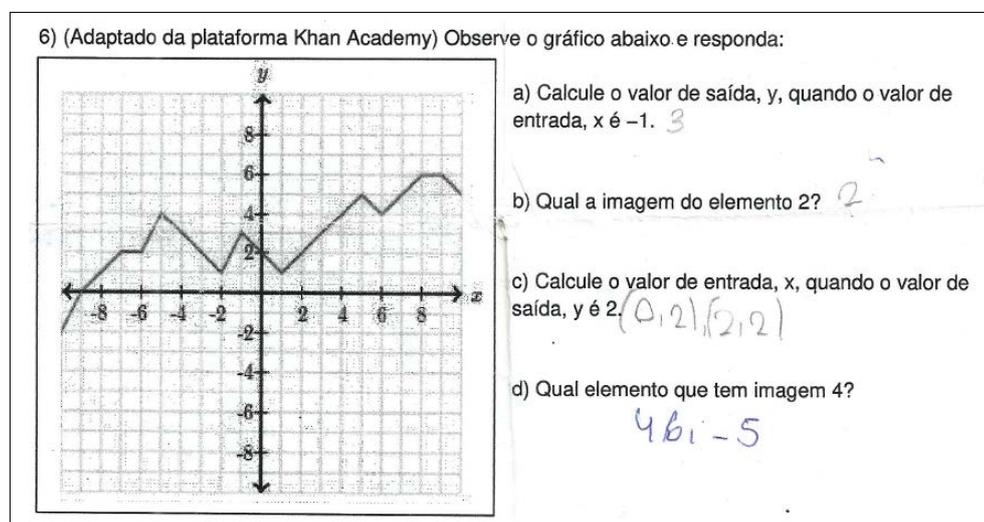


Fonte: Dados da pesquisa

Observou-se que no item (c) deveria responder todos os seis valores corretos $\{-7; -6; -3; -1, 5; 0; 2\}$. Assim, acredita-se que a aluna citada tenha esquecido de anotar o valor zero como resposta, pois ao perguntar durante a aula todos responderam corretamente. A aluna respondeu os itens (a) e (b) de forma correta, fazendo a correspondência entre o valor de entrada e o valor de saída.

Dentre as respostas apresentadas, o aluno A3 do grupo 3 (Figura 115), respondeu o item (c) usando a representação em pares ordenados, porém, não respondeu completamente a mesma, ainda assim, utilizou de forma correta a notação escolhida, selecionando o melhor registro de acordo com seu conhecimento, que é descrito por Duval e Moretti (2012), o qual explica que esse processo ocorre de forma implícita.

Figura 115 – Resposta da Atividade 2 – Questão 6 do aluno A3 do grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa

A conversão da representação gráfica para a representação numérica exigiu dos alunos a interpretação gráfica.

A **questão 7** teve por objetivo definir y a partir de um valor dado para x e definir x a partir de um valor dado para y .

Os itens (a) e (b) da questão 7 foram respondidos em conjunto com a pesquisadora por todos os alunos, e os itens (c) e (d), foi solicitado que terminassem em casa pelo término do horário da aula. A questão objetivava a realizar o tratamento para respondê-la corretamente. Primeiro o aluno identificou o valor fornecido no par ordenado, e em seguida realizou as operações necessárias para concluir a questão.

Observou-se durante as respostas dadas oralmente que os alunos compreenderam o que foi solicitado, respondendo corretamente, como mostra a **Figura 116** a resposta da aluna A11 do grupo 1.

Figura 116 – Resposta da Atividade 2 – Questão 7 da aluna A11 do grupo 1

7) Complete o valor que falta no par ordenado $(x; y)$, para que as afirmações sejam, verdadeiras.

a) O par ordenado $(1; \underline{-4})$ satisfaz a equação $y = 3x - 7$.

b) O par ordenado $(\underline{3}; -2)$ satisfaz a equação $y = -2x + 4$.

c) O par ordenado $(\underline{-8}; 8)$ satisfaz a equação $-4x - y = 24$. $-4x - 8 = 28$

d) O par ordenado $(-3; \underline{4})$ satisfaz a equação $y - 4 = -2(x + 3)$. $y - 4 = -2(-3 + 3)$
 $-4x = 32$
 $x = 8$
 $4x = 32$

Fonte: Dados da pesquisa

Na atividade 2 buscou-se novamente interações aluno-aluno para que conhecimentos fossem construídos conjuntamente, bem como, quando houve a necessidade de intervenções, mediações ocorridas entre pesquisadora-alunos propiciou aos alunos construções e desconstruções de conceitos errôneos que contribuiriam para a construção do conhecimento dos mesmos.

Acredita-se que para o domínio do reconhecimento de função a partir de uma relação de dependência entre grandezas e entre conjuntos, bem como calcular o valor da função utilizando as diversas representações, o registro de representação semiótica explorando a conversão e o tratamento presente na Atividade 2, junto à ação de uma proposta de interação entre os alunos nos grupos e a mediação da pesquisadora com os grupos, favoreceu para que os mesmos realizassem a Atividade 2, alcançando os objetivos do mesmo.

5.5 Atividade 3 - Função Afim

A Atividade 3 intitulada “Função Afim”, ([Apêndice E](#)), foi aplicada no dia 07 de novembro de 2018, com duração de 02 horas/aula e a presença de todos os 13 alunos, na sala de aula. Ela foi composta de quatro questões com os objetivos de (i) determinar a lei de formação, inserção de dados do contexto na tabela, determinar pares ordenados e representação gráfica; (ii) interpretar o significado dos eixos coordenados apresentados em um gráfico a partir de um contexto e identificar a lei de formação; (iii) a partir de uma situação problema determinar a lei de formação da função por meio da conversão; (iv) determinar a lei de formação a partir de uma sequência numérica.

A divisão dos grupos permaneceu a mesma. Três grupos de quatro alunos. A pesquisadora comentou a estratégia de que pudessem interagir entre eles no desenvolvimento das questões e em caso de dúvidas, sanaria no grupo, ou no quadro quando necessário e ao final da aula faria a correção de todas as questões da atividade proposta.

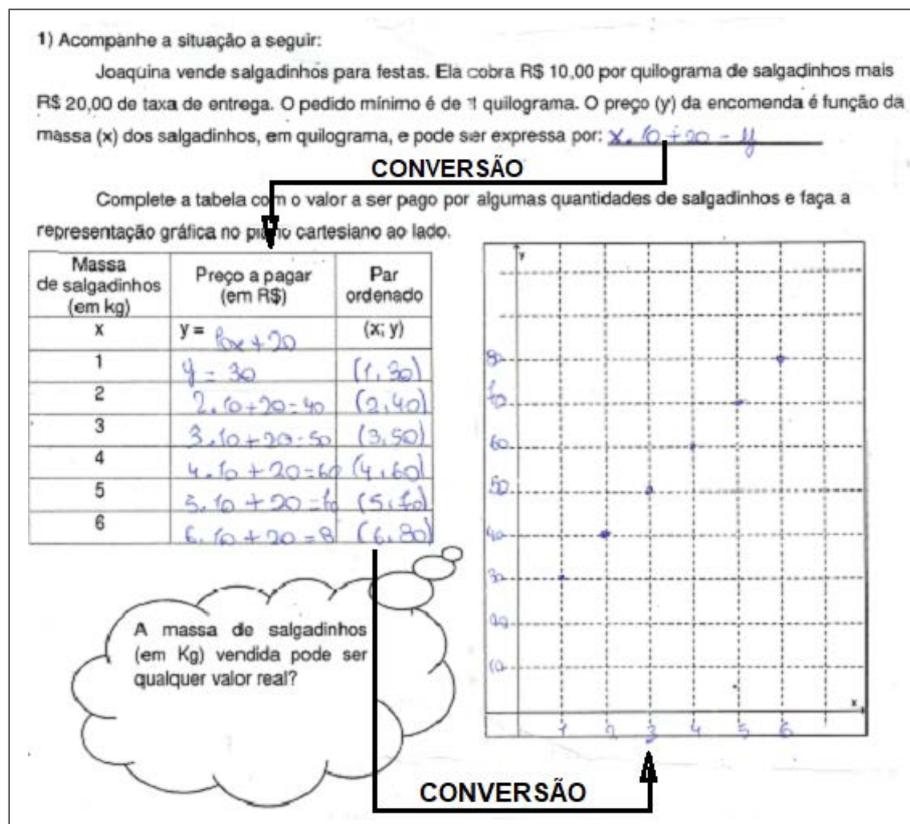
A **questão 1** teve por objetivo determinar a lei da formação, inserção de dados do contexto na tabela, determinar pares ordenados e representação gráfica e buscou verificar se os alunos conseguiam realizar a transposição didática convertendo a representação linguagem natural em lei de formação.

Durante a resolução da questão nenhum grupo solicitou explicação da pesquisadora, conseguindo resolver a questão. Observou-se que os alunos compreenderam o que foi proposto, realizando a conversão linguagem natural – lei de formação. Todos completaram a tabela, utilizando a lei de formação.

Ao perceber que todos haviam determinado a lei de formação e construído a tabela como proposto, a pesquisadora perguntou para toda a turma sobre a representação gráfica, discutindo em conjunto com todos a escala ideal para os eixos coordenados do gráfico.

Após a discussão sobre a escala dos eixos coordenados, os alunos retornaram a questão, desenvolvendo em seus grupos a conversão da representação da tabela para a representação gráfica. Destaca-se na [Figura 117](#) a resposta do Grupo 1, representada pelo aluno A1

Figura 117 – Resposta da Atividade 3 – Questão 1 do aluno A1 do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

Ao término da questão 1 e antes de iniciar a questão 2, a pesquisadora corrigiu a questão 1. Ao conferir os valores da tabela respondido pelos alunos oralmente, o aluno A5 do grupo 3 comentou que ao responder os três primeiros valores percebeu que os valores cresciam de forma constante, sendo complementado por outros alunos dos outros grupos que era “só acrescentar 10 ao valor anterior”. A pesquisadora desenhou então no quadro a representação gráfica, e fez os questionamentos que estavam na folha.

Sobre a resposta dos valores possíveis para os valores de x , foi respondido que poderiam ser valores reais, desde que fossem positivos, faltando, porém, essa anotação pelos alunos na folha. Sobre a resposta dos pontos estarem alinhados e formarem uma reta, os alunos também responderam de forma correta. Após essa discussão sobre a questão, a pesquisadora formalizou o conceito de função afim no quadro, explicando a forma geral de escrever a função, onde os alunos fizeram as suas anotações na folha de atividade, como mostra a resposta do aluno A5 do grupo 3 (Figura 118). Destaca-se que o grupo 2 apresentou as mesmas respostas.

Figura 118 – Resposta da Atividade 3 – Questão 1 do Aluno A5 do Grupo 3

1) Acompanhe a situação a seguir:

Joaquina vende salgadinhos para festas. Ela cobra R\$ 10,00 por quilograma de salgadinhos mais R\$ 20,00 de taxa de entrega. O pedido mínimo é de 1 quilograma. O preço (y) da encomenda é função da massa (x) dos salgadinhos, em quilograma, e pode ser expressa por: $x \cdot 10 + 20 = y$

CONVERSÃO

Complete a tabela com o valor a ser pago por algumas quantidades de salgadinhos e faça a representação gráfica no plano cartesiano ao lado.

Massa de salgadinhos (em kg)	Preço a pagar (em R\$)	Par ordenado (x; y)
x	$y = 10x + 20$	(x; y)
1	$y = 30$	(1, 30)
2	$y = 40$	(2, 40)
3	$y = 50$	(3, 50)
4	$y = 60$	(4, 60)
5	$y = 70$	(5, 70)
6	$y = 80$	(6, 80)

A massa de salgadinhos (em Kg) vendida pode ser qualquer valor real?

Sim

CONVERSÃO

► Os pontos estão alinhados? Sim

► Você pode "unir" os pontos do gráfico? Sim

O gráfico dessa função pode ser representado por uma reta.

funções afins:
 → são as funções cujo lei de formação é do tipo $y = a \cdot x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$
 → equação da reta

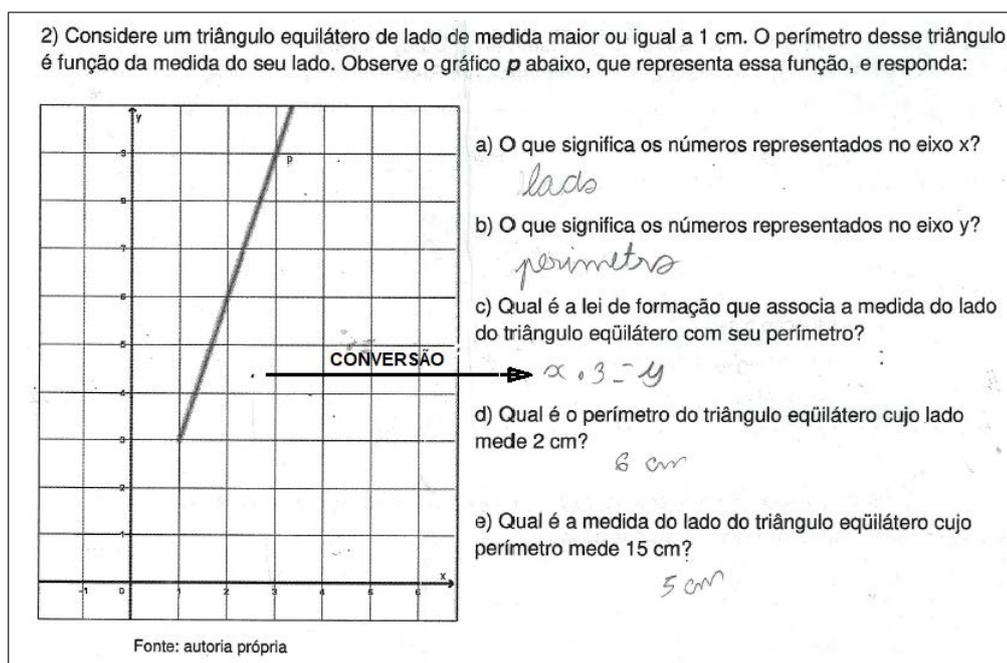
Fonte: Dados da pesquisa

Observou-se que todos os alunos de todos os grupos realizaram a conversão proposta, em que os mesmos consideraram a questão relativamente fácil, alcançando os objetivos expostos inicialmente.

A **questão 2** teve por objetivo interpretar o significado dos eixos coordenados apresentados no gráfico da questão a partir de um contexto e identificar a lei de formação. Explorou-se nesta questão a conversão de representação gráfica – lei da função no item (c).

Para responderem os itens (a) e (b) a pesquisadora foi chamada ao grupo 2 pois os alunos discutiam entre si e observou-se que estavam confusos em relação ao conceito de perímetro e área. Na mediação entre alunos e pesquisadora, a mesma lembrou com eles o conceito de perímetro e área. Sanada a dúvida, os mesmos continuaram a fazer a questão, ilustrada na **Figura 119** a resposta do aluno A4 do grupo 2.

Figura 119 – Resposta da atividade 3 – Questão 2 do aluno A4 do grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora também foi chamada ao grupo 3 pois os alunos também estavam com dúvidas em relação ao conceito de perímetro e área. Na mediação com a pesquisadora, a mesma lembrou com eles o conceito de perímetro e área, da mesma forma que fez no grupo 1. A partir da intervenção da pesquisadora entenderam o conceito para responderem a atividade.

Durante a discussão em grupo na letra (e), observou-se que o grupo 3 começou a calcular o perímetro ao invés do lado. Foi dada a medida do perímetro e pedia-se o lado. Os outros dois grupos estavam escutando a discussão e comentaram que “eles estavam fazendo errado, pois o exercício pedia para achar o lado”, sendo assim corrigidos pelos outros dois grupos. O grupo 3 depois desta intervenção promovida pela interação entre os grupos finalizou corretamente. Dessa forma, acredita-se que a falta de atenção tenha interferido na interpretação da questão.

Antes de fazerem a questão 3, corrigiu-se a questão 2, pois os alunos perguntavam a todo momento se estavam corretos.

A correção da questão 2 iniciou-se chamando a atenção novamente para os conceitos de perímetro e área, e em seguida a correção dos itens (a) e (b) em que todos responderam corretamente após a mediação feita durante a atividade.

Ao responderem o item (c), que tem por objetivo realizar a conversão de representação gráfico – lei da função, verificou-se que nenhum aluno apresentou dúvidas, acreditando-se que o fato de já saberem como calcular perímetro e área de um triângulo

equilátero os tenha ajudado na questão. Na correção do item (d), os alunos comentaram que não fizeram a substituição na lei de formação e sim, observaram pelo gráfico.

O item (e) foi respondido de forma mais informal (sem o registro da conta), pois os mesmos relataram que pensaram qual era o número que multiplicado por 3 resultava em 15. Sendo assim, informando o valor correto apenas por cálculo mental.

Observou-se que durante a realização da questão 2 os alunos não apresentaram dificuldade após a “confusão” do conceito de perímetro e área, realizando as conversões propostas.

A **questão 3** que teve por objetivo a partir de uma situação problema determinar a lei de formação da função por meio da conversão.

Logo que iniciaram a questão, os três grupos tiveram dúvidas no item (a) “Qual o valor v a pagar em uma corrida de n quilômetros?” e o processo de mediação se fez necessário. A pesquisadora fez perguntas sobre a questão, averiguando que os alunos conseguiam interpretar a questão, mas não sabiam, nesse momento, generalizar o problema ao escrever na linguagem algébrica, conforme diálogo transcrito a seguir.

A pesquisadora então começou lendo o enunciado com os alunos e perguntou:

P: Que significa bandeirada?

Al: O valor inicial que é pago ao entrar no táxi.

Após a resposta satisfatória continuou:

P: Se cada quilômetro rodado custa R\$ 0,60, quanto vai pagar uma pessoa que andou 1 km nesse táxi?

E obteve como resposta:

P: R\$ 4,10

P: Por quê?

Al: Pois R\$ 3,50 mais R\$ 0,60 dá R\$ 4,10.

A pesquisadora continuou

P: E se uma pessoa andar 3 km?

A: Vai pagar R\$ 3,50 mais 3 vezes R\$ 0,60, que é igual a R\$ 5,30.

Nesse momento a pesquisadora observou que os alunos tinham compreensão do contexto apresentado e que o problema estava na lei de formação. Buscou-se então discutir a situação apresentada, de forma que os levasse a contribuir a lei de formação:

P: E se for n quilômetros?

Al: Vai pagar R\$3,50 mais n quilômetros vezes R\$ 0,60.

Nesta mediação em que se buscava que chegassem à compreensão da generalização da lei de formação, foi possível inferir que eles tinham entendido a linguagem algébrica a ser dada como resposta, embora um dos grupos não igualasse a expressão a d (distância). Destaca-se na [Figura 120](#) a resposta da aluna A10 do grupo 1.

Figura 120 – Resposta da atividade 3 – Questão 3 da aluna A10 do grupo 1

C
O
N
V
E
R
S
Ã
O

3) O preço a ser pago numa corrida de taxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R\$ 3,50 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,60, responda:

a) Qual é o valor v a pagar numa corrida de n quilômetros?

$3,50 + n \cdot 0,60$

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros? $v = 3,50 + 11 \cdot 0,60$
 $R: \text{vai custar R\$ } 10,10$ $v = 3,50 + 6,60$
 $v = 10,10$

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

$v = 3,50 + 5,8 \cdot 0,60$
 $v = 3,50 + 3,48 = 6,98$

d) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 13,70 pela corrida?

$13,70 = 3,50 + n \cdot 0,60$
 $13,70 - 3,50 = 0,60 n$
 $10,20 = 0,60 n$
 $n = \frac{10,20}{0,60} = 17 \text{ km}$

Fonte: Dados da pesquisa

Para a realização itens (b), (c) e (d), não houve necessidade de mediação pela pesquisadora, onde os alunos conseguiram desenvolver o tratamento como esperado.

O grupo 1, assim como os demais grupos, tinham a compreensão do que a atividade propunha nestes itens, porém a generalização do item a, utilizando a linguagem algébrica que precisou de mediação, ou seja, um dos grupos inicialmente não apresentou domínio deste item.

Durante a correção da atividade, a pesquisadora reforçou a conversão do problema para a linguagem algébrica, e corrigiu os itens (b), (c) e (d), constatando que não havia dúvida por parte dos alunos, concluindo a atividade 3. A conversão necessária para a resolução da questão perpassa pela interpretação da mesma. [Pinto \(2014\)](#) relata em seu trabalho que uma das dificuldades encontradas é a interpretação de problemas. Verificou-se que os alunos interpretaram o problema quando responderam corretamente os questionamentos, porém, a dificuldade apresentada foi na lei de formação do problema do item (a).

Observou-se ainda que os alunos conseguiram alcançar a generalização da questão

1, porém apresentaram dificuldade na questão 3. Infere-se que talvez na questão 1 ao solicitar a lei de formação escrevendo que o preço y da encomenda é função da massa x , ficou mais fácil para o aluno determinar a lei de formação.

O objetivo da **questão 4** determinar a lei de formação a partir de uma sequência numérica e explorar a conversão quando a partir da sequência numérica, o aluno deveria responder na forma de expressão algébrica (lei de formação).

Novamente, nesta atividade os alunos descreveram como sendo a mais difícil até o momento, evidenciando novamente a dificuldade na interpretação de dados, solicitando explicação da pesquisadora para o significado da sequência de números apresentadas.

A pesquisadora foi ao quadro explicar, visto que a dúvida era de todos os alunos, colocando no quadro a sequência descrita na atividade, fazendo a intervenção necessária.

P: Bem, de acordo com a questão, Rui tem conhecimento de uma regra que qualquer número que Ari disser, ele responderá de acordo com essa regra. Dessa forma, vamos analisar: se Ari diz 12, Rui diz 25. Se Ari diz 14, Rui diz 29, e assim sucessivamente. Como esses números podem estar relacionados?

Após um pequeno silêncio o aluno A9 do grupo 2 respondeu:

A9: Professora, pega o número de Ari, multiplica por dois e depois soma 1. Aí dá o número respondido por Rui.

Nesse momento os demais alunos começaram a “testar” aquela afirmação do colega e chegaram a mesma conclusão.

Depois dessa explicação, os alunos retomaram a questão para resolver e esta atividade foi respondida por todos os alunos. Apresenta-se na [Figura 121](#) a resposta do aluno A9 do grupo 2.

Figura 121 – Resposta da Atividade 3 – Questão 4 do aluno A9 do grupo 2

4) Ari dizia um número e Rui respondia outro usando uma regra que só ele conhecia.

a) Que número deve ser respondido por Rui para o número 36 dito por Ari?
 73
 $x \cdot 2 + 1$

b) Chame de x os números ditos por Ari e de y os números respondidos por Rui. Escreva uma expressão matemática de y em função de x .
 $x \cdot 2 + 1 = y$

ARI	12	14	19	25	36
RUI	25	29	39	51	

CONVERSÃO

(Fonte: Andrioli, Praticando Matemática, 2015, p.107)

Handwritten calculations showing the derivation of the rule and its application:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 2 \\ \hline 44 \\ + 1 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 2 \\ \hline 28 \\ + 1 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 2 \\ \hline 38 \\ + 1 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 2 \\ \hline 50 \\ + 1 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 2 \\ \hline 72 \\ + 1 \\ \hline 73 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que no desenvolvimento o aluno usou como raciocínio o fator multiplicativo 2 ao número inicialmente dito por Rui e adicionando 1 chegava ao número respondido por Ari e foi desenvolvendo este raciocínio até chegar ao resultado 73, corroborado pelo diálogo da pesquisadora para entenderem o objetivo da sequência numérica apresentada. Sendo assim, ao responderem o item (b), realizaram a conversão da forma esperada, pois como já foi comentado para responder o item (a) implicitamente os alunos responderam o item (b).

Percebeu-se que inicialmente, todos os alunos ao se depararem com as sequências numéricas relacionadas entre si, sentiram muita dificuldade.

Durante a correção da questão a pesquisadora comentou sobre a representação na forma de sequência, sendo esta similar a tabela apresentada na questão 1, ou seja, números que estavam relacionados por alguma “fórmula”, porém, os números apresentados não estavam dispostos em tabela. Os alunos relataram que ao fazer com o auxílio da pesquisadora a questão deixou de parecer difícil, e que os mesmos se sentiram mais seguros.

Após a correção da atividade, a pesquisadora voltou à formalização do conceito de função. A mesma escreveu a lei de formação de cada uma das questões da atividade 3 e a forma reduzida da função afim, fazendo a correspondência dos coeficientes a e b , explicando que o objetivo desta atividade era formalizar o conceito de Função Afim. Apresenta-se um resumo do que foi escrito no quadro pela pesquisadora, conforme [Quadro 10](#).

Quadro 10 – Lei de formação das questões da atividade 3

Função Afim: São funções cuja lei de formação é do tipo $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Voltando às questões da atividade, temos:

Questão 1: $y = 10x + 20$

Questão 2: $y = 3x$

Questão 3: $d = 0,60n + 3,50$

Questão 4: $y = 2x + 1$

Na questão 1, $y = 10x + 20$, o valor de a é 10 e o valor de b é 20; na questão 2, $y = 3x$, o valor de a é 3 e o valor de b é 0; na questão 3, $d = 0,60n + 3,50$, o valor de a é 0,60 e o valor de b é 3,50; e na questão 4, $y = 2x + 1$, o valor de a é 2 e o valor de b é 1.

O gráfico da função afim é uma reta, assim, podemos observar que $y = ax + b$ representa a equação da reta.

Fonte: autoria própria

A pesquisadora explicou então, que em cada questão foi explorada a função afim e os coeficientes a e b tinham significados diferentes em cada questão. Nesse momento, levou os alunos a refletirem que o valor do coeficiente b sempre representará um valor fixo inicial, como na questão 1 que é representado pela taxa de entrega. Na questão 3 o coeficiente b representa o valor da bandeirada do táxi e na questão 4, o valor a se somar à multiplicação para encontrar o valor desejado. Os alunos observaram que na questão 2 não há um valor fixo inicial b , pois para determinar o valor do perímetro do triângulo equilátero bastava saber o valor do lado e multiplicar por 3, não havendo necessidade de somar ou subtrair algum valor. Os alunos comentaram ainda que os valores de x e y representam valores que são dependentes um do outro.

Em relação ao coeficiente a , levou os alunos a refletirem que o valor do mesmo na questão 1 representou o valor cobrado por cada quilograma de salgadinhos; na questão 2, representa a quantidade de lados do triângulo; na questão 3, a taxa de variação da corrida do táxi, ou seja, o valor cobrado por cada quilômetro rodado; e na questão 4 representou o número que duplica o número dito por Ari.

A pesquisadora ainda chamou a atenção dos mesmos em relação à representação gráfica da função afim. Voltando a questão 1, já haviam identificados que seria uma reta. Então, a mesma associou a lei da função com a equação da reta, visto que (i) a expressão representa uma função pois há uma relação de dependência, e (ii) que essa relação expressada por uma igualdade representa uma equação.

A pesquisadora finalizou a explicação desta atividade enfatizando a importância deles entenderem a formalização do conceito e o conhecimento de cada elemento da expressão, pois no Ensino Médio, tornariam a rever esta função.

Para a compreensão do conceito de função afim, vivenciou-se a importância de explorar o registro de representação semiótica por meio da conversão presente na Atividade 3, junto à ação de uma proposta de interação entre os alunos nos grupos, buscando que ao discutirem cada questão, houvesse a construção do conhecimento e desconstrução de conceitos até então entendidos como corretos em algumas situações vivenciadas nas discussões ocorridas. Ressalta-se a importância da mediação da pesquisadora com os grupos, levando-os a reflexão dos cálculos desenvolvidos para que os mesmos conseguissem realizar a Atividade 3, compreendendo ao final da atividade o conceito de função afim, objetivo desta atividade.

Ao finalizar a aula a pesquisadora optou por fazer um reforço das atividades 2 e 3 desenvolvidas em sala de aula. A plataforma Khan Academy disponibiliza questões que reforçam os conceitos desenvolvidos em sala de aula. Assim, solicitou para a aula seguinte (08 de novembro de 2018, dia seguinte), que os alunos acessassem a plataforma e recomendou que fizessem três atividades: “Calcule funções a partir de seus gráficos”, “Cálculo de funções” e “Complete a solução de equações com 2 variáveis”. Pediu para que os mesmos não deixassem de fazer, explicando a importância de reforço da atividade.

5.6 Atividade complementar às atividades 2 e 3 na plataforma Khan Academy

As Atividades propostas na plataforma Khan Academy, [Apêndice F](#) tiveram por objetivo explorar o domínio e imagem de função. Nas atividades “Calcule funções a partir de seus gráficos” e “Cálculo de funções” foram explorados o conceito de imagem de uma função e na atividade “Complete a solução de equações com 2 variáveis” foi explorado o conceito de domínio e imagem da função. As atividades descritas foram recomendadas no dia 07/11/18 tinham prazo final de realização final dia 08/11/18, conforme [Figura 122](#).

Figura 122 – Recomendações complementares às atividades 2 e 3

NOME DA RECOMENDAÇÃO	DATA E HORA FINAIS	RECOMENDADO EM	CONCLUÍDA	Excluir	
Complete soluções de equações com 2 variáveis Exercício - Conjunto de perguntas diferente	Nov 8º, 10:30 AM	Nov 7º	8 / 13	Exibir relatório	Ações ▼ <input type="checkbox"/>
Cálculo de funções Exercício - Conjunto de perguntas diferente	Nov 8º, 10:30 AM	Nov 7º	8 / 13	Exibir relatório	Ações ▼ <input type="checkbox"/>
Calcule funções a partir de seus gráficos Exercício - Conjunto de perguntas diferente	Nov 8º, 10:30 AM	Nov 7º	9 / 13	Exibir relatório	Ações ▼ <input type="checkbox"/>

Fonte: Plataforma Khan Academy

A plataforma possui um banco de perguntas. Ao propor as atividades na plataforma Khan Academy, o professor/tutor pode escolher recomendar de forma que apareça o mesmo grupo de perguntas para todos os alunos, ou um grupo de perguntas diferentes para todos os alunos. Para cada aluno foi proposto que a plataforma selecionasse perguntas diferentes.

No dia 08 de novembro de 2018, verificou-se previamente que houve baixo acesso dos alunos, e a pesquisadora modificou seu planejamento de aula que seria discutir as dúvidas dos alunos em relação à atividade proposta. Dessa forma, ao chegar à sala de aula, com a presença de todos os 13 alunos, a pesquisadora solicitou que os mesmos fizessem as atividades em sala sentando-se em grupo. Como todos já tinham o *app* Khan Academy instalados, os mesmos fizeram as atividades usando o aplicativo. Ressalta-se que cada aluno tinha a liberdade de iniciar a resolução por qualquer uma das três atividades propostas. O objetivo de estarem em grupo foi de cooperação em relação às dúvidas surgidas no decorrer das atividades, independente de estarem fazendo a mesma atividade.

A pesquisadora disponibilizou sua rede de dados móveis, já que a escola não dispunha de rede *wi-fi* liberado, e cada aluno ficou com seu *smartphone* fazendo a atividade da plataforma nos grupos formados.

Durante a resolução das perguntas propostas, os alunos tiveram a possibilidade de assistir um vídeo ou utilizar dicas, porém ao fazer o uso de tal recurso disponibilizado pela plataforma, o progresso do aluno não é contabilizado em tal pergunta, por exemplo, se das quatro perguntas o aluno pedir dica em uma, acertar a mesma, e acertar as outras três perguntas, a plataforma contabiliza a nota em 75% (acerto de três perguntas), mesmo acertando todas as quatro.

As atividades corrigidas seguiram a ordem (i) “Calcule funções a partir de seus gráficos”, (ii) “Cálculo de funções” e (iii) “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, devido a explorar primeiro o conceito de imagem com as atividades (i) e (ii), nessa ordem a partir da representação gráfica na atividade (i), e depois trabalhar a partir da lei de formação da função na atividade (ii), e por fim, explorar o conceito de domínio e imagem a partir da lei de formação da função e par ordenado.

O aluno A9 se recusou a fazer as atividades propostas na plataforma em seu *smartphone*, alegando que já tinha pontuação suficiente para a aprovação na disciplina de matemática, mesmo com a insistência da pesquisadora e sabendo que todas as atividades valia ponto para a disciplina. Dessa forma, o mesmo acompanhou as atividades com os colegas do grupo 2.

Iniciou-se pela atividade “Calcule funções a partir de seus gráficos”, cujo banco de perguntas é composto por 12 perguntas e teve por objetivo identificar o valor de saída y (imagem), dado um valor de entrada x (domínio), por meio do gráfico de uma função qualquer fornecido na pergunta.

A plataforma Khan Academy possibilita ter acesso a um relatório que apresenta o número de tentativas que cada aluno faz nas perguntas propostas, bem como a quantidade de acertos do mesmo, conforme [Figura 123](#).

Figura 123 – Recomendação “Calcule funções a partir de seus gráficos”

ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Nov 8º, 1:03 PM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A2	Nov 7º, 10:40 PM	2	4 / 4 100%	Exibir relatório
A3	Nov 8º, 1:00 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A4	Nov 14º, 10:50 AM	1	2 / 4 50%	Exibir relatório
A5	Nov 8º, 12:57 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A6	Nov 8º, 1:06 PM	2	4 / 4 100%	Exibir relatório
A7	-	Em andamento	-	
A8	-	Em andamento	-	
A9	-	-	-	
A10	Nov 8º, 6:51 AM	3	4 / 4 100%	Exibir relatório
A11	Nov 8º, 1:57 PM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A12	Nov 8º, 1:03 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A13	-	Em andamento	-	

Fonte: Plataforma Khan Academy

Dos 13 alunos, A7, A8 e A13 não concluíram algumas das quatro perguntas da atividade proposta, aparecendo no relatório “em andamento”, ou seja, começou a atividade, mas não finalizou todas as quatro perguntas. O relatório não possibilita identificar quais as perguntas esses alunos acertaram ou erraram. Os outros nove alunos, com exceção do aluno A9, finalizaram as quatro perguntas.

A partir deste relatório, a pesquisadora fez um levantamento das perguntas que os alunos na primeira tentativa erraram ([Quadro 11](#)),

Quadro 11 – Perguntas contabilizadas erradas no relatório na primeira tentativa da recomendação “Calcule funções a partir de seus gráficos”

Alunos	A1	A4	A6	A10	A11
Pergunta	3	9, 11	1, 2, 4, 6	9	6

Fonte: autoria própria

O ambiente possibilita que o aluno faça novas tentativas quando o mesmo erra ou acerta. O sistema da plataforma é randômico, ou seja, seleciona as perguntas de forma aleatória, dessa maneira, o aluno ao fazer nova tentativa, a plataforma selecionará quatro perguntas, em que não necessariamente sejam as mesmas feitas anteriormente. O [Quadro 12](#) apresenta as perguntas erradas após a última tentativa de cada um desses alunos.

Quadro 12 – Perguntas contabilizadas erradas após a última tentativa da recomendação “Calcule funções a partir de seus gráficos”

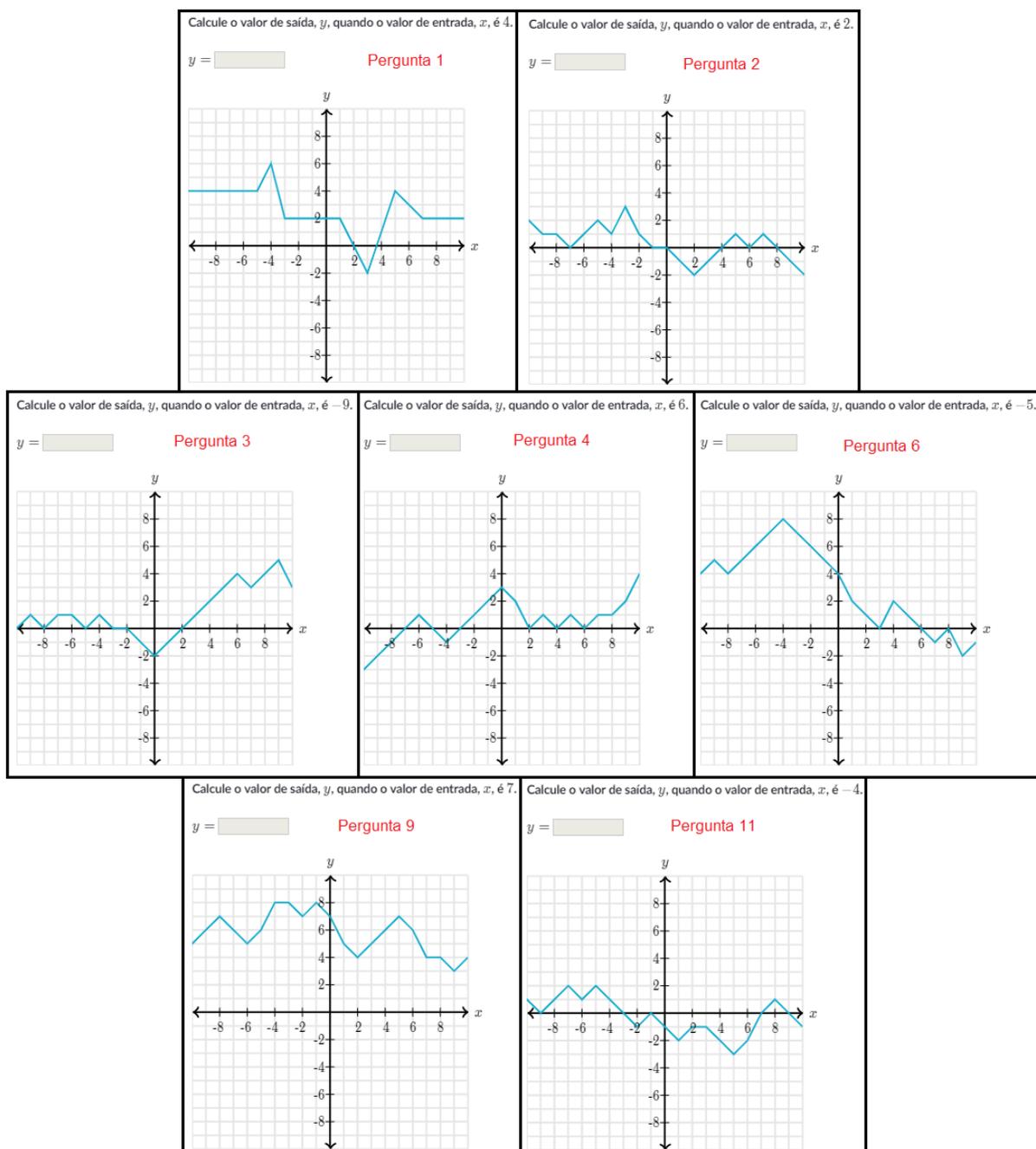
Alunos	A1	A4	A6	A10	A11
Perguntas	3	9, 11	---	9	6

Fonte: autoria própria

Ao comparar o [Quadro 12](#) com o [Quadro 13](#), observa-se os alunos A1, A4 e A11 continuaram com as mesmas perguntas contabilizadas, pois, fizeram somente uma tentativa. A aluna A10 fez três tentativas, e continuou com a pergunta 9 errada, ressalta-se que não necessariamente, por ser um sistema randômico, tenha aparecido a mesma pergunta novamente. Sendo assim, observando o relatório da [Figura 123](#) novamente, a aluna A10 teve um aproveitamento de 100%, ou seja, acredita-se que após a última tentativa a mesma não tenha errado mais nenhuma pergunta, e a pergunta 9 só tenha aparecido uma vez. Já a aluna A6 obteve um aproveitamento de 100% após duas tentativas, conforme [Figura 123](#). Assim, é possível observar que após a nova tentativa melhorou sua nota final, acertando todas as perguntas.

Embora tenham apresentado um resultado melhor, a pesquisadora refez as perguntas da primeira tentativa, junto com os alunos, respondendo com eles. Projetou no quadro da sala de aula, objetivando reforçar a aprendizagem. Apresentam-se, na [Figura 124](#), as perguntas que os alunos tiveram dificuldades na primeira resolução.

Figura 124 – Perguntas com índice de erros na primeira tentativa da atividade “Calcule funções a partir de seus gráficos”



Fonte: Plataforma Khan Academy

Iniciou-se a correção pela pergunta 9 onde dois alunos não acertaram. Ao corrigi-la foi perguntado qual o valor de y quando x é igual a 7. Os alunos responderam corretamente o valor 4. O objetivo foi explorar o conceito de imagem, sendo assim, foi perguntado o que significava y igual a 4. Foi respondido “não sei”, “quatro é igual a quatro”. A pesquisadora nesse momento lembrou a atividade 2 a qual havia explorado o conceito de domínio e imagem por meio da questão da “máquina” onde também haviam números de entrada e

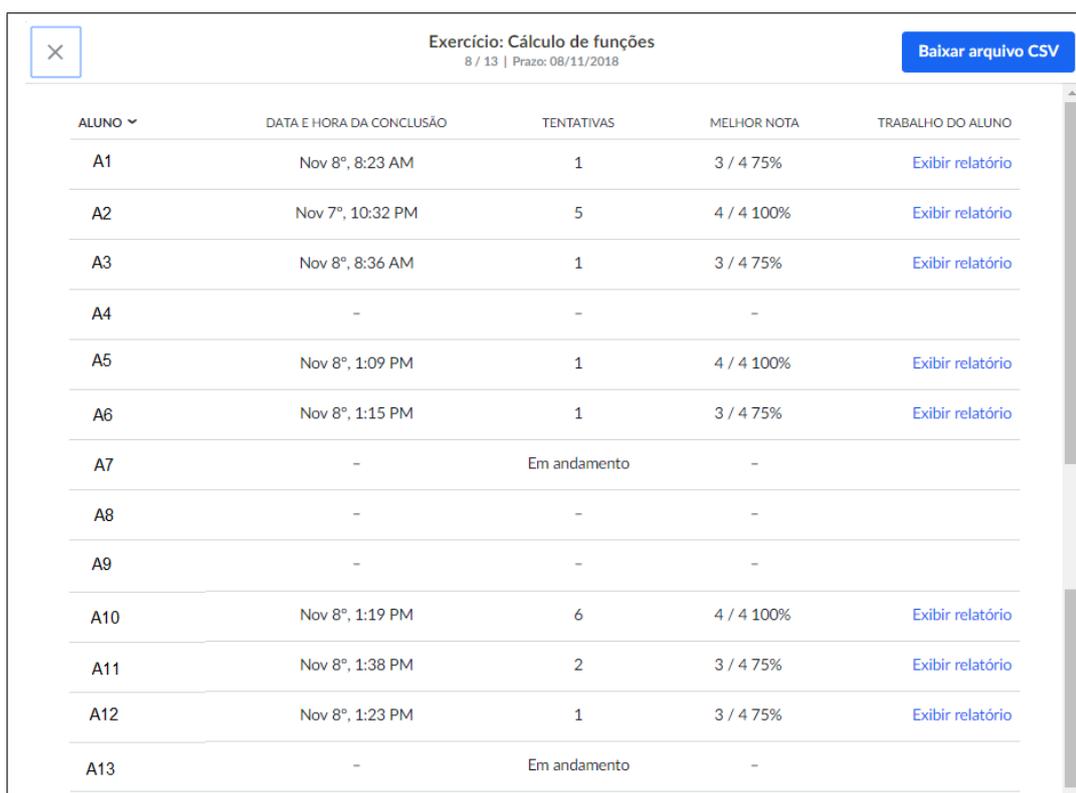
saída. A pesquisadora então, explicou novamente que o valor de entrada é chamado de domínio da função e o valor de saída é chamado de imagem da função.

Assim, foram explorados ainda nesse gráfico outros valores de y (imagem) dados valores de x pertencentes ao gráfico, perguntando a eles qual era a imagem de determinado número x pertencente ao gráfico. Assim foi feito com todas as outras seis perguntas que foram detectadas dificuldades no conceito a ser explorado.

A segunda atividade a ser realizada foi “Cálculo de funções” cujo banco de perguntas também foi composto por 12 perguntas e teve por objetivo calcular o valor de saída y (imagem), dado um valor de entrada x (domínio), por meio da função na forma algébrica “ $y = ax + b$ ”.

O Khan Academy possibilita ter acesso a um relatório que apresenta o número de tentativas que cada aluno faz nas perguntas propostas, bem como a quantidade de acertos do mesmo, conforme [Figura 125](#).

Figura 125 – Recomendação “Cálculo de funções”



Exercício: Cálculo de funções				
8 / 13 Prazo: 08/11/2018				
ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Nov 8º, 8:23 AM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A2	Nov 7º, 10:32 PM	5	4 / 4 100%	Exibir relatório
A3	Nov 8º, 8:36 AM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A4	-	-	-	
A5	Nov 8º, 1:09 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A6	Nov 8º, 1:15 PM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A7	-	Em andamento	-	
A8	-	-	-	
A9	-	-	-	
A10	Nov 8º, 1:19 PM	6	4 / 4 100%	Exibir relatório
A11	Nov 8º, 1:38 PM	2	3 / 4 75%	Exibir relatório
A12	Nov 8º, 1:23 PM	1	3 / 4 75%	Exibir relatório
A13	-	Em andamento	-	

Fonte: Plataforma Khan Academy

Dos 13 alunos, além do aluno A9, os alunos A4 e A8, não iniciaram a atividade, infere-se que, provavelmente, deixaram esta atividade por último e não tiveram tempo para realizá-la, tendo em vista que iniciaram as duas outras atividades propostas. Os alunos A7 e A13 não concluíram algumas das quatro perguntas da atividade proposta, aparecendo

no relatório “em andamento”, ou seja, começaram a atividade, mas não finalizaram todas as quatro perguntas. Os outros oito alunos, concluíram as quatro perguntas.

Novamente, observou-se o relatório, e fez-se um levantamento das perguntas que os alunos na primeira tentativa erraram ([Quadro 13](#)), mesmo considerando acertos após nova tentativa.

Quadro 13 – Perguntas contabilizadas erradas no relatório na primeira tentativa da recomendação “Cálculo de funções”

Alunos	A1	A2	A3	A6	A10	A11	A12
Perguntas	1	1, 7	9	12	2, 5, 7, 8, 9, 11	1, 4, 7	8

Fonte: autoria própria

Após as novas tentativas que a plataforma permite realizar, o [Quadro 14](#) apresenta o resultado de cada um desses alunos após a última tentativa.

Quadro 14 – Perguntas contabilizadas erradas após a última tentativa da recomendação “Cálculo de funções”

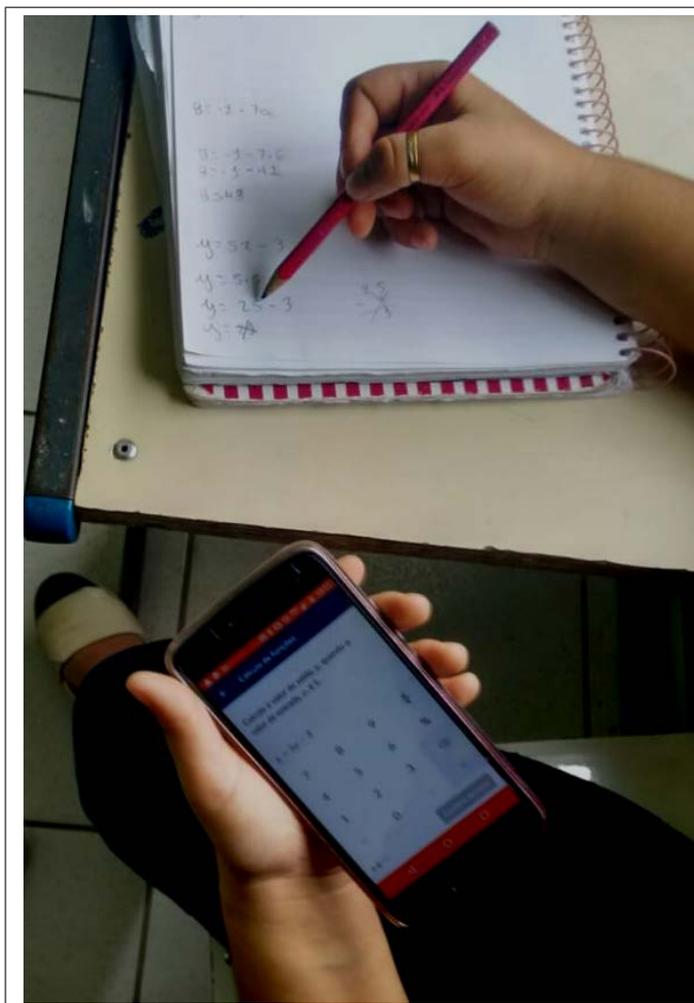
Alunos	A1	A2	A3	A6	A10	A11	A12
Perguntas	1	---	9	12	---	1	8

Fonte: autoria própria

É possível observar no relatório da [Figura 125](#) que os alunos A1, A3, A6 e A12 fizeram somente uma tentativa, logo, os mesmos contabilizaram as mesmas perguntas erradas no quadro 13. As alunas A2 e A10 fizeram no total cinco e seis tentativas, respectivamente, e obtiveram a melhor nota de 100% ([Figura 125](#)), ou seja, refizeram a atividade e acertaram todas as perguntas propostas. É perceptível que após as novas tentativas, as alunas melhoraram suas notas, principalmente a aluna A10 que havia errado 6 perguntas no total de suas tentativas alcançando seu objetivo de 100% de acerto. Já a aluna A11 obteve um aproveitamento de 75% após duas tentativas ([Figura 125](#)). É possível observar pelos quadros 3 e 4 que após a segunda tentativa a mesma conseguiu acertar duas das três perguntas que havia feito, demonstrando um resultado positivo.

Durante a resolução das perguntas, os alunos solicitavam a ajuda da pesquisadora principalmente quando erravam a resposta dada. A [Figura 126](#) apresenta a aluna A6 resolvendo as perguntas apresentadas.

Figura 126 – Aluna A6 realizando a atividade “Cálculo de funções”



Fonte: Dados da pesquisa

Embora o resultado apresentado tenha sido melhor, a pesquisadora refez as perguntas da primeira tentativa, após o levantamento das perguntas que apresentaram registros de erros no relatório, projetando-as no quadro da sala de aula, objetivando reforçar a aprendizagem, principalmente das operações básicas. A [Figura 127](#) apresenta as perguntas que os alunos tiveram dificuldades na primeira resolução.

Figura 127 – Perguntas com índices de erros da atividade “Calcule funções”

Calcule o valor de saída, d , quando o valor de entrada, t , é 11. $d = -20 + 11t$ Pergunta 1 $d =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, g , quando o valor de entrada, r , é 3. $g = -5r + 13$ Pergunta 2 $g =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, h , quando o valor de entrada, t , é 35. $h = 50 - \frac{t}{5}$ Pergunta 4 $h =$ <input type="text"/>
Calcule o valor de saída, k , quando o valor de entrada, x , é -5. $k = 6x + 100$ Pergunta 5 $k =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, k , quando o valor de entrada, t , é -7. $k = 10t - 19$ Pergunta 7 $k =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é 30. $y = 14 - 0,5x$ Pergunta 8 $y =$ <input type="text"/>
Calcule o valor de saída, b , quando o valor de entrada, a , é 6. $b = -1 - 7a$ Pergunta 9 $b =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, h , quando o valor de entrada, x , é -18. $h = 17 + \frac{x}{6}$ Pergunta 11 $h =$ <input type="text"/>	Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é 5. $y = 5x - 3$ Pergunta 12 $y =$ <input type="text"/>

Fonte: Plataforma Khan Academy

Novamente iniciou-se a correção pela pergunta no qual os alunos tiveram maior índice de erro, que foram as perguntas 1 e 7. Ambas com três erros. Na solução da pergunta qual o valor de saída d dado $d = -20 + 11t$, quando $t = 11$, visualizada no relatório, A2 respondeu -9, A1 respondeu 141 e A11 respondeu -101. É possível afirmar que os erros cometidos foram de operações básicas, pois o relatório permite visualizar o resultado de cada aluno na operação realizada. O caso de A2 substituiu por $t = 1$ ao invés de 11, A1 substituiu certo, mas somou 20 ao invés de subtrair e A11 fez a substituição correta, mas colocou sinal de menos no resultado. Nas outras perguntas percebeu-se que os demais alunos incorreram nesse mesmo tipo de erro. Talvez se a atividade apresentasse também a representação gráfica, os alunos percebessem o erro cometido na operação básica ao fazer a relação entre domínio e imagem.

A última atividade realizada foi “Complete a solução de equações com 2 variáveis” cujo banco de perguntas foi composto por 15 perguntas e teve por objetivo calcular o valor de entrada x (domínio) ou o valor de saída y (imagem), por meio da função na forma algébrica, dado um par ordenado incompleto, ou seja, avaliar se o aluno detinha o conhecimento de que se o valor fornecido no par ordenado representa o domínio ou a imagem, substituindo corretamente na função (que na atividade é chamada de equação). Também é explorado encontrar o valor que falta para completar o par ordenado.

O número de tentativas, bem como a quantidade de acertos que cada aluno fez na atividade proposta está apresentada na [Figura 128](#).

Figura 128 – Recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”

ALUNO	DATA E HORA DA CONCLUSÃO	TENTATIVAS	MELHOR NOTA	TRABALHO DO ALUNO
A1	Nov 8º, 1:49 PM	2	3 / 4 75%	Exibir relatório
A2	Nov 8º, 1:06 PM	2	3 / 4 75%	Exibir relatório
A3	Nov 8º, 1:56 PM	4	3 / 4 75%	Exibir relatório
A4	-	Em andamento	-	
A5	Nov 8º, 1:58 PM	1	4 / 4 100%	Exibir relatório
A6	Nov 8º, 1:38 PM	2	3 / 4 75%	Exibir relatório
A7	-	Em andamento	-	
A8	-	Em andamento	-	
A9	-	-	-	
A10	Nov 8º, 1:43 PM	3	2 / 4 50%	Exibir relatório
A11	Nov 8º, 1:19 PM	2	3 / 4 75%	Exibir relatório
A12	-	Em andamento	-	
A13	Nov 7º, 11:25 PM	2	1 / 4 25%	Exibir relatório

Fonte: Plataforma Khan Academy

Observou-se que dos 13 alunos, todos começaram a realizar a atividade, com exceção do aluno A9, justificado anteriormente. Os alunos A4, A7, A8 e A12 não concluíram algumas das quatro perguntas da atividade proposta, aparecendo no relatório “em andamento”, ou seja, começaram a atividade, mas não finalizaram todas as quatro perguntas. Os outros oito alunos, concluíram as quatro perguntas.

Em uma primeira tentativa, observada pelo relatório, apresenta-se no [Quadro 15](#) as perguntas que os alunos erraram, mesmo sendo considerado os acertos após novas tentativas.

Quadro 15 – Perguntas contabilizadas erradas no relatório na primeira tentativa da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”

Alunos	A1	A2	A3	A6	A10	A11	A13
Perguntas	8, 12, 13	2, 3, 11	2, 4, 5, 7, 8, 9, 14, 15	4, 5, 6, 9, 11	1, 2, 3, 5, 8, 11, 13, 14	1, 2, 9, 13	2, 5, 8, 11, 12, 13, 14

Fonte: autoria própria

Após a última tentativa que a plataforma permite realizar, apresenta-se no [Quadro 16](#) o resultado de cada um desses alunos.

Quadro 16 – Perguntas contabilizadas após a última tentativa da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”

Alunos	A1	A2	A3	A6	A10	A11	A13
Perguntas	---	---	4	---	9	2	---

Fonte: autoria própria

Observa-se que após as tentativas feitas pelos alunos, os mesmos apresentaram um resultado muito melhor em relação à primeira tentativa.

Em relação ao percentual de acertos (melhor nota) apresentado na [Figura 128](#), os alunos A1, A2 e A6 obtiveram, após 2 tentativas, a melhor nota de 75%, ou seja, acertaram 3 perguntas das quatro apresentadas, mas ao observar o quadro 6, os alunos citados não apresentaram perguntas erradas após a última tentativa. Entende-se com essa observação, que em alguma pergunta que os alunos refizeram, utilizaram uma dica e acertaram as mesmas, não sendo contabilizadas em sua melhor nota. Os alunos A3 e A11 permaneceram errando uma pergunta que, inicialmente, já haviam errado, sendo as demais, concluídas após a primeira tentativa, com êxito, inferindo-se que não as realizaram novamente. A aluna A10, acertou todas as perguntas erradas inicialmente, errando outra pergunta em sua última tentativa. Ressalta-se, em relação ao aluno A13, que na [Figura 128](#), apresentou um baixo rendimento mesmo após duas tentativas. Porém o quadro 6 mostra que após a última tentativa o mesmo não obteve mais perguntas erradas, sendo assim, da mesma forma que os alunos A1, A2 e A6, percebe-se que após errar, a plataforma não contabilizou o progresso deste aluno, mesmo ao acertar as perguntas numa segunda oportunidade, ou seja, o mesmo refez a pergunta, utilizando uma dica, e por isso não foi contabilizado em nota.

Ao fazer o levantamento das perguntas que apresentaram registros de erros no relatório, ficou evidenciado que os alunos só acertaram a pergunta 10. Apresenta-se na [Figura 129](#) as perguntas que os alunos tiveram dificuldades na resolução, que serão detalhadas a seguir.

Figura 129 – Perguntas com índices de erros na primeira tentativa da atividade “Complete soluções de equações com 2 variáveis”

$5x - 2y = 30$ Pergunta 1 Complete com o valor que falta na solução da equação. (8, <input type="text"/>)	$-4x - y = 24$ Pergunta 2 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , 8)	$y - 3 = 2(x + 1)$ Pergunta 3 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-1, <input type="text"/>)
$4x + y = 10$ Pergunta 4 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -6)	$y = 2x + 5$ Pergunta 5 Complete com o valor que falta na solução da equação. (2, <input type="text"/>)	$y = 4x - 9$ Pergunta 6 Complete com o valor que falta na solução da equação. (3, <input type="text"/>)
$y + 2 = -3(x - 4)$ Pergunta 7 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -2)	$y - 4 = -2(x + 3)$ Pergunta 8 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-3, <input type="text"/>)	$y = -2x + 4$ Pergunta 9 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -2)
$2x + 3y = 12$ Pergunta 11 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , 8)	$y = 3x - 7$ Pergunta 12 Complete com o valor que falta na solução da equação. (1, <input type="text"/>)	$6x + 7y = 4x + 4y$ Pergunta 13 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -4)
$-3x + 7y = 5x + 2y$ Pergunta 14 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-5, <input type="text"/>)		$x - 5y = -15$ Pergunta 15 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-5, <input type="text"/>)

Fonte: Plataforma Khan Academy

Abaixo descreve-se por aluno as perguntas inicialmente erradas pelos mesmos, bem como as respostas apresentadas. Na segunda coluna, apresenta-se a solução de cada pergunta que o aluno deveria apresentar, e na terceira coluna, apresenta-se a resposta dada pelos alunos, destacando em vermelho onde foi o erro cometido. Após foi feito um comentário sobre as perguntas apresentadas.

No **Quadro 17**, descreve-se a solução das perguntas feitas pelo aluno A1, as quais apresentaram erro.

Quadro 17 – Solução das perguntas 8, 12 e 13, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pelo aluno A1

Pergunta		Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
8	$y - 4 = -2(x+3)$	$(-3, 4)$	$(-3, 2)$
12	$y = 3x - 7$	$(1, -4)$	$(1, 10)$
13	$6x + 7y = 4x + 4y$	$(6, -4)$	$(5, -4)$

Fonte: autoria própria

Pôde-se inferir pelos resultados apresentados no quadro 16, que na resolução da pergunta 12, o aluno ao substituir corretamente o valor de $x = 1$, o mesmo realizou a

operação de adição, ao invés da subtração, tendo como resultado final 10 ao invés de ~ 4 . Em relação às perguntas 8 e 13, percebeu-se que o aluno cometeu esse mesmo tipo de erro ao efetuar as operações básicas, mesmo substituindo corretamente o valor apresentado no par ordenado.

Expõe-se no **Quadro 18**, a solução das perguntas feitas pela aluna A2, as quais apresentaram erro.

Quadro 18 – Solução das perguntas 2, 3 e 11, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pela aluna A2

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
2	$-4x - y = 24$	$(-8, 8)$	$(8, 8)$
3	$y - 3 = 2(x+1)$	$(-1, 3)$	$(-1, 1)$
11	$2x + 3y = 12$	$(-6, 8)$	$(-12, 8)$

Fonte: autoria própria

Na pergunta 2, a aluna A2 substituiu corretamente o valor apresentado no par ordenado, porém ao dar a resposta final não se atentou ao sinal, respondendo 8 ao invés de -8 . Em relação à pergunta 11, observou-se que a mesma ao efetuar os tratamentos necessários após a substituição do valor 8 em y na equação, chegou à resposta $2x = -12$, não efetuando a divisão de -12 por 2 para responder corretamente $x = -6$. Foi possível afirmar que os erros cometidos por ela foi de operações básicas.

Apresenta-se no **Quadro 19**, a solução das perguntas feitas pelo aluno A3, as quais apresentaram erro.

Quadro 19 – Solução das perguntas 2, 4, 5, 7, 8, 9, 14 e 15, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pelo aluno A3

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
2	$-4x - y = 24$	$(-8, 8)$	$(-4, 8)$
4	$4x + y = 10$	$(4, -6)$	$(1, -6)$
5	$y = 2x + 5$	$(2, 9)$	$\left(2, -\frac{5}{2}\right)$
7	$y + 2 = -3(x - 4)$	$(4, -2)$	$(2, -2)$
8	$y - 4 = -2(x+3)$	$(-3, 4)$	$(-3, -6)$
9	$y = -2x + 4$	$(3, -2)$	$(-3, -2)$
14	$-3x + 7y = 5x + 2y$	$(-5, -8)$	$(-5, 8)$
15	$x - 5y = -15$	$(-5, 2)$	$(-5, -2)$

Fonte: autoria própria

Em relação às perguntas 2 e 4, percebeu-se que o aluno A3 cometeu o mesmo erro, ao substituir corretamente a o valor apresentado no par ordenado, porém ao resolver a equação, realizou o tratamento errado. Na pergunta 2, infere-se que o aluno descreveu $-4x - 8 = 24$ e em seguida deveria reescrever a equação de forma que o -8 estivesse no 2º membro como $+ 8$ (pela operação inversa), mas, não realizou a operação inversa, continuando com o -8 no segundo membro e escrevendo de forma equivocada $-4x = 24 - 8$, assim, continuou a operação escrevendo $-4x = 16$, e ao dividir 16 por -4 , A3 colocou o sinal negativo em sua resposta, multiplicando os sinais de forma correta. Infere-se que o mesmo procedimento foi adotado em relação a pergunta 4. Sobre as perguntas 9, 14 e 15, percebeu-se que o aluno fez corretamente todos os passos do tratamento em cada equação, porém, o sinal não foi observado pra a resposta final. Foi possível afirmar que os erros cometidos por ele também foi de operações básicas.

Observa-se no [Quadro 20](#), a solução das perguntas feitas pela aluna A6, as quais apresentaram erro.

Quadro 20 – Solução das perguntas 4, 5, 6, 9 e 11, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pela aluna A6

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
4	$4x + y = 10$	$(4, -6)$	$(2, -6)$
5	$y = 2x + 5$	$(2, 9)$	$(2, 1)$
6	$y = 4x - 9$	$(3, 3)$	$(3, -3)$
9	$y = -2x + 4$	$(3, -2)$	$(4, -2)$
11	$2x + 3y = 12$	$(-6, 8)$	$(-4, 8)$

Fonte: autoria própria

Observando o quadro 19, e a resposta dada na pergunta 5, a aluna substituiu corretamente na equação o valor apresentado no par ordenado, porém, realizou o tratamento errado ao resolver a equação, inferindo-se que a aluna descreveu $y = 2 \cdot 2 + 5$ e em seguida reescreveu a equação de forma correta $y = 4 + 5$, mas ao realizar a operação de adição, a mesma operou da forma $-4 + 5$, chegando ao resultado 1. Infere-se que procedimentos parecidos foram adotados em relação as demais perguntas, visto que a mesma sempre solicitava a ajuda da pesquisadora para conferir onde havia errado na resolução das perguntas. A aluna A6, sempre solicitava a ajuda da pesquisadora após a plataforma sinalizar sua resposta errada, e foi percebido justamente os erros em operações básicas, bem como na resolução das equações. Apresenta-se no [Quadro 21](#), a solução das perguntas feitas pela aluna A10, as quais apresentaram erro.

Quadro 21 – Solução das perguntas 1, 2, 3, 5, 8, 11, 13 e 14, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pela aluna A10

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
1	$5x - 2y = 30$	(8, 5)	(8, 2)
2	$-4x - y = 24$	(-8, 8)	(8, 8)
3	$y - 3 = 2(x+1)$	(-1, 3)	(-1, 57)
5	$y = 2x + 5$	(2, 9)	(2, 7)
8	$y - 4 = -2(x+3)$	(-3, 4)	(-3, -4)
11	$2x + 3y = 12$	(-6, 8)	(-10, 8)
13	$6x + 7y = 4x + 4y$	(6, -4)	(12, -4)
14	$-3x + 7y = 5x + 2y$	(-5, -8)	(-5, 1)

Fonte: autoria própria

Com as observações feitas durante a aula, bem como ao ser solicitada para sanar dúvidas, foi percebido de forma geral nas respostas dos alunos erros de operações básicas. Dessa forma, a aluna A10 também apresentou erro de sinal na resposta final das perguntas 2 e 8. Pôde-se inferir sobre as perguntas 1 e 13 que o erro foi ao realizar os últimos “passos” na resolução das equações. Quanto à pergunta 1, ao reescrevê-la até chegar a $-2y = -10$ e $y = \frac{-10}{-2}$, a aluna provavelmente efetuou a operação dos sinais de forma correta e repetiu o denominador ao invés de efetuar a divisão; e quanto à pergunta 13, ao reescrever a equação até chegar a $2x = 12$, não efetuou a divisão de 12 por 2, não completando a resolução, respondendo de maneira equivocada o valor de x .

O Quadro 22 descreve a solução das perguntas feitas pela aluna A11, as quais apresentaram erro.

Quadro 22 – Solução das perguntas 1, 2, 9 e 13, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pela aluna A11

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
1	$5x - 2y = 30$	(8, 5)	(8, -8)
2	$-4x - y = 24$	(-8, 8)	(16, 8)
9	$y = -2x + 4$	(3, -2)	(-3, -2)
13	$6x + 7y = 4x + 4y$	(6, -4)	(0, -4)

Fonte: autoria própria

Inferre-se sobre os dados apurados, que na pergunta 2, a aluna A11 também fez como o aluno A3, ao reescrever a equação da forma $-4x - 8 = 24$ (após a substituição correta) e em seguida deveria reescrever a equação de forma que o -8 estivesse no 2º membro como $+8$ (pela operação inversa), mas, não realizou a operação inversa, continuando com o -8

no segundo membro e escrevendo de forma equivocada $-4x = 24 - 8$, assim, chegando a $-4x = 16$, não efetuando a divisão e encontrando o valor de $-4x$ e não de x . Em relação à pergunta 9, a mesma também, assim como os demais, errou o sinal da resposta final, escrevendo $x = -3$ ao invés de $x = 3$. A mesma observação quanto aos erros de operação básica foi feita em relação a aluna A11.

Finalizando a análise de cada aluno, descreve-se no **Quadro 23**, a solução das perguntas feitas pelo aluno A13, as quais apresentaram erro.

Quadro 23 – Solução das perguntas 2, 5, 8, 11, 12, 13 e 14, da recomendação “Complete soluções de equações com 2 variáveis”, apresentada pelo aluno A13

	Pergunta	Solução correta	Solução apresentada pelo aluno
2	$-4x - y = 24$	$(-8, 8)$	$(4, 8)$
5	$y = 2x + 5$	$(2, 9)$	$(2, 5)$
8	$y - 4 = -2(x+3)$	$(-3, 4)$	$(-3, -2)$
11	$2x + 3y = 12$	$(-6, 8)$	$(12, 8)$
12	$y = 3x - 7$	$(1, -4)$	$(1, 6)$
13	$6x + 7y = 4x + 4y$	$(6, -4)$	$(8, -4)$
14	$-3x + 7y = 5x + 2y$	$(-5, -8)$	$(-5, 6)$

Fonte: autoria própria

O aluno A13 ao responder a pergunta 2, e realizar o tratamento após a substituição correta chegou a $-4x - 8 = 24$ e em seguida deveria reescrever a equação de forma que o -8 estivesse no 2º membro como $+ 8$ (pela operação inversa), mas, não realizaram a operação inversa, continuando com o $- 8$ no segundo membro e escrevendo de forma equivocada $-4x = 24 - 8$, assim, escreveu $-4x = 16$, e ao dividir 16 por -4 , o aluno A13 respondeu $x = 4$, errando também a operação dos sinal. Percebeu-se que nas outras perguntas, cometeu o mesmo tipo de erro ao efetuar as operações básicas e na resolução de equações, onde na pergunta 11, percebeu-se que ao após a substituição correta chegou a $2x + 24 = 12$ e em seguida reescreveu ainda de forma correta, após realizar a operação inversa, $2x = 12 - 24$, ao realizar a subtração $12 - 24$, teve como resposta 12 (ao invés de -12) escrevendo $2x = 12$, não efetuando a divisão e encontrando o valor de $2x$ e não de x , além do erro do sinal. Assim como comentado anteriormente na descrição de cada aluno, o aluno A13 incorreu os mesmos erros de operação básica e resolução de equação.

Com relação às atividades proposta na plataforma Khan Academy, na atividade (i) buscou-se reforçar o conceito de imagem, visto que os mesmos ainda apresentavam dificuldades, o que pode ser evidenciado nas respostas por meio da representação gráfica na primeira tentativa. Na atividade (ii) o levantamento mostrou erros de operações básicas, visto que as funções apresentadas estavam na forma reduzida, sendo solicitada somente a substituição da variável que representava o domínio, ou seja, os alunos tinham

a compreensão de domínio e imagem, substituindo corretamente o valor apresentado na pergunta, porém errando em cálculos. Na atividade (iii), pode-se perceber que além dos erros de operações básicas, conforme já evidenciados acima, os alunos apresentaram dificuldades em resolver equação do 1º grau ao substituir os valores corretamente, pois a todo instante a pesquisadora era solicitada para dirimir dúvidas a respeito da resolução da equação, o que possibilitou em novas tentativas a redução dos erros cometidos.

Embora os alunos não tenham feito a atividade em casa com o uso da plataforma Khan Academy, na sala de aula o uso do *app* foi bastante favorável à aprendizagem.

O Khan Academy enquanto uma plataforma que oferece várias atividades nos diversos níveis de ensino possibilita ao aluno independência na resolução de atividades que podem ser escolhidas pelo professor. Assim, ao propor o uso desta tecnologia para reforçar atividades anteriores desenvolvidas em sala de aula, o objetivo foi oferecer um recurso digital que possibilitasse ao aluno diversificar e ser autônomo em sua aprendizagem.

Os alunos discutiram entre si muitas das perguntas propostas na plataforma em questão, conforme observado pela pesquisadora, além de terem acesso a um banco de perguntas em que cada aluno poderia ter ou não as mesmas perguntas que seu colega de grupo, o que permitiu a eles discutirem perguntas entre si que não faziam parte da sua atividade.

Neste sentido, julgou-se relevante o uso dessa tecnologia na metodologia proposta em sala de aula.

5.7 Atividade 4 – Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim

A Atividade 4 intitulada “Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim”, [Apêndice G](#) foi aplicada no dia 13 de novembro de 2018, com duração de 02 horas/aula, com a presença de 11 alunos. Esta utilização do Geogebra acontece após a construção do conhecimento da lei de formação da Função Afim explorada na atividade anterior.

Esta atividade é composta de duas questões investigativas com os objetivos de a partir da manipulação no *app* Geogebra responder sobre (i) coeficiente angular, (ii) coeficiente linear, (iii) interseções com os eixos, (iv) identificar a partir do coeficiente a o crescimento e/ou decréscimo da função.

Os alunos continuaram divididos em três grupos de quatro alunos cada (o mesmo formado nas aulas anteriores), para que mantivessem interações, como trocar ideias e fazer conjecturas juntos.

Ao iniciar o encontro, a pesquisadora apresentou os objetivos da aula e entregou as folhas de atividades para os alunos de cada grupo e colocou que ao final da aula corrigiria as questões, discutindo com todos, cada questão.

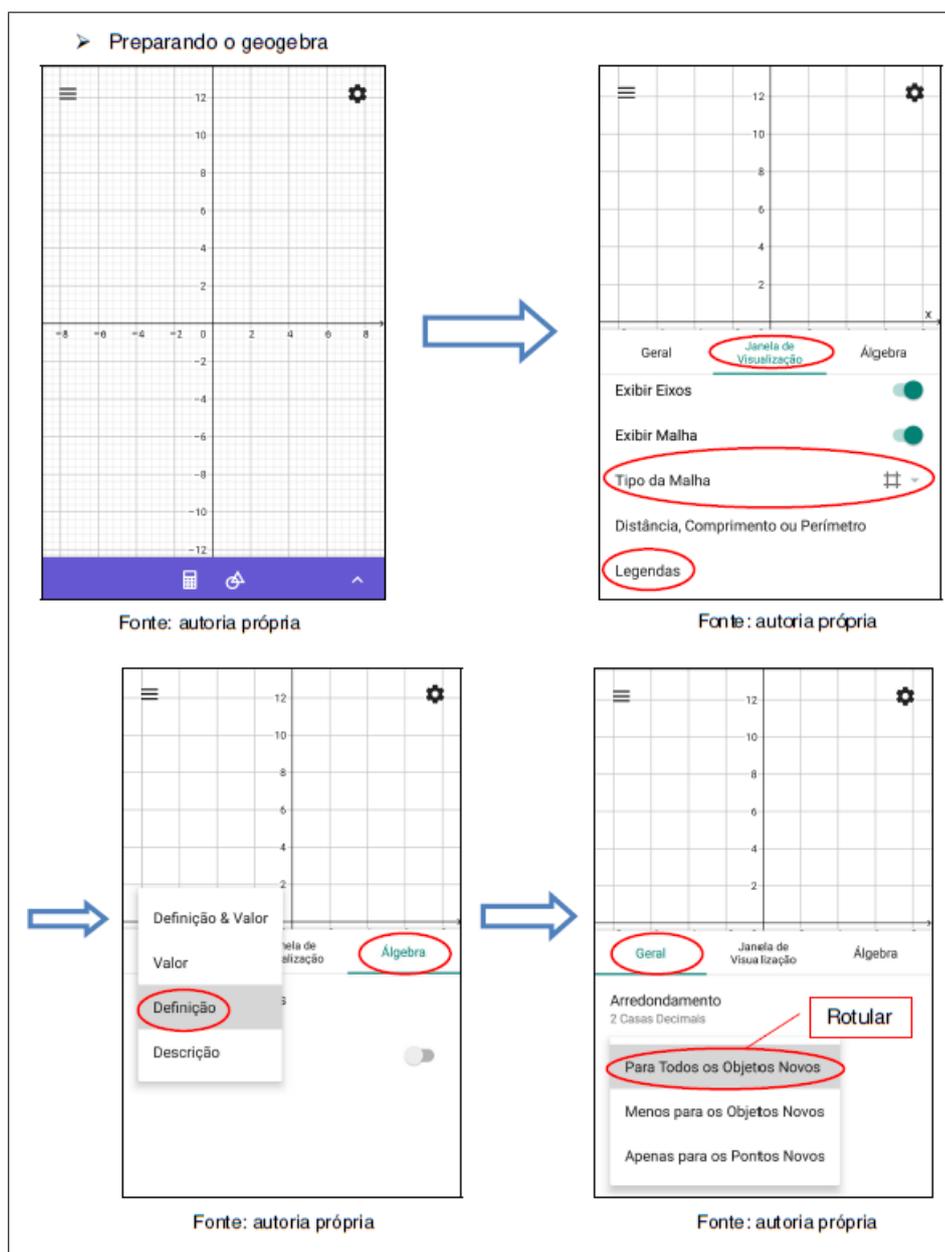
Ao término da aula anterior, foi solicitado aos alunos que os mesmos baixassem em seus *smartphones* o *app* “Geogebra” em casa para utilizar nessa atividade.

Todos estavam com o Geogebra instalado. A pesquisadora com o projetor multimídia o Geogebra instalado em seu computador fez uma projeção para que os alunos também acompanhassem o passo a passo da configuração, possibilitando as intervenções necessárias durante a atividade.

A primeira parte da atividade consistiu em preparar o Geogebra com as configurações necessárias para a atividade, como (i) deixar somente a malha principal para que a tela do computador não ficasse muito cheia, (ii) marcar a legenda para que o nome dos eixos aparecessem, (iii) na janela de álgebra selecionassem somente “definição” (para que ao traçar a reta a partir de dois pontos o *app* não mostrasse a equação da reta, pois esse seria o objetivo do aluno posteriormente) e (iv) na janela geral, clicassem em rotular e selecionassem para todos os objetos novos.

A primeira parte foi feita em conjunto com os alunos, seguindo os passos descritos acima, os quais estavam na atividade entregue, conforme [Figura 130](#).

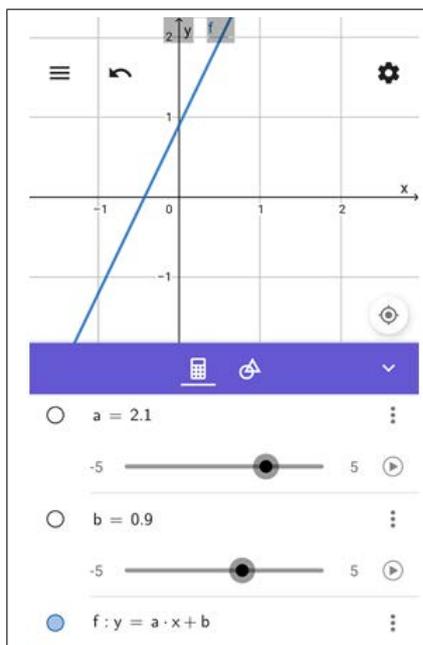
Figura 130 – Preparando o Geogebra para iniciar a atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa

Após todos estarem com o *app* configurado, iniciou-se as questões.

O desafio maior estava em fazer uso do Geogebra como facilitador da aprendizagem, o que na metodologia proposta, julgou ser este o momento para a sua utilização, pois o aluno já tinha conhecimento da lei de formação e assim poderia explorar os coeficientes da função afim. A questão 1 propôs ao aluno digitar a função afim na forma geral $y = ax + b$, para que os mesmos manipulem os coeficientes a e b observando o que acontece com o gráfico de acordo com a mudança dos coeficientes, como ilustra a [Figura 131](#).

Figura 131 – Gráfico da função $y = ax + b$ 

Fonte: Dados da pesquisa

Após deixar os alunos durante algum tempo manipular o *app* Geogebra, a pesquisadora iniciou uma discussão sobre os itens (i) e (ii) da questão 1 que explorava características do gráfico de acordo com a mudança dos coeficientes a e b .

A pesquisadora indagou:

P: Variem o coeficiente a e observem o gráfico. O que acontece?

A: O gráfico fica mudando de direção, tá girando.

P: Como?

E os alunos responderam:

A: Fica girando de um lado para o outro

A pesquisadora pediu para que fizessem anotações sobre o que respondiam. Após anotarem suas observações a pesquisadora continuou:

P: Variem agora o coeficiente b e observem o gráfico. O que acontece?

A5: Vai pra cima ou pra baixo.

A13: Tá indo para o lado.

A pesquisadora pediu para que fizessem suas anotações novamente.

Observando os alunos nos grupos, percebeu-se que diante da interface do Geogebra, os alunos construíram livremente vários tipos de gráficos, com coeficientes de valores variados e em suas respostas perceberam que a alteração de seus coeficientes resulta na

rotação do gráfico ou sua translação.

Após a discussão da característica do gráfico de acordo com os coeficientes (a) e (b), que foram propostos nos itens (i) e (ii), a pesquisadora formalizou, no item (iii), a nomenclatura dos coeficientes a e b , bem como a característica de cada um.

Após anotarem suas observações a pesquisadora observou que as respostas dos alunos A5 (grupo 3) e A13 (grupo 1) eram correspondentes a posição do gráfico em que observavam. A Figura 132 ilustra a resposta do aluno A13.

Figura 132 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1 itens (i), (ii) e (iii) do aluno A13 do grupo 1

> Voltando a tela inicial

Questão 1: No campo "entrada" digite $y = ax + b$ e clique em enter (↵)

i) O que acontece quando você modifica o coeficiente a ?
Ta girando

ii) O que acontece quando você modifica o coeficiente b ?
Ta vindo para o lado

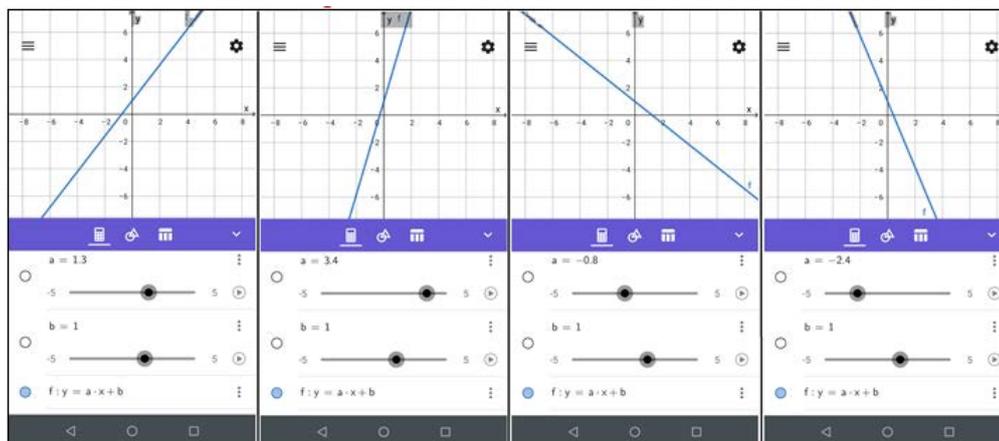
iii) Na função $y = ax + b$, o coeficiente a é chamado de coeficiente angular da reta e o coeficiente b é chamado de coeficiente linear.

Fonte: autoria própria

Fonte: Dados da pesquisa

Ao explorar o coeficiente a , mostrou-se, utilizando o Geogebra, várias retas, em que o valor do coeficiente b é fixo, modificando o valor do coeficiente a , (Figura 133) pedindo aos alunos que prestassem atenção no que acontecia com a inclinação da reta, cada vez que modificava o valor do coeficiente a , em relação ao eixo das abscissas x e os fez perceber que a inclinação da reta mudava em relação ao eixo das abscissas e que entre a reta e este eixo formava-se um ângulo. Nesse momento explicou que o movimento de “girar” que colocaram inicialmente foi referente ao ângulo que a reta fazia com o eixo das abscissas, num movimento de rotação, e tal coeficiente se chamava coeficiente angular da reta, também chamado de taxa de variação da função.

Figura 133 – Explorando o coeficiente a

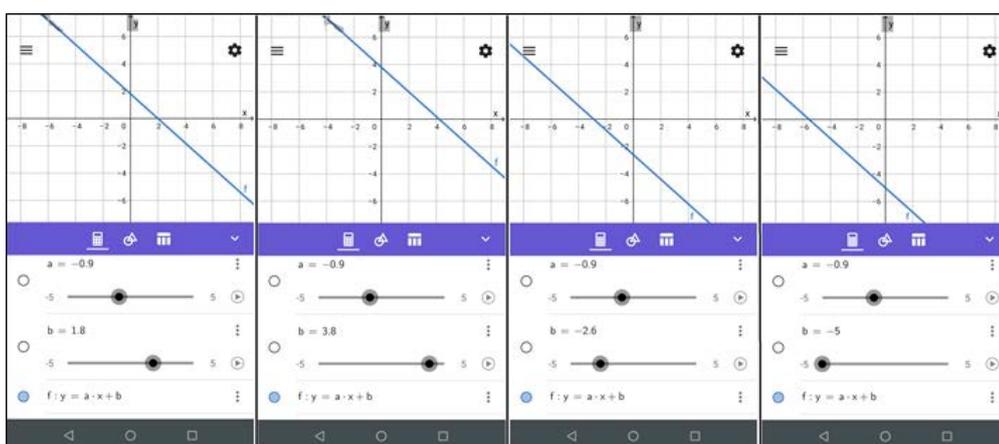


Fonte: autoria própria

Para explorar o coeficiente b , pediu-se novamente que só manipulassem o coeficiente b (Figura 134) para terem a percepção que a inclinação da reta não se alterava e que a mesma intersectava o eixo y em vários pontos e não havia um movimento de rotação.

Nesse momento, explicou-se que o movimento para cima e para baixo que colocaram inicialmente se chamava translação e, portanto esta translação envolvia movimentos verticais, que quanto mais a reta mostrasse um movimento de subida, maior seria o valor do coeficiente b e quanto mais o movimento da reta fosse de descida, menor seria o valor do coeficiente b . Explicou-se então que por se tratar de um movimento de translação o coeficiente b se chamava coeficiente linear.

Figura 134 – Explorando o coeficiente b



Fonte: autoria própria

O item (iv), ainda da questão 1, objetiva-se a identificar a partir do coeficiente a o crescimento e decréscimo da função.

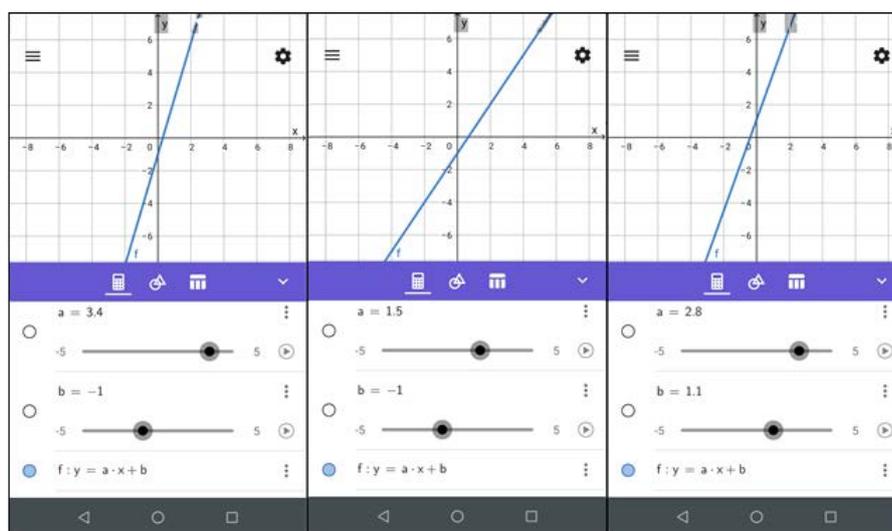
Após a mediação da pesquisadora no item (iii), a mesma solicitou que os alunos

respondessem o item (iv). Comentou novamente que os mesmos poderiam continuar manipulando o *app*, buscando perceber quando o coeficiente angular a fosse positivo ou negativo, qual característica os mesmos observavam.

A pesquisadora indagou após alguns minutos:

P: E agora, sempre que temos o valor de a positivo (Figura 135), o que acontece com o gráfico? Ou seja, o que acontece com os valores de x e de y ?

Figura 135 – Funções com o coeficiente a positivo



Fonte: autoria própria

A: “O gráfico fica crescendo”, “Está indo para cima”

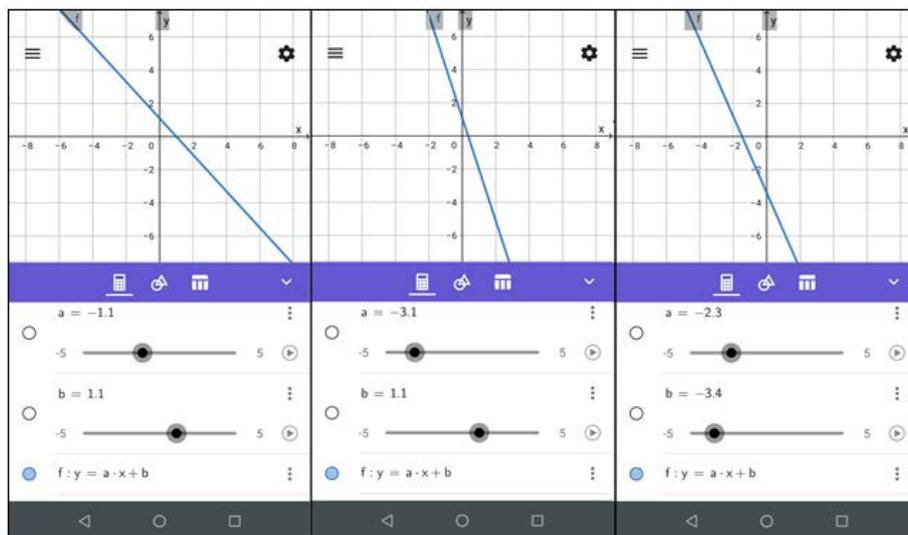
P: E em relação aos valores de x e y ?

A: Eles crescem. Quando um cresce o outro cresce também.

A pesquisadora solicitou que os mesmos anotassem suas observações. E continuou:

P: E agora, sempre que temos o valor de a negativo (Figura 136), o que acontece com o gráfico? Ou seja, o que acontece com os valores de x e de y ?

Figura 136 – Funções com o coeficiente a negativo



Fonte: autoria própria

A: “O gráfico fica caindo”, “Está indo para baixo”.

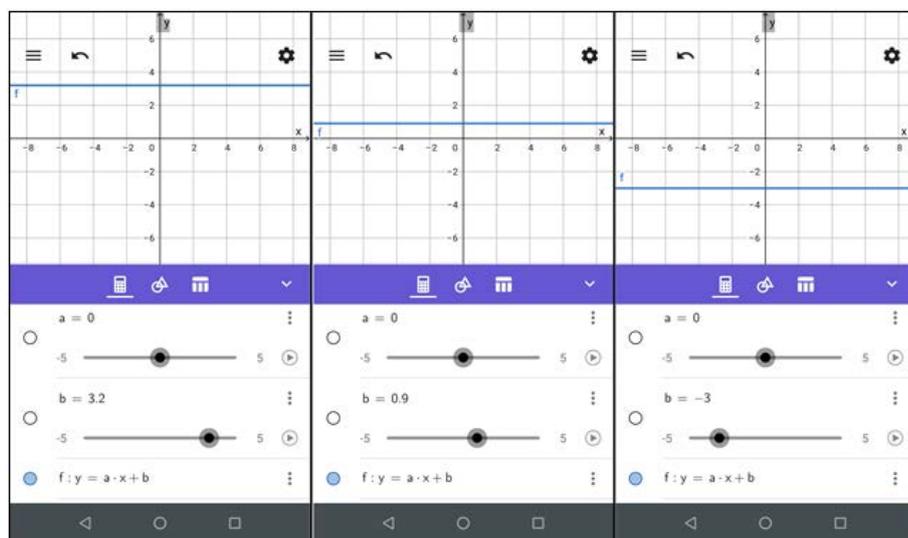
P: E em relação aos valores de x e y ?

A: Quando um cresce o outro diminui

A pesquisadora novamente solicitou que os mesmos anotassem suas observações. E continuou:

P: E agora, o que acontece com o gráfico quando o valor do coeficiente a é zero (Figura 137)?

Figura 137 – Funções com o coeficiente a zero



Fonte: autoria própria

A: “O gráfico fica reto”, “Fica deitado”.

Ao obter a resposta que o gráfico “fica deitado”, onde houve o gesto do braço de forma a representar o gráfico paralelo ao eixo x , a pesquisadora comentou justamente dessa expressão “paralelo ao eixo x ”, entendendo que os mesmos haviam compreendido a questão.

Sendo assim, a Figura 138 ilustra a resposta dos alunos A13 do grupo 1, A6 do grupo 2 e A4 do grupo 3, com a concepção inicial e complementada pela explicação conceitual.

Figura 138 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1 item (iv)

<p>iv) Explorando o coeficiente a: Aluno A13 - grupo 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é positivo? <u>Está crescendo</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é negativo? <u>quando aumenta um, diminui o outro</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é zero? <u>Paralela ao eixo x</u> <p>Obs.: Quando a é zero, temos uma função <u>Constante</u>.</p>
<p>iv) Explorando o coeficiente a: Aluna A6 - grupo 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é positivo? <u>Está crescendo em função crescente.</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é negativo? <u>quando y aumenta e x diminui, decrescente</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é zero? <u>paralela ao eixo x</u> <p>Obs.: Quando a é zero, temos uma função <u>constante</u>.</p>
<p>iv) Explorando o coeficiente a: Aluno A4 - grupo 3</p> <ul style="list-style-type: none"> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é positivo? <u>x e y aumentam seus valores (função crescente)</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é negativo? <u>quando x aumenta e y diminui (função decrescente)</u> • O que acontece com o gráfico quando o valor de a é zero? <u>Fica paralelo ao eixo x.</u> <p>Obs.: Quando a é zero, temos uma função <u>constante</u>.</p>

Fonte: Dados da pesquisa

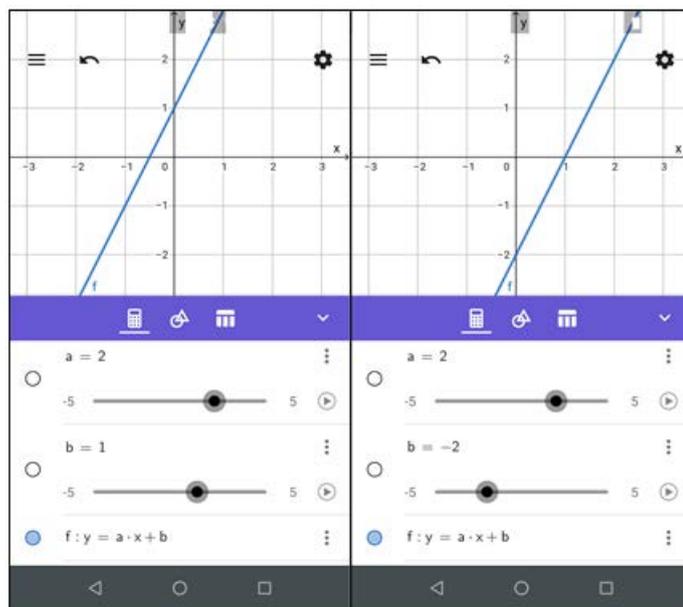
O item (v) da questão 1 objetiva-se a explorar o coeficiente b de forma que o aluno perceba que o ponto em que gráfico intersecta o eixo y é exatamente o ponto $(0, b)$, ou seja, quando o valor de x é zero, o valor de y é exatamente o valor de b .

Para responder tal pergunta, foi unânime o pedido de ajuda à pesquisadora. Assim, a mesma entrevistou perguntando “agora deixem o valor de a fixo, ou seja, não mexam mais

no coeficiente a no *app*. Mexam somente com o coeficiente b . O que vocês observam?

A pesquisadora induziu que os mesmos observassem que o valor do coeficiente b era exatamente onde o gráfico intersectava o eixo y . Assim, a mesma escreveu dois exemplos, que apareciam no *app* dos alunos, no quadro, apresentados na [Figura 139](#).

Figura 139 – Exemplos explorados de duas funções afins



Fonte: autoria própria

A pesquisadora então escreveu as funções “ $y = 2x + 1$ ” e “ $y = 2x - 2$ ” e indagou: “nessa primeira função $y = 2x + 1$, quando x for zero, qual o valor da função?”

E os alunos responderam “um”.

Após a resposta correta, a mesma continuou: “observando a lei de formação da primeira função $y = 2x + 1$, qual o valor do coeficiente b ?” e os mesmos responderam “o mesmo valor quando x vale zero, é igual a um”.

Assim, perguntou também para a outra função: “na função $y = 2x - 2$, quando x for zero, qual o valor da função?”

E os alunos responderam “menos dois”.

Após a resposta correta, a mesma continuou: “observando para a lei de formação da função $y = 2x - 2$, qual o valor do coeficiente b ?” e os mesmos responderam “o mesmo valor quando x vale zero, é igual a menos dois”.

P: “Isso quer dizer algo?”

A2: “Sim, que o gráfico vai cortar o eixo y no valor de b ”

Dessa forma, a pesquisadora formalizou as respostas dos alunos, e os mesmos anotaram suas respostas, como ilustra a [Figura 140](#) com as respostas dos alunos A13 do

grupo 1, A2 do grupo 2 e A4 do grupo 3.

Figura 140 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1, item (v)

<p>v) Explorando o coeficiente b: Aluno A13 - grupo 1</p> <ul style="list-style-type: none"> O que acontece com o gráfico quando fixamos o valor de a e mudamos o valor de b? <p>O valor de B é igual a y quando x for 0.</p>
<p>v) Explorando o coeficiente b: Aluna A2 - grupo 2</p> <ul style="list-style-type: none"> O que acontece com o gráfico quando fixamos o valor de a e mudamos o valor de b? <p>O valor de B = y quando x for 0.</p>
<p>v) Explorando o coeficiente b: Aluno A4 - grupo 3</p> <ul style="list-style-type: none"> O que acontece com o gráfico quando fixamos o valor de a e mudamos o valor de b? <p>É o valor B = y quando x = 0</p>

Fonte: Dados da pesquisa

O item (vi) foi realizado por meio da mediação da pesquisadora com os alunos, e teve como objetivo formalizar a interseção da reta da função afim com os eixos coordenados. A mesma aproveitou a resposta do item (v) para responder a interseção com o eixo y no item (vi).

A pesquisadora fez a representação gráfica da [Figura 139](#) no quadro.

Os alunos não demonstraram dúvidas. Quanto à interseção com o eixo x , a pesquisadora também entrevistou, os conduzindo com perguntas.

P: “Quando o gráfico intersecta o eixo x – uma pausa e mostra no quadro o desenho do gráfico da função $y = 2x + 1$ ([Figura 139](#)) e aponta para a interseção com o eixo x – nesse ponto, qual o valor de y ?”

A1: “Zero”.

P: “Perfeito. Agora se nesse ponto y é zero, qual o valor de x ?”

A1: “Temos que fazer a conta para descobrir.”

Assim a pesquisadora escreveu no quadro a conta feita juntamente com os alunos:

$$y = 2x + 1$$

$$0 = 2x + 1$$

$$-2x = 1 \cdot (-1)$$

$$2x = -1$$

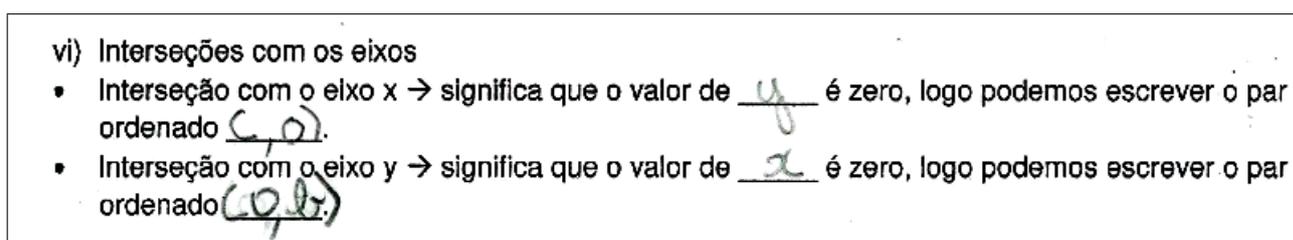
$$x = -\frac{1}{2}$$

A pesquisadora com o exemplo dado no quadro encontrou o valor de x , dado y igual a zero.

O outro exemplo $y = 2x - 2$, da [Figura 139](#), foi feito com os alunos no *app*, que chegaram à conclusão que o valor de x vai mudar de acordo com a função dada. Nesse momento a pesquisadora comentou que esse valor de x , quando y é zero é chamado de raiz da função, de acordo com a [1.7](#) definição 1.7.

Como as respostas foram iguais, destaca-se a resposta do aluno A1 do grupo 1 na [Figura 141](#).

Figura 141 – Resposta da Atividade 4 – Questão 1, item (vi) do aluno A1 do grupo 1



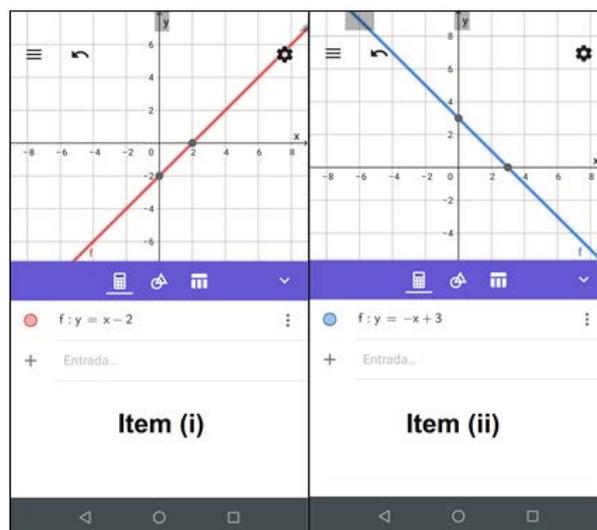
Fonte: Dados da pesquisa

Foi importante o uso do *app* geogebra, pois o mesmo permitiu que os alunos formulassem suas conjecturas ao manipularem o *app*. Além disso, o mesmo promoveu a visualização de mais de uma representação de função, sendo estas a forma algébrica e gráfica ([STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2013](#)).

A **questão 2** teve por objetivo que os alunos fizessem os gráficos das funções solicitadas e identificassem os coeficientes a e b , bem como os pontos de interseção com os eixos coordenados, podendo responder pela observação da forma algébrica ou gráfica da função.

Os alunos fizeram em grupo, sem solicitar a ajuda da pesquisadora, utilizando o Geogebra para responder as perguntas propostas, não apresentando dificuldades para a compreensão da questão. Observou-se que nos itens (i) e (ii) letras (a) e (b), os alunos utilizaram a forma algébrica da função para responder corretamente os valores dos coeficientes a e b . Observou-se ainda que os alunos utilizaram o gráfico no *app* Geogebra para responder corretamente sobre os pontos de interseção com os eixos coordenados, letras (c) e (d) dos itens (i) e (ii), conforme [Figura 142](#).

Figura 142 – Resposta da Atividade 4 – Questão 2: Utilizando o Geogebra para responder as perguntas do aluno A12 do grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

No item (iii) da questão 2, a pesquisadora precisou intervir, pois os alunos não estavam alcançando o objetivo da questão. Assim, a mesma relembrou o item (v) da questão 1, apresentando os gráficos dos itens (i) e (ii) no geogebra (Figura 142), e os alunos conseguiram responder corretamente a questão de acordo com a Figura 143 que apresenta a resposta do aluno A12 do grupo 1.

Figura 143 – Resposta da Atividade 4 – Questão 2 do aluno A12 do grupo 1

Questão 2: Utilizando o Geogebra, faça os gráficos abaixo, e responda as perguntas observando à lei da função e o gráfico correspondente:

i) Faça o gráfico da função $y = x - 2$

a) Qual o valor do coeficiente angular? 1

b) Qual é o valor do coeficiente linear? -2

c) Qual é o ponto de interseção com o eixo x? (2, 0)

d) Qual é o ponto de interseção com o eixo y? (0, -2)

ii) Faça o gráfico da função $y = -x + 3$

a) Qual o valor do coeficiente angular? -1

b) Qual é o valor do coeficiente linear? 3

c) Qual é o ponto de interseção com o eixo x? (3, 0)

d) Qual é o ponto de interseção com o eixo y? (0, 3)

iii) O que podemos dizer sobre o coeficiente b ao comparar o gráfico com a lei da função?

O gráfico vai passar no eixo y no valor de B

Fonte: Dados da pesquisa

Na atividade 4 buscou-se interações aluno-aluno e aluno-objeto de aprendizagem enquanto tecnologia digital, para que conhecimentos fossem construídos conjuntamente, bem como, quando houve a necessidade de intervenções e mediações ocorridas entre pesquisadora-alunos-objeto de aprendizagem propiciando aos alunos desconstruir conceitos errôneos que contribuíram para a construção do conhecimento dos mesmos, promovidos pelo uso do *app* Geogebra, explorando os conceitos do objetivo proposto na mesma.

Ao fazer uso do Geogebra foi possível explorar as transformações por conversão entre as representações gráficas e a representação algébrica, que como já descrito anteriormente, é o tipo de representação que os alunos apresentam mais dificuldades e neste sentido entendeu ser fundamental continuar a explorar este tipo de representação, objetivando a construção de conhecimentos formalizados através de representações gráficas.

Após encerrar a atividade 4, a pesquisadora complementou no quadro a conversão da representação gráfica para a lei de formação da função a partir de dois pontos dados, explorando o crescimento e decrescimento da função, bem como os pontos de interseção com os eixos coordenados, por meio de exemplos, além de explorar o tratamento para encontrar o coeficiente angular da reta, dada a lei de formação da função na escrita geral, conforme anotação do aluno A13 ([Figura 144](#)).

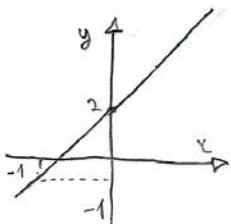
Figura 144 – Anotação do aluno A13 ao final da aula

→ O coeficiente angular da reta é chamado de taxa de variação da função.

Coefficiente angular = a

$$a = \frac{\text{Variação em } y}{\text{Variação em } x}$$

exemplo:



Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos: $(-1, -1), (0, 2)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{2 - (-1)}{0 - (-1)}$$

$$a = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = 3x + 2$$

Exemplo 2:

Qual o coeficiente angular da reta de equação:

$$3x + y = 4$$

$$y = -3x + 4$$

$$a = \frac{-1 - 5}{-1 - 1} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$a = 3$$

$y = ax + b$
 se ponto $P \in y$.
 $\rightarrow 5 = 3 + b$
 $5 = 3 + b$
 $b = 2$
 $y = 3x + 2$
 $y = ax + b$

Fonte: Dados da pesquisa

5.8 Atividade 5 - Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica

A Atividade 5 – “Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica”, ??, foi aplicada no dia 21 de novembro de 2018, com duração de 2 horas/aula com a presença de 12 alunos. Para essa atividade, os alunos fizeram uso do Geogebra para

a primeira questão, o qual já haviam instalado desde a aula anterior.

A atividade é composta de quatro questões com os objetivos de (i) encontrar o coeficiente angular da reta a partir de dois pontos dados, bem como a equação da reta (lei de formação da função), explorando a conversão, (ii) encontrar o coeficiente angular da reta a partir da lei de formação (precisando que reescreva a lei de formação na forma reduzida), explorando o tratamento da representação algébrica, (iii) encontrar o coeficiente angular da reta, bem como a lei da função a partir do gráfico dado, explorando a conversão, (iv) a partir de uma situação problema dado pelo gráfico, encontrar o coeficiente linear, coeficiente angular, encontrar a lei da função, utilizando a conversão e substituir dados na função.

Os alunos continuaram divididos em três grupos de quatro alunos cada (o mesmo formado nas aulas anteriores), para que pudessem continuar a trocar ideias e fazer conjecturas juntos.

Ao iniciar o encontro, a pesquisadora como nas aulas anteriores apresentou os objetivos da aula e entregou as folhas de atividades para os alunos de cada grupo. A metodologia proposta foi efetuar a correção na mesma aula, discutindo com os grupos as questões da atividade proposta.

A **questão 1** objetivou-se (i) encontrar o coeficiente angular da reta a partir de dois pontos dados, bem como a equação da reta (lei de formação da função), explorando a conversão.

Passado alguns minutos do início da aula e entrega da atividade, o grupo 2 solicitou que a pesquisadora esclarecesse a dúvida do grupo, pois, ao colocar em prática o que havia estudado na aula anterior, sentiram dificuldade por encontrar número fracionário, ou seja, sabiam o que era para ser feito na questão, mas quando o resultado era uma fração eles perguntavam onde estavam errando. O mesmo aconteceu com o grupo 3. Diante da dúvida da maioria, a pesquisadora foi ao quadro.

Primeiro a mesma lembrou o que haviam estudado na aula anterior, colocando no quadro a lei de formação da função “ $y = ax + b$ ”, e também como encontrar o coeficiente angular a partir de dois pontos efetuando o cálculo de $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Após esse momento, a pesquisadora, no quadro, foi desenvolvendo junto com os alunos, encontrando o coeficiente a primeiro.

Depois, explicou a eles que deveriam substituir o coeficiente a encontrado, na lei de formação da função $y = ax + b$ (equação da reta). Depois de esperar todos substituírem explicou que poderia ser usado qualquer um dos dois pontos fornecidos para encontrar o coeficiente b , pois os mesmos pertencem à mesma função, ou seja, à mesma reta. Escolheu-se o par ordenado $(1, 2)$.

Destaca-se a resposta da aluna A2 do grupo 2 na [Figura 145](#).

Figura 145 – Resposta da Atividade 5 – Questão 1 item a da aluna A2 do grupo 2

1) Encontre o coeficiente angular da reta e a equação da reta que passa pelos pontos abaixo:

a) $(-3, 5)$ e $(1, 2)$

$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ $y = ax + b$

$a = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$

$a = \frac{5 - 2}{-3 - 1} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + b$

substituído $(1, 2)$ em $y = -\frac{3}{4}x + b$

$2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + b$

$2 = -\frac{3}{4} + b$

$\frac{2 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{11}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

CONVERSÃO

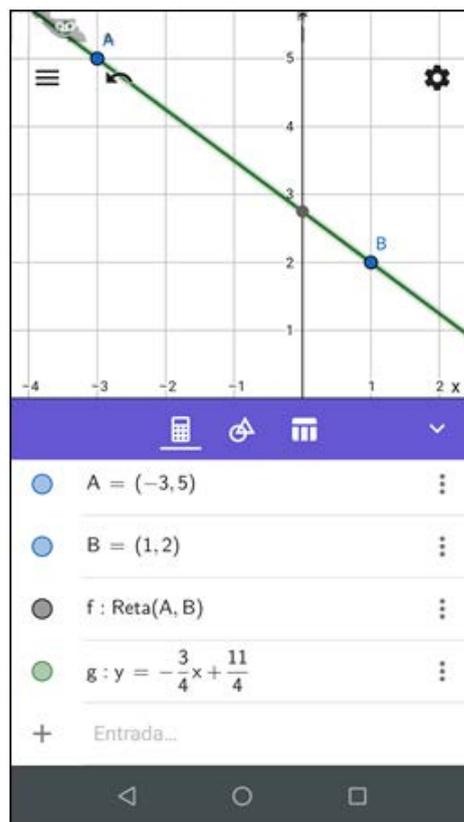
➤ Essa função é crescente ou decrescente? *função decrescente*

➤ Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo "entrada" a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?
Ficou uma reta em cima da outra

Fonte: Dados da pesquisa

Após encontrar a lei de formação da função os alunos responderam oralmente e corretamente em relação ao crescimento da função observando o sinal do coeficiente a . Depois, foi solicitado que fizessem o procedimento com o Geogebra, ou seja, plotar os pontos dados e traçar a reta que passa por esses pontos. No Geogebra aparece a reta que passa pelos pontos dados com a nomenclatura "Reta (A, B)". Após, como pedido, no campo entrada, digitaram a lei de formação da função (equação da reta) que encontraram com suas contas, em que imediatamente o gráfico foi plotado, ficando sobreposto à reta que passa pelos pontos fornecidos, já presente no Geogebra, conforme [Figura 146](#). Os alunos fizeram esse passo a passo sem dúvidas e sem solicitar a ajuda da pesquisadora e foi unânime a expressão de surpresa dos alunos ao perceberem que as retas eram coincidentes e responderam "ficou uma reta em cima da outra".

Figura 146 – Gráfico da Atividade 5 – Questão 1, item (a), feito no Geogebra pela aluna A2 do grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Foi uma questão que apesar de acharem difíceis as contas, gostaram ao perceber que estavam fazendo de forma correta.

Os alunos solicitaram que fizessem sozinhos o item (b), que é bem similar ao item (a). Os mesmos fizeram sem intervenção da pesquisadora, discutindo entre o próprio grupo trocando informações. Observou-se que os mesmos seguiram o passo a passo descrito no item (a), e fizeram a representação gráfica a partir dos pontos dados, como mostra as respostas da aluna A11 do grupo 1 e do aluno A3 do grupo 3 (Figura 147).

Figura 147 – Resposta da Atividade 5 – Questão 1 item b

<p>A B b) (1, 2) e (-3, 0)</p> $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ $a = \frac{2 - 0}{1 - (-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + b$ <p>Subst. (-3, 0) em $y = \frac{1}{2}x + b$</p>	<p>Aluna A11 - grupo 1</p> $0 = \frac{1}{2}(-3) + b$ $0 = \frac{-3}{2} + b \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $b = \frac{3}{2}$ <p>> Essa função é crescente ou decrescente? > Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo "entrada" a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?</p>
<p>b) (1, 2) e (-3, 0)</p> $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ $a = \frac{2 - 0}{1 - (-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + b$	<p>Aluno A3 - grupo 3</p> <p>Substituindo (-3, 0) em $y = \frac{1}{2}x + b$</p> $0 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + b$ $a = \frac{-3}{2} + b \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $b = \frac{3}{2}$ <p>> Essa função é crescente ou decrescente? <i>função crescente.</i> > Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo "entrada" a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?</p>

Fonte: Dados da pesquisa

Os dois grupos acima apresentados, bem como o grupo 2, conseguiram concluir corretamente a questão, deixando de registrar com anotações o crescimento da função e a conclusão observada com o *app* Geogebra. Observou-se na correção da atividade na aula seguinte que os mesmos compreenderam o que estava sendo feito. A descrição da correção se dará mais a frente.

A **questão 2**, que teve por objetivo encontrar o coeficiente angular da reta a partir da lei de formação da função, explorando o tratamento da representação algébrica. Os alunos não apresentaram muitas dificuldades, realizando o tratamento de forma adequada em cada item, sem solicitar o auxílio da pesquisadora, ao reescrever as equações (lei de formação da função) na forma reduzida " $y = ax + b$ ". Observou-se que os mesmos discutiam entre o grupo, chegando às conclusões corretas. Destaca-se na [Figura 148](#) as respostas dos alunos A13 do grupo 1, A6 do grupo 2 e A5 do grupo 3.

Figura 148 – Resposta da Atividade 5 – Questão 2

<p>2) Encontre o coeficiente angular da reta das equações abaixo. Dica: reescreva a equação para que fique da forma "y = ax + b". Aluno A13 - grupo 1</p>	
<p>a) $2x - 5y = 9$</p> $\begin{array}{l} -5y = 9 - 2x \\ y = \frac{9 - 2x}{-5} \\ y = \frac{-9 + 2x}{5} \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = \frac{2}{5} \end{array} \right.$	<p>b) $y + 5 = 2(x + 1)$</p> $\begin{array}{l} y + 5 = 2x + 2 \\ y = 2x + 2 - 5 \\ y = 2x - 3 \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = 2 \end{array} \right.$
<p>2) Encontre o coeficiente angular da reta das equações abaixo. Dica: reescreva a equação para que fique da forma "y = ax + b". Aluna A6 - grupo 2</p>	
<p>a) $2x - 5y = 9$</p> $\begin{array}{l} -5y = 9 - 2x \\ y = \frac{9 - 2x}{-5} \\ y = \frac{-9 + 2x}{5} \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = \frac{2}{5} \end{array} \right.$	<p>b) $y + 5 = 2(x + 1)$</p> $\begin{array}{l} y + 5 = 2x + 2 \\ y = 2x + 2 - 5 \\ y = 2x - 3 \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = 2 \end{array} \right.$
<p>2) Encontre o coeficiente angular da reta das equações abaixo. Dica: reescreva a equação para que fique da forma "y = ax + b". Aluno A5 - grupo 3</p>	
<p>a) $2x - 5y = 9$</p> $\begin{array}{l} -5y = 9 - 2x \\ y = \frac{9 - 2x}{-5} \\ y = \frac{-9 + 2x}{5} \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = \frac{2}{5} \\ \text{crescente} \end{array} \right.$	<p>b) $y + 5 = 2(x + 1)$</p> $\begin{array}{l} y + 5 = 2x + 2 \\ y = 2x + 2 - 5 \\ y = 2x - 3 \end{array} \quad \left \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ \text{crescente} \end{array} \right.$

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos demonstraram domínio da questão, realizando o tratamento, e o aluno A5 ainda complementa com a informação do crescimento da função.

A **questão 3**, que objetivou encontrar o coeficiente angular da reta, bem como a lei da função a partir do gráfico dado, explorando a conversão.

A questão é composta por dois itens similares. Os grupos pediram a intervenção da pesquisadora no item (a), solicitando um direcionamento na resolução da questão. Percebeu-se que os mesmos não haviam interpretado a questão.

A pesquisadora foi ao quadro, e iniciou explicando que o objetivo da questão 3 era similar a questão 1, ao solicitar o coeficiente angular da reta bem como a equação da mesma, diferenciando apenas da representação inicial, que na questão 1 a solicitação é a partir de dois pontos (par ordenado) e na questão 3, se dá a partir da representação gráfica.

A pesquisadora iniciou o item (a), colocando no quadro a lei da função " $y = ax + b$ ", e continuou argumentando por onde começariam a responder a questão. Para encontrar o valor do coeficiente a , a mesma explicou que os alunos deveriam identificar no gráfico dois pontos pertencentes à reta (gráfico), e efetuar o mesmo raciocínio da questão 1. Então

começou perguntando aos alunos sobre pontos pertencentes à reta:

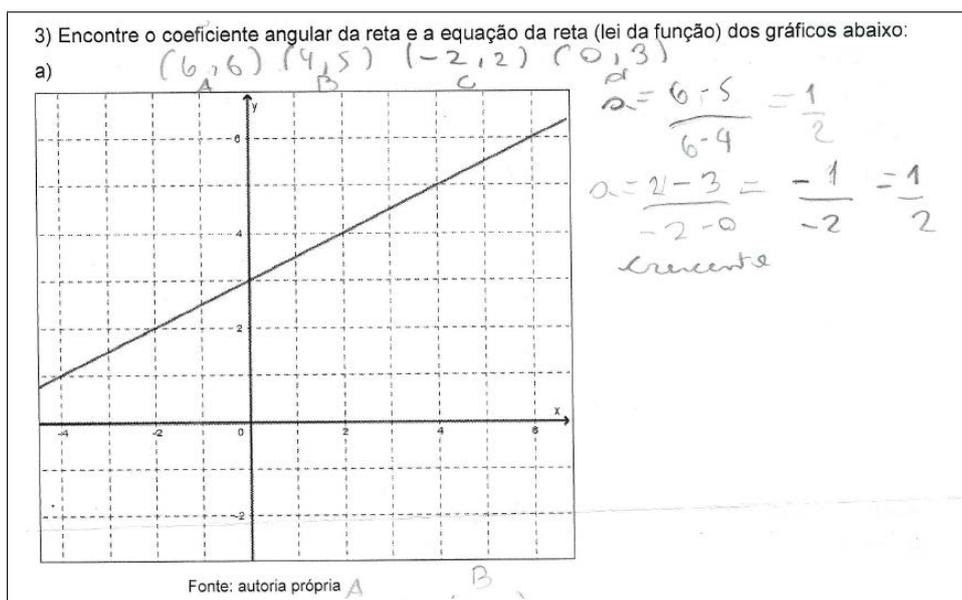
P: “Observem a reta. Digam pontos que pertençam a mesma.”

A5: “(6, 6), (4, 5), (-2, 2), (0, 3)”

A pesquisadora anotou os pares ordenados falados no quadro e então disse que poderiam escolher quaisquer dois pontos para efetuar a operação. Assim, começaram em conjunto, pesquisadora e alunos, a calcular o coeficiente a com os pontos (6, 6) e (4, 5). Encontraram o valor $a = \frac{1}{2}$. A pesquisadora ainda indagou: “E se usássemos os pontos (-2, 2) e (0, 3)? Será que vamos chegar a mesma resposta?”.

Esperou um tempo para fazerem o cálculo e o aluno A5, do grupo 3, verificou em sua atividade que a resposta seria a mesma e respondeu à pesquisadora que sim. Logo, após a resposta positiva, a pesquisadora explicou que para quaisquer dois pontos pertencentes à reta, sempre encontrarão o mesmo valor para o coeficiente a , justamente por estarem alinhados. Assim, destaca-se na [Figura 149](#) os cálculos desenvolvidos pelo aluno A5.

Figura 149 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (a) do aluno A5 do grupo 3



Fonte: Dados da pesquisa

Os demais alunos compreenderam o que foi exposto, e disseram “então é fácil” chegando ao mesmo resultado de A5.

Quanto à lei de formação, a pesquisadora continuou explicando que a questão não estava encerrada, visto que ainda precisavam encontrar o coeficiente b . A mesma continuou:

P: “A partir do gráfico dado, o que podemos responder a cerca do valor de b ?”

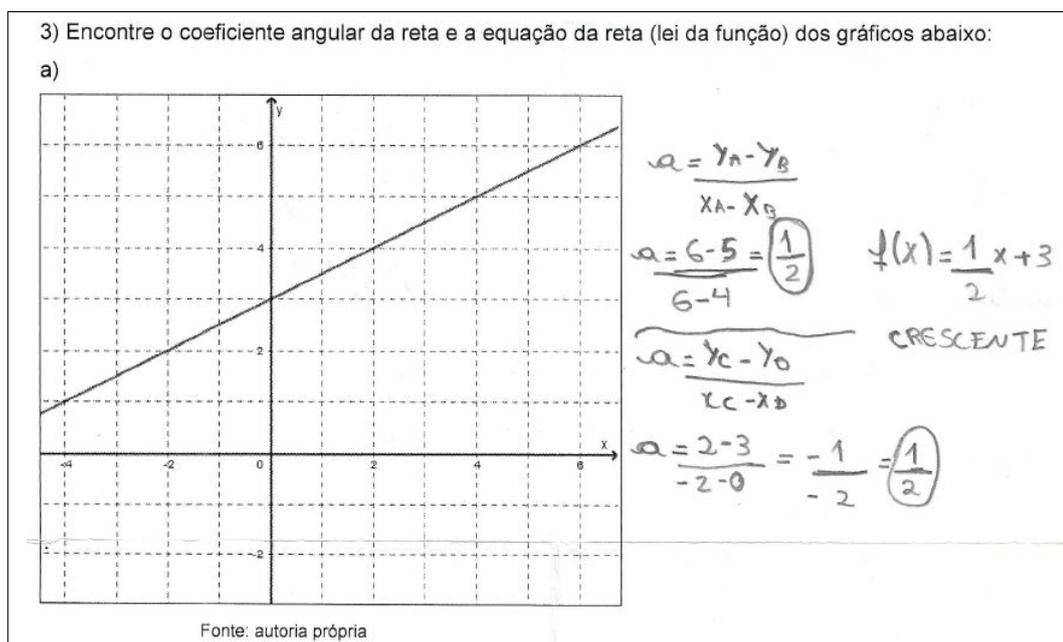
A13: “O valor de b é 3.”

P: “Por que?”

A13: “Porque o gráfico está passando em y em 3.”

Os demais alunos concordaram com a resposta de A13. A pesquisadora entendeu que os alunos compreenderam sobre a interseção com o eixo y . Continuou discutindo com os alunos e chamou a atenção para o fato de que para escrever a lei de formação da função então bastava escrever o valor do coeficiente a encontrado e o valor do coeficiente b observado no gráfico, quando este for um número possível de ser identificado no eixo das ordenadas. Destaca-se a resposta do aluno A13 do grupo 1 na [Figura 150](#).

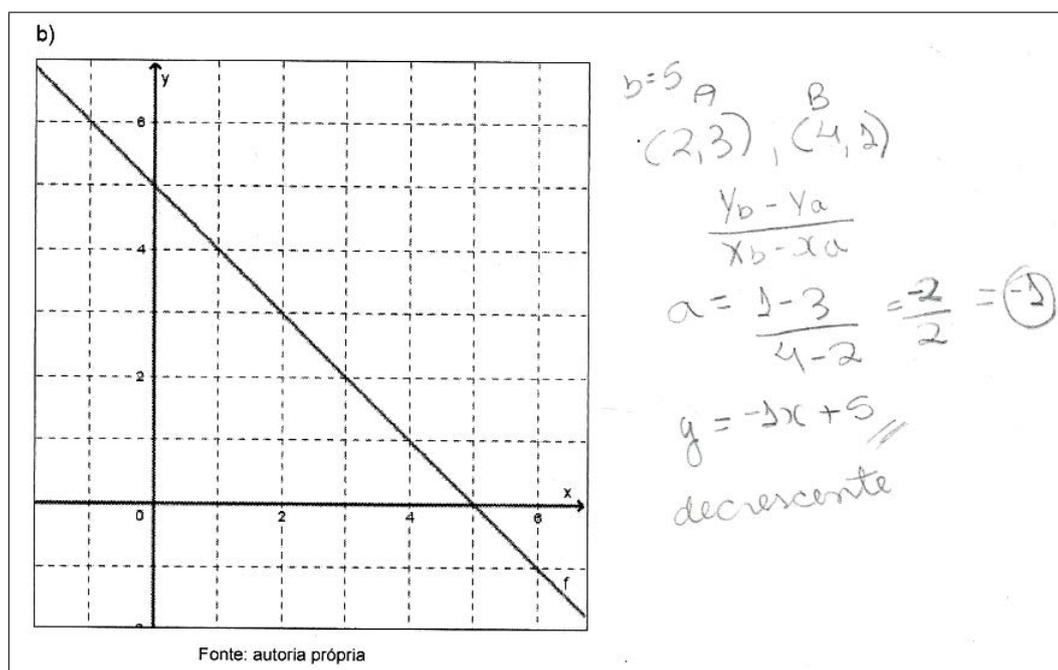
Figura 150 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (a) do aluno A13 do grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

Após a explicação da questão, os alunos fizeram o item (b), trocando informações com os colegas, inclusive de outros grupos. Observou-se que realizaram a conversão do gráfico para a lei de formação da função sem dificuldades, respondendo corretamente o que foi proposto. Observou-se ainda que os mesmos seguiram o passo a passo descrito anteriormente, selecionando dois pontos pertencentes a reta, para calcular o coeficiente a . Após o cálculo, os mesmos identificaram o valor do coeficiente b a partir do gráfico dado e escreveram a lei de formação da função como solicitado, como mostra a [Figura 151](#), resposta da aluna A2 do grupo 2.

Figura 151 – Resposta da Atividade 5 – Questão 3 item (b) da aluna A2 do grupo 2



Observou-se que os alunos compreenderam o que foi proposto, respondendo corretamente a conversão necessária. Duval (2011) comenta que em funções o ensino é enfático na conversão da representação algébrica para a representação gráfica, o que não ocorre de forma contrária, onde justamente é encontrada a dificuldade, pois ao ler e interpretar representações gráficas, os alunos não associam as regras de correspondência com a escrita algébrica. Assim, essa questão propõe justamente sanar a dificuldade citada por Duval.

O tempo de aula não foi suficiente para terminar a última questão da atividade 5. Dessa forma, a mesma ficou para que os alunos a fizessem em casa e fosse corrigida na aula seguinte juntamente com a revisão das questões 1, 2 e 3.

A aula seguinte, ocorrida em 22 de novembro de 2018, teve a presença de 11 alunos e duração de 02 horas/aula. A aula teve início com a correção das questões 1, 2 e 3. Para manter a dinâmica das aulas anteriores, os alunos permaneceram sentados em grupo, até porque as questões iniciais a serem corrigidas haviam sido feitas em grupo.

A correção das questões 1, 2 e 3 foi respondida junto com os alunos, reforçando os conceitos importantes explorados nas questões. Em seguida, iniciou-se a correção da Questão 4 que foi solicitada que fizessem em casa.

A questão 4 teve por objetivo a partir de uma situação problema dado pelo gráfico, identificar (a) o valor fixo da função (coeficiente linear), (b) identificar o coeficiente angular, (c) a partir de dois pontos, utilizando a conversão de representação, encontrar a lei da função e (d) verificar o valor da função dado um número por meio do tratamento.

A correção iniciou-se com a pesquisadora lendo a questão, e no item (a) os alunos não demonstraram dificuldades, respondendo corretamente. Constatou-se que ao apresentar uma situação contextualizada em que o valor fixo (bandeirada cobrada) identificado por meio do gráfico iniciava interceptando o eixo y , os alunos evidenciaram a apropriação do conhecimento de coeficiente linear, enquanto a interseção da reta com o eixo y e o ponto em que x é igual a zero.

Para responderem o item (b), os alunos relataram que utilizaram a “conta” estudada na aula anterior para calcular o valor do coeficiente angular, sendo este o valor cobrado por Km rodado, ou seja, partiram do conceito de que a partir de dois pontos de uma reta, seria possível encontrar o coeficiente angular. Ressalta-se que os grupos escolheram pontos diferentes, o que foi objeto de exemplo na correção, como pode ser observado na [Figura 152](#).

No item (c), ao questionar como determinaram a lei da função, a aluna A2 do grupo 2 comentou que “juntando as informações das letras (a) e (b), conseguia resolver a letra (c), porque para responder a lei de formação da função os coeficientes a e b já estavam calculados” o que é corroborado por sua resposta na [Figura 152](#), logo, verificou-se que a conversão da representação gráfica para a algébrica aconteceu como esperado. Nos outros dois grupos verificou-se que resolveram corretamente também.

Para a resposta do item (d), os grupos utilizaram o tratamento de forma intuitiva, pois observou-se que os mesmos calcularam mentalmente o valor a ser pago em uma corrida de 8 km, e haviam respondido apenas que não. A pesquisadora então indagou o porquê da resposta negativa, e os mesmos responderam que o valor seria outro. Assim, escreveram com suas palavras como encontraram a resposta correta, como mostra a [Figura 152](#) a resposta da aluna A2 do grupo 2.

Figura 152 – Resposta da Atividade 5 – Questão 4 da aluna A2

4) Observe o gráfico abaixo. Ele representa o preço de uma corrida de taxi. Lembre-se de que bandeirada é o preço fixo indicado pelo taxímetro ao ser acionado no início da corrida.

Com base nessas informações, responda:

a) Qual o valor da bandeirada cobrada?
R\$ 3,00 reais

b) Qual é o preço cobrado por quilômetro rodado?
R\$ 0,50 centavos

c) Qual é a lei de formação desse gráfico?
 $y = 0,50 \cdot x + 3$

d) Num percurso de 8 km, serão pagos R\$ 8,00?
 Justifique. *nao.*
Porque so centavos, x oito da y reais + 3 reais da bandeirada.

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 122

A *B*
(2, 4) *(4, 5)*

$$\frac{4-5}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = 0,50$$

Fonte: Dados da pesquisa

Ao fazer a correção do item (d) dessa questão, a pesquisadora formalizou no quadro o raciocínio apresentado pelos alunos. A mesma reforçou o significado de x e y , sendo x a distância percorrida em km, e y o valor a ser pago em reais (R\$), e mostrou que para encontrar o valor a ser pago, ao percorrer uma distância de 8 km, deve-se substituir o valor citado na lei de formação da função encontrada no item (c), e escreveu no quadro:

$$y = 0,50x + 3$$

Devemos encontrar o valor de y quando $x = 8$, pois x representa a distância percorrida, que no enunciado do item (d) é de 8 km:

$$y = 0,50 \cdot 8 + 3$$

$$y = 4 + 3$$

$$y = 7$$

Logo, o valor a ser pago pela distância de 8 km é de R\$ 7,00.

Na atividade 5 buscou-se por meio das interações aluno-aluno e pesquisadora-alunos, que conhecimentos fossem construídos conjuntamente, bem como desconstruir o que [Duval \(2011\)](#) cita em relação a conversão enfática representação algébrica – gráfico, permitindo que os alunos fizessem a conversão contrária, buscando a interpretação gráfica para a associação de regras de correspondências com a representação algébrica.

Acredita-se que para o domínio da conversão da representação gráfica para a representação algébrica, o registro de representação semiótica presente na Atividade 5, junto à ação de uma proposta de interação entre os alunos nos grupos e a mediação da pesquisadora com os grupos, favoreceu para que os mesmos conseguissem realizar a Atividade 5, alcançando os objetivos do mesmo.

Capítulo 6

Considerações Finais

Esta pesquisa se propôs a investigar, em uma turma de 9^o ano do Ensino Fundamental, se a aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando Tecnologias Digitais como recurso em algumas atividades, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim. As considerações finais estão fundamentadas nas observações resultantes da aplicação do questionário I, atividades de pré-requisito, sequência didática, *app* Geogebra e plataforma Khan Academy.

A análise do questionário I permitiu que a pesquisadora identificasse o desafio de utilizar a plataforma Khan Academy, visto que os alunos não estão acostumados a estudarem utilizando as Tecnologias Digitais. A partir dessa aplicação decidiu-se que a plataforma seria utilizada como reforço escolar às aulas ministradas, sendo acessada em casa. Porém, com o andamento da pesquisa, verificou-se que os alunos apresentaram baixo acesso à plataforma em casa, sendo necessário utilizar a mesma em sala de aula, o que não prejudicou o encaminhamento dessa pesquisa. Como sugestão para os próximos trabalhos, a plataforma poderia ser usada durante todo o ano letivo, buscando desenvolver no aluno um ritmo de estudo independente, com a supervisão ainda maior do professor.

É válido destacar que a sequência didática envolveu o uso das tecnologias em algumas atividades, favorecendo a construção do conhecimento, utilizados para facilitar a aprendizagem dos alunos, favorecendo a visualização e a formulação de conjecturas, especialmente na representação gráfica da função afim, bem como, reforçar alguns conteúdos propostos.

Para a compreensão do conceito de função, mais especificamente, função afim, vivenciou-se a importância de explorar o Registro de Representação Semiótica por meio da conversão presente neste trabalho, evidenciado por [Carvalho, Anjos e Melo \(2017\)](#) que comentam que há uma diversidade de representações no conteúdo de função e a necessidade do uso das mesmas, sendo corroborado por [Duval e Moretti \(2012\)](#) que afirma que a compreensão do conceito se dá a partir da coordenação de pelo menos dois registros de representação.

Destaca-se que a proposta de organização dos alunos em grupo, contribuiu para que os objetivos fossem alcançados. A interação entre os alunos permitiu troca de experiências, ajuda com dificuldades, discussão de métodos de resolução das questões, para que houvesse a construção do conhecimento e desconstrução de conceitos até então entendidos como corretos em algumas situações vivenciadas nas discussões ocorridas, que junto à ação de mediação da pesquisadora com os grupos, favoreceu para que os mesmos realizassem as atividades, alcançando os objetivos propostos.

Ao fazer uso do Geogebra foi possível explorar as transformações por conversão entre as representações gráficas e a representação algébrica, sendo descrito por Duval, como o tipo de representação que os alunos mais apresentam dificuldades e neste sentido entendeu ser fundamental continuar a explorar este tipo de representação, objetivando a construção de conhecimentos formalizados através de representações gráficas.

Ao propor o uso da plataforma Khan Academy na sala de aula para reforçar atividades anteriores desenvolvidas, verificou-se que o uso desta tecnologia foi bastante favorável à aprendizagem dos alunos, possibilitando aos mesmos, independência na resolução de atividades propostas pela pesquisadora, diversificando e sendo autônomos em sua aprendizagem, ao discutirem entre si sobre muitas das perguntas propostas na plataforma, bem como ao utilizar os recursos oferecidos. Neste sentido, julgou-se relevante o uso dessa tecnologia na metodologia proposta em sala de aula.

O desempenho dos estudantes foi avaliado constantemente ao longo das atividades da sequência didática, possibilitando a pesquisadora diagnosticar as dificuldades apresentadas pelos mesmos, que conforme as atividades iam acontecendo, concluía-se que muitos aspectos dos conteúdos não haviam sido fixados, permitindo assim, novas intervenções para que essas dificuldades fossem sanadas.

Apesar das dificuldades encontradas pelos alunos na realização das atividades em relação ao tratamento e conversão dos registros de representação semiótica, principalmente gráfico – lei de formação, as dificuldades demonstradas com operações básicas, bem como o não uso da plataforma Khan Academy em casa, a variedade de situações que vivenciaram em sala de aula, possibilitou a realização das tarefas propostas, mostrando-se interessados durante o tempo da pesquisa.

O bom desempenho dos estudantes na construção do conhecimento em cada atividade realizada da sequência didática permitiu responder à questão de pesquisa: “Como a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando as Tecnologias Digitais como recurso, pode contribuir para a construção do conceito de Função e Função afim no contexto do Ensino Fundamental II?”

Respondendo a questão de pesquisa, foi possível constatar que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por meio de uma sequência didática que envolva as várias

formas de representações de função, bem como a exploração dessas representações e conversões, junto à ação de uma proposta de interação entre os discentes dispostos em grupos e a mediação da pesquisadora com os grupos, utilizando Tecnologias Digitais em algumas atividades como recurso.

Espera-se que este trabalho mostre a importância das várias representações de funções, e como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aliado às tecnologias, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de função afim, ainda nos anos finais do Ensino Fundamental, buscando diminuir as dúvidas ao chegarem ao Ensino Médio. Deixa-se como sugestão para uma futura continuação do trabalho a criação de novas atividades utilizando desde o início, o GeoGebra, e a plataforma Khan Academy, de maneira mais enfática buscando a motivação dos mesmos para realizarem as tarefas em casa, bem como a adaptação das atividades aqui propostas.

Referências

- ANDRINI, Á.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática 9*. 3. ed. [S.l.]: Editora do Brasil, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 61, 63, 67, 70, 71, 72, 77 e 85.
- ARAÚJO, D. L. O que é (e como faz) sequência didática? *Entrepalavras*, v. 3, n. 1, p. 322–334, 2013. Citado na página 61.
- ARAÚJO, W. A. *O GeoGebra: uma experimentação na abordagem da função afim*. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- BARROS, E. M. D. Aproximações entre o funcionamento da metodologia das sequências didáticas e o conceito de zona de desenvolvimento proximal. *Calidoscópico*, v. 11, n. 1, p. 76–89, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 126.
- BRASIL, P. C. N.; MÉDIO, E. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, p. 32, 2002. Citado na página 40.
- CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização das tecnologias da informação e comunicação nas aulas de matemática: Limites e possibilidades. *Revista Eletrônica de educação*, v. 8, n. 2, p. 101–119, 2014. Citado na página 43.
- CARVALHO, L. P.; ANJOS, J. A. L. dos; MELO, S. B. de. Considerações sobre uma avaliação diagnóstica do conceito de função à luz da teoria dos registros de representações semióticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 12, n. 2, p. 116–132, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 194.
- CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique*. [S.l.]: La pensée sauvage Grenoble, 1991. Citado na página 56.
- COSTA, J. F. d.; COSTA, L. P. d.; CAMARGO, S. A formação de professores do magistério e as possibilidades de uso do celular na ensino de matemática para uma alimenta sobre uma avaliação diagnóstica do conceito de função à luz da teoria dos registros de representações semióticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 12, n. 2, p. 116–132, 2017. Citado na página 43.
- DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de educação*, n. 45, p. 57–67, 2013. Citado na página 61.
- DUVAL, R. Semiósisis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. *São Paulo: Livraria da Física*, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *MACHADO, S. D. A. (Org) Aprendizagem em matemática:*

Registros de Representação Semiótica. 8.ed. Papyrus, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 37, 38, 41, 121, 190 e 193.

DUVAL, R.; MORETTI, T. M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Citado 11 vezes nas páginas 20, 37, 38, 39, 40, 41, 126, 128, 134, 141 e 194.

GAY, M. R. G. *Projeto Araribá: Matemática*. 4. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 2014. Citado na página 75.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. *Ciencia & Educação*, Universidade Estadual Paulista, v. 22, n. 2, p. 465–487, 2016. Citado na página 41.

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções*. 8. ed. [S.l.]: Atual, 2004. Citado 7 vezes nas páginas 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

KHAN, S. *Um mundo, uma escola*. [S.l.]: Editora Intrínseca, 2013. Citado na página 48.

LABURÚ, C. E.; ZOMPERO, A. de F.; BARROS, M. A. Vygotsky e múltiplas representações: leituras convergentes para o ensino de ciências. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 30, n. 1, p. 7–24, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 122.

LEITE, L. R. *CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES*. Dissertação (Mestrado), 2016. Citado na página 20.

LIBÂNEO, J. C. *Didática*. 2. ed. [S.l.]: Cortez Editora, 2013. Citado na página 56.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 28, 32, 34 e 35.

LOPES, T. B.; COSTA, A. B. d.; OLIVEIRA, R. d. F. S. d. Estudo de função afim utilizando o software geogebra como ferramenta interativa. *Revista Tecnologias na Educação*, v. 8, n. 17, p. 1–16, 2016. Citado na página 44.

MAGARINUS, R. *UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM*. Dissertação (Mestrado), 2013. Citado na página 20.

MOGNHOL, T. D.; MACHADO, S. G. O uso da plataforma khan academy como ferramenta de ensino e de aprendizagem. *Colóquio Luso-Brasileiro de Educação-COLBEDUCA*, v. 2, 2017. Citado na página 21.

MORAN, J. M. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 21. ed. [S.l.]: Papyrus Editora, 2013. Citado na página 44.

OLIVEIRA, C. A. d.; SILVA, J. L. d. Possibilidades pedagógicas do uso das tecnologias móveis no ensino de matemática na perspectiva da m-learning. *Revista BoEM*, v. 6, n. 11, p. 200–221, 2018. Citado na página 44.

OLIVEIRA, D. S. *Geogebra: facilitando o aprendizado da função afim e função quadrática*. 2015. Citado na página 21.

- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 3. ed. [S.l.]: Autêntica, 2016. Citado na página 56.
- PINTO, C. F. *Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012: questões para formação de professores e para pesquisa*. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 148.
- SILVA, E. R. P. d. *A utilização do aplicativo Geogebra para smartphone como recurso didático nas aulas de matemática do Ensino Fundamental São Luís*. Dissertação (Mestrado), 2018. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. de. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. *RENOTE*, v. 11, n. 3, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 179.
- TEZANI, T. C. R. A educação escolar no contexto das tecnologias da informação e da comunicação: desafios e possibilidades para a prática pedagógica curricular. *Revista Faac*, v. 1, n. 1, p. 35–45, 2011. Citado na página 43.
- YIN, R. K. *Estudo de Caso: Planejamento e métodos*. 5. ed. [S.l.]: Bookman editora, 2015. Citado na página 55.

Apêndices

APÊNDICE A

Questionário I



Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: _____

Data: ____/____/____

Ano/ Série: 9º ano

Turma: _____



Questionário I

➤ Sobre o uso da internet

1) Você tem acesso a internet? () Sim () Não

Se a resposta for positiva, qual o meio mais utilizado para o seu acesso?

() Somente pelo computador na casa de familiares e/ou amigos.

() Somente pelo computador em minha própria casa.

() Somente pelo meu próprio celular .

() Pelo computador e pelo celular em minha própria casa.

() Outros. Quais? _____

2) O acesso a internet é por:

() Somente rede *Wi-fi*

() Somente rede de dados móveis

() Rede *Wi-fi* e/ou rede de dados móveis (estou sempre conectado)

3) Com que objetivos você utiliza a internet? Enumere de 1 (uso menos frequente) a 5 (uso mais frequente):

() Para acessar meus e-mails.

() Redes sociais e como meio de comunicação pessoal.

() Para minhas pesquisas escolares.

() Para divertir-me: ouvir música, assistir a vídeos, jogar.

() Utilizo a internet para informar-me sobre as notícias da atualidade.

Indique aqui outros usos que faz da internet, caso eles não tenham sido incluídos acima:

4) Em casa, quantas horas por dia você gasta navegando na internet usando o computador?

() até 2 horas.

() de 2 a 5 horas.

() mais de 5 horas.

() Não uso em casa.

() Não tenho computador em casa.

5) Em casa, quantas horas por dia você gasta navegando na internet usando o celular?

() até 2 horas.

() de 2 a 5 horas.

() mais de 5 horas.

() Não uso em casa.

APÊNDICE B

Recomendações realizadas na
Plataforma Khan Academy, com o
conteúdo de pré-requisito

Recomendações realizadas na Plataforma Khan Academy, com o conteúdo de pré-requisito, entre os dias 02 de outubro de 2018 a 17 de outubro de 2018.

1) Recomendação "Pontos no Plano Cartesiano"

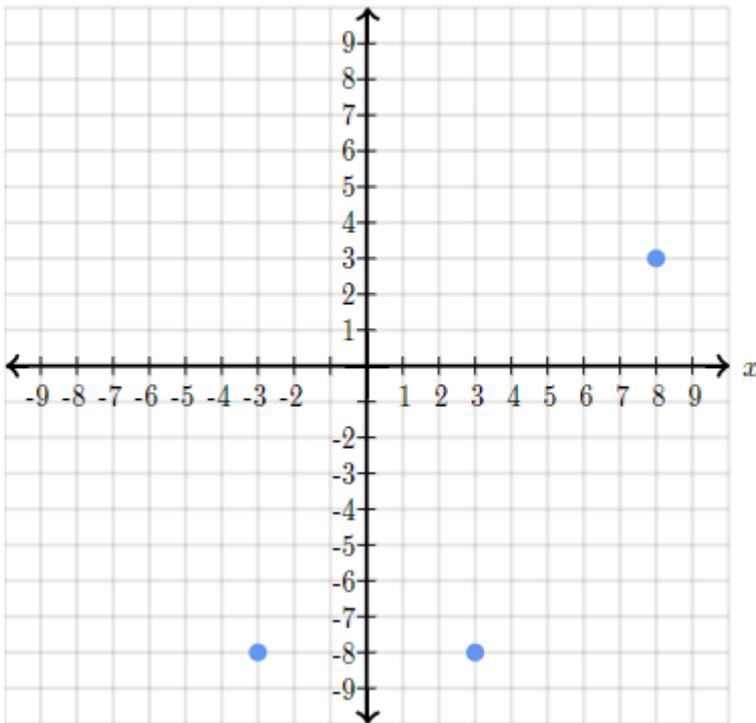
Essa recomendação é composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 24 perguntas. As sete perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma.

Qual par ordenado *não* está representado graficamente a seguir?

Escolha 1 resposta:

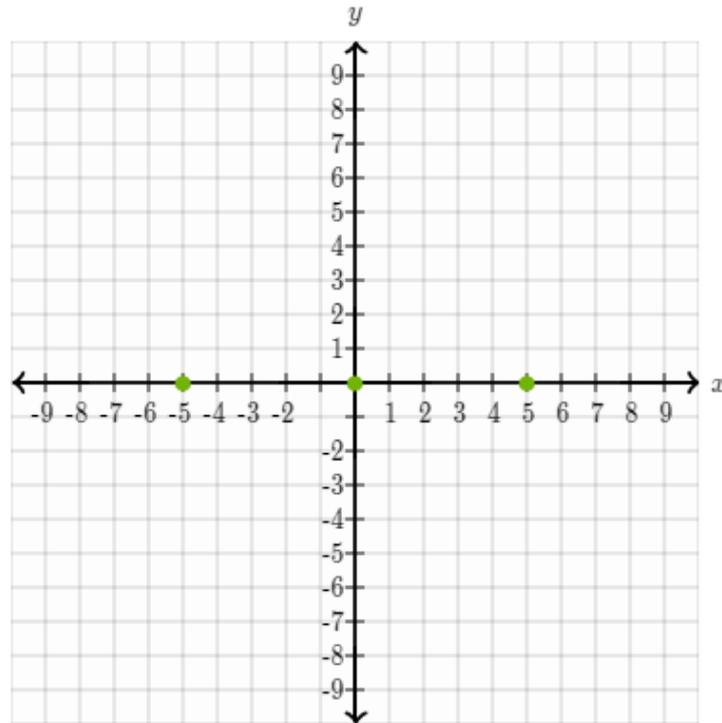
- $(-3, -8)$
- $(3, -8)$
- $(-3, 8)$
- $(8, 3)$

Pergunta 1



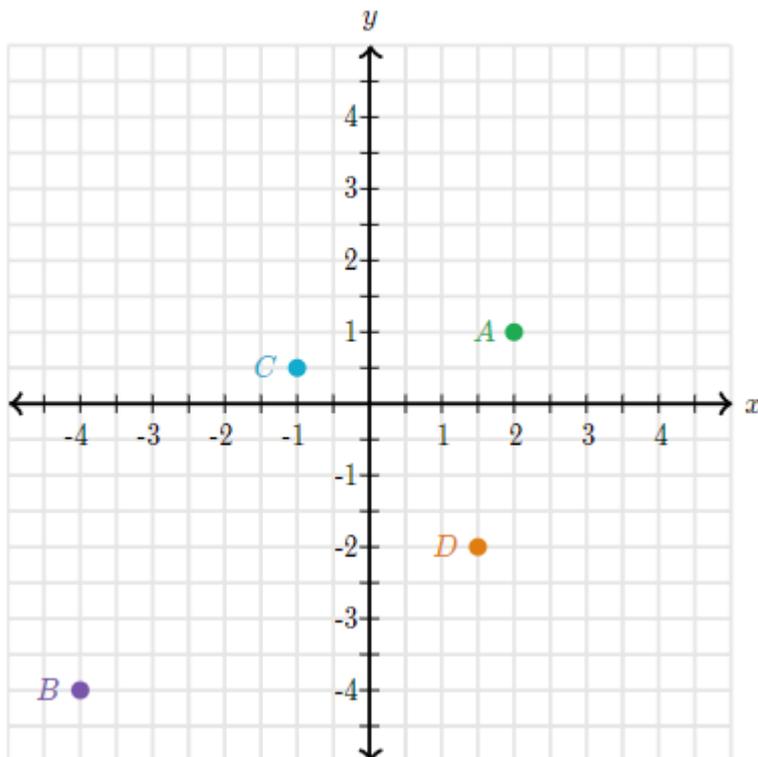
Pergunta 2

Arraste os pontos para plotar $(0; 6,5)$, $(-5, -5)$ e $(1, 9)$.



Para quais pontos a coordenada y é menor que $-1,5$?

Pergunta 3



Escolha todas as respostas aplicáveis:

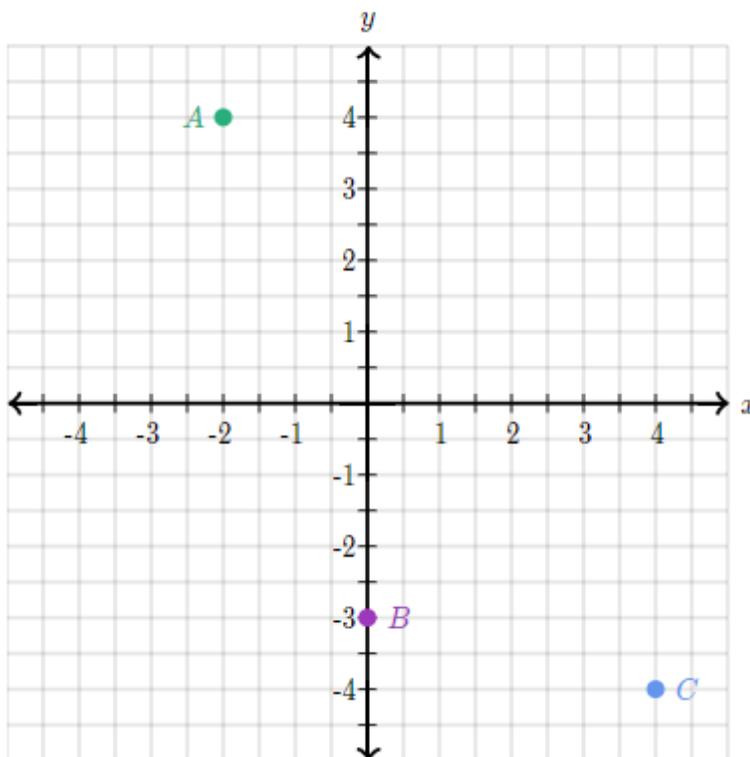
Ponto *A*

Ponto *B*

Ponto *C*

Ponto *D*

Use o seguinte plano cartesiano para escrever o par ordenado de cada ponto.



Pergunta 4

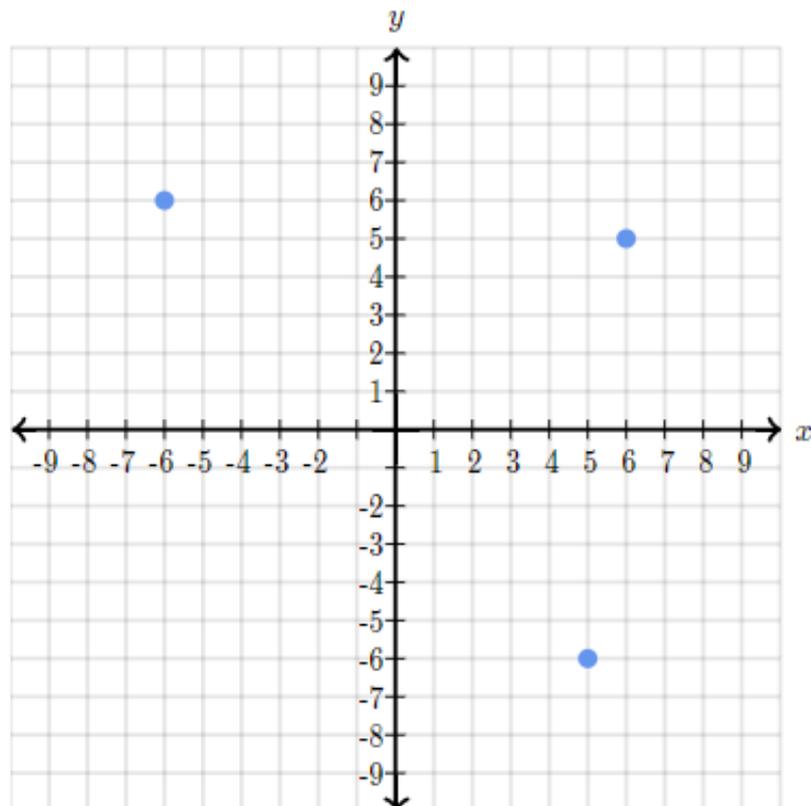
Ponto	Par ordenado
A	(<input type="text"/> , <input type="text"/>)
B	(<input type="text"/> , <input type="text"/>)
C	(<input type="text"/> , <input type="text"/>)

Qual par ordenado *não* está representado graficamente a seguir?

Pergunta 5

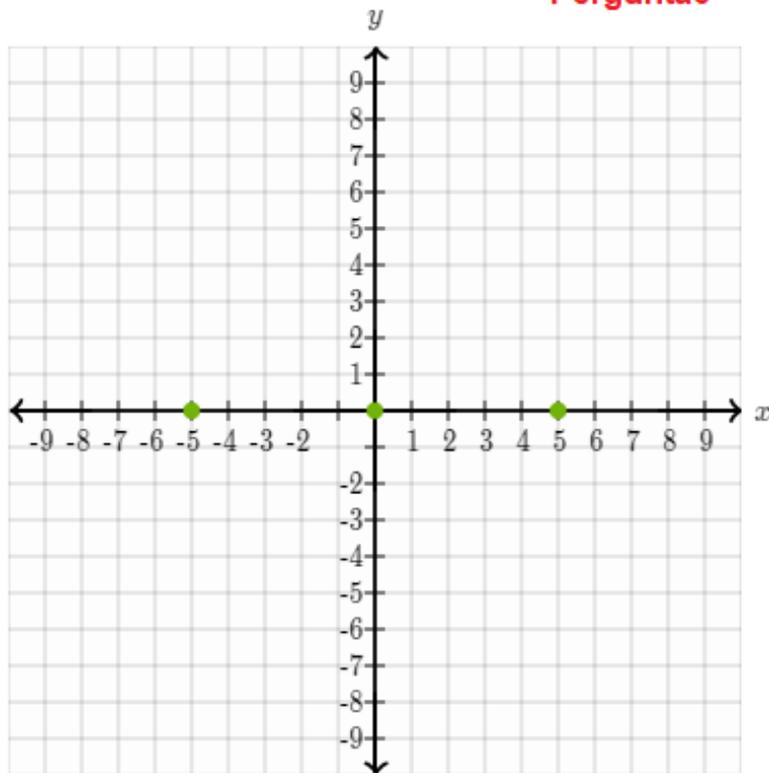
Escolha 1 resposta:

- (6, 5)
- (5, -6)
- (6, -5)
- (-6, 6)



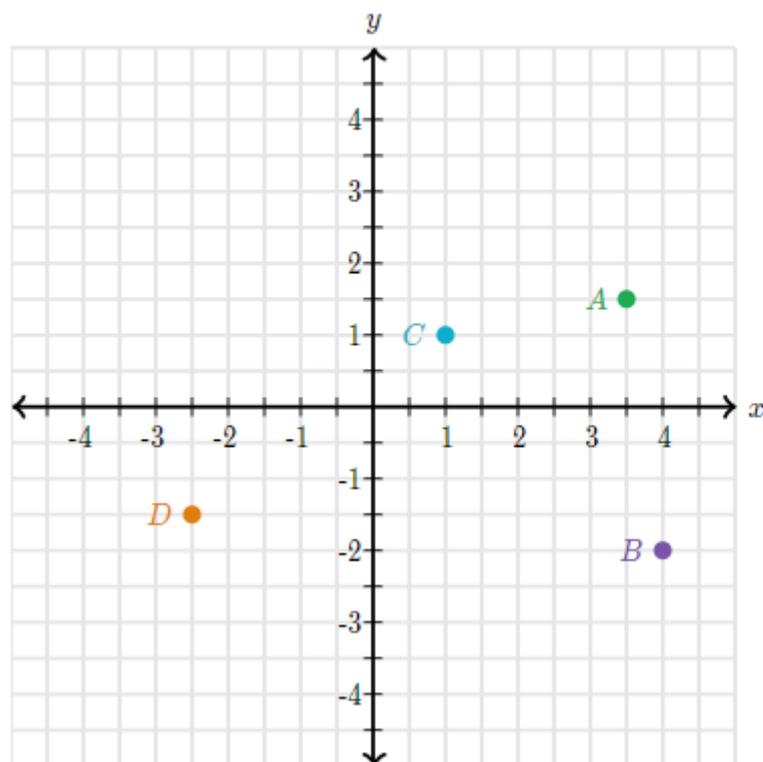
Arraste os pontos para plotar $(6, -8)$, $(2, 7)$ e $(1, -4)$.

Pergunta6



Para quais pontos a coordenada x é menor que 3?

Pergunta 7



Escolha todas as respostas aplicáveis:

Ponto A

Ponto B

Ponto C

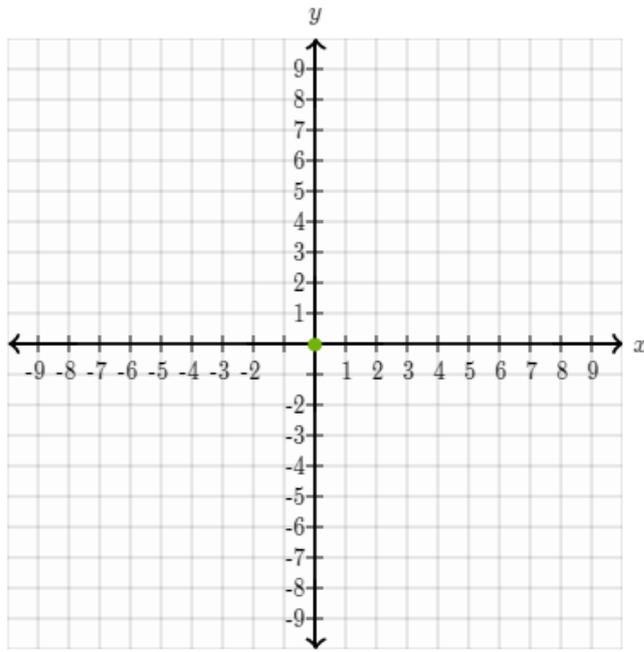
Ponto D

2) Recomendação "Quadrantes no Plano Cartesiano"

Essa recomendação é composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 22 perguntas. As sete perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma.

Arraste o ponto para plotar $(6, 0)$, e então selecione sua localização no plano cartesiano.

Pergunta 1



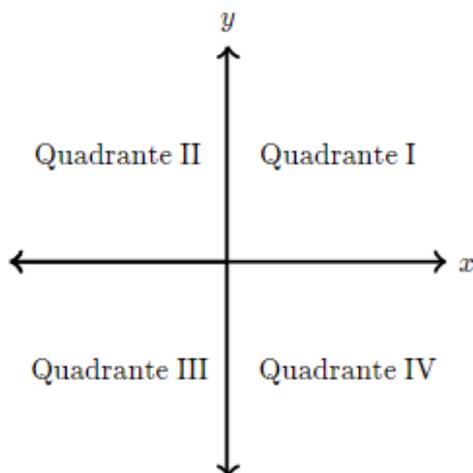
Onde $(6, 0)$ está localizado no plano cartesiano?

Escolha 1 resposta:

- Primeiro quadrante
- Segundo quadrante
- Terceiro quadrante
- Quarto quadrante
- eixo x
- eixo y

O par ordenado (a, b) corresponde à localização do ponto P no plano cartesiano. O valor de a é positivo.

Pergunta 2



Onde o ponto P poderia estar no plano cartesiano?

Escolha todas as respostas aplicáveis:

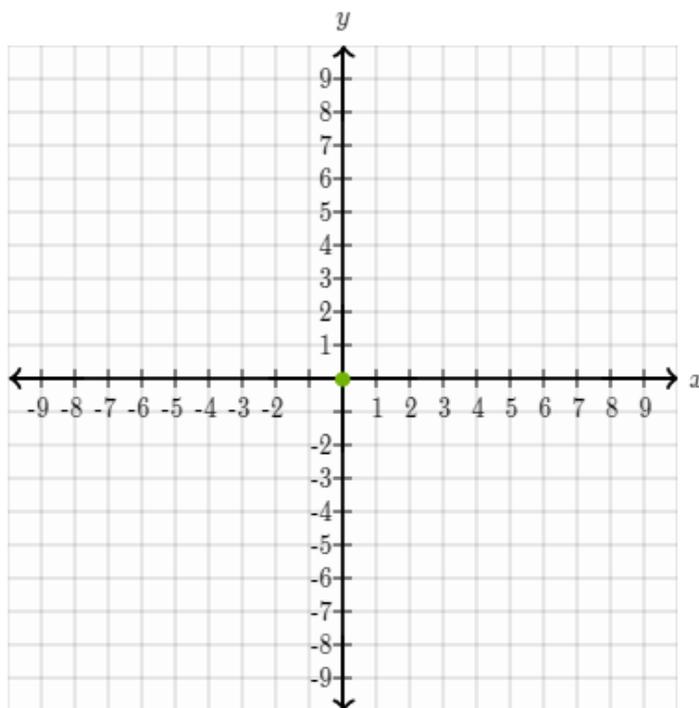
- Quadrante I
- Quadrante II
- Quadrante III
- Quadrante IV
- eixo x
- eixo y

Pergunta 3

Selecione o quadrante ou o eixo no qual cada par ordenado está localizado no plano cartesiano.

	Quadrante I	Quadrante II	Quadrante III	Quadrante IV	eixo x	eixo y
$(-9, -8)$	<input type="radio"/>					
$(1, 0)$	<input type="radio"/>					
$(7, 5; 2)$	<input type="radio"/>					

Arraste o ponto para plotar $(0, -4)$, e então selecione sua localização no plano cartesiano.



Pergunta 4

Onde $(0, -4)$ está localizado no plano cartesiano?

Escolha 1 resposta:

Primeiro quadrante

Segundo quadrante

Terceiro quadrante

Quarto quadrante

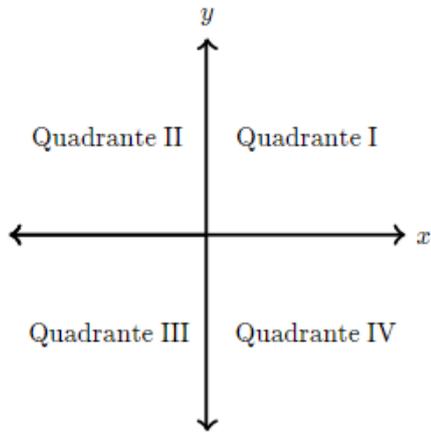
eixo x

eixo y

Pergunta 5

As coordenadas x e y de E têm sinais diferentes (um é positivo e o outro é negativo). Nenhuma coordenada é 0.

Onde o ponto E poderia estar no plano cartesiano?



Escolha todas as respostas aplicáveis:

Quadrante I

Quadrante II

Quadrante III

Quadrante IV

eixo x

eixo y

Selecione o quadrante ou o eixo no qual cada par ordenado está localizado no plano cartesiano.

Pergunta 6

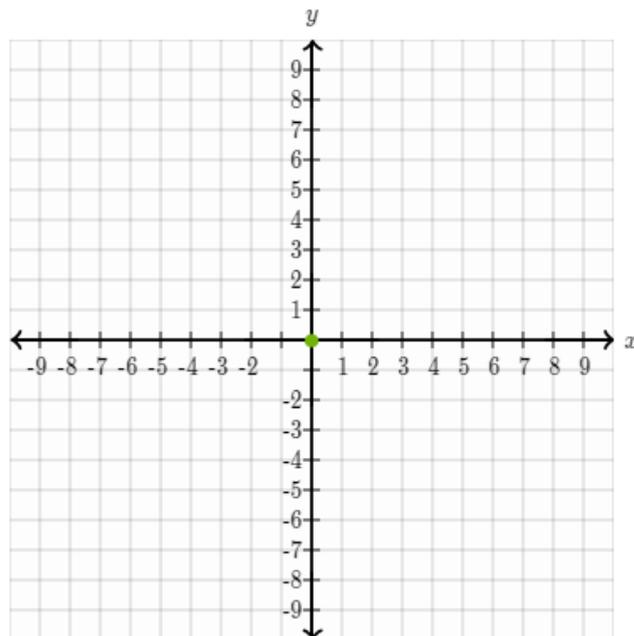
Quadrante I Quadrante II Quadrante III Quadrante IV eixo x eixo y

$(2, 4)$

$(0, -3)$

$(-1, \frac{1}{2})$

Arraste o ponto para plotar $(-1, 5)$, e então selecione sua localização no plano cartesiano.



Pergunta 7

Onde $(-1, 5)$ está localizado no plano cartesiano?

Escolha 1 resposta:

Primeiro quadrante

Segundo quadrante

Terceiro quadrante

Quarto quadrante

eixo x

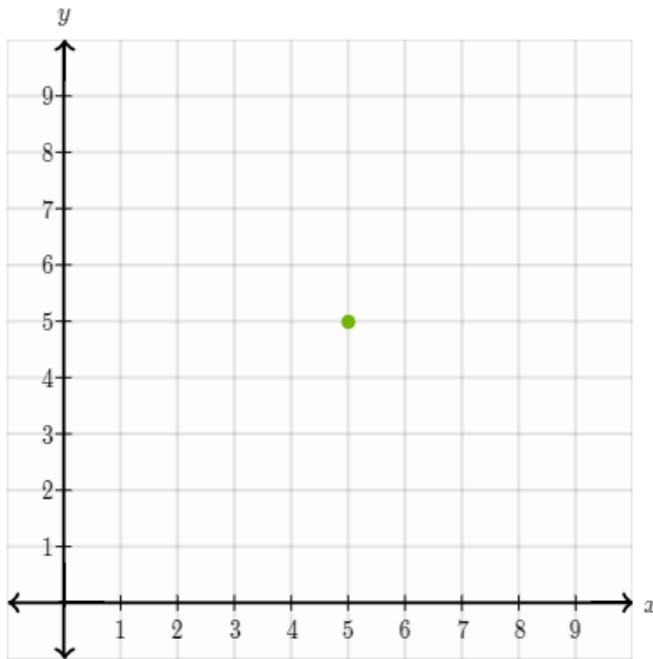
eixo y

3) Recomendação "Represente os Pontos Graficamente"

Essa recomendação é composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 20 perguntas. As sete perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma.

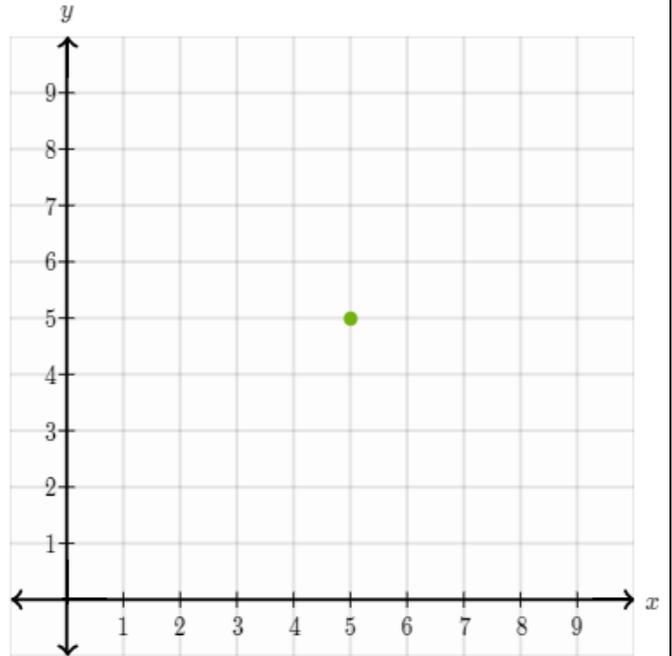
Plote o ponto $(9, 6)$.

Pergunta 1



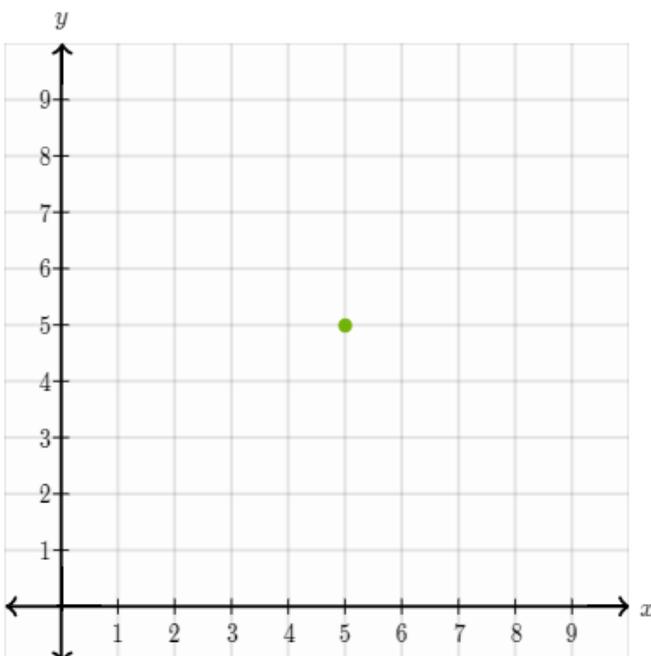
Plote o ponto $(4, 8)$.

Pergunta 2



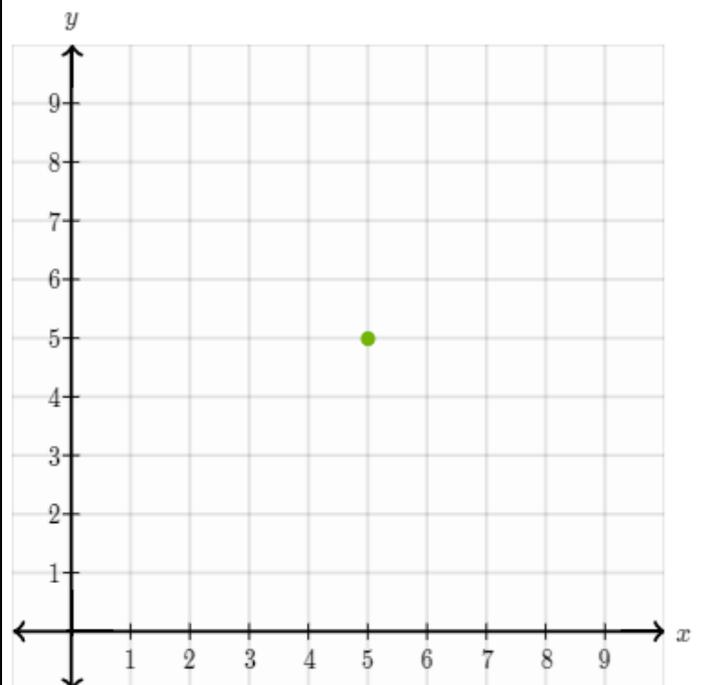
Plote o ponto $(3, 7)$.

Pergunta 3



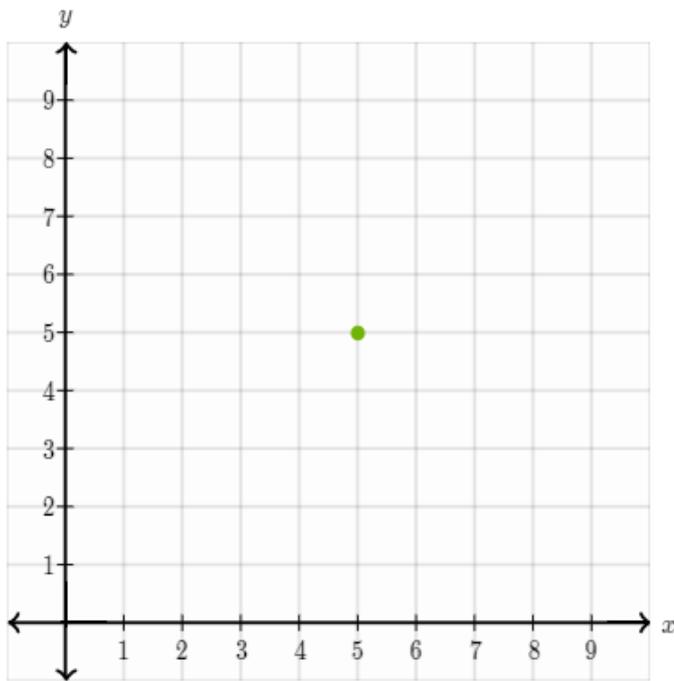
Plote o ponto $(2, 2)$.

Pergunta 4



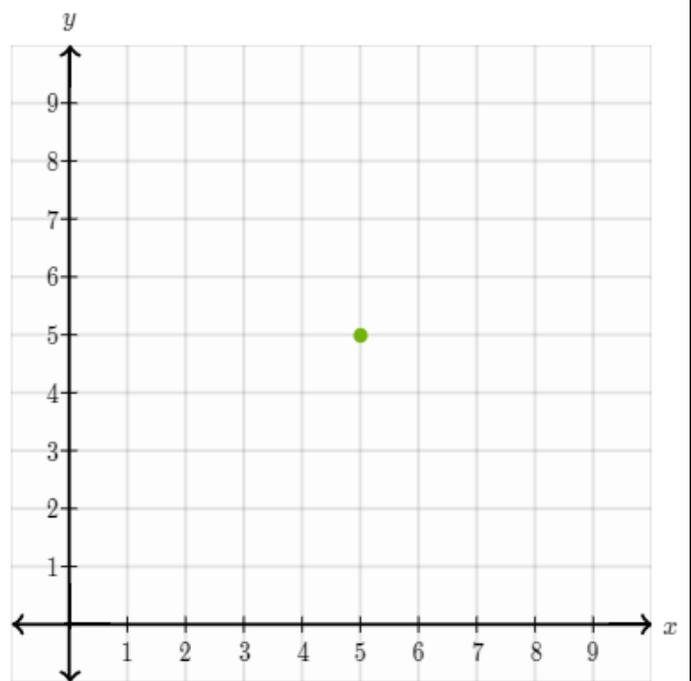
Plote o ponto $(3, 4)$.

Pergunta 5



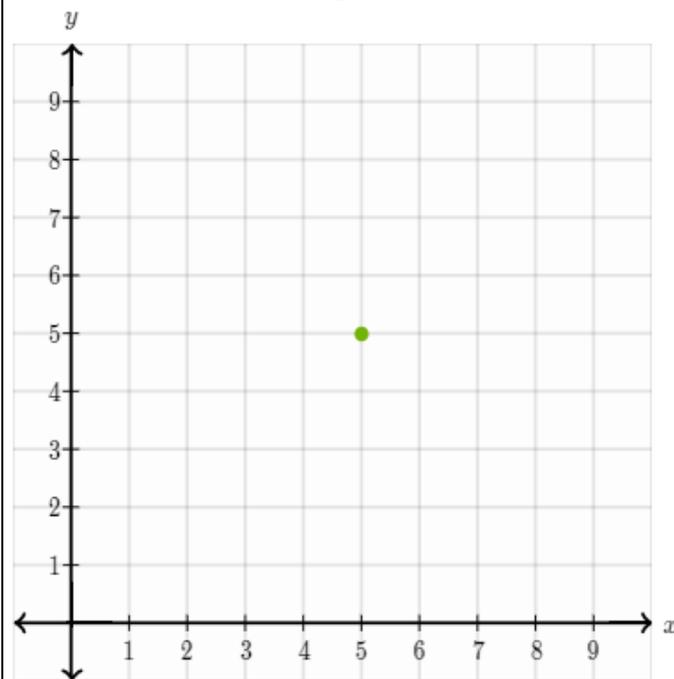
Plote o ponto $(6, 0)$.

Pergunta 6



Plote o ponto $(5, 9)$.

Pergunta 7



4) Problemas no Plano Cartesiano (1º Quadrante)

Essa recomendação é composta por 4 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 12 perguntas. As quatro perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma.

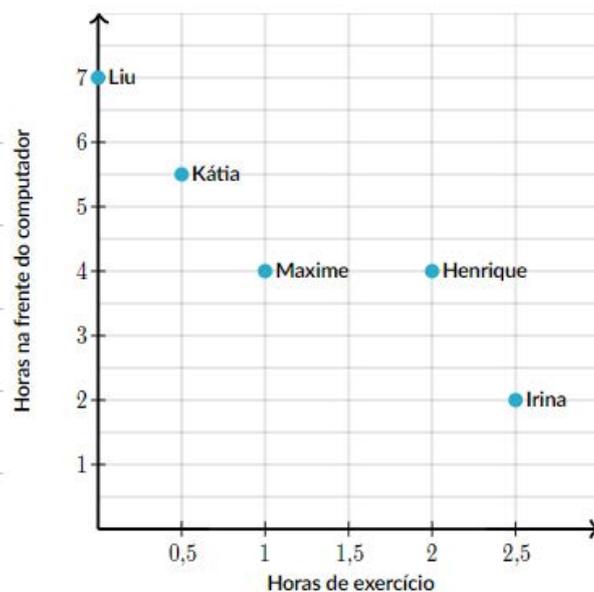
O gráfico abaixo mostra a relação entre o número de horas praticando exercícios e o número de horas na frente do computador de 5 amigos na quinta-feira.

Pergunta 1

Qual é o significado do ponto que representa Maxime?

Escolha 1 resposta:

- Maxime teve 5 horas de exercício e passou 5 horas na frente do computador.
- Maxime teve 4 horas de exercício e passou 1 hora na frente do computador.
- Maxime teve 1 hora de exercício e passou 4 horas na frente do computador.
- Maxime teve 2 horas de exercício e passou 8 horas na frente do computador.



Kátia está coletando dados sobre seu jardim de flores e anotando em um plano cartesiano. Cada par ordenado representa a profundidade do bulbo (em centímetros) e a altura da flor (em centímetros), respectivamente, de uma flor do jardim.

Pergunta 2

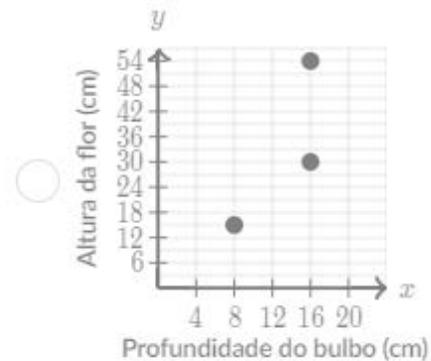
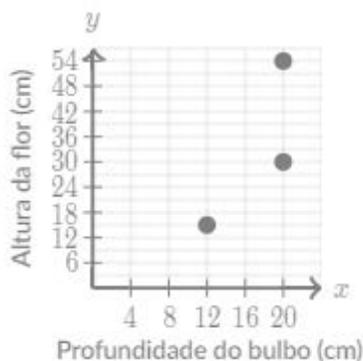
Lírio: (12, 15)

Jacinto: (20, 30)

Narciso: (20, 54)

Qual plano cartesiano mostra corretamente os dados de Kátia até agora?

Escolha 1 resposta:



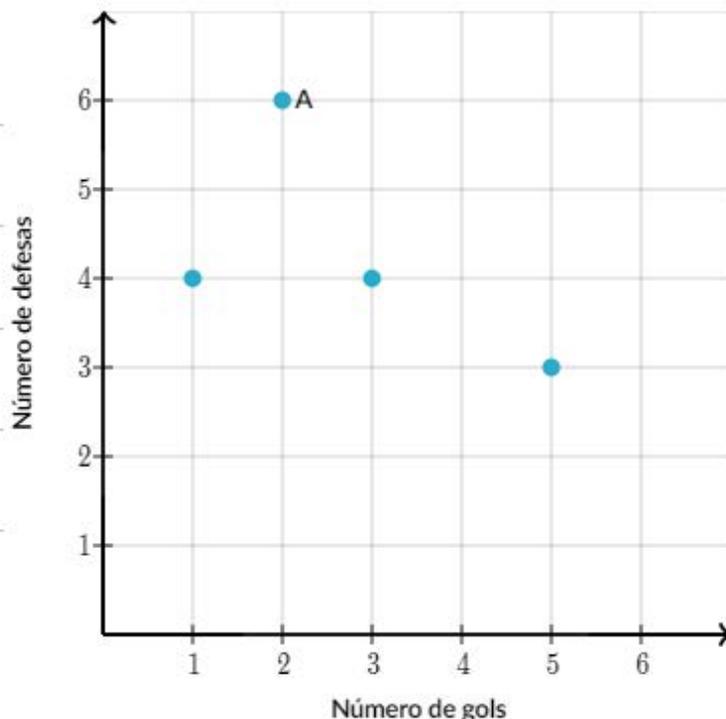
O técnico Henrique plotou a relação entre o número de pontos e o número de defesas que sua equipe de hóquei fez em cada jogo. O gráfico é mostrado abaixo.

Pergunta 3

Qual é o significado do ponto *A*?

Escolha 1 resposta:

- A equipe fez 6 gols e 6 defesas nesse jogo.
- A equipe fez 2 gols e 6 defesas nesse jogo.
- A equipe fez 2 gols e 2 defesas nesse jogo.
- A equipe fez 6 gols e 2 defesas nesse jogo.



Matheus está anotando o tempo de cozimento do ravióli em um plano cartesiano. Cada par ordenado representa o número de pedaços de ravióli e o número de minutos para cozinhar, respectivamente.

Uma porção: (9, 6)

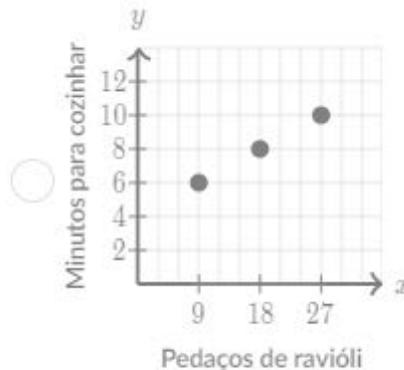
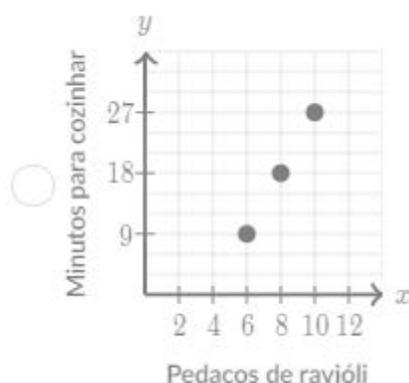
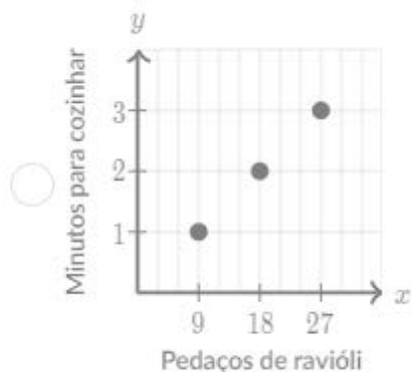
Duas porções: (18, 8)

Três porções: (27, 10)

Pergunta 4

Qual plano cartesiano mostra corretamente os tempos de cozimento de Matheus?

Escolha 1 resposta:



5) Problemas de plano cartesiano em todos os quatro quadrantes

Essa recomendação é composta por 7 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 25 perguntas. As sete perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma.

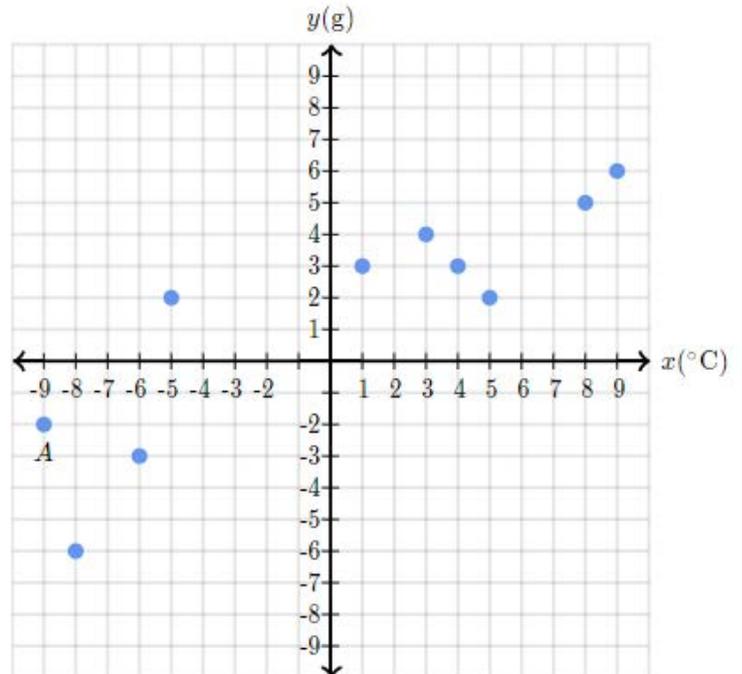
Miranda representou graficamente (conforme mostrado a seguir) a relação entre a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) e a variação no peso do seu gato (em g) nos últimos 10 dias.

Qual o significado do ponto *A*?

Pergunta 1

Escolha 1 resposta:

- A 9°C abaixo de zero, o gato de Miranda *perdeu* 2 g.
- A 9°C acima de zero, o gato de Miranda *perdeu* 2 g.
- A 9°C abaixo de zero, o gato de Miranda *ganhou* 2 g.
- A 9°C acima de zero, o gato de Miranda *ganhou* 2 g.

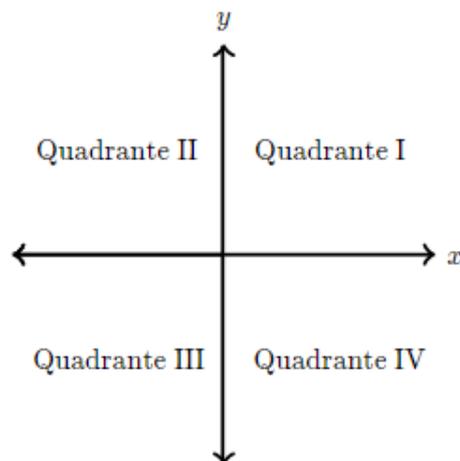


Armando fez o gráfico da relação entre temperatura e altitude para várias cidades. A coordenada x é a altitude, em metros, e a coordenada y é a temperatura, em $^{\circ}\text{C}$.

Pergunta 2

Qual quadrante teria um ponto com uma cidade 3 m abaixo do nível do mar e com uma temperatura igual a 6°C abaixo de zero?

Escolha 1 resposta:



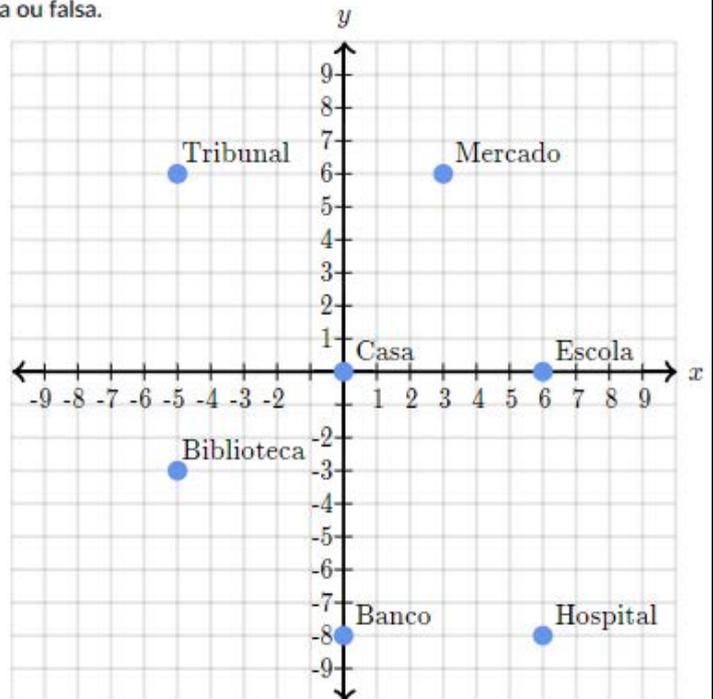
- Quadrante I
- Quadrante II
- Quadrante III
- Quadrante IV

Kelvin representou graficamente a localização de vários lugares de sua cidade no plano cartesiano mostrado a seguir.

Pergunta 3

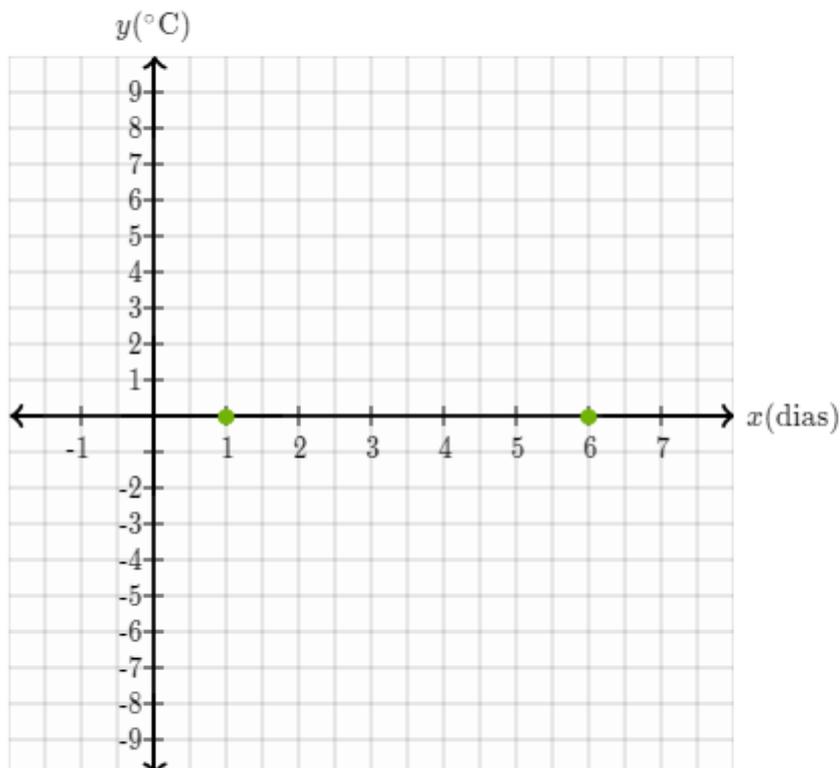
Determine se cada afirmativa sobre o gráfico de Kelvin é verdadeira ou falsa.

	Verdadeira	Falso
A biblioteca está a 5 unidades do eixo y .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A escola se localiza em $(0, 6)$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



No plano cartesiano a seguir, o eixo x representa o número de dias depois de hoje e o eixo y representa a temperatura prevista em graus Celsius. Os pontos $(3, 7)$ e $(3, -3)$ representam as temperaturas máxima e mínima previstas para o mesmo dia.

Plote os pontos no plano cartesiano. **Pergunta 4**



Qual é a diferença entre as temperaturas máxima e mínima previstas?

grau(s) Celsius

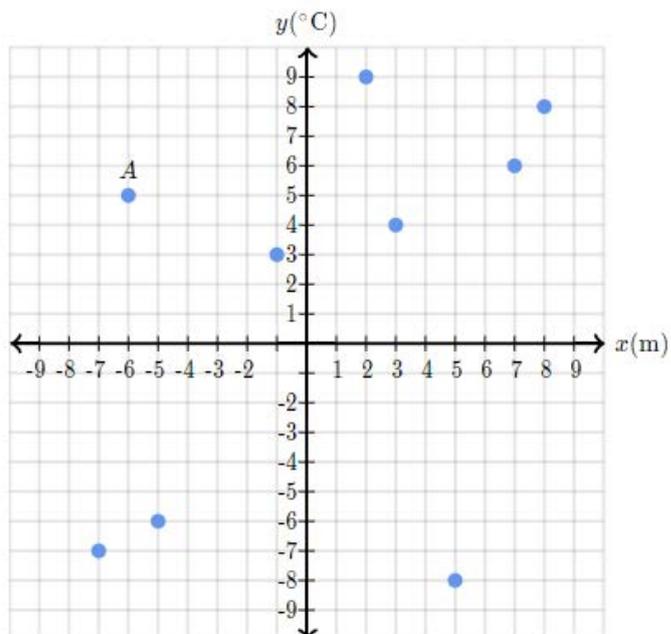
Regina representou graficamente a relação entre temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) e altitude (em m) em 9 cidades diferentes (mostradas a seguir).

Pergunta 5

O que significa o ponto *A*?

Escolha 1 resposta:

- Uma cidade 6 m *abaixo* do nível do mar está 5°C *abaixo* de zero.
- Uma cidade 6 m *acima* do nível do mar está 5°C *abaixo* de zero.
- Uma cidade 6 m *abaixo* do nível do mar está 5°C *acima* de zero.
- Uma cidade 6 m *acima* do nível do mar está 5°C *acima* de zero.

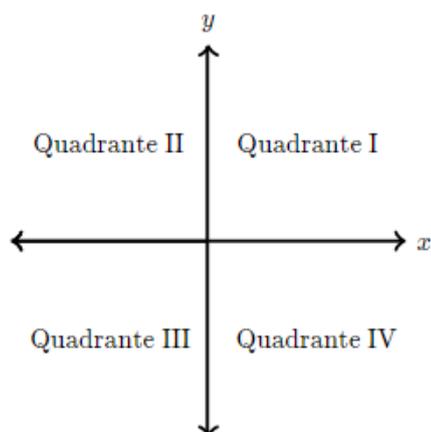


Alan fez o gráfico da relação entre temperatura e altitude para diversas cidades. A coordenada x é a altitude, em metros, e a coordenada y é a temperatura, em $^{\circ}\text{C}$.

Pergunta 6

Qual quadrante poderia ter um ponto que mostra uma cidade 6 m acima do nível do mar e com uma temperatura de 9°C abaixo de zero?

Escolha 1 resposta:



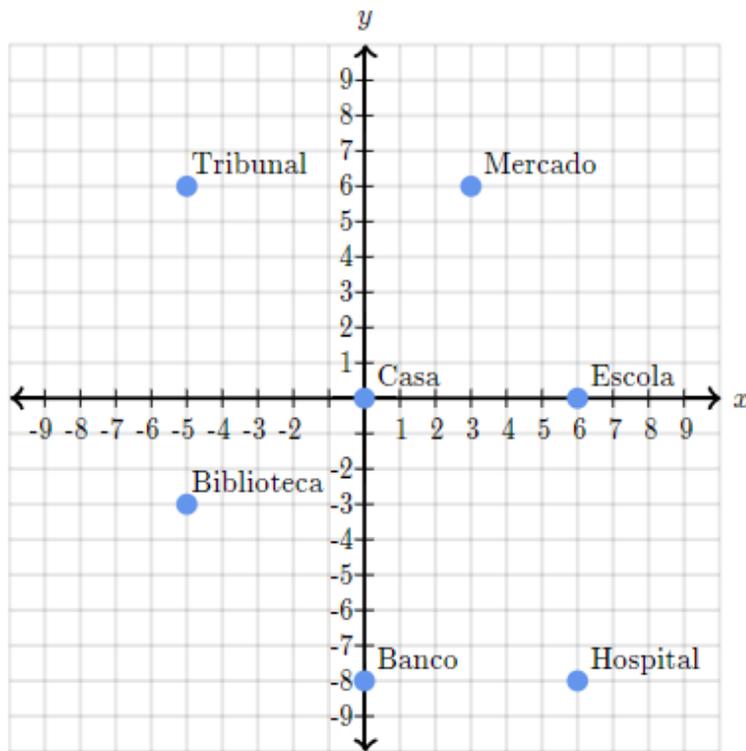
- Quadrante I
- Quadrante II
- Quadrante III
- Quadrante IV

Meire representou graficamente as localizações de vários lugares de sua cidade no plano cartesiano mostrado a seguir. Há, também, uma sorveteria no meio do caminho entre a escola e o hospital.

Em quais coordenadas Meire deve colocar a sorveteria?

Pergunta 7

(,)



APÊNDICE C

Atividade 1 – Definindo Funções

Atividade 1 Definindo Função

1) Após observar a conversa do professor com seus alunos, complete a Tabela 1, com a resposta dos alunos depois do professor dizer outros números.



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p.95

a)

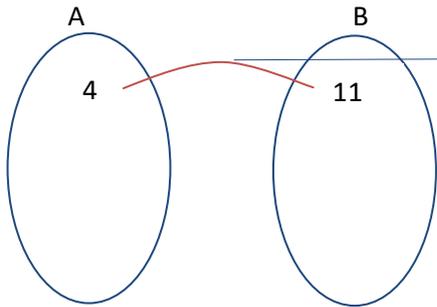
Tabela 1

Número dado pelo professor (x)	Resposta dos Alunos (y)
4	11
2	
-1	
0	
1,3	

Será que a resposta dos alunos pode ser qualquer uma ou depende do número dado pelo professor? Por quê?

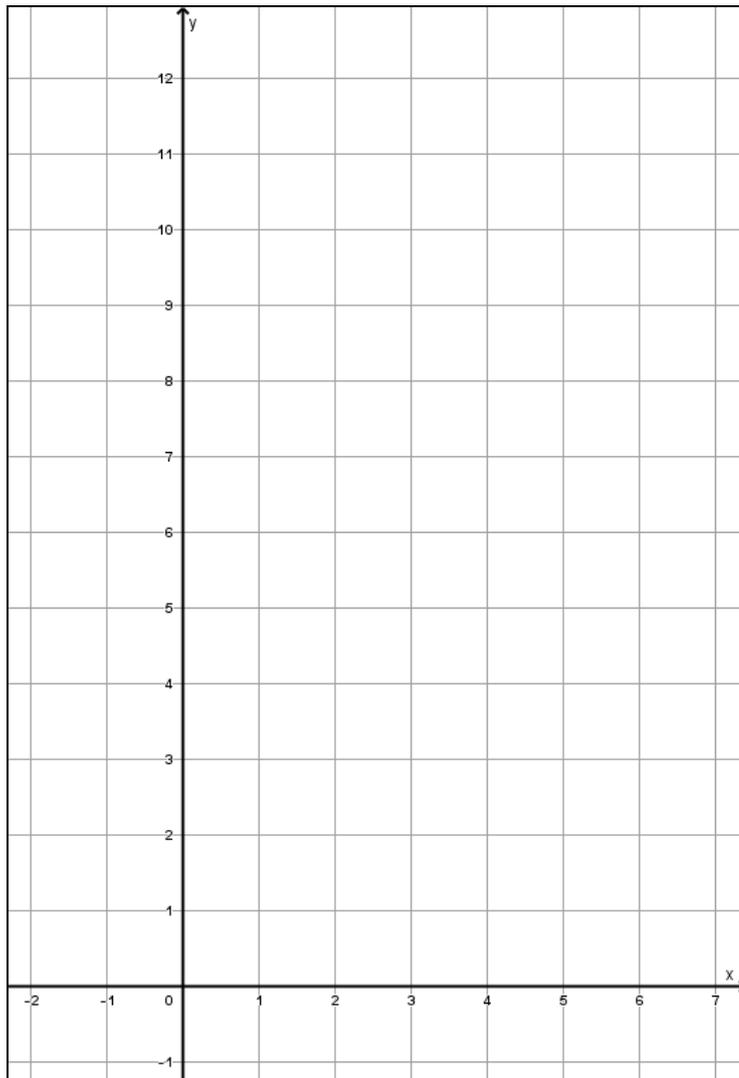
b) Também podemos escrever os pares ordenados (x; y) formados pela relação entre x e y. Escreva esses pares ordenados abaixo.

c) Outro modo de representar a tabela 1 é por meio de um diagrama. Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos. Complete o diagrama abaixo de acordo com os dados da tabela 1:



Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos

d) Agora, represente a relação entre x (número dado pelo professor) e y (número respondido pelos alunos), no sistema cartesiano abaixo.



Quantas respostas corretas (y) os alunos respondem para cada valor dado pelo professor (x)? Por quê?

e) Chamando o número expressado pelo professor de x , e o número registrado pelos alunos de y , qual a “fórmula” que expressa a relação entre x e y ? _____

2) Faça uma tabela relacionando o nome e a idade de cada aluno do grupo. Represente essa relação (aluno; idade) também por um diagrama.

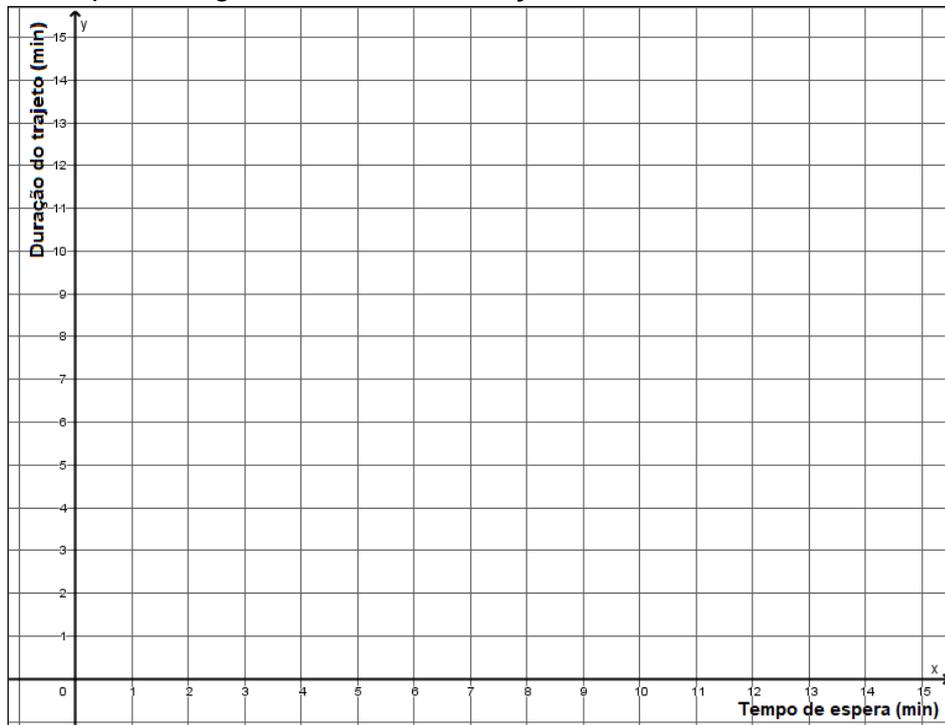
3) A tabela abaixo compara o tempo em que Carolina espera o ônibus para ir a escola (em minutos) e a duração do trajeto (em minutos), em uma semana (segunda-feira a sexta-feira, respectivamente).

Tabela 2

Tempo de Espera (min)	Duração do Trajeto (min)
15	10
5	11
10	15
12	13
15	12

Represente essa relação por meio de um diagrama.

Represente graficamente essa relação.



4) Agora, o professor da questão 1 propõe outra brincadeira, veja, e responda as questões:



- Se o professor disser 3, qual será a resposta dos alunos?
- Se o professor disser 5, qual será a resposta dos alunos?
- Se o professor disser 1, qual será a resposta dos alunos?

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 97

d) Faça um diagrama para representar a relação entre os números dados pelo professor e a resposta dos alunos, onde o conjunto A são os números ditos pelo professor {1, 3, 5} e o conjunto B os números anotados no quadro {2, 4, 6, 8}.

Agora converse com o grupo e responda as questões abaixo, com base nas respostas dos exercícios anteriores.

5) Na questão 2, a idade dos alunos depende do nome do aluno? Por quê?

6) Na questão 3, a duração do trajeto (min) depende do tempo de espera (min)? Por quê?

7) Na questão 4, a resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor? Por quê?

8) Nessa atividade você representou uma relação por diagrama, tabela, gráfico, par ordenado e verificou se um determinado valor y depende de outro valor x . Com base em tudo que foi feito, diga, com suas palavras, o que você entende ou o que significa função para você.

9) Você acha que as quatro primeiras questões propostas nessa atividade representam função? Por quê? Responda em cada item a seguir.

a) Questão 1: _____

b) Questão 2: _____

c) Questão 3: _____

d) Questão 4: _____

APÊNDICE D

Atividade 2 – Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos

Atividade 2

Função: aprofundando e conhecendo novos conceitos

1) Na primeira questão da atividade 1 da aula anterior, professor dizia um número e os alunos faziam as operações pedidas e davam o resultado. Pensando nisso, uma aluna propôs uma nova brincadeira:



Observem no desenho abaixo, a função imaginada como uma máquina pensada pela aluna.

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 99

a) Qual o valor de saída das bolinhas que tem como entrada as bolinhas 7; 0 e 1,5, respectivamente?

b) Qual a lei de formação da máquina? _____

Obs.: Chamamos os valores de entrada na máquina de _____ da função e os valores de saída de _____ da função.

2) Observe a tabela abaixo:

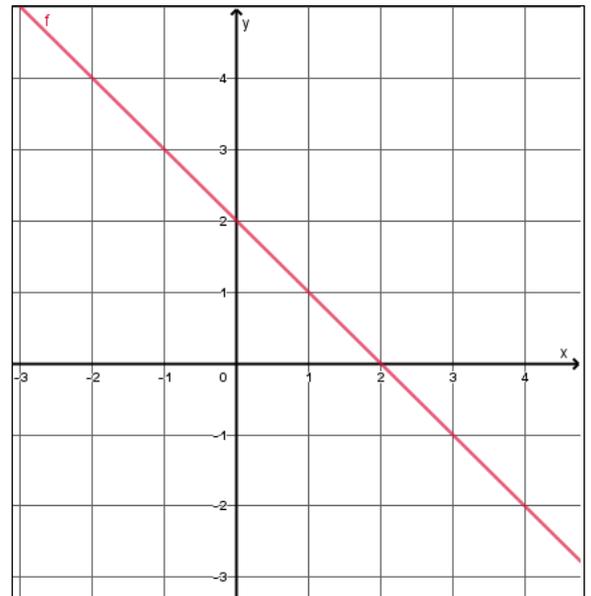
A	Número de Calças vendidas	140	170	230	180	170	190
B	Tamanho	40	42	44	46	48	50

a) A relação de A em B representa uma função? Por quê? _____

b) A relação de B em A representa uma função? Por quê? _____

3) O gráfico ao lado representa uma relação f . Observe esse gráfico e responda:

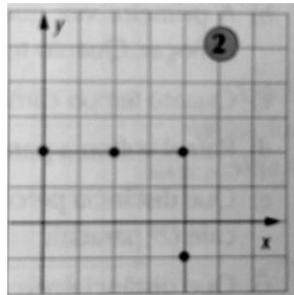
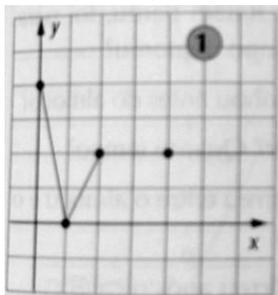
a) Escreva quatro pontos (pares ordenados) $(x; y)$ que pertencem ao gráfico dessa relação f .



b) O gráfico da relação f representa uma função? Por quê?

c) Se a resposta da letra b for positiva, qual a lei da função que corresponde a esse gráfico?

4) Veja os gráficos:



Obs.: Cada quadradinho aqui vale uma unidade

Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 113

a) Para cada um dos gráficos construa uma tabela com os pontos indicados.

b) O gráfico 1 representa uma função? Por quê? _____

c) O gráfico 2 representa uma função? Por quê? _____

5) A tabela abaixo representa uma função f .

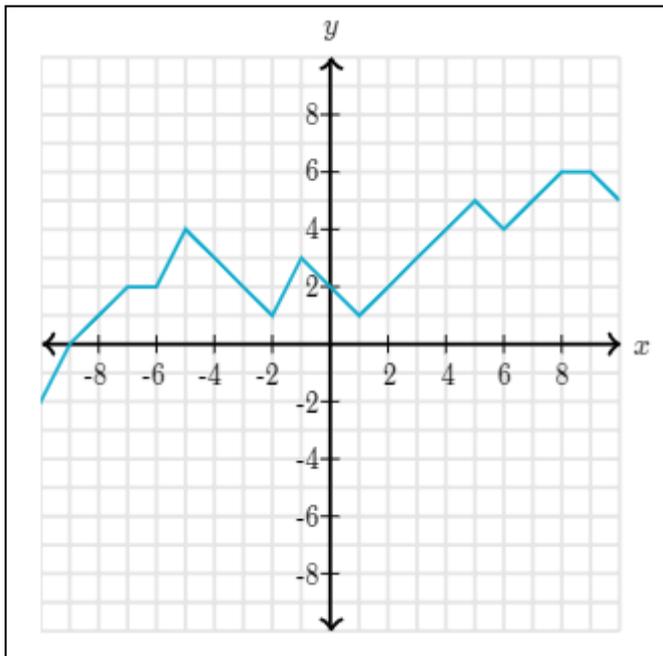
x	f(x)
0	-1
1	1
-2	-5
	11

a) Qual a lei de formação dessa função?

b) Qual a imagem do número 14?

c) Qual o valor do número que tem imagem 11 (complete a tabela).

6) (Adaptado da plataforma Khan Academy) Observe o gráfico abaixo e responda:



a) Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x é -1 .

b) Qual a imagem do elemento 2?

c) Calcule o valor de entrada, x , quando o valor de saída, y é 2.

d) Qual elemento que tem imagem 4?

7) Complete o valor que falta no par ordenado $(x; y)$, para que as afirmações sejam, verdadeiras.

a) O par ordenado $(1; \underline{\quad})$ satisfaz a equação $y = 3x - 7$.

b) O par ordenado $(\underline{\quad}; -2)$ satisfaz a equação $y = -2x + 4$.

c) O par ordenado $(\underline{\quad}; 8)$ satisfaz a equação $-4x - y = 24$.

d) O par ordenado $(-3; \underline{\quad})$ satisfaz a equação $y - 4 = -2(x + 3)$.

APÊNDICE E

Atividade 3 – Função Afim



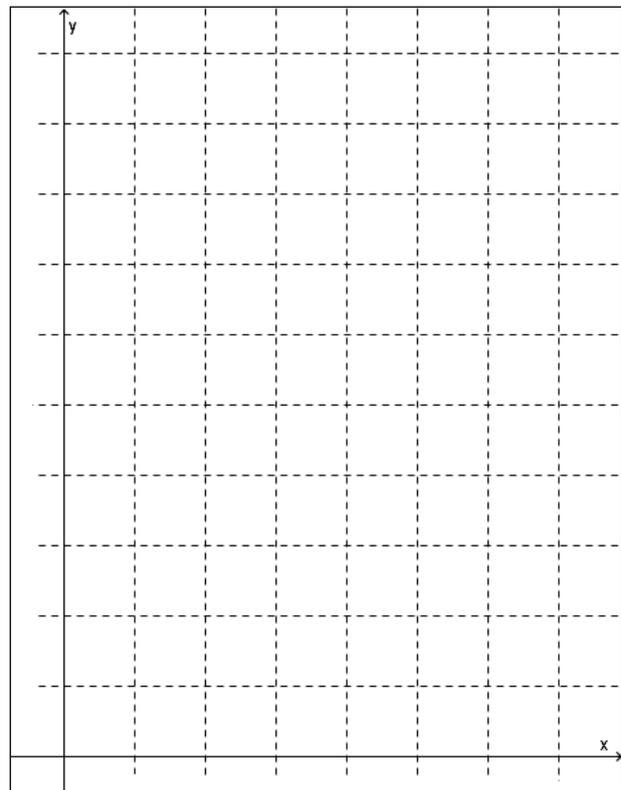
Atividade 3 Função Afim

1) Acompanhe a situação a seguir:

Joaquina vende salgadinhos para festas. Ela cobra R\$ 10,00 por quilograma de salgadinhos mais R\$ 20,00 de taxa de entrega. O pedido mínimo é de 1 quilograma. O preço (y) da encomenda é função da massa (x) dos salgadinhos, em quilograma, e pode ser expressa por: _____

Complete a tabela com o valor a ser pago por algumas quantidades de salgadinhos e faça a representação gráfica no plano cartesiano ao lado.

Massa de salgadinhos (em kg)	Preço a pagar (em R\$)	Par ordenado
x	$y =$	$(x; y)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

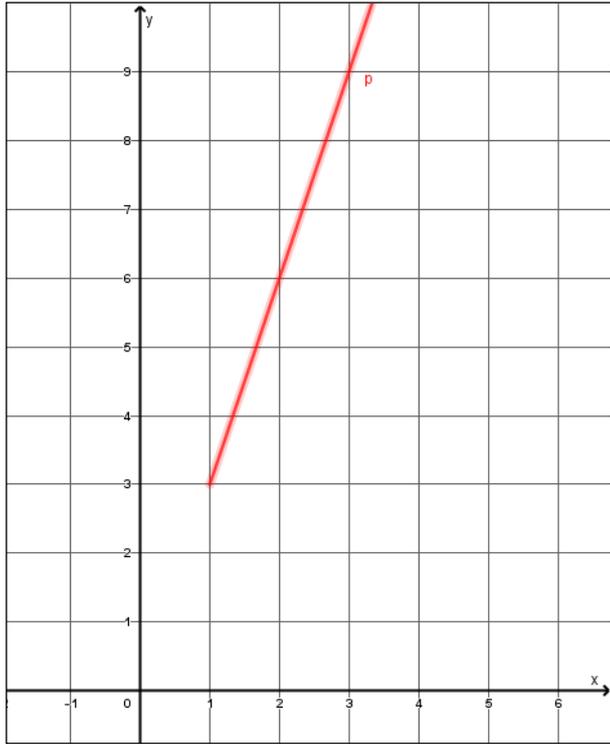


A massa de salgadinhos (em Kg) vendida pode ser qualquer valor real?

- Os pontos estão alinhados?
- Você pode “unir” os pontos do gráfico?

O gráfico dessa função pode ser representado por uma _____.

2) Considere um triângulo equilátero de lado de medida maior ou igual a 1 cm. O perímetro desse triângulo é função da medida do seu lado. Observe o gráfico p abaixo, que representa essa função, e responda:



Fonte: autoria própria

- O que significa os números representados no eixo x?
- O que significa os números representados no eixo y?
- Qual é a lei de formação que associa a medida do lado do triângulo equilátero com seu perímetro?
- Qual é o perímetro do triângulo equilátero cujo lado mede 2 cm?
- Qual é a medida do lado do triângulo equilátero cujo perímetro mede 15 cm?

3) O preço a ser pago numa corrida de taxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R\$ 3,50 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,60, responda:

- Qual é o valor v a pagar numa corrida de n quilômetros?
- Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?
- Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?
- Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 13,70 pela corrida?

4) Ari dizia um número e Rui respondia outro usando uma regra que só ele conhecia.

ARI	12	14	19	25	36
RUI	25	29	39	51	

a) Que número deve ser respondido por Rui para o número 36 dito por Ari?

b) Chame de x os números ditos por Ari e de y os números respondidos por Rui. Escreva uma expressão matemática de y em função de x .

(Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p.107)

APÊNDICE F

Recomendações realizadas na
Plataforma Khan Academy, como
complemento às atividades 2 e 3

Recomendações realizadas na Plataforma Khan Academy, como complemento às atividades 2 e 3, nos dias 07 de novembro de 2018 a 08 de novembro de 2018.

1) Recomendação "Calcule funções a partir de seus gráficos"

Essa recomendação é composta por 4 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 12 perguntas. As perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma. Ressalta-se que os alunos fizeram um grupo diferente de perguntas.

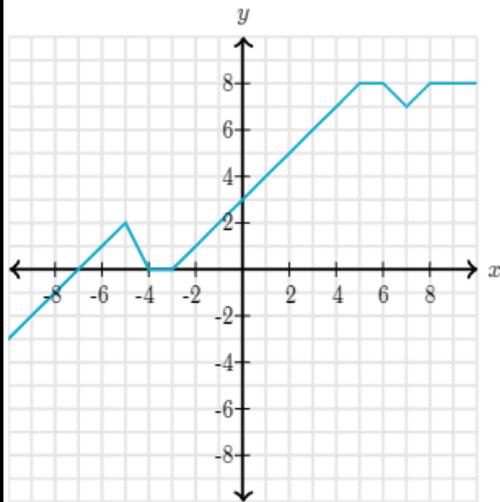
<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é 4.</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p> <p style="text-align: right;">Pergunta 1</p>	<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é 2.</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p> <p style="text-align: right;">Pergunta 2</p>
---	---

<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é -9.</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p> <p style="text-align: right;">Pergunta 3</p>	<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é 6.</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p> <p style="text-align: right;">Pergunta 4</p>
---	---

Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é 6.

$y =$

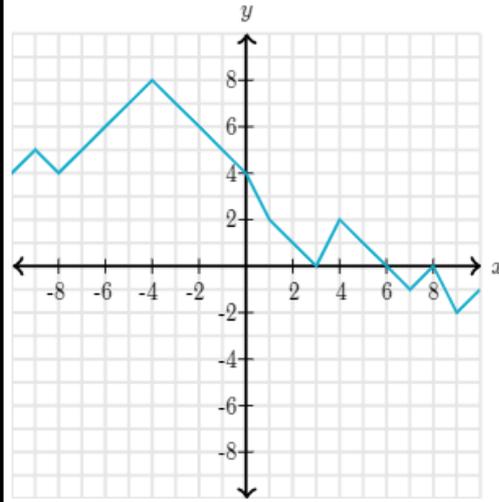
Pergunta 5



Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é -5 .

$y =$

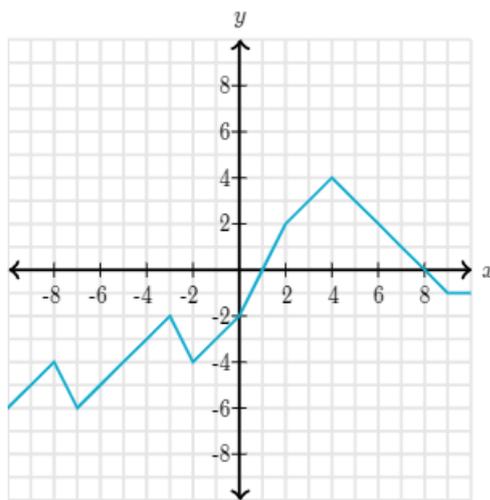
Pergunta 6



Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é -7 .

$y =$

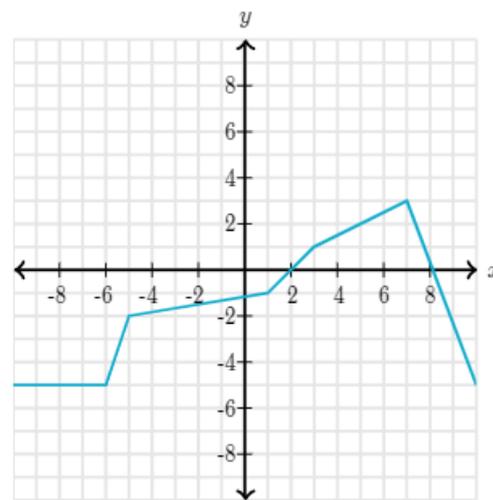
Pergunta 7



Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é -5 .

$y =$

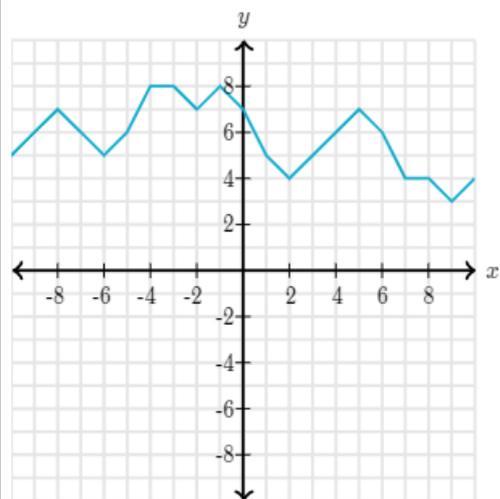
Pergunta 8



Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é 7.

$y =$

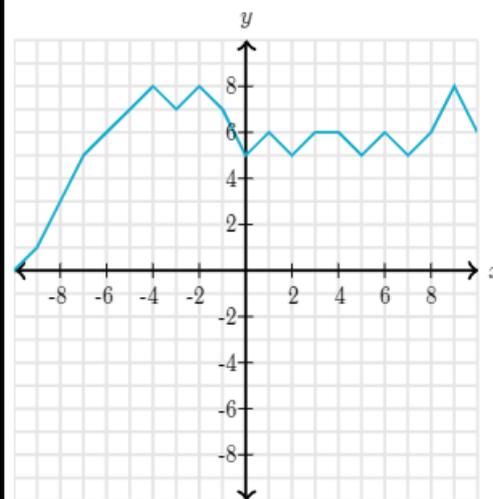
Pergunta 9

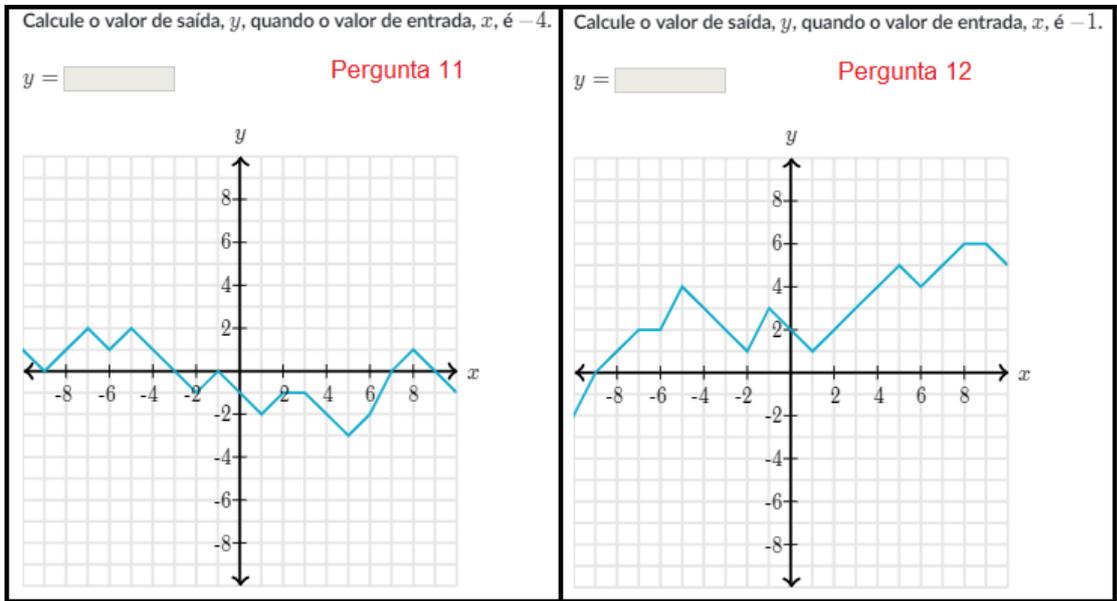


Calcule o valor de saída, y , quando o valor de entrada, x , é -1 .

$y =$

Pergunta 10





2) Recomendação "Cálculo de funções"

Essa recomendação é composta por 4 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 12 perguntas. As perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma. Ressalta-se que os alunos fizeram um grupo diferente de perguntas.

<p>Calcule o valor de saída, d, quando o valor de entrada, t, é 11.</p> <p>$d = -20 + 11t$ Pergunta 1</p> <p>$d =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, g, quando o valor de entrada, r, é 3.</p> <p>$g = -5r + 13$ Pergunta 2</p> <p>$g =$ <input type="text"/></p>
<p>Calcule o valor de saída, k, quando o valor de entrada, t, é 3.</p> <p>$k = 13t - 2$ Pergunta 3</p> <p>$k =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, h, quando o valor de entrada, t, é 35.</p> <p>$h = 50 - \frac{t}{5}$ Pergunta 4</p> <p>$h =$ <input type="text"/></p>
<p>Calcule o valor de saída, k, quando o valor de entrada, x, é -5.</p> <p>$k = 6x + 100$ Pergunta 5</p> <p>$k =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, g, quando o valor de entrada, r, é 4.</p> <p>$g = 25 - 3r$ Pergunta 6</p> <p>$g =$ <input type="text"/></p>
<p>Calcule o valor de saída, k, quando o valor de entrada, t, é -7.</p> <p>$k = 10t - 19$ Pergunta 7</p> <p>$k =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é 30.</p> <p>$y = 14 - 0,5x$ Pergunta 8</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p>
<p>Calcule o valor de saída, b, quando o valor de entrada, a, é 6.</p> <p>$b = -1 - 7a$ Pergunta 9</p> <p>$b =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, f, quando o valor de entrada, t, é 7.</p> <p>$f = 2t - 3$ Pergunta 10</p> <p>$f =$ <input type="text"/></p>
<p>Calcule o valor de saída, h, quando o valor de entrada, x, é -18.</p> <p>$h = 17 + \frac{x}{6}$ Pergunta 11</p> <p>$h =$ <input type="text"/></p>	<p>Calcule o valor de saída, y, quando o valor de entrada, x, é 5.</p> <p>$y = 5x - 3$ Pergunta 12</p> <p>$y =$ <input type="text"/></p>

3) Recomendação "Complete soluções de equações com 2 variáveis"

Essa recomendação é composta por 4 perguntas, escolhidas aleatoriamente pela plataforma, dentro de um banco de questões composto por 15 perguntas. As perguntas realizadas pelos alunos estão enumeradas na ordem de visualização dos mesmos, segundo a plataforma. Ressalta-se que os alunos fizeram um grupo diferente de perguntas.

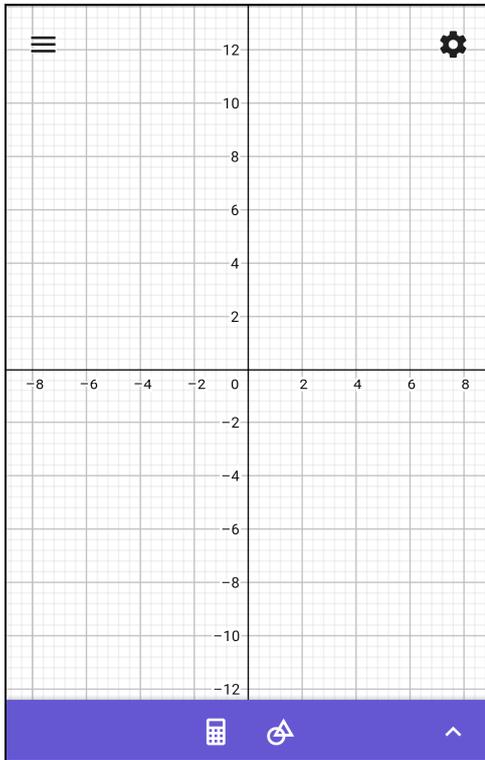
$5x - 2y = 30$ Pergunta 1 Complete com o valor que falta na solução da equação. (8, <input type="text"/>)	$-4x - y = 24$ Pergunta 2 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , 8)	$y - 3 = 2(x + 1)$ Pergunta 3 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-1, <input type="text"/>)
$4x + y = 10$ Pergunta 4 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -6)	$y = 2x + 5$ Pergunta 5 Complete com o valor que falta na solução da equação. (2, <input type="text"/>)	$y = 4x - 9$ Pergunta 6 Complete com o valor que falta na solução da equação. (3, <input type="text"/>)
$y + 2 = -3(x - 4)$ Pergunta 7 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -2)	$y - 4 = -2(x + 3)$ Pergunta 8 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-3, <input type="text"/>)	$y = -2x + 4$ Pergunta 9 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -2)
$2x + 3y = 5x - y$ Pergunta 10 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , 0)	$2x + 3y = 12$ Pergunta 11 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , 8)	$y = 3x - 7$ Pergunta 12 Complete com o valor que falta na solução da equação. (1, <input type="text"/>)
$6x + 7y = 4x + 4y$ Pergunta 13 Complete com o valor que falta na solução da equação. (<input type="text"/> , -4)	$-3x + 7y = 5x + 2y$ Pergunta 14 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-5, <input type="text"/>)	$x - 5y = -15$ Pergunta 15 Complete com o valor que falta na solução da equação. (-5, <input type="text"/>)

APÊNDICE G

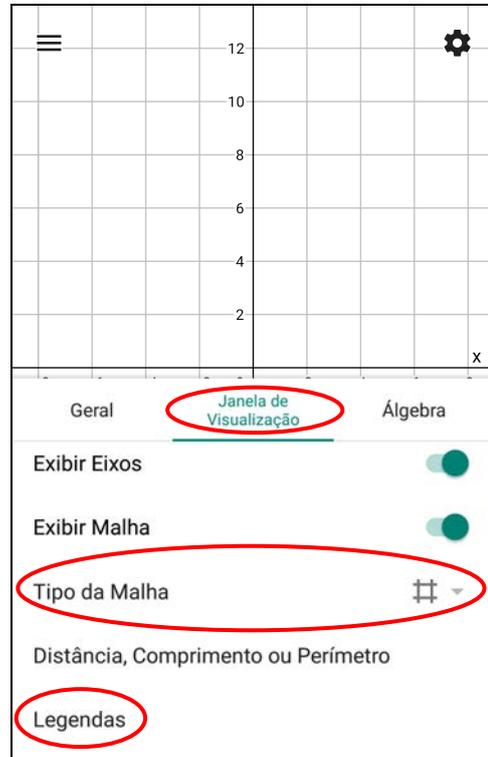
Atividade 4 – Utilizando o Geogebra
para explorar o gráfico da Função Afim

Utilizando o Geogebra para explorar o gráfico da Função Afim

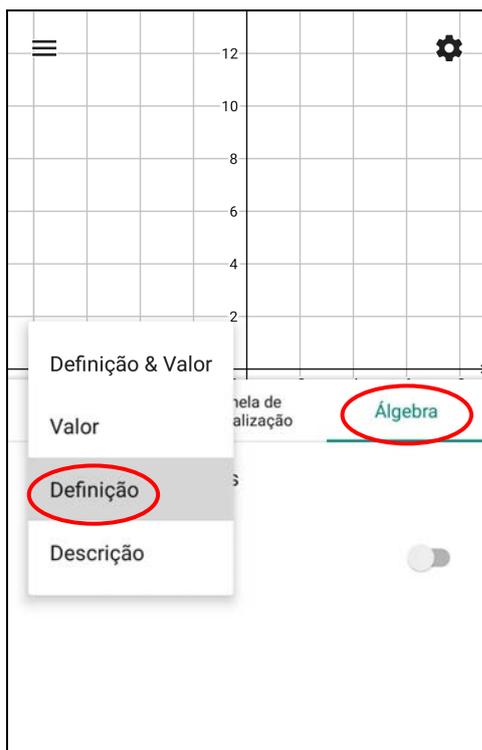
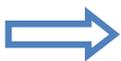
➤ Preparando o geogebra



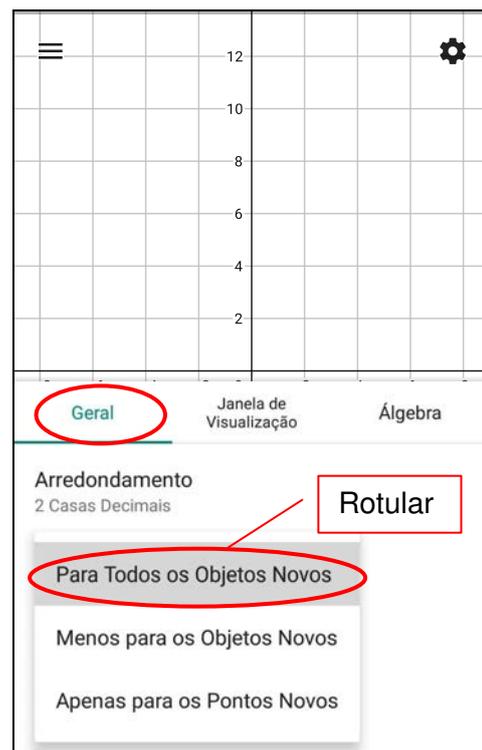
Fonte: autoria própria



Fonte: autoria própria

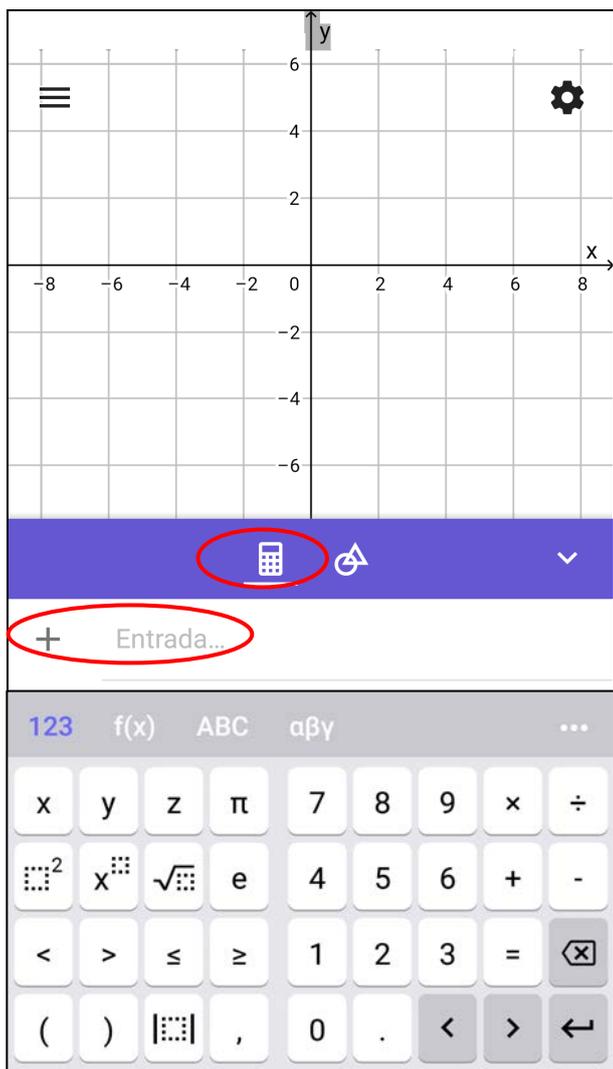


Fonte: autoria própria



Fonte: autoria própria

➤ Voltando a tela inicial



Fonte: autoria própria

Questão 1: No campo “entrada” digite $y = ax + b$ e clique em enter (↵)

i) O que acontece quando você modifica o coeficiente **a**?

ii) O que acontece quando você modifica o coeficiente **b**?

iii) Na função $y = ax + b$, o coeficiente **a** é chamado de **coeficiente** _____ da reta e o coeficiente **b** é chamado de **coeficiente** _____.

iv) Explorando o coeficiente **a**:

- O que acontece com o gráfico quando o valor de **a** é **positivo**?

- O que acontece com o gráfico quando o valor de **a** é **negativo**?

- O que acontece com o gráfico quando o valor de **a** é **zero**?

Obs.: Quando **a** é zero, temos uma função _____.

v) Explorando o coeficiente **b**:

- O que acontece com o gráfico quando fixamos o valor de **a** e mudamos o valor de **b**?
-

vi) Interseções com os eixos

- Interseção com o eixo $x \rightarrow$ significa que o valor de _____ é zero, logo podemos escrever o par ordenado _____.
- Interseção com o eixo $y \rightarrow$ significa que o valor de _____ é zero, logo podemos escrever o par ordenado _____.

Questão 2: Utilizando o Geogebra, faça os gráficos abaixo, e responda as perguntas observando a lei da função e o gráfico correspondente:

i) Faça o gráfico da função **$y = x - 2$**

- Qual o valor do coeficiente angular? _____
- Qual é o valor do coeficiente linear? _____
- Qual é o ponto de interseção com o eixo x ? _____
- Qual é o ponto de interseção com o eixo y ? _____

ii) Faça o gráfico da função **$y = -x + 3$**

- Qual o valor do coeficiente angular? _____
- Qual é o valor do coeficiente linear? _____
- Qual é o ponto de interseção com o eixo x ? _____
- Qual é o ponto de interseção com o eixo y ? _____

iii) O que podemos dizer sobre o coeficiente **b** ao comparar o gráfico com a lei da função?

APÊNDICE H

Atividade 5 - Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica



Atividade 5

Função Afim: Conhecendo mais a Representação Algébrica e Gráfica

1) Encontre o coeficiente angular da reta e a equação da reta que passa pelos pontos abaixo:

a) (-3, 5) e (1, 2)

- Essa função é crescente ou decrescente?
- Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo “entrada” a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?

b) (1, 2) e (-3, 0)

- Essa função é crescente ou decrescente?
- Faça no Geogebra a reta que passa por esses dois pontos. Depois inclua no campo “entrada” a equação da reta que você encontrou. O que aconteceu?

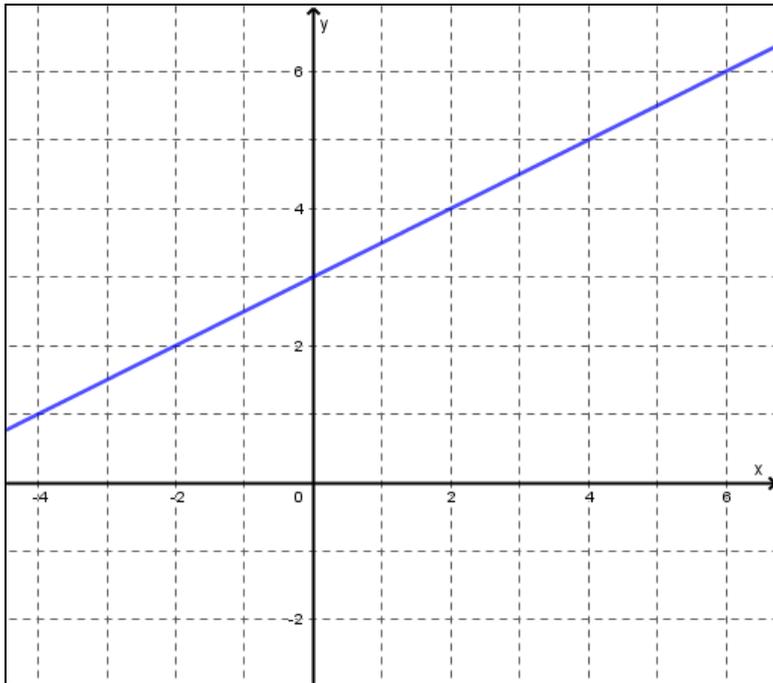
2) Encontre o coeficiente angular da reta das equações abaixo. Dica: reescreva a equação para que fique da forma “ $y = ax + b$ ”.

a) $2x - 5y = 9$

b) $y + 5 = 2(x + 1)$

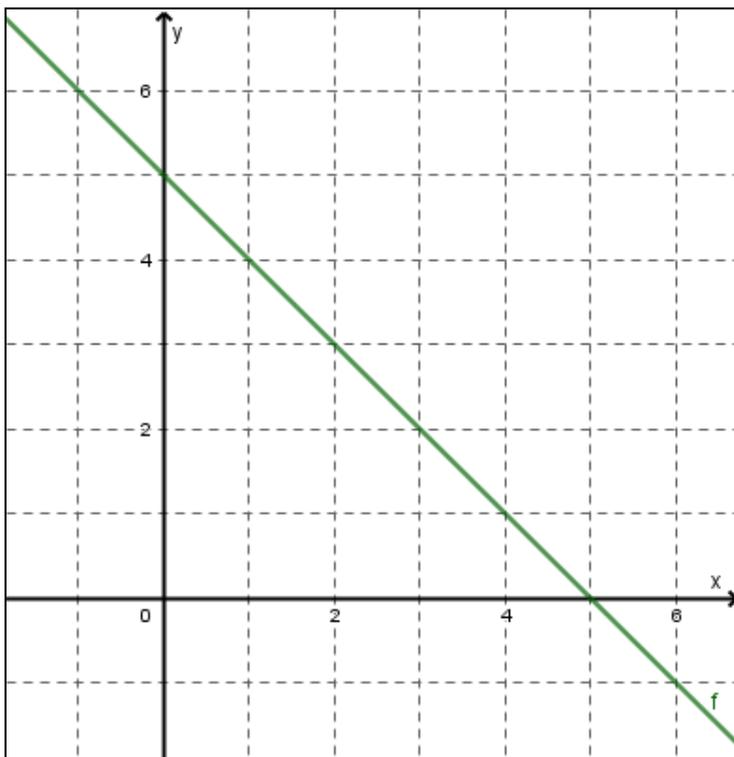
3) Encontre o coeficiente angular da reta e a equação da reta (lei da função) dos gráficos abaixo:

a)



Fonte: autoria própria

b)

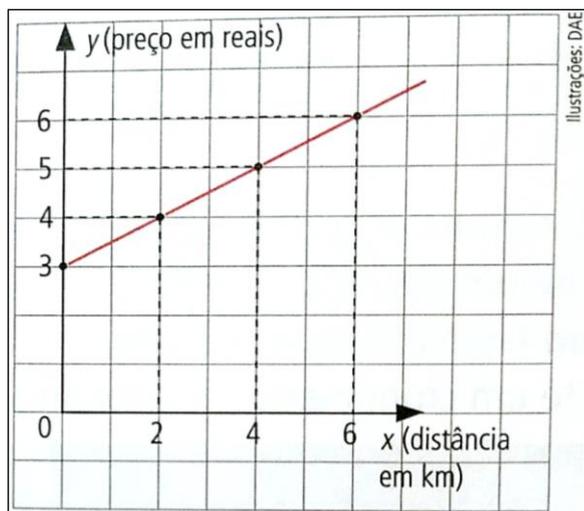


Fonte: autoria própria

4) Observe o gráfico abaixo. Ele representa o preço de uma corrida de taxi. Lembre-se de que bandeirada é o preço fixo indicado pelo taxímetro ao ser acionado no início da corrida.

Com base nessas informações, responda:

- Qual o valor da bandeirada cobrada?
- Qual é o preço cobrado por quilômetro rodado?
- Qual é a lei de formação desse gráfico?
- Num percurso de 8 km, serão pagos R\$ 8,00? Justifique.



Fonte: Andrini, Praticando Matemática, 2015, p. 122